H.T.TO‘RAYEV,
I.AZIZOV

MATEMATIK MANTIQ VA DISKRET MATEMATIKA

2-Jild

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

H. T. To'rayev, I. Azizov

MATEMATIK MANTIQ VA DISKRET MATEMATIKA

II jild

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi ta'lim muassalarining talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

"Tafakkur-Bo'stoni"
Toshkent – 2011

22.12
T97
UDK: 512+51(075)
ББК 22.12z73+22.172z7

*Professor **H.T.TO'RAYEVning** umumiy tahriri ostida*

Taqrizchilar:

TATU kafedrasi mudiri, O'zR FA akademigi
M.M. Komilov

*O'zMU professori, O'zR FA akademigi **Sh.Farmonov***

*O'zR FA ning matematika va informatsion texnologiyalar Institutining laboratoriya mudiri, professor **R.Sadullayev***

*SamDU kafedrasi mudiri professor **A.S.Soleyev***

O'zMU professori, fizika- matematika fanlari doktori
R. Dadajonov

To'rayev H.T.

Matematik mantiq va diskret matematika.: Oliy ta'lim muassasalarining talabalari uchun darslik: II jildlik. H.T. To'rayev, I. Azizov; H.T. To'rayevning umumiy tahriri ostida; O'zR oily va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi. – Toshkent: Tafakkur-Bo'stoni, 2011. – 288 bet

I. Azizov, I.

ББК 22.12z73+22.172z7

Darslikning II jildida predikatlar mantiqi, matematik nazariyalar, algoritmlar, matematik mantiqning texnikaga tatbiqi, matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosi, graflar nazariyasining elementlari, tarmoqlar va tarmoqdagi oqimlar bayon qilingan.

Darslikning I jildida to'plamlar haqida umumiy tushunchalar, kombinatorika elementlari, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi kabi masalalar bayon qilinlan edi.

Mazkur darslik oliy o'quv yurtlarining **5460100 – matematika, 5480100 – amaliy matematika va informatika, 5140100 – matematika va informatika, 5521900 – informatika va informatsion texnologiyalar, 5140900 – kasb ta'limi (informatika va axborot texnologiyalari), 5811200 – servis (axborot servisi), 5522200–telekommunikatsiya bakalavrlik** yo'nalishlari hamda **5A460104, 5A480101, 5A480107** va **5A480108** magistratura mutaxassisliklari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan.

Kitobdan magistrantlar, aspirantlar hamda radiotexnika, elektrotexnika va amaliy matematika sohalarida ishlayotgan muhandislar, matematiklar va mutaxassislar ham foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-362-34-5

SO‘Z BOSHI

Darslikning ikkinchi jildi olti bobdan iborat bo’lib, unda quyidagi masalalar bayon etiladi.

Beshinchi bobda predikatlar mantiqi bayon etilgan. Bu yerda predikat tushunchasi, predikatlar ustida mantiqiy amallar, umumiylik va mavjudlik kvantorlari, predikatlar mantiqining formulasi va uning qiymati, predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari, predikatlar mantiqi formulasining normal shakli, bajariluvchi va umumqiymatli formulalar, yechilish muammosi, xususiy hollarda formulaning umumqiymatliligini topish algoritmlari, predikatlar mantiqining matematikaga tatbiqi, aksiomatik predikatlar hisobi haqida ma’lumotlar keltiriladi.

Kitobning **oltinchi bob matematik nazariyalarga** bag‘ishlangan bo‘lib, aksiomatik nazariya tushunchasi, birinchi tartibli til, term va formulalar, mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar, keltirib chiqarish qoidasi, algebra, geometriya va analizda mavjud bo‘lgan matematik nazariyalar, nazariyada isbotlash tushunchasi, tavtalogiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi, deduksiya teoremasi, nazariya tilining interpretatsiyasi (talqini), berilgan interpretatsiyada formulalarning chinlik qiymatlari, nazariyaning modeli, interpretatsiyaning izomorfizmligi, nazariyaning qat’iyligi, nazariyaning zidsizlik, to‘liqlilik va yechilish muammolari, predikatlar hisobining zidsizligi, natural sonlar nazariyasi, Gyodelning to‘liqsizlik haqidagi teoremasi singari masalalar yoritilgan.

Kitobning **yettinchi bobida algoritmlar nazariyasining elementlari** atroflicha bayon etilgan. Bu yerda algoritm tushunchasi va uning xarakterli xususiyatlari, yechiluvchi va sanaluvchi to‘plamlar, Post teoremasi, algoritm tushunchasini aniqlash, hisoblanuvchi funksiyalar, qismiy rekursiv va umumrekursiv funksiyalar, A.Chyorch va S.Klini tezislari, Tyuring mashinalari, Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish, natural sonlarni qo‘shish algoritmi, Evklid algoritmi, algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi, Markovning normal algoritmlari, Markov bo‘yicha qisman hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar, qismiy rekursiv (umumrekursiv) funksiya bilan Markov bo‘yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya o‘rtasidagi munosabat, normallashtirish prinsipi, algoritmik yechilmovchi muammolar, matematik mantiqda keltirib chiqaruvchanlikni tanish muammosi, o‘z-o‘ziga tatbiq etuvchanlikni tanish muammosi kabi masalalar ko‘rilgan.

Kitobning **sakkizinchi bobida matematik mantiqning texnikaga tatbiqlari** keltirilgan. Bu yerda rele-kontaktli sxemalar, kontaktli sxemalar va ularning sintezi, funksional elementlar va ulardan sxemalar yasash, ko'p taktli sxemalar, funksional elementlar sistemasining to'liqligi, sxemalarni minimallashtirish muammosi, teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomatlar, chekli avtomat haqida umumiy tushunchalar, Mili va Mur avtomatlari kabi masalalar ko'rib chiqilgan. Mantiq algebrasi funksiyalarini sxemalar (avtomatlar) orqali realizatsiya etish masalasiga alohida ahamiyat berilgan.

To'qqizinchi bobda matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosi bayon etilgan. Bu yerda diz'yunktiv normal shakl (DNSh)ni soddalashtirish, eng qisqa DNSh, qisqartirilgan DNSh, tupikli DNSh, Kvayn DNSh va minimal DNShlarni yasash algoritmlari keltirilgan. Analitik va geometrik tarzdagi algoritmlarning ekvivalentligi ko'rsatilgan.

O'ninchi bobda graflar nazariyasi elementlari qaraladi. Dastlab graflar haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlar, grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi yoritiladi. Grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni ushbu bobda bayon qilinadi. Shu bobda tarmoq tushunchasi, maksimal oqim haqidagi masala va uni hal qilish uchun Ford algoritmi ham keltirilgan.

Darslikdagi qayta ishlangan va to'ldirilgan qismlar SamDU "Matematik modellashtirish" kafedrasi dotsenti I.Azizov bilan hamkorlikda bajarildi. Darslikning I bobidagi 1–3- va 6- paragraflar, III bobidagi 1–9-paragraflar va X bobi H.T.To'rayev va I.Azizov, I bobidagi 5, 6 va 7-paragraflar, II bobi I. Azizov, IV–IX boblar H.T. To'rayev tomonidan yozilgan.

Nazariy masalalarni bayon etishda misollardan keng foydalanilgan, deyarli har bir paragrafning oxirida mustaqil ishlash uchun mashqlar, savol va topshiriqlar berilgan. O'quvchilarga tavsiya etilayotgan ushbu darslik "Matematik mantiq va diskret matematika" hamda «Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi» fanlari bo'yicha Respublikamiz davlat ta'lim standartlarida ko'rsatilgan o'quv dasturlariga to'liq javob beradi.

Mualliflar

V BOB
PREDIKATLAR MANTIQI

Ushbu bobda predikat tushunchasi, predikatlar ustida mantiqiy amallar, umumiylik va mavjudlik kvantorlari, predikatlar mantiqining formulasi va uning qiymati, predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari, predikatlar mantiqi formulasining normal shakli, bajariluvchi va umumqiymatli formulalar, yechilish muammosi, xususiy hollarda formulaning umumqiymatliligini topish algoritmlari, predikatlar mantiqining matematikaga tadbiqi, aksiomatik predikatlar hisobi haqida ma'lumotlar keltiriladi.

5.1. Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida mantiqiy amallar

Predikat. Predikatlar mantiqi. Bir joyli predikat. Ko'p joyli predikat. Predikatning chinlik to'plami. Aynan chin predikat. Aynan yolg'on predikat. Predikatlar ustida mantiqiy amallar.

5.1.1. Predikat tushunchasi. Mantiq algebrasida mulohazalar faqatgina chin yoki yolg'on qiymat qabul qilishi nuqtai nazaridan qaralib, mulohazalarning tuzilishiga ham, hattoki, mazmuniga ham e'tibor berilmaydi. Ammo fanda va amaliyotda mulohazalarning tuzilishi va mazmunidan kelib chiqadigan xulosalardan (natijalardan) foydalaniladi. Masalan, «Har qanday romb parallelogrammdir; $ABCD$ – romb; demak, $ABCD$ – parallelogramm».

Asos (shart) va xulosa mulohazalar mantiqining elementar mulohazalari bo'ladi va ularni bu mantiq nuqtai nazaridan bo'linmas, bir butun deb va ularning ichki tuzilishini hisobga olmasdan qaraladi. Shunday qilib, mantiq algebrasi mantiqning muhim qismi bo'lishiga qaramasdan, ko'pgina fikrlarni tahlil qilishga qodir (yetarli) emas. Shuning uchun ham mulohazalar mantiqini kengaytirish masalasi vujudga keldi, ya'ni elementar mulohazalarning ichki tuzilishini ham tadqiq eta oladigan mantiqiy sistemani yaratish muammosi paydo bo'ldi. Bunday sistema mulohazalar mantiqini o'zining bir qismi sifatida butunlay o'z ichiga oladigan predikatlar mantiqidir.

Predikatlar mantiqi an'anaviy formal mantiq singari elementar mulohazani **subyekt** va **predikat** qismlarga bo'ladi.

Subyekt – bu mulohazada biror narsa haqida nimanidir tasdiqlaydi; **predikat** – bu subyektni tasdiqlash.

Masalan, «5 – tub son» mulohazada «5» – subyekt, «tub son» – predikat. Bu mulohazada «5» «tub son bo'lish» xususiyatiga ega ekanligi tasdiqlanadi. Agar keltirilgan mulohazada ma'lum 5 sonini natural sonlar to'plamidagi x o'zgaruvchi bilan almashtirsak, u holda «x – tub son» ko'rinishidagi mulohaza shakliga ega bo'lamiz. x o'zgaruvchining ba'zi qiymatlari (masalan, $x=13$, $x=3$, $x=19$) uchun bu shakl chin mulohazalar va x o'zgaruvchining boshqa qiymatlari (masalan, $x=10$, $x=20$) uchun bu shakl yolg'on mulohazalar beradi.

Ravshanki, bu shakl bir (x) argumentli funksiyani aniqlaydi va bu funksiyaning aniqlanish sohasi natural sonlar to'plami (N) hamda qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to'plam bo'ladi.

1- ta'rif. *M to'plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to'plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiya **bir joyli** (**bir o'rinli**) **predikat** deb ataladi.*

M to'plamni $P(x)$ predikatning **aniqlanish sohasi** deb aytamiz.

$P(x)$ predikat chin qiymat qabul qiluvchi hamma $x \in M$ elementlar to'plamiga $P(x)$ predikatning **chinlik to'plami** deb ataladi, ya'ni $P(x)$ predikatning chinlik to'plami $I_P = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ to'plamdir.

1- misol. «x – tub son» ko'rinishdagi $P(x)$ predikat N to'plamda aniqlangan va uning I_P chinlik to'plami barcha tub sonlar to'plamidan iborat. «$\sin x = 0$» shakldagi $Q(x)$ predikat $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va uning I_Q chinlik to'plami $I_Q = \{k\pi, k \in Z\}$, bu yerda $\boldsymbol{Z}$ – butun sonlar to'plami. «Parallelogramm diagonallari x bir-biriga perpendikulyardir» degan $\Phi(x)$ predikatning aniqlanish sohasi hamma parallelogrammlar to'plami, chinlik to'plami esa hamma romblar to'plami bo'ladi. Bu misolda keltirilgan predikatlar bir joyli predikat xususiyatlarini ifodalaydi. ■

2- ta'rif. *Agar M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat uchun $I_P = M$ ($I_P = \varnothing$) bo'lsa, u **aynan chin** (**aynan yolg'on**) **predikat** deb ataladi.*

Endi **ko'p joyli predikat** tushunchasini o'rganamiz. Ko'p joyli predikat predmetlar orasidagi munosabatni aniqlaydi.

«Kichik» munosabati ikki predmet orasidagi **binar munosabatni** ifodalaydi[1]. «$x < y$» (bu yerda $x, y \in \boldsymbol{Z}$) binar munosabat ikki argumentli $P(x, y)$ funksiyani ifodalaydi. Bu funksiya $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ to‘plamda aniqlangan va qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to‘plam bo‘ladi.

3- **ta’rif.** *$M = M_1 \times M_2$ to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya **ikki joyli predikat** deb ataladi.*

n joyli predikat ham shunga o‘xshash aniqlanadi.

2- **misol.** «$x = y$» shakldagi $Q(x, y)$ **ikki joyli predikat** $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ to‘plamda aniqlangan «$x \perp y$» x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar – $F(x, y)$ **ikki joyli predikat** bir tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan. ■

3- **misol.** Bir joyli predikatlarning aniqlanish sohasi $\boldsymbol{R}$, ikki joyli predikatlarning aniqlanish sohasi esa $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ bo‘lsin. Quyida berilgan mulohazalarni tahlil qilib, ularning qaysilari predikat bo‘la olishini aniqlaymiz:

1) $x + 5 = 1$; 2) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 3) $x + 2 < 3x - 4$;

4) $(x + 2) - (3x - 4)$; 5) $x^2 + y^2 > 0$.

1) Tenglik shaklida berilgan ifoda bir joyli predikatdir. Agar uni $A(x)$ deb belgilasak, u holda $I_A = \{-4\}$ bo‘ladi.

2) $x^2 - 2x + 1 = 0$ ifoda bilan berilgan mulohaza ham bir joyli predikatdir. Uni $A(x)$ bilan belgilaymiz. $I_A = \{1\}$.

3) Tengsizlik shaklida berilgan ifodani mulohaza deb hisoblasak, bir joyli $A(x)$ predikatga ega bo‘lamiz. Ravshanki, $I_A = (3, +\infty)$.

4) Ikkita ikki hadning ayirmasi shaklidagi ifoda bilan berilgan mulohaza predikat bo‘la olmaydi.

5) Berilgan ifodani ikki joyli $A(x, y)$ predikat deb hisoblash mumkin va $I_A = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \setminus \{(0,0)\}$. ■

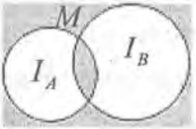
4- **misol.** Quyidagi predikatlarning qaysilari aynan chin bo‘lishini aniqlaymiz:

1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$; 3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

---

[1] Bir joyli predikatni unar predikat deb atash ham mumkin.

4) $(x+1)^2 > x-1$;   5) $x^2+1 \geq (x+1)^2$.



1- shakl

Ravshanki, 1), 3) va 4) predikatlar aynan chin predikatlardir. 2) predikatda $x=0$, $y=0$ qiymatlar uchun tengsizlik o‘rinli emas. 5) predikatda esa, x o‘zgaruvchining hamma musbat qiymatlarida tengsizlik o‘rinli emas. Demak, 2) va 5) predikatlar aynan chin predikatlar bo‘la olmaydi. ■

5- misol. $M = M_1 \times M_2 \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ to‘plamda $A(x,y)$ va $B(x,y)$ predikatlar berilgan bo‘lsin. $A(x,y) \leftrightarrow B(x,y)$ predikatning chinlik to‘plamini topamiz

$$A(x,y) \leftrightarrow B(x,y) = (A(x,y) \to B(x,y)) \wedge (B(x,y) \to A(x,y))$$

bo‘lganligi uchun

$$I_{A \leftrightarrow B} = (I_{A \to B}) \bigcap (I_{B \to A}) = ((CI_A \bigcup I_B) \bigcap (CI_B \bigcup I_A)) =$$
$$= (I_A \bigcap I_B) \bigcup (CI_A \bigcap CI_B).$$

$I_A \leftrightarrow I_B$ chinlik to‘plami 1- shaklda bo‘yalgan soha sifatida ko‘rsatilgan.■

5.1.2. Predikatlar ustida mantiqiy amallar Predikatlar ham mulohazalar singari faqatgina chin yoki yolg‘on (1 yoki 0) qiymat qabul qilganliklari tufayli ular ustida mulohazalar mantiqidagi hamma mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Bir joyli predikatlar misolida mulohazalar mantiqidagi mantiqiy amallarning predikatlarga tatbiq etilishini ko‘raylik.

4- ta’rif. *Berilgan M to‘plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$* ***predikatlarning kon’yunksiyasi*** *deb, faqat va faqat $x \in M$ qiymatlarda aniqlangan hamda $P(x)$ va $Q(x)$ lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $P(x) \wedge Q(x)$ kabi belgilanadi.*

$P(x) \wedge Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P \bigcap I_Q$ to‘plamdan, ya’ni $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar chinlik sohalarining umumiy qismidan iborat bo‘ladi.

6- misol. $P(x)$: «x – juft son» va $Q(x)$: «x – toq son» predikatlar uchun «x – juft son va x – toq son»: $P(x) \wedge Q(x)$ predikatlar kon’yunksiyasi mos keladi va uning chinlik sohasi $\varnothing$ – bo‘sh to‘plamdan iborat bo‘ladi. ■

5- ta'rif. *Berilgan M to'plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$* ***predikatlarning diz'yunksiyasi*** *deb, faqat va faqatgina $x \in M$ qiymatlarda aniqlangan hamda $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar yolg'on qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda chin qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $P(x) \vee Q(x)$ kabi belgilanadi.*

$P(x) \vee Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P \cup I_Q$ to'plamdan iborat bo'ladi.

6- ta'rif. *Agar hamma $x \in M$ qiymatlarda $P(x)$ predikat chin qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat va $x \in M$ ning barcha qiymatlarida $P(x)$ predikat yolg'on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga $P(x)$* ***predikatning inkori*** *deb ataladi va u $\overline{P}(x)$ kabi belgilanadi.*

Bu ta'rifdan $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$ kelib chiqadi.

7- ta'rif. *Faqat va faqatgina $x \in M$ lar uchun bir vaqtda $P(x)$ chin qiymat va $Q(x)$ yolg'on qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan $P(x) \to Q(x)$ predikat $P(x)$ va $Q(x)$* ***predikatlarning implikatsiyasi*** *deb ataladi.*

Har bir tayinlangan $x \in M$ uchun $P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$ teng kuchlilik to'g'ri bo'lganligidan $I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$ o'rinlidir.

5.2. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari

Umumiylik, mavjudlik kvantorlari. Kvantorli amallar bilan kon'yunksiya va diz'yunksiya amallari orasidagi munosabat.

M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin. Agar $a \in M$ ni $P(x)$ predikatning x argumenti o'rniga qo'ysak, u holda bu predikat $P(a)$ mulohazaga aylanadi.

Predikatlar mantiqida yuqorida ko'rilganlardan tashqari yana ikkita amal mavjudki, ular bir joyli predikatni mulohazaga aylantiradi.

5.2.1. Umumiylik kvantori. M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin. Har qanday $x \in M$ uchun $P(x)$ chin va aks holda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\forall x P(x)$ shaklda yozamiz. Bu mulohaza endi x ga bog'liq bo'lmay qoladi va u quyidagicha o'qiladi: «har qanday x uchun $P(x)$ chin». $\forall$ simvol **umumiylik kvantori** deb ataladi. Aytilgan fikrlarni matematik ifodalar vositasida quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall xP(x)=\begin{cases}1, \text{ barcha } x\in M \text{ uchun } P(x)=1 \text{ bo'lganda},\\ 0, \text{ aks holda.}\end{cases}$$

$P(x)$ predikatda x ni **erkin (ozod) o'zgaruvchi** va $\forall xP(x)$ mulohazada x ni umumiylik kvantori $\forall$ bilan **bog'langan o'zgaruvchi** deb ataladi.

5.2.2. Mavjudlik kvantori. $P(x)$ predikat M to'plamda aniqlangan bo'lsin. Hech bo'lmaganda bitta $x\in M$ uchun $P(x)$ predikat chin va aks holda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\exists xP(x)$ shaklda yozamiz. Bu mulohaza x ga bog'liq emas va uni quyidagicha o'qish mumkin: «shunday x mavjudki, $P(x)=1$», ya'ni

$$\exists xP(x)=\begin{cases}1, \text{ birorta } x\in M \text{ uchun } P(x)=1 \text{ bo'lganda},\\ 0, \text{ aks holda.}\end{cases}$$

$\exists$ simvol **mavjudlik kvantori** deb ataladi. $\exists xP(x)$ mulohazada x o'zgaruvchi $\exists$ kvantori bilan bog'langan bo'ladi.

1- misol. N natural sonlar to'plamida $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin: «x – tub son». Kvantorlardan foydalanib ushbu predikatdan quyidagi mulohazalarni hosil qilish mumkin: $\forall xP(x)$ – «Hamma natural sonlar tub sonlar bo'ladi»; $\exists xP(x)$ – «Shunday natural son mavjudki, u tub son bo'ladi». Ravshanki, birinchi mulohaza yolg'on va ikkinchi mulohaza chindir. ■

Ma'lumki, $\forall xP(x)$ mulohaza faqat $P(x)$ aynan chin predikat bo'lgandagina chin qiymat qabul qiladi. $\exists xP(x)$ mulohaza bo'lsa, $P(x)$ aynan yolg'on predikat bo'lgandagina yolg'on qiymat qabul qiladi.

Kvantorli amallar ko'p joyli predikatlarga ham qo'llaniladi. Masalan, M to'plamda ikki joyli $P(x,y)$ predikat berilgan bo'lsin. Agar $P(x,y)$ predikatga x o'zgaruvchi bo'yicha kvantorli amallarni qo'llasak, u holda ikki joyli $P(x,y)$ predikatga bir joyli $\forall xP(x,y)$ (yoki bir joyli $\exists xP(x,y)$) predikatni mos qilib qo'yadi.

Bir joyli $xP(x,y)$ ($\exists xP(x,y)$) predikat faqat y o‘zgaruvchiga bog‘liq, x o‘zgaruvchiga esa bog‘liq emas. Ularga y bo‘yicha kvantorli amallarni qo‘llaganimizda quyidagi mulohazalarga ega bo‘lamiz:

$$\forall y\forall xP(x,y),\ \exists y\forall xP(x,y),\ \forall y\exists xP(x,y),\ \exists y\exists xP(x,y).$$

2- m i s o l . To‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan $P(x,y)$: «$x \perp y$» predikatni ko‘raylik. Agar $P(x,y)$ predikatga nisbatan kvantorli amallarni tatbiq etsak, u holda quyidagi sakkizta mulohazaga ega bo‘lamiz:

1. $x\ \ yP(x,y)$ – «Har qanday x to‘g‘ri chiziq har qanday y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
2. $\exists y\ \ xP(x,y)$ – «Shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday x to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
3. $\forall y\exists xP(x,y)$ – «Har qanday y to‘g‘ri chiziq uchun shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chizig‘i y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
4. $\exists y\exists xP(x,y)$ – «Shunday y to‘g‘ri chiziq va shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
5. $\forall y\forall xP(x,y)$ – «Har qanday y to‘g‘ri chiziq har qanday x to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
6. $\forall x\exists yP(x,y)$ – «Har qanday x to‘g‘ri chiziq uchun shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
7. $\exists x\exists yP(x,y)$ – «Shunday x to‘g‘ri chiziq va shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
8. $\exists x\forall yP(x,y)$ – «Shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar». ■

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, umumiy holda kvantorlar tartibi o‘zgarishi bilan mulohazaning mazmuni va, demak, uning mantiqiy qiymati ham o‘zgaradi.

Chekli sondagi elementlari bo‘lgan $M=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ to‘plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $P(x)$ predikat aynan chin bo‘lsa, u holda $P(a_1),P(a_2),...,P(a_n)$ mulohazalar ham chin bo‘ladi. Shu holda $\forall xP(x)$ mulohaza va $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge...\wedge P(a_n)$ kon’yunksiya ham chin bo‘ladi.

Agar hech bo‘lmaganda bitta $a_k \in M$ element uchun $P(a_k)$ yolg‘on bo‘lsa, u holda $\forall xP(x)$ mulohaza va $P(a_1)\ \ P(a_2)\ \ ...\ \ P(a_n)$ kon’yunksiya ham yolg‘on bo‘ladi. Demak,

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$$

teng kuchli ifoda to‘g‘ri bo‘ladi.

Yuqoridagidek fikr yuritish yo‘li bilan

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$$

teng kuchli ifodaning mavjudligini ko‘rsatish mumkin.

Bu yerdan kvantorli amallarni cheksiz sohalarda kon’yunksiya va diz’yunksiya amallarining umumlashmasi sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ to‘plamda ikkita $A(x)$: «x – tub son» va $B(x)$: «x – toq son» predikatlar berilgan. Bu predikatlarning chinlik jadvalini tuzing.

2. $M = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ to‘plamda quyidagi predikatlar berilgan: $A(x)$: «x son 5ga qoldiqsiz bo‘linmaydi»; $B(x)$: «x – juft son»; $C(x)$: «x – tub son»; $D(x)$: «x son 3ga karrali». Quyidagi predikatlarning har biri uchun chinlik to‘plamini aniqlang:

a) $A(x) \wedge B(x)$; b) $C(x) \wedge B(x)$; d) $C(x) \wedge D(x)$;

e) $B(x) \wedge D(x)$; f) $\overline{B(x)} \wedge D(x)$; g) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$;

h) $\overline{B(x)} \wedge \overline{D(x)}$; i) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$; j) $A(x) \vee B(x)$;

k) $B(x) \vee C(x)$; l) $C(x) \vee D(x)$; m) $B(x) \vee D(x)$;

n) $\overline{B(x)} \vee D(x)$; o) $B(x) \wedge \overline{D(x)}$; p) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;

q) $C(x) \to A(x)$ r) $D(x) \to \overline{C(x)}$; s) $A(x) \to B(x)$;

t) $(A(x) \wedge C(x)) \to \overline{D(x)}$; u) $(A(x) \wedge D(x)) \to \overline{C(x)}$.

3. R to‘plamda $P(x)$: «$x^2 + x + 1 > 0$» va $Q(x)$: «$x^2 - 4x + 3 = 0$» predikatlar berilgan bo‘lsin. Quyidagi mulohazalarning qaysilari chin, qaysilari esa yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) $\forall x P(x)$; b) $\exists x P(x)$; d) $\forall x Q(x)$; e) $\exists x Q(x)$.

4. Quyidagi predikatlarning qaysi birlari aynan chin qiymatga ega bo‘ladi:

a) $x^2 + y^2 + (x+y)^2 \geq 0$; b) $x^2 + y^2 + (x+y)^2 > 0$;

d) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$; e) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

f) $(x+1)^2 < x - 3$; h) $x^2 + 1 \leq (x+1)^2$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Predikat tushunchasini bilasizmi?
2. Predikatlar ustida qanday mantiqiy amallar bajarish mumkin?
3. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari deganda nimani tushunasiz?
4. Predikatlarni qanday qilib bir joyli va ko‘p joyli predikatlarga ajratish mumkin?
5. Predikatning chinlik to‘plamini aniqlash uchun nima qilish kerak?
6. Berilgan predikatning aynan chin yoki aynan yolg‘on predikat bo‘lishini qanday aniqlash mumkin?

5.3. Predikatlar mantiqining formulasi. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati. Predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari

Predikatlar mantiqining simvollari. Formulaning ta’rifi. Formulaning qiymati tushunchasi. Teng kuchli formulalar. Asosiy teng kuchli formulalar.

Predikatlar mantiqida quyidagi simvollardan foydalaniladi:

1. $p, q, r...$ simvollar – 1 (chin) va 0 (yolg‘on) qiymatlar qabul qiluvchi o‘zgaruvchi mulohazalar.

2. $x, y, z,...$ – biror M to‘plamdan qiymat oluvchi predmet o‘zgaruvchilar; $x_0, y_0, z_0,...$ – predmet konstantalar, ya’ni predmet o‘zgaruvchilarning qiymatlari.

3. $P(\cdot)$, $F(\cdot)$ – bir joyli o‘zgaruvchi predikatlar; $Q(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{n ta})$, $R(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{n ta})$ – n joyli o‘zgaruvchi predikatlar.

4. $P^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ – o‘zgarmas predikatlar simvoli.

5. $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ – mantiqiy amallar simvollari.

6. $\forall x$, $\exists x$ – kvantorli amallar simvollari.

7. (,) va , (qavslar va vergul) – qo‘shimcha simvollar.

5.3.1. Predikatlar mantiqi formulasining t a ’ r i f i .

1. Har qanday o‘zgaruvchi yoki o‘zgarmas mulohaza (elementar) formula bo‘ladi.

2. Agar $F(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{n ta})$ *n joyli o‘zgaruvchi predikat yoki o‘zgarmas predikat va* $x_1, x_2,..., x_n$ *– predmet o‘zgaruvchilar yoki predmet* *konstantalar bo'lsa, u holda* $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ *formula bo'ladi. Bunday formulani* ***elementar formula*** *deb ataymiz. Bu formulada predmet o'zgaruvchilar erkindir, ya'ni kvantorlar bilan bog'langan emas.*

3. Agar A *va* B *shunday formulalarki, birorta predmet o'zgaruvchi birida erkin va ikkinchisida bog'langan o'zgaruvchi bo'lmasa, u holda* $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \to B$ *ham formula bo'ladi. Bu formulalarda dastlabki formulalarda erkin bo'lgan o'zgaruvchilar erkin, bog'langan bo'lgan o'zgaruvchilar esa bog'langan o'zgaruvchilar bo'ladi.*

4. Agar A *formula bo'lsa, u holda* $\overline{A}$ *ham formula bo'ladi.* A *formuladan* $\overline{A}$ *formulaga o'tishda o'zgaruvchilarning xarakteri o'zgarmaydi.*

5. Agar $A(x)$ *formula bo'lsa va uning ifodasiga* x *predmet o'zgaruvchi erkin holda kirsa, u holda* $\forall x A(x)$ *va* $\exists x A(x)$ *mulohazalar formula bo'ladi va* x *predmet o'zgaruvchi ularga bog'langan holda kiradi.*

6. 1–5- bandlarda formulalar deb atalgan mulohazalardan farq qiluvchi har qanday mulohaza formula bo'lmaydi.

1- misol. Agar $P(x)$ va $Q(x, y)$ – bir joyli va ikki joyli predikatlar, q, r – o'zgaruvchi mulohazalar bo'lsa, u holda quyidagi mulohazalar formulalar bo'ladi:

$$q,\ P(x),\ P(x) \wedge Q(x^0, y),\ \forall x P(x) \to \exists x Q(x, y),$$

$$(\overline{Q(x, y)} \vee q) \to r.$$

$\forall x Q(x, y) \to P(x)$ mulohaza formula bo'la olmaydi, chunki predikatlar mantiqi formulasi ta'rifning 3- bandidagi shart buzilgan: x predmet o'zgaruvchi $\forall x Q(x, y)$ formulaga bog'langan holda, $P(x)$ga esa erkin holda kirgan. ■

Predikatlar mantiqi formulasining ta'rifidan ko'rinib turibdiki, mulohazalar algebrasining har qanday formulasi predikatlar mantiqining ham formulasi bo'ladi.

2- misol. Quyidagi ifodalarning qaysilari predikatlar mantiqining formulasi bo'lishi va har bir formuladagi bog'langan va erkin o'zgaruvchilarni aniqlash talab etilgan bo'lsin:

1) $\overline{\exists x \forall z (P(x, y) \to P(y, z))}$;

2) $(p \to q) \wedge (\overline{r} \vee \overline{p})$;

3) $P(x) \wedge \forall x Q(x)$;

4) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \forall x R(x, y))$;

5) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y(\forall y R(y))$;

6) $\exists x \forall z(P(x, y) \to P(y, z))$.

Predikatlar mantiqi formulasining ta'rifiga ko'ra 1), 2), 4) va 6) ifodalar formulalardir.

3) va 5) ifodalar formula emas. Haqiqatdan ham, 3) ifodada $\wedge$ amali $P(x)$ va $\forall x Q(x)$ formulalarga nisbatan qo'llanilgan bo'lib, $P(x)$ da x predmet o'zgaruvchi erkin va $\forall x Q(x)$ da esa umumiylik kvantori bilan bog'langan. Bu holat formula ta'rifining 3- bandiga ziddir. Shuning uchun 3) ifoda formula bo'la olmaydi. 5) ifodada esa, $\exists y$ mavjudlik kvantori bilan $\forall y$ umumiylik kvantori orasida ziddiyat bor.

1) formulada y erkin, x va z o'zgaruvchilar esa bog'langan o'zgaruvchilardir. 2) formulada predmet o'zgaruvchilar yo'q. 4) formulada x bog'langan o'zgaruvchi, y esa erkin o'zgaruvchidir. ■

5.3.2. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasi. Endi predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasini aniqlaylik. Predikatlar mantiqi formulasining ifodasiga kiruvchi predikatlarning aniqlanish sohasi M to'plam berilgan bo'lsa, bu formulaning mantiqiy qiymati haqida so'z yuritish mumkin. Predikatlar mantiqi formulasining mantiqiy qiymati uch xil o'zgaruvchilar: 1) formulaga kiruvchi o'zgaruvchi mulohazalarning; 2) M to'plamdagi erkin predmet o'zgaruvchilarning; 3) predikat o'zgaruvchilarning qiymatlariga bog'liq bo'ladi.

Uch xil o'zgaruvchilardan har birining ma'lum qiymatlarida predikatlar mantiqining formulasi chin yoki yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aylanadi.

3- m i s o l . Quyidagi formulani tahlil qilamiz:

$$y\forall z(P(x, y) \quad P(y, z)). \tag{1}$$

(1) formulada $P(x, y)$ ikki joyli predikat $M \times M$ to'plamda aniqlangan, bu yerda $M = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. (1) formula ifodasiga o'zgaruvchi predikat $P(x, y)$ va x, y, z predmet o'zgaruvchilar kirgan. Bu yerda y va z – kvantorlar bilan bog'langan o'zgaruvchilar, x – erkin o'zgaruvchi.

$P(x, y)$ predikatning ma'lum qiymati sifatida tayinlangan $P^0(x, y)$: «$x < y$» predikatni olamiz, erkin o'zgaruvchi x ga $x^0 = 5 \in M$ qiymat beramiz. U holda y ning $x^0 = 5$ dan kichik qiymatlari uchun $P^0(x^0, y)$ predikat yolg'on qiymat qabul qiladi, $P(x,y) \to P(y,z)$ implikatsiya esa z ning hamma $z \in M$ qiymatlari uchun chin bo'ladi, ya'ni $\exists y \forall z(P^0(x,y) \to P^0(y,z))$ mulohaza chin qiymatga ega bo'ladi. ■

4- misol. Natural sonlar to'plami N da $P(x)$, $Q(x)$ va $R(x)$ predikatlar berilgan bo'lsa, $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$ formulaning qiymati quyidagi hollarda topilsin:

1) $P(x)$: «x son 3ga qoldiqsiz bo'linadi», $Q(x)$: «x son 4ga qoldiqsiz bo'linadi», $R(x)$: «x – juft»;

2) $P(x)$: «x son 3ga qoldiqsiz bo'linadi», $Q(x)$: «x son 4ga qoldiqsiz bo'linadi", $R(x)$: «x son 5ga qoldiqsiz bo'linadi».

Ikkala holda ham $P(x) \wedge Q(x)$ formula «x son 12ga qoldiqsiz bo'linadi» degan tasdiqni ifodalaydi. O'z navbatida hamma x lar uchun x son 12ga qoldiqsiz bo'linsa, u holda x son 2 ga ham bo'linadi (juft bo'ladi). Demak, 1) holda formulaning qiymati chindir.

x sonning 12ga qoldiqsiz bo'linishidan ba'zi x lar uchun x ning 5ga qoldiqsiz bo'linishi, bundan esa 2) holda formulaning yolg'on ekanligi kelib chiqadi. ■

5- misol. $P(x,y)$ predikat $M = N \times N$ to'plamda aniqlangan va $P^0(x,y)$: «x son y sondan kichik» bo'lganda $\forall x \exists y P(x,y) \to$ $\to \exists x \forall y P(x,y)$ formulaning mantiqiy qiymatini topamiz.

$P(x,y)$ predikatning ko'rsatilgan qiymati uchun $\forall x \exists y P(x,y)$: «har qanday x natural son uchun shunday y natural son topiladiki, u x dan katta bo'ladi" degan chin mulohazani bildiradi. $\exists x \forall y P(x,y)$ esa «shunday x natural son mavjudki, u har qanday y natural sondan kichik bo'ladi" degan tasdiqni bildiradi. Bu tasdiq yolg'ondir. Demak, berilgan formulaning mantiqiy qiymati yolg'on bo'ladi. ■

5.3.3. Predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari. Predikatlar mantiqida ham teng kuchli formulalar tushunchasi mavjud.

1- ta'rif. *Predikatlar mantiqining ikkita A va B formulasi o'z tarkibiga kiruvchi M sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida bir xil mantiqiy qiymat qabul qilsa, ular M* ***sohada teng kuchli formulalar*** *deb ataladi.*

2- ta'rif. *Agar ixtiyoriy sohada A va B formulalar teng kuchli bo'lsa, u holda ular* ***teng kuchli formulalar*** *deb ataladi va $A \equiv B$ ko'rinishda yoziladi.*

Agar mulohazalar algebrasidagi hamma teng kuchli formulalar ifodasi tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchi mulohazalar o‘rniga predikatlar mantiqidagi formulalar qo‘yilsa, u holda ular predikatlar mantiqining teng kuchli formulalariga aylanadi. Ammo, predikatlar mantiqi ham o‘ziga xos asosiy teng kuchli formulalarga ega. Bu teng kuchli formulalarning asosiylarini ko‘rib o‘taylik. $A(x)$ va $B(x)$ – o‘zgaruvchi predikatlar va C – o‘zgaruvchi mulohaza bo‘lsin. U holda predikatlar mantiqida quyidagi asosiy teng kuchli formulalar mavjud.

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$.
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$.
9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$.
10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.
11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$.
12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$.
13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)]$.
14. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$.
15. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$.
16. $\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$.
17. $\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$.

Bu teng kuchli formulalarning ayrimlarini isbot qilamiz.

Birinchi teng kuchli formula quyidagi oddiy tasdiqni (dalilni) bildiradi: agar hamma x lar uchun $A(x)$ chin bo‘lmasa, u holda shunday x topiladiki, $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi.

2- teng kuchlilik: agar $A(x)$ chin bo‘ladigan x mavjud bo‘lmasa, u holda hamma x lar uchun $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi degan mulohazani bildiradi.

3- va 4- teng kuchliliklar 1- va 2- teng kuchliliklarning ikkala tarafidan mos ravishda inkor olib va ikki marta inkor qonunini foydalanish natijasida hosil bo'ladi.

5- teng kuchlilikni isbot qilaylik. Agar $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar bir vaqtda aynan chin bo'lsa, u holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo'ladi va, demak, $\forall x A(x)$, $\forall x B(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$ mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, bu holda 5- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham chin qiymat qabul qiladi.

Endi hech bo'lmaganda ikkita predikatdan birortasi, masalan, $A(x)$ aynan chin bo'lmasin. U holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo'lmaydi va, demak, $\forall x A(x)$, $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$ mulohazalar yolg'on qiymat qabul qiladi, ya'ni bu holda ham 5- teng kuchlilikning ikki tarafi bir xil (yolg'on) qiymat qabul qiladi. Demak, 5- teng kuchlilikning to'g'riligi isbotlandi.

Endi 8- teng kuchlilikning to'g'riligini isbot qilamiz. O'zgaruvchi mulohaza C yolg'on qiymat qabul qilsin. U holda $C \to B(x)$ predikat aynan chin bo'ladi va $C \to \forall x B(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$ mulohazalar chin bo'ladi. Demak, bu holda 8- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladi.

Endi o'zgaruvchi mulohaza C chin qiymat qabul qilsin. Agar bu holda o'zgaruvchi predikat $B(x)$ aynan chin bo'lsa, u vaqtda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo'ladi va, demak, $\forall x B(x)$, $C \to \forall x B(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$ mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladi, ya'ni bu holda 8- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladi. Agar $B(x)$ predikat aynan chin bo'lmasa, u holda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo'lmaydi va, demak,

$$\forall x B(x),\ C \to \forall x B(x), \forall x[C \to B(x)]$$

mulohazalar yolg'on qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, bu holda ham 8- teng kuchliliklarning ikkala tarafi bir xil (yolg'on) qiymat qabul qiladi. Demak, 8- teng kuchlilik o'rinlidir.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ formula $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ formulaga va $\exists x[A(x) \wedge B(x)]$ formula $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ formulaga teng kuchli emas.

Ammo, quyidagi teng kuchliliklar o'rinlidir:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \equiv$$
$$\equiv \forall x[A(x) \vee \forall y B(y)] \equiv \forall x \forall y[A(x) \vee B(y)],$$

$$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \equiv \exists xA(x) \wedge \exists yB(y) \equiv$$
$$\equiv \exists x[A(x) \wedge \exists yB(y)] \equiv \exists x\exists y[A(x) \wedge B(y)].$$

$\forall x[A(x) \vee B(x)]$ formula $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ formulaga teng kuchli emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\forall x$ kvantor $\vee$ diz'yunksiya amaliga nisbatan distributiv emasligiga misol keltirish yetarlidir. Faraz qilaylik, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A(x)$:«$(x-1)(x-2)=0$» va $B(x)$: «$(x-3)(x-4)(x-5)=0$» bo'lsin. Ravshanki, M sohada $\forall xA(x)$ va $\forall xB(x)$ mulohazalar yolg'on va, demak, $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ mulohaza ham yolg'ondir. Agar $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributiv, ya'ni $\forall x[A(x) \vee B(x)] = \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ bo'lganda edi, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ chin mulohaza bo'lganligi uchun qarama-qarshilik hosil bo'lar edi. Demak, $\forall x[A(x) \vee B(x)] \neq \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ o'rinlidir.

Endi bu teng kuchliliklarning o'ng tomoni har doim chap tomonidagi mulohaza bilan bir xil qiymat qabul qilishini ko'rsatamiz. Agar $\forall xA(x) \equiv 1$ yoki $\forall xB(x) \equiv 1$ bo'lsa, u holda bu teng kuchlilik to'g'ri ekanligi aniq, chunki bu holda teng kuchlilikning ikkala tomoni ham bir vaqtda chin qiymat qabul qiladi. Bu holda faqat $\forall xB(x) \equiv \forall yB(y)$ ekanligini ko'rsatish kifoya. Ammo oxirgi teng kuchlilik tabiiydir, chunki x predmet o'zgaruvchi ham, y predmet o'zgaruvchi ham M sohaning har bir elementini qiymat sifatida qabul qiladi.

Endi $\forall xA(x) \equiv 0$ va $\forall xB(x) \equiv 0$ bo'lsin. U holda teng kuchlilikning chap tarafi 0 (yolg'on) qiymat qabul qiladi. O'ng tomonida $\forall x$ kvantorning ta'sir sohasi $A(x) \vee B(y)$ formula bo'lsada, $B(y)$ predikatda x predmet o'zgaruvchi qatnashmaganligi sababli, $\forall x$ kvantorning ta'siri faqat $A(x)$ga tarqaladi. Xuddi shu kabi, $\forall y$ kvantor faqat $B(y)$ga ta'sir etadi. Demak, $\forall x\forall y[A(x) \vee B(y)]$ formula ham yolg'on qiymatga ega bo'ladi.

Keltirilgan ikkinchi teng kuchlilikni ham xuddi shu kabi isbot qilish mumkin. (Bu ishni o'quvchiga havola etamiz.)

6- misol. $\exists x\forall y(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y\exists x(A(x) \wedge B(y))$ teng kuchlilik o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

$$\exists x\forall y(A(x) \wedge B(y)) \equiv \exists x(A(x) \wedge \forall yB(y)) \equiv \exists xA(x) \wedge \forall yB(y),$$
$$\forall y\exists x(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y(\exists xA(x) \wedge B(y)) \equiv \exists xA(x) \wedge \forall yB(y).$$

Demak, keltirilgan teng kuchlilik o'rinlidir. ■

5.4. Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar

Formulaning deyarli normal va normal shakllari. Formulani normal shaklga keltirish. Bajariluvchi, umumqiymatli, aynan chin, aynan yolg'on formulalar. Mantiq qonuni.

5.4.1. Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli.

1- ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi ifodasida faqat inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya* ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) *amallari va kvantorli amallar* ($\forall$, $\exists$) *qatnashib, inkor amali elementar formulalarga (predmet o'zgaruvchilar va o'zgaruvchi predikatlarga) tegishli bo'lsa, bunday formula* ***deyarli normal shaklda*** *deyiladi.*

Ravshanki, predikatlar mantiqi va mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklardan foydalanib, predikatlar mantiqining har bir formulasini **deyarli normal shaklga** keltirish mumkin.

1- misol. $(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z)$ formulani deyarli normal shaklga keltiramiz.

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv$$
$$\equiv \overline{\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\overline{\exists xP(x)}} \vee \overline{\forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv$$
$$\equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Demak,

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z). \blacksquare$$

Predikatlar mantiqining deyarli normal shakldagi formulalari orasida **normal shakldagi formulalar** muhim rol o'ynaydi. Bu formulalarda kvantorli amallar yo butunlay qatnashmaydi, yoki ular mulohazalar algebrasining hamma amallaridan keyin bajariladi, ya'ni normal shakldagi formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(\sigma x_1)(\sigma x_2) \ldots . (\sigma x_n)\ A\ (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ n \le m,$$

bunda (σx_i) simvoli o'rnida $\forall x_i$ yoki $\exists x_i$ kvantorlardan biri yoziladi deb tushuniladi va A formula ifodasida kvantorlar bo'lmaydi.

1- teorema. *Predikatlar mantiqining har qanday formulasini normal shaklga keltirish mumkin.*

Isboti. Formula deyarli normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz va uni normal shaklga keltirish mumkinligini ko'rsatamiz.

Agar bu formula elementar formula bo'lsa, u holda uning ifodasida kvantorlar bo'lmaydi va, demak, u normal shakl ko'rinishida bo'ladi.

Endi faraz qilamizki, teorema ko‘pi bilan k amalni qamragan formula uchun to‘g‘ri bo‘lsin va uni shu faraz asosida $k+1$ amalni qamragan formula uchun isbot qilamiz.

A formula $k+1$ amalni o‘z ichiga olgan formula va uning ko‘rinishi $\sigma\, xL(x)$ shaklda bo‘lsin, bu yerda $\sigma\ x$ kvantorlarning birini ifodalaydi.

$L(x)$ formula k amalni o‘z ichiga olganligi tufayli uni normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz. U holda $\sigma\, xL(x)$ formula ta’rifga asosan normal shaklda bo‘ladi.

A formula $\overline{L}$ ko‘rinishda bo‘lsin, bunda L formula normal shaklga keltirilgan va k amalni o‘z ichiga olgan deb hisoblanadi. U holda

$$\overline{\forall xA(x)} \equiv \exists x\overline{A(x)} \text{ va } \overline{\exists xA(x)} = \forall x\overline{A(x)}$$

teng kuchliliklardan foydalanib, inkor amalini predikatlar ustiga tushiramiz. Natijada A formulani normal shaklga keltirgan bo‘lamiz.

Endi A formula $L_1 \vee L_2$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu yerda L_1 va L_2 normal shaklga keltirilgan formulalar deb qaraladi.

L_2 formulada bog‘langan predmet o‘zgaruvchilarni shunday qayta nomlaymizki, L_1 va L_2 formulalardagi hamma bog‘langan predmet o‘zgaruvchilar har xil bo‘lsin. U holda L_1 va L_2 formulalarni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$L_1 \equiv (\sigma\, x_1)(\sigma\, x_2)\ldots(\sigma\, x_m)\ \alpha_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ m \le n,$$

$$L_2 \equiv (\sigma\, y_1)(\sigma\, y_2)\ldots(\sigma\, y_p)\ \alpha_2\ (y_1, y_2, \ldots, y_q),\ p \le q\,.$$

$C \vee \forall xB(x) = \forall x[C \vee B(x)]$ va $\overline{\forall xA(x)} = \exists x\overline{A(x)}$ teng kuchliliklardan foydalanib, L_2 formulani $(\sigma x_1), (\sigma x_2), \ldots, (\sigma x_m)$ kvantor amallari ostiga kiritamiz, ya’ni A formulani ushbu ko‘rinishga keltiramiz:

$$A \equiv (\sigma\, x_1)(\sigma\, x_2)\ldots(\sigma\, x_m)(\alpha_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee$$

$$\vee (\sigma\, y_1)(\sigma\, y_2)\ldots(\sigma\, y_p)\alpha_2\,(y_1, y_2, \ldots, y_q))\,.$$

So‘ngra $\alpha_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ formulani $(\sigma\, y_1), (\sigma\, y_2), \ldots, (\sigma\, y_p)$ kvantor amallari ostiga kiritamiz. Natijada A formulaning normal shaklini hosil qilamiz:

$$A \equiv (\sigma\, x_1)(\sigma\, x_2)\ldots(\sigma\, x_m)(\sigma\, y_1)(\sigma\, y_2)\ldots(\sigma\, y_p) \times$$

$$\times (\alpha_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \alpha_2\,(y_1, y_2, \ldots, y_q))\,.$$

$L_1 \wedge L_2$ ko'rinishdagi A formulani normal shaklga keltirishning isboti xuddi yuqorida kabi bajariladi. ■

Agar formulani normal shaklga keltirish jarayonida $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ yoki $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ ko'rinishdagi ifodalarni ko'rishga to'g'ri kelsa, u holda

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x[A(x) \wedge B(x)],$$
$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x[A(x) \vee B(x)]$$

teng kuchliliklardan foydalanish kerak bo'ladi.

2- misol. $A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x,y)}$ formulani normal shaklga keltirish talab etilsin. A formulada teng kuchli almashtirishlarni o'tkazib, uni normal shaklga keltiramiz:

$$A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x,y)} \equiv \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \exists z \overline{Q(x,z)}) \equiv$$
$$\equiv \forall x \exists y (P(x,y) \wedge \exists z \overline{Q(x,z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge \overline{Q(x,z)}).$$ ■

5.4.2. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar.

2- ta'rif. *Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari mavjud bo'lib, bu qiymatlarda A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda predikatlar mantiqining A formulasi M* ***sohada bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

3- ta'rif. *Agar shunday soha mavjud bo'lib, unda A formula bajariladigan bo'lsa, u holda A* ***bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

Demak, agar biror formula bajariluvchi bo'lsa, bu hali uning istalgan sohada bajariluvchanligini bildirmaydi.

4- ta'rif. *Agar A ning ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada* ***aynan chin formula*** *deb ataladi.*

5- ta'rif. *Agar A formula har qanday sohada aynan chin bo'lsa, u holda A* ***umumqiymatli formula*** *deb ataladi.*

6- ta'rif. *Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida A formula yolg'on qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada* ***aynan yolg'on formula*** *deb ataladi.*

Keltirilgan ta'riflardan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi.

1. Agar A umumqiymatli formula bo'lsa, u holda u har qanday sohada ham bajariluvchi formula bo'ladi.
2. Agar A formula M sohada aynan chin formula bo'lsa, u holda u shu sohada bajariluvchi formula bo'ladi.
3. Agar M sohada A aynan yolg'on formula bo'lsa, u holda u bu sohada bajarilmaydigan formula bo'ladi.

4. Agar A bajarilmaydigan formula bo'lsa, u holda u har qanday sohada ham aynan yolg'on formula bo'ladi.

Demak, predikatlar mantiqi formulalarini ikki sinfga ajratish mumkin: **bajariluvchi** sinflar va **bajarilmas** (bajarilmaydigan) sinflar formulalari.

7- ta'rif. *Umumqiymatli formula **mantiq qonuni** deb ataladi.*

3- misol. $\forall x \exists y P(x,y)$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x,y)$: «$x < y$» predikat $M = E \times E$ sohada aniqlangan (bu yerda $E = \{0,1,2,...,n,...\}$) bo'lsa, u holda $x \ yP(x,y)$ formula M sohada aynan chin formula bo'ladi, demak, bu sohada u bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $E_1 = \{0,1,2,...,k\}$ uchun «$x < y$» predikat chekli $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada aniqlangan bo'lsa, u holda $\forall x \exists y P(x,y)$ formula M_1 sohada aynan yolg'on formula bo'ladi va, demak, M_1 sohada $\forall x \exists y P(x,y)$ formula bajariluvchi emas. Ravshanki, $\forall x \exists y P(x,y)$ umumqiymatli formula bo'lmaydi. ■

4- misol. $\exists x \exists y [P(x) \wedge P(y)]$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x)$: «x – juft son» predikat $E \ \{0,1,2,...,n,...\}$ uchun $M = E \times E$ sohada aniqlangan bo'lsa, u holda bu formula M sohada aynan chin bo'ladi, demak, u M sohada bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $P(x)$: «x – juft son» predikat $E_1 = \{2,4,6,8,...\}$ uchun $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada aniqlangan bo'lsa, u holda $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ formula M_1 sohada aynan yolg'on formula bo'ladi, demak, bu sohada u bajarilmas formuladir. ■

5- misol. $\forall x [P(x) \vee \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy M sohada aynan chin bo'ladi. Demak, u umumqiymatli formula, ya'ni bu formula mantiqiy qonundir. ■

6- misol. $\forall x [P(x) \wedge \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy M sohada aynan yolg'on va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir. ■

Endi predikatlar mantiqidagi formulalarning umumqiymatliligi va bajariluvchanligi orasidagi munosabatni ko'rib o'taylik.

2- teorema. *A umumqiymatli formula bo'lishi uchun uning inkori $\overline{A}$ bajariluvchi formula bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. A umumqiymatli formula bo'lsin. U holda, ravshanki, $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg'on formula bo'ladi va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir.

Yetarliligi. $\overline{A}$ istalgan sohada bajariluvchi formula bo'lmasin. U holda bajarilmas formulaning ta'rifiga asosan $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg‘on formuladir. Demak, A istalgan sohada aynan chin formula bo‘ladi va u umumqiymatlidir. ■

3- teorema. *A bajariluvchi formula bo‘lishi uchun $\overline{A}$ ning umumqiymatli formula bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. A bajariluvchi formula bo‘lsin. U holda shunday M soha va A formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmui (satri) mavjudki, A formula bu qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiladi. Ravshanki, o‘zgaruvchilarning bu qiymatlar satrida $\overline{A}$ formula yolg‘on qiymat qabul qiladi va, demak, $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo‘la olmaydi.

Yetarliligi. $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo‘lmasin. U holda shunday M soha va A formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlar satri mavjudki, $\overline{A}$ formula bu qiymatlar satrida yolg‘on qiymat qabul qiladi. Bu qiymatlar satrida A formula chin qiymat qabul qilganligi uchun u bajariluvchi formula bo‘ladi. ■

7- misol. $A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ formulaning umumqiymatliligini isbotlaymiz. A formula istalgan M sohada aniqlangan deb hisoblab, quyidagi teng kuchli almashtirishlarni bajaramiz:

$$\equiv \overline{\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)})} \vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv$$

$$A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv (\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1,$$

ya’ni A formula istalgan sohada har qanday $P(x)$ va $Q(x)$ bir joyli predikatlar uchun aynan chin, demak, u umumqiymatli formuladir. ■

8-misol. $A \equiv \exists x[(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x))]$ formulaning aynan yolg‘on formula ekanligini ko‘rsatamiz. $(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x)) \equiv$ $\equiv F(x) \Leftrightarrow \overline{F(x)}$ o‘rinli va $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ formula aynan yolg‘on formula bo‘lgani uchun $A \equiv \exists x(F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)})$ ham aynan yolg‘on formuladir. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi ifodalarning qaysilari predikatlar mantiqining formulasi bo'lishini aniqlang. Har bir formula uchun erkin va bog'langan o'zgaruvchilarni aniqlang.

a) $\exists x \exists y P(x,y)$; b) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x,y)$; d) $\forall x \exists y P(x,y)$;

e) $p \to \forall x P(x,y)$; f) $\exists x P(x,y) \wedge Q(y,z)$.

2. $P(x,y)$: «$x < y$» predikat $M = N \times N$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Quyida berilgan predikatlarning qaysilari aynan chin va qaysilari aynan yolg'onligini aniqlang:

a) $\exists x P(x,y)$; b) $\forall x P(x,y)$; d) $yP(x,y)$;

e) $\forall y P(x,y)$ f) $\exists x \forall y P(x,y)$; g) $\forall x \exists y P(x,y)$;

h) $\forall y \exists x P(x,y)$; i) $\forall x \forall y P(x,y)$; j) $\forall y \forall x P(x,y)$;

k) $\exists y \forall x P(x,y)$; l) $\exists x \exists y P(x,y)$; m) $\exists y \exists x P(x,y)$.

3. Quyidagi teng kuchliliklarning to'g'riligini isbot qiling:

a) $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$; b) $C \wedge \forall x A(x) \equiv \forall x (C \wedge A(x))$;

d) $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$; e) $C \vee \forall x A(x) \equiv \forall x (C \vee A(x))$;

f) $\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;

g) $\exists x (C \vee A(x)) \equiv C \vee \exists x A(x)$; h) $\exists x (C \wedge A(x)) \equiv C \wedge \exists x A(x)$;

i) $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$;

j) $\forall x (A(x) \to C) \equiv \exists x A(x) \to C$;

k) $\exists x (C \to A(x)) \equiv C \to \exists x A(x)$;

l) $\exists x (A(x) \to C) \equiv \forall x A(x) \to C$.

4. $A(x)$ va $B(x)$ ixtiyoriy predikatlar bo'lsin. Quyida berilgan formulalarning qaysilari $A(x) \to \overline{B(x)}$ formulaga teng kuchli bo'lishini aniqlang.

a) $A(x) \vee B(x)$; b) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$; d) $\overline{A(x)} \to B(x)$;

e) $\overline{B(x)} \to A(x)$; f) $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$; g) $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$;

h) $B(x) \to \overline{A(x)}$.

5. Quyida keltirilgan formulalarning qaysilari umumqiymatli bo'lishini aniqlang.

a) $\exists x (P_1(x) \wedge P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x))$;

b) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \leftrightarrow (\exists xP_1(x) \wedge \exists xP_2(x))$;

d) $(\forall xP_1(x) \vee \forall xP_2(x)) \to \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$;

e) $(\forall xP_1(x) \vee \forall xP_2(x)) \leftrightarrow \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$;

f) $\forall x(q \to P_1(x)) \leftrightarrow (q \to \forall xP_1(x))$;

g) $\forall x(P(x_1) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\forall xP_1(x) \to \forall xP_2(x))$;

h) $\exists x(P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists xP_1(x) \to \exists xP_2(x))$;

i) $\forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\exists xP(x_1) \to \forall xP_2(x))$;

j) $\forall x(A_1(x) \to A_2(x)) \to (\forall xA_1(x) \to \forall xA_2(x))$;

k) $\forall x(A_1(x) \to A_2(x)) \to (\ xA_1(x) \to \ xA_2(x))$;

l) $\exists x(A_1(x) \to A_2(x)) \leftrightarrow (\forall xA_1(x) \to \forall xA_2(x))$;

m) $\exists xQ(x) \to \forall xQ(x)$;

n) $\forall xQ(x) \to \exists xQ(x)$;

o) $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$;

p) $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \leftrightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$;

q) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$;

r) $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Predikatlar mantiqining simvollari va formulasi tushunchalarini bilasizmi?

2. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati deganda nimani tushunasiz?

3. Formulalarning teng kuchli formulalar bo‘lishi yoki bo‘lmasligi qanday aniqlanadi?

4. Qaysi formulalar asosiy teng kuchli formulalar deb yuritiladi?

5. Formulaning deyarli normal shakli deganda nimani tushunasiz?

6. Formulaning normal shakli uning deyarli normal shaklidan nimasi bilan farq qiladi?

7. Qanday formulani normal shaklga keltirish mumkin?

8. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar deganda nimani tushunasiz?

9. Aynan chin va aynan yolg‘on formulalarning bir-biridan farqi nimada?

10. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar haqidagi teoremalarni bilasizmi?

5.5. Yechilish muammosi. Xususiy hollarda formulaning umumqiymatliligini topish algoritmlari

Yechilish muammosi. Chekli sohalar. Yopiq formula. Formulaning umumiy yopilishi. Formulaning mavjudligini yopish. Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

5.5.1. Yechilish muammosi. Predikatlar mantiqida yechilish muammosi mulohazalar algebrasida qanday qo‘yilgan bo‘lsa, xuddi shunday qo‘yiladi: predikatlar mantiqining istalgan formulasi yo umumqiymatli, yo bajariluvchi, yoki aynan yolg‘on (bajarilmas) formula ekanligini aniqlab beruvchi algoritm mavjudmi yoki yo‘qmi? Bu masala **yechilish muammosi** deb ataladi. Agar bunday algoritm mavjud bo‘lsa edi, u (xuddi mulohazalar algebrasidagidek) predikatlar mantiqidagi istalgan formulaning aynan chinligini aniqlab beruvchi mezonga keltirilgan bo‘lar edi.

Agar ushbu muammo mulohazalar algebrasi uchun oson yechilgan bo‘lsa, predikatlar mantiqi uchun bu muammoni yechish jarayonida katta qiyinchiliklar borligi aniqlandi. XX asrning 30- yillarida algoritm tushunchasiga aniq ta’rif berilgandan so‘ng mazkur muammo umumiy holda ijobiy hal etilishi mumkin emasligi, ya’ni izlangan algoritm mavjud emasligi aniqlandi. 1936- yilda A. Chyorch[2] predikatlar mantiqining **yechilish muammosi** umumiy holda algoritmik yechilmasligini isbotladi, ya’ni predikatlar mantiqining istalgan formulasi qaysi formulalar (umumqiymatli, bajariluvchi yoki bajarilmas) sinfiga kirishini aniqlab beradigan algoritm mavjud emasligini isbotladi.

Yechilish muammosi predikatlar mantiqi uchun ijobiy hal etilmasada, predikatlar mantiqi formulalarining ba’zi sohalari uchun bu muammo ijobiy hal bo‘lishi mumkin. Quyida shunday sohalardan ba’zilarini o‘rganamiz.

5.5.2. Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yechilish muammosi chekli sohalarda ijobiy hal bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu holda kvantorli amallarni kon’yunksiya va diz’yunksiya amallari bilan almashtirish mumkin. Natijada predikatlar mantiqi formulasi mulohazalar algebrasi formulasiga keltiriladi. Ma’lumki, mulohazalar algebrasi uchun yechilish muammosi ijobiy hal bo‘ladi.

Masalan, $\forall x \exists y[P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}]$ formula $M = \{a,b\}$ ikki elementli chekli sohada aniqlangan bo‘lsin. U holda uni quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

---

[2] Chyorch (Alonzo Church, 1903-1995) – AQShlik matematik, mantiqchi.

$$\forall x \exists y[P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}] \equiv \forall x[P(x,a) \vee \overline{P(x,x)} \vee \overline{P(x,b)}] \equiv$$
$$\equiv [P(a,a) \vee \overline{P(a,a)} \vee P(a,b)] \wedge [P(b,a) \vee \overline{P(b,b)} \vee P(b,b)].$$

Hosil qilingan kon'yunktiv normal shakldagi formulaning har bir elementar diz'yunksiyasi ifodasida bitta mulohaza o'zining inkori bilan birgalikda qatnashmoqda. Demak, mulohazalar algebrasining bu formulasi doimo chin qiymat qabul qiladi, ya'ni u aynan chindir.

5.5.3. Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

1- ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi tarkibida erkin predmet o'zgaruvchilar bo'lmasa, u holda bunday formula **yopiq** formula deb ataladi.*

2- ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi C tarkibida $x_1, x_2, ..., x_n$ erkin o'zgaruvchilar mavjud bo'lsa, u holda $A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula C formulaning **umumiy yopilishi** va $B = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula C formulaning **mavjudligini yopish** deb ataladi.*

1- teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi, tarkibida (ifodasida) faqat n ta mavjudlik kvantori qatnashgan hamda bir elementli istalgan sohada aynan chin bo'lsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*

Isboti. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi

$$B \equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda C formula ifodasida kvantorlar qatnashmaydi, q_i – mantiqiy o'zgaruvchi, P_i – bir joyli predikatlar, Q_i – ikki joyli predikatlar. Bu formulaning chinlik qiymati uning tarkibida qatnashayotgan $q_1, q_2, ...$ mantiqiy o'zgaruvchilar hamda $P_1, P_2, ...$ va $Q_1, Q_2, ...$ predikatlarga bog'liq.

Teoremaning shartiga asosan bitta a elementli istalgan $M = \{a\}$ sohada bu formula aynan chin, ya'ni

$$C(q_1, q_2, ..., P_1(a), P_2(a), ..., Q_1(a,a), Q_2(a,a), ...) \quad (2)$$

formula aynan chin bo'ladi. Ravshanki, (2) formula mulohazalar algebrasining formulasi bo'ladi.

(1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U holda shunday M_1 soha va o'zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmuasi

$q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$ mavjudki, unda (1) formula yolg'on qiymat qabul qiladi, ya'ni

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) = 0. \quad (3)$$

(3) formulaning inkorini aniqlaymiz:

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} = 1.$$

Bu yerdan $\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)}$ formulaning M_1 sohaga oid predmet o'zgaruvchilarning qanday olinishidan qat'i nazar aynan chinligi kelib chiqadi. M_1 sohadan ixtiyoriy x_0 elementni olib, uni yuqorida ifodalangan formuladagi predmet o'zgaruvchilar o'rniga qo'yib chiqamiz. U holda

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...)} = 1.$$

Demak,

$$C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...) = 0.$$

Bu natija (2) formulaning aynan chin ekanligiga ziddir va (1) formula umumqiymatli emas, degan farazimizning noto'g'riligini ko'rsatadi. Shunday qilib, (1) formula umumqiymatlidir. ■

2- teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi ifodasida n ta umumiylik kvantori qatnashsa va bu formula ko'pi bilan n ta elementli har qanday to'plamda (sohada)* ***aynan chin*** *bo'lsa, u holda u umumqiymatli bo'ladi.*

Isboti. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...), \quad (5)$$

bu yerda $q_1, q_2, ...$ – mantiqiy o'zgaruvchilar, $P_1, P_2, ...$ – bir joyli predikatlar, $Q_1, Q_2, ...$ – ikki joyli predikatlar. (1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U holda n tadan ortiq elementga ega bo'lgan M_1 soha mavjudki, bunda (1) formula aynan chin bo'lmaydi. Boshqacha qilib aytganda, o'zgaruvchilarning shunday $q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$ qiymatlar majmuasi mavjudki,

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0. \quad (6)$$

Bu yerdan

$$\overline{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1.$$

Shunday qilib, predmet o‘zaruvchilarning shunday $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 \in M_1$ qiymatlari mavjudki,

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1,$$

ya’ni $C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0$ bo‘ladi.

Demak, M_1 sohadan ko‘pi bilan n ta elementi bo‘lgan shunday M sohani ajratish mumkinki, u yerda bu formula aynan chin bo‘lmaydi. Bu natija teoremaning shartiga ziddir va u (1) formula umumqiymatli emas degan noto‘g‘ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, (1) formula umumqiymatli formuladir. ■

Tarkibida faqat bir joyli (bitta predmet o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan) predikatlar qatnashgan formulalar uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi quyidagi teoremadan ko‘rinadi.

3- teorema. *Predikatlar mantiqining tarkibiga n ta bir joyli predikat kirgan A formulasi biror M to‘plamda bajariluvchi bo‘lsa, u holda bu formula elementlari soni 2^n dan katta bo‘lmagan M_1 to‘plamda ham bajariluvchi bo‘ladi.*

3- teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *Predikatlar mantiqining tarkibiga faqat n ta bir joyli predikat kirgan A formulasi elementlari soni 2^n dan ko‘p bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plamda aynan chin bo‘lsa, u holda bu formula ixtiyoriy to‘plamda ham aynan chin bo‘ladi.*

Quyidagi teorema ham predikatlar mantiqining katta sinfini tashkil qiluvchi formulalari uchun yechilish muammosi ijobiy hal bo‘lishini tasdiqlaydi.

4- teorema. *Agar predikatlar mantiqining A formulasi biror cheksiz sohada bajariluvchi bo‘lsa, u holda u chekli sohada ham bajariluvchi bo‘ladi.*

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Ushbu $A \equiv (P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ formulaning umumqiymatli ekanligini isbotlang.

2. Agar M to‘plamda aniqlangan *A(x)* va *B(x)* predikatlar chin qiymatli bo‘lsa, u holda quyidagi formulalar uchun ularning chinlik to‘plamlari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakligini aniqlang:

a) $\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge \exists x(\overline{A(x)} \wedge B(x))$;

b) $\overline{\exists x(A(x) \wedge B(x))} \wedge (\forall(A(x) \to B(x)))$;

d) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to (\forall x(A(x) \to B(x)))$.

3. $M=\{1,2,3,...,20\}$ to'plamda $A(x)$: «x son 5 ga qoldiqsiz bo'linmaydi»; $B(x)$: «x – juft son»; $C(x)$: «x – tub son»; $D(x)$: «x 3 ga karrali» predikatlar berilgan. Quyidagi predikatlar uchun chinlik to'plamlarini toping:

a) $A(x)\wedge B(x)$; b) $C(x)\wedge B(x)$; d) $C(x)\wedge D(x)$;

e) $B(x)\wedge D(x)$; f) $\overline{B}(x)\wedge D(x)$; g) $A(x)\wedge \overline{D}(x)$;

h) $\overline{B}(x)\wedge \overline{D}(x)$; i) $\overline{B}(x)\wedge \overline{D}(x)$; j) $A(x)\vee B(x)$;

k) $B(x)\vee C(x)$; l) $C(x)\vee D(x)$; m) $B(x)\vee D(x)$;

n) $\overline{B}(x)\vee D(x)$; o) $B(x)\vee \overline{D}(x)$; p) $A(x)\vee B(x)\vee D(x)$;

q) $C(x)\to A(x)$; r) $D(x)\to \overline{C}(x)$; s) $A(x)\to B(x)$;

t) $(A(x)\wedge C(x))\to \overline{D}(x)$; u) $(A(x)\wedge D(x))\to \overline{C}(x)$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Predikatlar mantiqida yechilish muammosi deganda nimani tushunasiz?

2. Chekli sohalarda yechilish muammosi haqida nimalarni bilasiz?

3. Yopiq formula nima?

4. Formulaning umumiy yopilishi deganda nimani tushunasiz?

5. Formulaning mavjudligini yopish tushunchasi qanday ta'riflanadi?

6. Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosini bilasizmi?

5.6. Predikatlar mantiqining matematikaga tatbiqi. Aksiomatik predikatlar hisobi

Matematik ta'rif va teoremalarni predikatlar mantiqi tili vositasi bilan ifodalash. Sonlar ketma-ketligi. Limit. Funksiya. Uzluksizlik. O'suvchi, chegaralangan funksiya. Qarama-qarshi tasdiqlar. To'g'ri, teskari va qarama-qarshi teoremalar. Yetarli va zaruriy shartlar. Aksiomatik predikatlar hisobi. Predikatlar hisobi aksiomalar sistemasi. Umumiylik, mavjudlik kvantorlarni kiritish qoidalari. Yechilish, zidsizlik, to'liqlilik va erkinlik muammolari.

5.6.1. Matematik mulohazalarni predikatlar mantiqi formulasi ko'rinishida yozish. Quyida asosiy matematik tushunchalar – ta'rif va teoremalarni predikatlar mantiqi tili vositasi bilan ifodalashni o'rganamiz.

Matematikaga oid har qanday fan sohasi shu fanda qaralayotgan obyektlar haqidagi mulohazalar bilan ish ko'radi. Mulohazalar mantiq va to'plamlar nazariyasining simvollari hamda berilgan fanning maxsus simvollari yordamida predikatlar mantiqining formulasi ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Predikatlar mantiqining tili matematik tushunchalar o'rtasidagi munosabatni ifodalashga, ta'rif, teorema va isbotlarni yozishga imkoniyat yaratadi. Bu yozishlarni misollarda ko'raylik.

Sonlar ketma-ketligi limitining ta'rifi. *Sonlar ketma-ketligi limitining ta'rifini quyidagicha yozish mumkin:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \in N(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon),$$

bu yerda $A(\varepsilon, n, n_0): (n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$ *– uch joyli predikat.*

Funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifi. *Bu ta'rifni ushbu shaklda yozish mumkin:*

$$b = \lim_{x\to x_0} f(x) \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon),$$

bu yerda $B(\varepsilon, \delta, x): (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)$ *– uch joyli predikat.*

Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi ta'rifi. E *to'plamda aniqlangan* $f(x)$ *funksiya uchun* $x_0 \in E$ *da*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in \mathrm{E}(|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* $x_0 \in E$ *nuqtada* ***uzluksiz*** *deb ataladi, bu yerda* $P(\varepsilon, \delta, x)$ *– uch joyli predikat.*

O'suvchi funksiyaning ta'rifi. E *to'plamda aniqlangan* $f(x)$ *funksiya uchun*

$$\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda* ***o'suvchi*** *funksiya bo'ladi, bu yerda* $Q(x_1, x_2): (x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$ *– ikki joyli predikat.*

Chegaralangan funksiyaning ta'rifi. *Aniqlanish sohasi* E *bo'lgan* $f(x)$ *funksiya uchun*

$$\exists M \in R_+ \forall x \in E(|f(x)| \leq M)$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ *funksiya* E *sohada* ***chegaralangan*** *deb ataladi, bu yerda* $F(x, M): (|f(x)| \leq M)$ *– ikki joyli predikat.*

Ma'lumki, matematikada ko'p teoremalar shartli mulohazalar shaklida yoziladi, ya'ni «Agar x bo'lsa, u holda y bo'ladi» tarzida ifodalanadi. Masalan, «Agar nuqta burchak bissektrisasida yotgan bo'lsa, u holda u burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan (masofada) bo'ladi». Bu teoremaning sharti «Nuqta burchak bissektrisasida yotgan» va xulosasi «Nuqta burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan (masofada)» jumlalardan iborat. Ko'rinib turibdiki, teoremaning sharti ham, xulosasi ham $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan predikatni ifodalaydi. Bu predikatlarni $x \in \boldsymbol{R}^2$ uchun mos ravishda $A(x)$ va $B(x)$ bilan belgilab, teoremani quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall x \in \boldsymbol{R}^2 (A(x) \to B(x)).$$

Shu sababli, teoremaning tuzilishi (strukturasi) haqida gapirganda, unda uchta qismni ajratish kerak:

1) teorema sharti: $\boldsymbol{R}^2$ to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat;

2) teorema xulosasi: $\boldsymbol{R}^2$ to'plamda aniqlangan $Q(x)$ predikat;

3) tushuntirish qismi: bu yerda teoremada gap yuritilayotgan obyektlar to'plamini ifodalash kerak.

5.6.2. Qarama-qarshi tasdiqlarni tuzish. Agar biror A matematik tasdiq berilgan bo'lsa, u holda $\overline{A}$ unga qarama-qarshi bo'lgan tasdiqni ifodalaydi. Predikatlar mantiqi teng kuchli almashtirishlar vositasida $\overline{A}$ formulaga muayyan nuqtai nazardan yaxshi shakl (ko'rinish) bera oladi.

1- m i s o l . Chegaralangan funksiyaning ta'rifi

$$\exists M \in R_+ \forall x \in E\,(|\,f(x)\,| \le M)$$

formula orqali berilishini ko'rgan edik. Bu formulaning inkori uchun teng kuchli almashtirishlar bajarib, chegaralanmagan funksiyaning ta'rifini hosil qilamiz:

$$\overline{\exists M \in R_+ \forall x \in E\,(|\,f(x)\,| \le M)} \equiv$$
$$\equiv \forall M \in R_+ \overline{\forall x \in E\,(|\,f(x)\,| \le M)} \equiv$$
$$\equiv \forall M \in R_+ \exists x \in E\,(\overline{|\,f(x)\,| \le M}) \equiv$$
$$\equiv \forall M \in R_+ \exists x \in E\,(|\,f(x)\,| > M).$$

Oxirgi $\forall M \in R_+ \exists x \in E\,(|\,f(x)\,| > M)$ formula chegaralanmagan funksiyaning ta'rifini ifodalaydi. ■

Keltirilgan misoldan ko'rinib turibdiki, *hamma kvantorlari oldinda turgan predikatlar mantiqi formulasi orqali ifodalangan tasdiqqa qarama-*

qarshi tasdiqni yasash uchun hamma kvantorlarni qarama-qarshisiga (ya'ni $\forall$ ni $\exists$ ga va $\exists$ ni $\forall$ ga) almashtirish va kvantorlar ostida turgan predikatning inkorini olish kifoya.

2- misol. $b \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tasdiqni quyidagi formula ifodalaydi:

$$\overline{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E\overline{(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon) . \blacksquare$$

3- misol. Berilgan teoremaning to'g'riligini rad etadigan tasdiq yasashni ko'ramiz. $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ teorema berilgan bo'lsin. Bu teoremani rad etadigan tasdiq quyidagicha bo'ladi:

$$\overline{\forall x \in E(P(x) \to Q(x))} \equiv \exists x \in E\overline{(P(x) \to Q(x))} \equiv$$

$$\equiv \exists x \in E(P(x) \wedge \overline{Q(x)}) .$$

Oxirgi formula faqat $P(x) \equiv 1$ va $Q(x) \equiv 0$ bo'lgandagina chin qiymatga egadir. Demak, $\forall x(P(x) \to Q(x))$ teoremaning noto'g'riligini isbotlash uchun shunday $x \in E$ elementni ko'rsatish kerakki, bu element uchun $P(x)$ chin, $Q(x)$ esa yolg'on qiymat qabul qilsin, ya'ni kontrmisol keltirish kerak. $\blacksquare$

5.6.3. To'g'ri, teskari va qarama-qarshi teoremalar. Quyidagi to'rtta teoremani ko'rib o'taylik:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) , \tag{1}$$

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)) , \tag{2}$$

$$\forall x \in E(\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}) , \tag{3}$$

$$\forall x \in E(\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}) . \tag{4}$$

1- ta'rif. *Birining sharti ikkinchisining xulosasi va ikkinchisining sharti birinchisining xulosasi bo'lgan juft teoremalar **o'zaro teskari teoremalar** deb ataladi.*

Masalan, (1) va (2) teoremalar hamda (3) va (4) teoremalar o'zaro teskari teoremalardir. Bu juft teoremalaraning birini (ixtiyoriysini) **to'g'ri teorema** deb hisoblasak, u holda ikkinchisini **teskari teorema** deyish joizdir.

2- ta'rif. *Birining sharti va xulosasi ikkinchisining sharti va xulosasi uchun mos ravishda inkorlari bo'lgan juft teoremalar **o'zaro qarama-qarshi teoremalar** deb ataladi.*

Masalan, (1) va (3) teoremalar hamda (2) va (4) teoremalar o'zaro qarama-qarshi teoremalardir.

4- **m i s o l .** «Agar to‘rtburchakning diagonallari teng bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi» degan (1) teoremaga «Agar to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lsa, u holda uning diagonallari teng bo‘ladi» degan (2) teorema teskari teorema bo‘ladi. (1) teoremaga qarama-qarshi teorema «Agar to‘rtburchakning diagonallari teng bo‘lmasa, u holda u to‘g‘ri burchakli bo‘lmaydi» degan (3) teorema va (2) teoremaga qarama-qarshi teorema «Agar to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lmasa, u holda uning diagonallari teng bo‘lmaydi» (4) teorema bo‘ladi. ■

4- misoldagi (1) va (4) teoremalar bir vaqtda chin bo‘ladi. (1) teorema uchun kontrmisol sifatida teng yonli trapesiyani keltirish mumkin.

Ravshanki, to‘g‘ri va teskari teoremalar, umuman olganda, teng kuchli bo‘lmaydilar, ya’ni biri chin, ikkinchisi yolg‘on bo‘lishi mumkin. Ammo, (1) va (4) teoremalar hamda (2) va (3) teoremalarning teng kuchli formulalar ekanligini osongina isbotlash mumkin. Haqiqatan ham,

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \vee B(x)) \equiv$$

$$\equiv \forall x \in E(\overline{\overline{B(x)}} \vee \overline{A(x)}) \equiv \forall x \in E(\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}).$$

Xuddi shunday

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)) \equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}).$$

Bu teng kuchliliklardan quyidagi xulosaga kelamiz: agar (1) teorema isbot qilingan bo‘lsa, u holda (4) teorema ham isbot qilingan bo‘ladi va agar (2) teorema isbot qilingan bo‘lsa, u holda (3) teorema ham isbotlangan hisoblanadi.

5.6.4. Yetarli va zaruriy shartlar. Quyidagi teoremani ko‘raylik

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)). \tag{5}$$

$A(x) \to B(x)$ predikatning chinlik to‘plami $CI_A \bigcup I_B$ to‘plamdan iborat bo‘ladi. Demak, bu predikatning yolg‘onlik to‘plami $C(CI_A \bigcup I_B) = (I_A \bigcap CI_B)$ to‘plamdan iborat. Oxirgi $I_A \bigcap CI_B$ to‘plam faqat $I_A \subset I_B$ bo‘lgandagina bo‘sh to‘plam bo‘ladi. Shunday qilib, $A(x) \to B(x)$ predikat $x \in E$ ning hamma qiymatlarida $A(x)$ predikatning chinlik to‘plami $B(x)$ predikat chinlik to‘plamining qism to‘plami, ya’ni $I_A \subset I_B$ bo‘lganda va faqat shundagina chin bo‘ladi. Bu holda $B(x)$ **predikat** $A(x)$ **predikatdan mantiqiy kelib chiqadi** deb aytiladi. $B(x)$ predikat $A(x)$ predikat uchun **zaruriy shart** va $A(x)$ esa $B(x)$ uchun **yetarli shart** deb ataladi. Masalan, ushbu «Agar x natural son bo‘lsa, u holda y butun son bo‘ladi» teoremada $B(x)$: «x – butun son» predikati $A(x)$: «x – natural son» predikatidan mantiqiy kelib chiqadi va «x – natural son» predikati «x – butun son» predikati uchun yetarli shart bo'ladi.

Shunday hollar mavjudki, bularda

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \tag{6}$$

va

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)) \tag{7}$$

o'zaro teskari teoremalar chin bo'ladi. Bu hol faqat $I_A = I_B$, ya'ni $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar teng kuchli predikatlar bo'lgandagina o'rinlidir.

Qaralayotgan holda (1) teoremaga asosan $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun yetarli shart va (2) teoremadan $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun zaruriy shart ekanligi kelib chiqadi. Demak, agar (1) va (2) teoremalar chin bo'lsa, u holda $A(x)$ shart $B(x)$ uchun ham yetarli, ham zaruriy shart bo'ladi. Xuddi shu kabi bu holatda $B(x)$ shart $A(x)$ uchun yetarli va zaruriy shart bo'ladi. Biz ayrim vaqtlarda «zarur va yetarli» mantiqiy bog'lovchilar o'rnida «shunda va faqat shunda» mantiqiy bog'lovchilarini ishlatamiz. Bu yerda (1) va (2) mulohazalar chin bo'lganligi uchun quyidagi mulohaza ham chin bo'ladi:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \wedge \forall x \in E(B(x) \to A(x)) =$$
$$= \forall x \in E(A(x) \leftrightarrow B(x)).$$

5- misol. Ushbu teorema: «Agar x son 6 ga qoldiqsiz bo'linsa, u holda x son 3 ga qoldiqsiz bo'linadi» chindir. $A(x)$: «x son 6ga qoldiqsiz bo'linadi» predikati va $B(x)$: «x son 3ga qoldiqsiz bo'linadi» predikati bo'lsin. $B(x)$ predikat $A(x)$ predikatdan mantiqiy kelib chiqadi, ya'ni $A(x) \to B(x)$. $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun yetarli, $B(x)$ predikat esa $A(x)$ predikat uchun zaruriy shartdir.

Endi quyidagi teskari teoremani tahlil qilamiz. «Agar x son 3ga qoldiqsiz bo'linsa, u holda x son 6ga qoldiqsiz bo'linadi» noto'g'ridir (yolg'ondir). Shuning uchun bu yerda $B(x)$ predikat $A(x)$ predikat uchun yetarli shart, $A(x)$ predikat esa $B(x)$ predikatga zaruriy shart bo'la olmaydi. ■

5.6.5. Teskarisini (aksini) faraz qilish usuli bilan isbotlash. Teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlash quyidagi sxema orqali olib boriladi:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \tag{8}$$

teorema noto'g'ri, ya'ni shunday x o'zgaruvchi mavjudki, $A(x)$ shart chin va $B(x)$ xulosa yolg'on deb faraz qilinadi. Agar bu farazdan mantiqiy fikrlash natijasida qarama-qarshi tasdiq kelib chiqsa, u holda qilingan faraz noto‘g‘ri ekanligi va teoremaning to‘g‘riligi hosil bo‘ladi.

6- misol. Yuqoridagi sxemadan foydalanib (1) teoremaning chinligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, (1) teoremaning noto‘g‘riligi (yolg‘onligi) (farazga ko‘ra) $\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))}$ formulaning chinligini ko‘rsatadi.

(1) teoremani noto‘g‘ri deb qabul qilgan farazimizdan kelib chiqadigan qarama-qarshi tasdiq $D \wedge \overline{D}$ kon’yunksiyadan iborat bo‘ladi, bu yerda D – biror mulohaza. Shunday qilib, teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlash sxemasi $\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))} \to D \wedge \overline{D}$ formulaning chinligini isbotlashga keltirildi. Oxirgi formula (8) fomulaga teng kuchlidir. Haqiqatan ham,

$$\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))} \to D \wedge \overline{D} \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))}} \vee D \wedge \overline{D} \equiv \forall x \in E(A(x) \to B(x)). \blacksquare$$

5.6.6. Aksiomatik predikatlar hisobi haqida. Aksiomatik predikatlar nazariyasini ham xuddi aksiomatik mulohazalar nazariyasi kabi yaratish mumkin. Bu yerda quyidagilarni ko‘rsatish zarur:

1. Predikatlar hisobi formulasining ta’rifi predikatlar mantiqi formulasining ta’rifi bilan bir xil.

2. Predikatlar hisobi aksiomalar sistemasini tanlashni (xuddi mulohazalar hisobidagidek) har xil amalga oshirish mumkin. Shunday aksiomalar sistemasidan bittasi quyidagi: mulohazalar hisobining o‘n bir aksiomasi (4ta guruh aksiomalar) va ikkita qo‘shimcha:

$$\forall x(F(x) \to F(x)),\ F(t) \to \exists x F(x)$$

aksiomalardan iborat sistema bo‘lishi mumkin, bu yerda t o‘zgaruvchi x o‘zgaruvchini o‘z ichiga olmaydi.

3. Mulohazalar hisobidagi keltirib chiqarish qoidasiga yana ikkita qoida qo‘shiladi:

a) umumiylik kvantorini kiritish qoidasi –

$$\frac{F \to G(x)}{F \to \forall x G(x)};$$

b) mavjudlik kvantorini kiritish qoidasi –

$$\frac{G(x) \to F}{\exists x G(x) \to F},\ \text{agar } F\ \ x \text{ ga bog‘liq bo‘lmasa.}$$

4. Xulosa va isbotlanuvchi formula tushunchalari xuddi mulohazalar hisobidagi kabi aniqlanadi.

5. Xuddi hamma aksiomatik nazariyalardagidek ushbu muammolar ko‘riladi:

a) yechilish, b) zidsizlik, d) to‘liqlik, e) erkinlik.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi ta’riflarni predikatlar mantiqi tilida yozing:

a) Chiziqli tartiblangan to‘plam (tartiblangan to‘plam chiziqli deb ataladi, agar shu to‘plamning har qanday x va y elementlari uchun yo $x = y$, yo $x < y$, yoki $x > y$ bo‘lsa).

b) Juft funksiya ($f(x)$ juft funksiya deb ataladi, agar uning aniqlanish sohasi koordinata boshiga nisbatan simmetrik va aniqlanish sohasining har bir x elementi uchun $f(x) = f(-x)$ bo‘lsa).

2. Quyida berilgan jumlalardagi nuqtalar o‘rniga yo «zarur, ammo yetarli emas», yo «yetarli, ammo zarur emas», yo «zarur emas va yetarli emas» yoki, qayerda mumkin bo‘lsa, «zarur va yetarli» so‘zlarini shunday qo‘yingki, hosil bo‘lgan mulohazalar chin bo‘lsin:

a) To‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lishi uchun uning diagonallarining uzunligi teng bo‘lishi ... .

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ bo‘lishi uchun $x = 3$ bo‘lishi ... .

d) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi bo‘lishi uchun $f(x)$ chegaralangan bo‘lishi ... .

e) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi bo‘lishi uchun $[a,b]$ segmentda $f(x)$ uzluksiz bo‘lishi ... .

f) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘lishi ... .

3. Quyidagi tasdiqlarning (teoremalarning) noto‘g‘riligini isbot qiling:

a) Agar funksiya biror nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda u shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi.

b) Agar sonli qatorning n- hadi nolga teng bo‘lsa, u holda bu qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

d) Agar to‘rtburchakning diagonallari teng bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi.

e) Agar funksiya $[a,b]$ yopiq intervalda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda u shu intervalda uzluksiz bo‘ladi.

4. Ushbu kvantorli mulohazalarning inkorlarini toping:

a) $\forall x \exists y F(x,y)$; b) $\forall x \exists y \forall z A(x,y,z)$;

d) $\forall x[F(x) \vee \overline{\forall y B(x,y)}]$; e) $\exists x \exists y \forall z[\overline{A(x,y)} \wedge B(y,z)]$;

f) $\exists x A(x,z) \wedge \exists x \forall y B(x,y) \to \forall x \forall y \overline{C(x,y,z)}$;

g) $\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$; h) $\forall x(A(x) \to \forall y B(y))$;

i) $\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge \overline{R(x)})$;

j) $\exists x(R(x) \leftrightarrow P(x))$; k) $\forall x \exists y \forall z(P(x,y,z) \to Q(x,y,z))$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Matematik ta’rif va teoremalarni predikatlar mantiqi tili vositasi bilan ifodalashni bilasizmi?

2. Sonlar ketma-ketligi limitining ta’rifini predikatlar mantiqi tili vositasida qanday ifodalash mumkin?

3. Funksiyaning nuqtadagi limiti va uzluksizligi ta’riflari predikatlar mantiqi tili vositasida qanday ifodalanadi?

4. O‘suvchi funksiyaning va chegaralangan funksiyaning ta’riflarini predikatlar mantiqi tili vositasida ifodalay olasizmi?

5. Qarama-qarshi tasdiqlarni tuzish uchun nima qilish kerak?

6. To‘g‘ri, teskari va qarama-qarshi teoremalar bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?

7. Yetarli va zaruriy shartlar deganda nimani tushunasiz?

8. Teskarisini (aksini) faraz qilish usuli bilan isbotlash sxemasini yoza olasizmi?

9. Aksiomatik predikatlar nazariyasini qanday yaratish mumkin?

10. Predikatlar hisobi formulasining ta’rifi qanday kiritilishi mumkin?

VI BOB
MATEMATIK NAZARIYALAR

Ushbu bobda birinchi tartibli matematik nazariyaning tili, term va formulalari tushunchasi, mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar, keltirib chiqarish qoidasi, nazariyada isbotlash tushunchasi, tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi, deduksiya teoremasi, nazariya tilining interpretatsiyasi (talqini), berilgan interpretatsiyada formulalarning chinlik qiymatlari, interpretatsiyaning izomorfizmligi, nazariyaning modeli, qat'iyligi, zidsizlik, to'liqlilik va yechilish muammolari, predikatlar hisobining zidsizligi, natural sonlar nazariyasi, Gyodelning to'liqsizlik haqidagi teoremasi singari masalalar yoritilgan.

Mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobida formulaning tavtalogiya bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlashning samarali usullaridan biri chinlik jadvalidir. Ammo predikatlar mantiqida bu holat batamom o'zgaradi. Predikatlar mantiqida ixtiyoriy formulaning umumqiymatli yoki umumqiymatli emasligi haqidagi masalani yechadigan samarali usul mavjud emas. Shuning uchun ham predikat va u bilan bog'liq kvantor tushunchalaridan foydalanadigan matematik nazariyalarda aksiomatik usullardan foydalanish zarur bo'lib qoladi.

Berilgan aksiomalar sistemasi negizida qurilgan **aksiomatik nazariya** deb shu aksiomalar sistemasiga tayanib isbotlanuvchi hamma teoremalar majmuasiga aytiladi. Aksiomatik nazariya **formal** va **formalmas** nazariyalarga bo'linadi.

Formalmas aksiomatik nazariya nazariy-to'plamiy mazmun bilan to'ldirilgan bo'lib, keltirib chiqarish tushunchasi aniq berilmagan va bu nazariya asosan fikr mazmuniga suyanadi.

Qaralayotgan aksiomatik nazariya uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsa, ya'ni:

1) nazariyaning tili berilgan;

2) formula tushunchasi aniqlangan;

3) aksiomalar deb ataladigan formulalar to'plami berilgan;

4) nazariyada keltirib chiqarish qoidasi aniqlangan bo'lsa, formal aksiomatik nazariya aniqlangan deb hisoblanadi.

Matematik nazariyalar orasida **birinchi tartibli nazariya** alohida o'rin tutadi. Bu nazariya yuqori tartibli matematik nazariyalardan quyidagi xususiyatlari bilan farq qiladi:

– predikatlar va funksiyalar bo'yicha kvantor amallari (operatsiyalari) bajarilmaydi;

– argumentlari boshqa predikatlar va funksiyalarni qabul qiluvchi predikatlar mavjud emas.

Birinchi tartibli matematik nazariya boshqa bir qator ma'lum matematik nazariyalarni ifodalash uchun yetarlidir.

6.1. Birinchi tartibli til. Term va formulalar

Term. Formula. So'z. Bo'sh so'z. Nazariyaning tili. Birinchi tartibli til. Tilning signaturasi. Funksional harflar. Predikat harflar. Birinchi tartibli nazariyaning simvollari. Predmet o'zgaruvchilar. Predmet konstantalar. Kvantorning ta'sir etuvchi sohasi.

1- ta'rif. *Har qanday simvollarning bo'sh bo'lmagan chekli to'plami **alfavit** deb, alfavitning simvollari esa **harflar** deb ataladi.*

2- ta'rif. *Qaralayotgan A alfavit harflarining chekli ketma-ketligi A **alfavitdagi so'z** deb ataladi. Harflarning bo'sh ketma-ketligi **bo'sh so'z** deb ataladi va $\wedge$ bilan belgilanadi.*

3- ta'rif. *Agar A alfavitdagi $a_1a_2...a_n$ va $b_1b_2...b_k$ so'zlar uchun $n=k$ va $a_1=b_1$, $a_2=b_2,...,$ $a_n=b_k$ bo'lsa, bu so'zlar **teng** deb ataladi va $a_1a_2...a_n=b_1b_2...b_k$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda n son **so'zning uzunligi** deb ataladi.*

4- ta'rif. *Agar biror T nazariyaning alfaviti $A(T)$ bo'lsa, u holda $A(T)$ alfavitdagi $E(T)$ so'zlar to'plami T **nazariyaning ifodalar to'plami** deb ataladi.*

5- ta'rif. *$<A(T),E(T)>$ juftlik T **nazariyaning tili** deb ataladi.*

Birinchi tartibli tillar birinchi tartibli nazariyalarda qo'llaniladi.

Birinchi tartibli nazariyaning simvollari quyidagilardan iborat:

$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ – mantiqiy amallar;

$\forall, \exists$ – kvantor amallari;

(,) – qo'shimcha simvollar;

A_j^n $(n, j \geq 1)$ – n joyli predikat harflarning sanoqli to'plami, bu yerda yuqori indeks joyning sonini va quyi indeks predikat harfining raqamini bildiradi;

f_j^n $(n, j \geq 1)$ – chekli (bo'sh bo'lishi ham mumkin) yoki sanoqli funksional harflarning to'plami, bu yerda yuqori indeks funksiya tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilar soni va quyi indeks funksional harfning raqamini bildiradi;

a_i $(i \geq 1)$ – chekli (bo'sh bo'lishi ham mumkin) yoki sanoqli predmet konstantalar to'plami.

Mantiqiy amallar zanjiri ham funksional harflar sifatida qaralishi mumkin.

6- ta'rif. *Predikat harflar to'plami, funksional harflar va konstantalar to'plami bilan birgalikda berilgan nazariya tilining **signaturasi** deb ataladi.*

Shunday qilib, birinchi tartibli T nazariyada ayrim yoki hamma funksional harflar va predmet konstantalar va ayrim (ammo hammasi emas) predikat harflar mavjud bo'lmasligi mumkin.

Birinchi tartibli har xil nazariyalar bir-biridan alfavitdagi harflar tarkibi bilan farq qilishi mumkin.

T nazariyani to'liq tavsiflash uchun **term** va **formula** tushunchalarini aniqlashimiz kerak. Term va formula – bu $E(T)$ so'zlar to'plamining ikki sinfidir.

7- ta'rif. 1) *Predmet o'zgaruvchilar va predmet konstantalar termdir;*

2) *agar $r_1, r_2, \ldots, r_n$ lar term, A esa n joyli amalning simvoli bo'lsa, u holda $A_i^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ termdir;*

3) *T nazariyada 1- va 2- bandlarda aniqlanganlardan tashqari hech qanday term mavjud emas.*

Tabiiy interpretatsiyaga (talqinga) asosan term bu ayrim olingan predmetning ismidir. O'zgaruvchilar va predmet konstantalardan tashqari amallarning simvollari vositasida o'zgaruvchilar va predmet konstantalardan hosil qilingan zanjirlar ham term bo'ladi, chunki interpretatsiyaga ko'ra term biror funksiyaning qiymati sifatida aniqlanayapti.

8- ta'rif. 1) *Agar A – n joyli munosabat simvoli (predikat yoki funksiya) va $r_1, r_2, \ldots, r_n$ termlar bo'lsa, u holda $A(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ formula, xususan, agar A – predikat harfi A_i^n bo'lsa, u holda $A_i^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ **elementar formula** deb ataladi;*

2) *agar A va B formulalar bo'lsa, u holda $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\overline{A}$ ham formuladir;*

3) *agar A formula va y harf A formulaga erkin kiruvchi yoki A tarkibiga kirmagan predmet o'zgaruvchisi bo'lsa, u holda $\forall yA$, $\exists yA$ ifodalar formula bo'ladi. Bu holda A **kvantorning ta'sir etuvchi sohasi** deyiladi;*

4) *1–3- bandlarda aniqlanganlardan tashqari boshqa hech qanday formula mavjud emas.*

6.2. Mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar. Keltirib chiqarish qoidasi

Mantiqiy aksiomalar. Maxsus aksiomalar. Keltirib chiqarish qoidasi. Xulosa qoidasi. Umumlashtirish qoidasi.

6.2.1. Mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar. Birinchi tartibli nazariya aksiomalari ikki sinfga: mantiqiy va xos aksiomalarga bo'linadi.

Mantiqiy aksiomalar: A, B va C lar T nazariyaning qanday formulalari bo'lishidan qat'i nazar quyidagi formulalar T ning **mantiqiy aksiomalari** bo'ladi:

1) $A \to (B \to A)$; (1)

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$; (2)

3) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$; (3)

4) $\forall x_i A(x_i) \to A(t)$, bu yerda $A(x_i)$ – berilgan T nazariyaning formulasi, t esa $A(x_i)$ formulada erkin bo'lgan T nazariyaning termi. Ta'kidlash kerakki, t term x_i bilan mos kelishi ham mumkin, u holda $\forall x_i A(x_i) \to A(x_i)$ aksiomaga ega bo'lamiz;

5) agar x_i predmet o'zgaruvchi A formulada erkin bo'lmasa, u holda $\forall x_i (A \to B) \to (A \to \forall x_i B)$.

Oldingi bobda XI aksiomali klassik mulohazalar hisobi o'rganilgan edi. Ammo kam aksiomali mulohazalar hisobini ham yaratish mumkin (masalan, 1–3- mantiqiy aksiomalar asosida).

Xos aksiomalar. Xos aksiomalarni umumiy holda tavsiflash mumkin emas, chunki ular bir nazariyadan ikkinchi nazariyaga o'tishda o'zgaradi, ya'ni har bir nazariyaning o'zigagina xos aksiomalari bo'ladi.

Birinchi tartibli nazariya xos aksiomalarga ega emas. Bu nazariya sof mantiqiy nazariyadir. Bu nazariya **birinchi tartibli predikatlar hisobi** deb yuritiladi. Ko'pchilik aksiomatik nazariyalarda tenglik tushunchasidan foydalaniladi. U ikki joyli predikat $<< x = y >>$ sifatida kiritiladi. Shu sababli aksiomalar qatoriga ikkita xos aksioma kiritiladi:

1) $\forall x (x = x)$;

2) agar x, y, z har xil predmet o'zgaruvchilar va $F(z)$ formula bo'lsa, u holda $\forall x \forall y (x = y \to F(x) = F(y))$.

6.2.2. Keltirib chiqarish qoidasi. Xuddi mulohazalar hisobidagidek, H formulalar majmuasida keltirib chiqarish tushunchasidan foydalanamiz. H formulalar majmuasiga kiruvchi mulohazalarni (formulalarni) **shartlar** deb ataymiz. Agar H majmuadan keltirib chiqarilgan ifodaning oxirida A mulohaza (formula) joylashgan bo'lsa, u holda A mulohaza H dan **keltirib chiqarilgan** deb aytamiz va $H \vdash A$ ko'rinishda yozamiz. Xususan, $H = \varnothing$ bo'lsa, u holda $\vdash A$ ko'rinishda yoziladi.

Birinchi tartibli nazariyaning keltirib chiqarish qoidasi tarkibiga ushbu ikkita qoida kiradi.

1. Xulosa qoidasi (yoki **modus ponens**):

$$\frac{\vdash A, \ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

2. Umumiylik kvantori bilan bog'lash qoidasi (yoki **umumlashtirish qoidasi**):

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x_i A}.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Qanday shartlar bajarilganda aksiomatik nazariya formal aksiomatik nazariya bo'lishini aniqlang.

2. Birinchi tartibli nazariya yuqori tartibli matematik nazariyalardan qanday xususiyatlari bilan farq qilishini izohlang.

3. Mantiqiy amallar zanjiri ham funksional harflar sifatida qaralishi mumkinligini isbotlang.

4. Agar $\vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \to B$ bo'lsa, u holda $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ bo'lishini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Aksiomatik nazariya deganda nimani tushunasiz?

2. Formal va formalmas aksiomatik nazariyalar bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?

3. Birinchi tartibli til nima?

4. Terma va formulalar ta'rifini bilasizmi?

5. Funksional va predikat harflar deganda nimani tushunasiz?

6. Birinchi tartibli nazariyaning simvollari qanday aniqlanadi?
7. Predmet o'zgaruvchilar va konstantalar ta'rifini bilasizmi?
8. Kvantorning ta'sir etuvchi sohasi qanday aniqlanadi?
9. Mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar bir-biridan nima bilan faqlanadi?
10. Keltirib chiqarish qoidasi deganda nimani tushunasiz?
11. Xulosa qoidasi qanday ta'riflanadi?
12. Umumiylik kvantori bilan bog'lash qoidasini bilasizmi?

6.3. Algebra, geometriya va analizda mavjud bo'lgan matematik nazariyalar

Qisman tartiblash nazariyasi. Guruhlar nazariyasi. Kesmalar tengligi nazariyasi. Natural sonlarning aksiomatik nazariyasi.

Ushbu paragrafda algebra, tahlil (analiz) va geometriyalarda mavjud bo'lgan matematik nazariyalardan misollar keltiramiz.

6.3.1. Qisman tartiblash nazariyasi. T nazariya bitta A_1^2 predikat harfga ega bo'lsin. Bu nazariya funksional harf va predmet konstantalarga ega bo'lmasin.

Odatda, $A_1^2(x_1,x_2)$ va $\overline{A_1^2(x_1,x_2)}$ formulalar o'rnida $x_1 < x_2$ va $x_1 \nless x_2$ munosabatlar yoziladi.

T nazariya yana ikkita maxsus aksiomalarga ega bo'lsin:

a) $\forall x_1 \overline{(x_1 < x_1)}$ – **irrefleksivlik**;

b) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \to (x_1 < x_3))$ – **tranzitivlik**.

Bu nazariyaning har qanday modeli **qisman tartiblangan struktura (tuzilma)** deb ataladi.

6.3.2. Guruhlar nazariyasi. T nazariya bitta A_1^2 predikat harfga, bitta f_1^2 funksional harfga va bitta a_1 predmet konstantaga ega bo'lsin. Algebrada qabul qilingan belgilashlardan foydalanib,

$$A_1^2(t,s) \text{ o'rnida } t = s, \qquad f_1^2(t,s) \text{ o'rnida } t + s,$$

a_1 o'rnida 0 yozamiz. Bu yerda quyidagi formulalar T nazariyaning maxsus aksiomalari bo'ladi:

a) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3)$ – **assosiativlik**;

b) $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$ – **nolning xususiyati**;

d) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$ – **qarama-qarshi elementning mavjudligi**;

e) $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ – **tenglikning refleksivligi**;

f) $\forall x_1 \forall x_2((x_1 = x_2) \to (x_2 = x_1))$ – **tenglikning simmetrikligi;**

g) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 = x_2) \to ((x_2 = x_3) \to (x_1 = x_3)))$ -**tenglikning tranzitivligi;**

h) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_2 = x_3) \to ((x_1 + x_2 = x_1 + x_3) \wedge (x_2 + x_1 = x_3 + x_1))$ – **tenglikni o'rniga qo'yish**.

Bu nazariyaning har qanday modeli **guruh** deb ataladi. Agar guruhda $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_2)$ chin formula bo'lsa, u holda bu guruh **abel guruhi**[1] yoki **kommutativ guruh** deb ataladi.

Guruhga quyidagilar misol bo'la oladi:

1- misol. M to'plamning o'zini o'ziga barcha o'zaro bir qiymatli akslantirishlari to'plami shu akslantirishlarning superpozitsiyasi amali bilan birgalikda qaralganda guruhga misol bo'la oladi. ■

2- misol. Hamma butun sonlar to'plami Z butun sonlarni qo'shish amali bilan birgalikda qaralganda guruh bo'ladi. ■

3- misol. Tekislikning hamma V_2 vektorlar to'plami vektorlarni uchburchak yoki parallelogramm qoidasi bo'yicha qo'shish amali bilan birgalikda qaralganda guruh bo'ladi. ■

Qisman tartiblash va guruh nazariyalari samarali (effektli) aksiomalashtirilgan nazariyalardir, chunki bu nazariyalarda istalgan formulaning mantiqiy aksioma bo'lishi yoki bo'lmasligini samarali tekshirish imkoniyati bor.

6.3.3. Geometriya (kesmalar tengligi nazariyasi). S – hamma kesmalar to'plami bo'lsin. Bu nazariyada tenglik munosabatini $<< x = y >>$ shaklda yozamiz va uni «x kesma y kesmaga teng» deb o'qiymiz. Nazariyaning maxsus aksiomalari:

1) $\forall x \in S(x = x)$; 2) $\forall_x \forall_y \forall_z ((x = z) \wedge (y = z)) \to (x = y))$.

6.4. Nazariyada isbotlash tushunchasi. Tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi

Isbotlash tushunchasi. Teorema. Isbotlanuvchi mulohaza. Tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi.

6.4.1. Nazariyada isbotlash tushunchasi. Alohida fikrning chinligini (to'g'riligini) asoslash usuli **isbotlash** deb yuritiladi.

1- ta'rif. *Ko'rilayotgan nazariya mulohazalarining* $s_1, s_2, ..., s_k$ *chekli ketma-ketligi uchun bu mulohazalarning har biri yo aksioma, yo shu*

---

[1] Bu ibora Norvegiya matematigi Abel Nils Xenrik nomi bilan bog'liq.

ketma-ketlikning birorta mulohazasidan, yoki ketma-ketlikda o'zidan oldin turgan birorta mulohazadan mantiqning keltirib chiqarish qoidasi orqali hosil etilgan bo'lsa, bu ketma-ketlikka ***isbot (isbotlash)*** *deb ataladi.*

2- ta'rif. *Isbotlashning oxirgisi bo'lgan mulohaza* ***teorema*** *yoki* ***isbotlanuvchi mulohaza*** *deb ataladi.*

6.4.2. Tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi. Ravshanki, har qanday aksioma teorema bo'ladi. Bu teoremaning isboti bir qadamdan iborat bo'ladi.

Teorema. *Agar birinchi tartibli T nazariyaning A formulasi tavtologiyaning xususiy holi bo'lsa, u holda A formula T nazariyaning teoremasi bo'ladi va uni ushbu bobning 2- paragrafidagi (1), (2) va (3) mantiqiy aksiomalar va xulosa qoidasini qo'llash yo'li bilan keltirib chiqarish mumkin.*

Isboti. $x_1, x_2, ..., x_n$ – B formula tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilar majmui va A formula B tavtologiyadan o'rniga qo'yish qoidasi orqali hosil qilingan bo'lsin. Ma'lumki, bu holda B formulani $H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ majmuadan keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun quyidagi qoida bo'yicha o'rniga qo'yish amalini bajaramiz:

1) agar biror x_i o'zgaruvchi B formula tarkibida bo'lsa, u holda har bir keltirib chiqarish formulasi tarkibidagi x_i o'rniga T nazariyaning A formulasini hosil qilish uchun B dagi o'sha x_i o'zgaruvchi o'rnini oladigan formula qo'yiladi;

2) agar biror x_i o'zgaruvchi B tarkibida bo'lmasa, u holda keltirib chiqarish formulalari tarkibidagi shu o'zgaruvchining har bir joyiga T nazariyaning ixtiyoriy bitta formulasi qo'yiladi.

Shunday qilib keltirib chiqarilgan formulalar ketma-ketligi nazariyadagi A formulaning T nazariyada keltirilib chiqarilishi bo'ladi.

Teoremaning isbotida faqatgina ushbu bobning 2- paragrafidagi (1), (2), (3) aksiomalar va xulosa qoidasidan foydalanildi. ■

6.5. Deduksiya teoremasi

Deduksiya teoremasi. Formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish. Deduksiya teoremasining isboti.

6.5.1. Deduksiya teoremasi. Mulohazalar hisobida

$$\frac{H, C \vdash A}{H \vdash C \to A}$$

deduksiya teoremasi o'rinli edi. Ixtiyoriy birinchi tartibli T nazariyada bu teorema ayrim o'zgartirishlarsiz o'rinli bo'lmay qoladi. Masalan, har qanday birinchi tartibli nazariyada $A \vdash \forall xA$ o'rinlidir, ammo har doim ham $A \to \forall xA$ formula isbotlanuvchi bo'lavermaydi. Haqiqatan ham, hech bo'lmaganda $M = \{a, b, ...,\}$ to'plamning ikki elementini qamragan soha berilgan holni qarab bunga ishonish mumkin.

T – predikatlar hisobi va A formula $A_1^1(x)$ ko'rinishda bo'lsin. $A_1^1(x)$ formula faqatgina a element egallagan xususiyatga ega deb interpretatsiya beramiz. U holda $A_1^1(x)$ formula a elementi bo'lgan M to'plamda bajariluvchi bo'ladi, ammo shu bilan birga o'zida $\forall xA(x)$ formula M to'plamda bajariluvchi formula emas.

Mulohazalar hisobidagi deduksiya teoremasining shartlarini biroz kuchsizlantirganimizdagina u birinchi tartibli nazariyada o'rinli bo'ladi. Buning uchun birinchi tartibli nazariyada formulalar majmuasidan formulalarni keltirib chiqarish qoidasini aniqlab olaylik. Shu maqsadda, avvalo, bir yordamchi tasdiqni isbot qilamiz.

H, A formulalar majmuasi va bu majmuadan keltirib chiqarilgan $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalar ketma-ketligini ko'raylik. Bu keltirib chiqarishda B_k formula A formula bilan quyidagi ikki holda **bog'liq bo'ladi** deb aytamiz:

1) B_k formula A formulaning o'zidir va u keltirilib chiqarilgan formulalar tarkibiga H, A formulalar majmuasida mavjud bo'lgan formula sifatida kiritilgan;

2) B_k formula $B_1, B_2, ..., B_n$ keltirilib chiqarilgan formulalardagi o'zidan oldin turgan formulalardan xulosa qoidasi va kvantorni bog'lash yo'li bilan hosil qilingan. O'zidan oldin turgan formulalarning hech bo'lmaganda birortasi A formulaga bog'liq. Masalan, $\{\forall xA \to C, A\}$ formulalar majmuasidan A, $\forall xA$, $\forall xA \to C$, C, $\forall xC$ formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Bu formulalarning har biri A formulaga bog'liq.

Lemma. *H, A formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B$ formulalar ketma-ketligidagi B formula A formulaga bog'liq bo'lmasa, u holda $H \vdash B$.*

Isboti. Lemmaning isbotini matematik induksiya metodi bilan o'tkazamiz.

Baza. $n = 1$ hol uchun lemma to'g'ridir. Haqiqatdan ham, agar H, A formulalar majmuasidan B formula keltirilib chiqarilgan bo'lsa va u A

formulaga bog‘liq bo‘lmasa, u holda yo $B \in H$, yoki B formula isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Ikkala holda ham $H|-B$.

Induksion o‘tish. Endi lemmaning xulosasi $k < n$ uzunlikdagi keltirib chiqarish formulalari uchun to‘g‘ri deb faraz qilamiz va uning n uzunlikdagi keltirib chiqarish formulalari uchun to‘g‘riligini isbot qilamiz. Agar $B \in H$ yoki isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u holda $H|-B$.

Agar B formula o‘zidan oldin turgan bitta yoki ikkita formulalardan keltirib chiqarilgan bo‘lsa, u holda B formula A formulaga bog‘liq bo‘lmaydi, chunki induktiv farazimizga asosan keltirib chiqarish formulalari takibidagi A dan oldin turgan hamma formulalar A ga bog‘liq emas. Demak, $H|-B$. ■

Deduksiya teoremasi. *$H, A|-B$ va H, A formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan B formula mavjud bo‘lsin. A formulaga bog‘liq bo‘lib keltirib chiqarilgan formulalarga kvantor bilan bog‘lash qoidasini qanday qo‘llashimizdan qat’i nazar A formulaga kiruvchi erkin o‘zgaruvchilarning birortasi kvantor bilan bog‘lanmasin. U holda $H, A \to B$.*

Isboti. $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n = B$ formulalar H, A formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan teoremaning shartlarini qanoatlantiruvchi formulalar bo‘lsin. Isbotni matematik induksiya metodi bilan olib boramiz.

Baza. $n = 1$ hol uchun teorema to‘g‘ridir. Haqiqatdan ham, agar B formula H, A majmuaning keltirib chiqarish formulasi bo‘lsa, u holda:

a) yo $B \in H$, b) yo B – isbotlanuvchi formula, d) yoki B formula A formulaning o‘zidir.

a) va b) hollarda $H|-B$ va $B \to (A \to B)$ formula isbotlanuvchi formula bo‘lgani uchun xulosa qoidasiga asosan $H|-A \to B$ natijaga ega bo‘lamiz.

d) holda $A \to B$ formula $A \to A$ formulaga aylanadi, ya’ni isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Shuning uchun $H|-A \to B$ bo‘ladi, bu esa $A \to B$ formulani H dan keltirib chiqarish mumkinligini anglatadi.

Induksion o‘tish. Endi $k < n$ uzunlikdagi keltirib chiqarish formulalari uchun teorema to‘g‘ri bo‘lsin va uni $k = n$ uzunlikdagi keltirib chiqarish formulalari uchun isbot qilamiz. $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B$ formulalar H, A

formulalar majmuasining keltirib chiqarish formulalari bo‘lsa, faqatgina quyidagi hollar yuz berishi mumkin:

a) $B \in H$,

b) B – isbotlanuvchi formula,

d) B formula A formulaning o‘zidir,

e) B formulasi keltirib chiqarish formulalari tarkibidagi o‘zidan oldin keladigan B_i va B_j ($i < j < n$) formulalardan xulosa qoidasiga asosan hosil qilinadi,

f) B formula keltirib chiqarish formulalari tarkibidagi B_i ($i < n$) formuladan kvantorni bog‘lash qoidasiga asosan olinadi.

a), b), d) hollar uchun teorema isboti $n = 1$ hol uchun berilgan isbot bilan bir xildir.

To‘rtinchi e) holni ko‘raylik. Bu yerda B formula ikkita B_i va B_j ($i < j < n$) formulalardan keltirib chiqarilganligi tufayli B_j formula $B_i \to B$ ko‘rinishga ega bo‘ladi va

$$\vdash A \to B_i , \tag{1}$$

$$H \vdash A \to (B_i \to B) \tag{2}$$

tasdiqlar to‘g‘ri bo‘ladi.

$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ formula bilan ifodalanuvchi ikkinchi aksiomadan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\vdash (A \to (B_i \to B)) \to ((A \to B_i) \to (A \to B)) . \tag{3}$$

Murakkab xulosa qoidasidan foydalanib, (3), (2) va (1) formulalardan

$$H \vdash A \to B$$

formulani keltirib chiqaramiz.

Oxirgi beshinchi f) holni ko‘ramiz. H, A formulalar majmuasidan keltirilib chiqarilgan formulalar orasida B_i ($i < n$) shundayki, B formula $\forall x_1 B_i$ bo‘lsin.

Farazimizga ko‘ra $H \vdash A \to B_i$ yo B_i formula A formulaga bog‘liq emas, yoki x_1 o‘zgaruvchi A formulaning erkin o‘zgaruvchisi bo‘lmaydi.

Agar B_i formula A formulaga bog‘liq bo‘lmasa, u holda lemmaga asosan $H \vdash B_i$. Bu $H \vdash B_i$ formulaga kvantorni bog‘lash qoidasini qo'llab $H|-\forall x_1 B_i$ formulani hosil qilamiz, ya'ni $H|-B$. Shundan so'ng $A\to(B\to A)$ formula bilan ifodalanuvchi birinchi aksiomadan foydalanib, $H|-B\to(A\to B)$ formulani keltirib chiqaramiz. Demak, $H|-A\to B$.

Agar x_1 o'zgaruvchi A formulaning erkin o'zgaruvchisi bo'lmasa, u holda $\forall x_1(A\to B_i)\to(A\to\forall x_1 B_i)$ formula bilan ifodalanuvchi beshinchi aksiomadan foydalanamiz. $H|-A\to B_i$ bo'lgani uchun kvantorni bog'lash qoidasidan foydalanib $H|-\forall x_1(A\to B)$ formulani hosil qilamiz. Bu formuladan xulosa qoidasiga asosan $H|-A\to\forall x_1 B_i$ formulani keltirib chiqaramiz. Bundan o'z navbatida $H|-A\to B$ formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, deduksiya teoremasi beshala hol uchun ham to'g'ridir.■

6.5.2. Deduksiya teoremasining natijalari. Amalda deduksiya teoremasidan kelib chiqadigan quyidagi natijalardan foydalanish qulayroqdir:

1- natija. Agar $H, A|-B$ va A ning erkin o'zgaruvchisiga kvantorni bog'lash qoidasini ishlatmasdan keltirib chiqarilgan formulalar mavjud bo'lsa, u holda $H|-A\to B$.

2- natija. Agar A formula yopiq va $H, A|-B$ bo'lsa, u holda $H|-A\to B$.

6.6. Nazariya tilining interpretatsiyasi. Nazariyaning modeli

Interpretatsiya. Formulaga interpretatsiya berish. Berilgan interpretatsiyada formulaning chinlik qiymatlari. Formulaning bajariluvchanligi tushunchasi. Nazariyaning modeli.

6.6.1. Nazariya tilining interpretatsiyasi.

1- ta'rif. *Formula tarkibiga kiruvchi hamma konstantalar, o'zgaruvchilar, funksional va predikat harflarga aniq mazmun va hamma erkin o'zgaruvchilarga o'zgarmas qiymat berishga formula yoki formulalar majmuiga* ***interpretatsiya berish*** *deb ataladi.*

1- misol. $\exists x_1 A_1^2(f_1^2(x_1, a_0), x_2)$ formulaga ikki xil interpretatsiya berishni ko'raylik. Birinchi interpretatsiyada hamma o'zgaruvchilar haqiqiy qiymat oladi, $a_0=1$, $f_1^2(x,y)=x+y$, $A_1^2(x,y)\equiv x<y$ va

erkin o'zgaruvchi $x_2 = 2$ deb hisoblaymiz. U holda quyidagi chin arifmetik mulohazaga ega bo'lamiz: «Shunday x_1 mavjudki, $x_1 + 1 < 2$» ikkinchi interpretatsiyada hamma o'zgaruvchilarning M o'zgarish sohasi ikkita a_0 va a harflardan iborat, erkin o'zgaruvchi $x_2 = a_1$, f_1^2 funksiya va A_1^2 predikat quyidagi 1- va 2- jadvallar bilan berilgan deb hisoblaymiz:

1- jadval

x	y	f_1^2
a_0	a_0	a_0
a_0	a_1	a_0
a_1	a_0	a_1
a_1	a_1	a_0

2- jadval

x	y	$A_1^2(x,y)$
a_0	a_0	yo
a_0	a_1	yo
a_1	a_0	ch
a_1	a_1	yo

U holda x_1 o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan $A \equiv A_1^2(f_1^2(x_1, a_0), a_1)$ predikatning qiymati 3- jadval bilan aniqlanadi. A predikat o'zgaruvchilarining hamma qiymatlar satrida yolg'on qiymat qabul qilganligi uchun $\exists x_1 A(x_1)$ mulohaza yolg'on qiymat qabul qiladi. ■

Demak, istalgan interpretatsiyada formula mulohazaga aylanadi. Bu mulohazaning chinlik qiymatini biz aniqlay olamiz.

M to'plam interpretatsiyaning **predmet sohasi** deb ataladi. Bu to'plam cheklanmagan bo'lishi ham mumkin.

3- jadval

x_1	$y = f_1^2(x_1, a_0)$	$A_1^2(y, a_1)$
a_0	a_0	yo
a_1	a_1	yo

Shunday qilib, **interpretatsiya** deganda tarkibida quyidagicha to'plam va moslik bo'lgan sistemani tushunamiz:

1) **interpretatsiya sohasi** deb ataladigan bo'sh bo'lmagan M to'plam;

2) T nazariya tilining har bir elementiga M to'plamning yagona elementini, aniqrog'i, $< A(T),\ E(T) >$ aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi M to'plamning qism to'plami bo'lgan funksiyani mos qilib qo'yadigan biror moslik.

2-bandni quyidagicha tushunish kerak: har qaysi predikat $A_i^n \in < A(T), E(T) >$ harfga M to'plamning qandaydir n joyli munosabatini, har qaysi funksional $f_i^n \in < A(T), E(T) >$ harfga M to'plamdagi qandaydir n joyli amalni va har qaysi a_i predmet konstantaga esa M to'plamning qandaydir elementi mos qo'yiladi.

Berilgan interpretatsiyada predmet o‘zgaruvchilar M to‘plamdan qiymat oluvchi o‘zgaruvchilar sifatida qaraladi, mantiqiy va kvantor amallari simvollariga bo‘lsa odatdagi mazmun beriladi.

Bunday interpretatsiya uchun:

1) erkin o‘zgaruvchisi bo‘lmagan har qanday formula (yopiq formula) chin yoki yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohazani ifodalaydi;

2) erkin o‘zgaruvchisi bo‘lgan har qanday formula interpretatsiya sohasiga nisbatan biror munosabatni ifodalaydi. Bu munosabat o‘zgaruvchilarning interpretatsiya sohasidagi ayrim qiymatlarida chin, boshqa qiymatlarida esa yolgon qiymat qabul qilishi mumkin.

2- misol. Interpretatsiya sohasi sifatida butun musbat sonlar to‘plamini olaylik va $A_1^2(x_1,x_2)$ predikatga $x_1 \leq x_2$ deb interpretatsiya beraylik. U holda $A_1^2(x_1,x_2)$ predikat $a \leq b$ munosabatni qanoatlantiruvchi hamma tartiblangan (a,b) butun musbat sonlar juftligi uchun chin qiymat qabul qiladi.

$\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$ formula «Har qanday butun musbat x_2 son uchun $x_1 \leq x_2$» degan munosabatni bildiradi. Bu munosabat faqatgina bitta 1 soni uchun chindir.

$\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$ formula bo‘lsa, eng kichik musbat son mavjudligini bildiradi va u butun musbat sonlar to‘plamida chin bo‘ladi. ■

6.6.2. Berilgan interpretatsiyada formulaning chinlik qiymatlari. M sohali qandaydir interpretatsiya berilgan bo‘lsin. G – shu M sohadagi hamma sanoqli ketma-ket keluvchi elementlar to‘plami. $S=(b_1,b_2,...,b_n,...)\in G$ ketma-ketlikda A formulaning **bajariluvchanligi** tushunchasini aniqlaylik.

Qiymatlar sohasi M bo‘lgan hamma termlar to‘plamida aniqlangan bir argumentli (o‘zgaruvchili) S^* funksiyani quyidagicha induktiv aniqlaymiz:

1) agar t term x_i predmet o‘zgaruvchi bo‘lsa, u holda $S^*(t)=b_i$;

2) agar t term x_i predmet konstanta bo‘lsa, u holda $S^*(t)$ bu konstantaning M dagi interpretatsiyasi bilan mos tushadi;

3) agar M sohada g interpretatsiyalanuvchi f_j^n funksional harf va $t_1,t_2,...,t_n$ termlar bo‘lsa, u holda

$$S^*(f_j^n(t_1,t_2,...,t_n))=g(S^*(t_1),...,S^*(t_n)).$$

Shunday qilib, S^* – bu S ketma-ketlik bilan aniqlanadigan va hamma termlar to‘plamini M sohaga akslantiradigan funksiyadir. Boshqacha aytganda, har qanday $S=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ ketma-ketlik va ixtiyoriy t term uchun $S^*(t)$ funksiya M to‘plamning elementidir. Bu element t term ifodasiga kiruvchi hamma x_i o‘zgaruvchilar o‘rniga b_i elementlarni qo‘yish va undan keyin t termning funksional harflariga mos keluvchi hamma interpretatsiya operasiyalarini bajarish natijasida hosil bo‘ladi.

3- misol. t term $f_2^2(x_3, f_1^2, (x_1, a_1))$ va butun sonlar to‘plami interpretatsiya sohasi bo‘lsin, f_2^2 – oddiy ko‘paytma, f_1^2 – qo‘shish va a_1 – 5 soni sifatida interpretatsiyalanadi. U holda ixtiyoriy $S = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ butun sonlar ketma-ketligi uchun $S^*(t)$ funksiya $b_3 \times (b_1 + 5)$ butun sonni ifoda etadi. ■

Endi formulaning induktiv ta’rifiga o‘xshash qilib, **bajarilgan formula** tushunchasini aniqlaymiz:

1) agar A ushbu $A_j^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ elementar formula va B_j^n munosabat unga mos bo‘lgan interpretatsiya bo‘lsa, u holda A formula $B_j^n(S^*(t_1), S^*(t_2), ..., S^*(t_n))$ munosabat B_j^n munosabatga qarashli bo‘lganda va faqat shundagina S ketma-ketlikda **bajarilgan** deb hisoblanadi;

2) agar A formula S da bajarilmagan bo‘lganda va faqat shundagina $\overline{A}$ formula S da bajarilgan bo‘ladi;

3) agar A formula S da bajarilmagan yoki B formula S da bajarilgan bo‘ganda va faqat shundagina $A \to B$ formula S da bajarilgan bo‘ladi;

4) agar A formula S dan faqatgina i komponenti bilan farq qiluvchi G to‘plamning ixtiyoriy ketma-ketligida bajarilgan bo‘lganda va faqat shundagina $\forall x_i A$ formula S da bajarilgan bo‘ladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, A formula ifodasidagi erkin kiruvchi x_i o‘zgaruvchilar o‘rniga b_i ni qo‘yish natijasida hosil bo‘ladigan mulohaza berilgan interpretatsiyada chin qiymatga ega bo‘lsganda va faqat shundagina $S = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ ketma-ketlikda A formula bajarilgan bo‘ladi.

2- ta’rif. *Berilgan interpretatsiyada A formula G ning istalgan ketma-ketligida bajarilgan bo‘lsa, shunda va faqat shundagina u* ***chin*** *deb ataladi.*

3- ta’rif. *Berilgan interpretatsiyada A formula G ning har qanday ketma-ketligida bajarilmagan bo‘lsa, shunda va faqat shundagina u* ***yolg‘on*** *deb ataladi.*

6.6.3. Nazariyaning modeli.

4- ta’rif. *Nazariya tilining interpretatsiyasi shu nazariyaning* ***modeli*** *deb ataladi.*

Boshqacha aytganda, birorta nazariya berilgan bo‘lsa, bu nazariyaning boshlang‘ich tushunchalariga yangi ma’no beramiz. Agar ayrim predmetlar majmuasi va interpretatsiya sifatida olingan ular orasidagi munosabatlar nazariyaning hamma aksiomalarini qanoatlantirsa, u holda u berilgan aksiomatik nazariyaning **modeli** deb ataladi. Masalan, oldingi paragraflarda Bul algebrasini aniqlagan va uning ikkita modelini ko'rsatgan edik: mantiq algebrasi va to'plamlar algebrasi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi shartlar vositasida berilganlarning har biri guruh bo'lishini isbotlang:

a) M to'plamning o'zini o'ziga barcha o'zaro bir qiymatli akslantirishlari to'plami shu akslantirishlarning superpozisityasi amali bilan birgalikda qaralganda.

b) Hamma butun sonlar to'plami Z butun sonlarni qo'shish amali bilan birgalikda qaralganda.

d) Tekislikning hamma V_2 vektorlar to'plami vektorlarni uchburchak yoki parallelogramm qoidasi bo'yicha qo'shish amali bilan birgalikda qaralganda.

2. Agar $H, A \vdash B$ va A ning erkin o'zgaruvchisiga kvantorni bog'lash qoidasini ishlatmasdan keltirib chiqarilgan formulalar mavjud bo'lsa, u holda $H \vdash A \rightarrow B$ ekanligini isbotlang.

3. Agar A formula yopiq va $H, A \vdash B$ bo'lsa, u holda $H \vdash A \rightarrow B$ bo'lishini isbotlang.

4. Interpretatsiyaga va uning sohasiga doir misollar keltiring.

5. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ bo'lishini isbotlang.

6. Agar $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ bo'lsa, u holda $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow B$ ekanligini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qisman tartiblash nazariyasini bilasizmi?
2. Guruhlar nazariyasi deganda nimani tushunasiz?
3. Natural sonlarning aksiomatik nazariyasi qanday ta'riflanadi?
4. Kesmalar tengligi nazariyasi nima?
5. Nazariyada isbotlash tushunchasi haqida nimalarni bilasiz?
6. Isbotlanuvchi mulohaza deb nimaga aytiladi?
7. Tavtalogiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligini qanday tushunasiz?
8. Deduksiya teoremasini bilasizmi?
9. Formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qanday amalga oshiriladi?
10. Nazariya tilining interpretatsiyasi nima?

11. Interpretatsiya va interpretatsiya sohasi deb nimani tushunasiz?

12. Berilgan interpretatsiyada formulalarning chinlik qiymatlari qanday aniqlanadi?

13. Formulaning bajariluvchanligi tushunchasini bilasizmi?

14. Nazariyaning modeli nima?

6.7.Interpretatsiyaning izomorfizmligi. Nazariyaning qat'iyligi

Izomorfizm. Nazariyaning qat'iyligi. Bajariluvchi formula. Izomorf. μ -qat'iy nazariya.

6.7.1. Interpretatsiyaning izomorfizmligi.

1- ta'rif. *Agar birinchi tartibli T nazariyaning berilgan I_1 interpretatsiyasini shu nazariyaning I_2 interpretatsiyasiga o'tkazuvchi (**izomorfizm** deb ataladigan) o'zaro bir qiymatli akslantirish mavjud bo'lib, shu bilan birga:*

1) *agar A_j^n predikat harfning I_1 va I_2 interpretatsiyalari mos ravishda $(A_j^n)^1$ va $(A_j^n)^2$ bo'lganda, M_1 sohadagi $b_1, b_2, ..., b_n$ larning qanday bo'lishidan qat'i nazar, $(A_j^n)^2(g(b_1), g(b_2), ..., g(b_n))$ bajariluvchi bo'lganda va faqat shundagina $(A_j^n)^1(g(b_1), g(b_2), ..., g(b_n))$ bajarilsa;*

2) *agar f_j^n funksional harfning I_1 va I_2 interpretatsiyalari mos ravishda $(f_j^n)^1$ va $(f_j^n)^2$ bo'lganda M_1 sohadagi har qanday $b_1, b_2, ..., b_n$ lar uchun $(f_j^n)^1(b_1, b_2, ..., b_n) = (f_j^n)^2(g(b_1), g(b_2), ..., g(b_n))$ bajarilsa;*

3) *agar predmet konstantaning I_1 va I_2 interpretatsiyalari mos ravishda a_j^1 va a_j^2 bo'lganda, $a_j^2 = g(a_j^1)$ bo'lsa, u holda, I_1 interpretatsiya I_2 interpretatsiyaga **izomorf** deyiladi.*

Ravshanki, agar I_1 va I_2 interpretatsiyalar izomorf bo'lsa, u holda ularning sohalari bir xil quvvatga ega bo'ladi.

Teorema. *Agar g berilgan I_1 va I_2 interpretatsiyalarning izomorfizmi bo'lsa, u holda:*

(1) T nazariyaning A formulasi va M_1 soha elementlari ketma-ketligi $S = (b_1, b_2, ..., b_n)$ ning qanday bo'lishidan qat'i nazar, A formula mos $g(S) = (g(b_1), g(b_2), ..., g(b_n))$ ketma-ketlikda bajariluvchi bo'lganda va faqat shundagina S da bajariluvchi bo'ladi, va, demak,

(2) A formula M_2 sohada chin bo'lganda va faqat shundagina M_1 sohada chin bo'ladi.

Isboti. (2) xulosa (1) xulosadan kelib chiqadi. (1) xulosani A formuladagi kvantorlar va mantiqiy bog'lovchilar soniga qarab induksiya metodi bilan isbotlashni o'quvchiga havola qilamiz. ∎

6.7.2. Nazariyaning qat'iyligi.

2- t a ' r i f. *Agar matematik nazariyaning hamma modellari izomorf bo'lsa, u holda unga **qat'iy matematik nazariya** deb ataladi.*

3- t a ' r i f. μ *– birorta to'plamning quvvati bo'lsin. Agar birinchi tartibli T nazariya:*

(1) hech bo'lmaganda bitta μ quvvatli modelga ega va;

*(2) uning μ quvvatli har qanday ikkita modeli izomorf bo'lsa, u holda bunday birinchi tartibli T nazariyaga μ **-qat'iy nazariya** deb ataladi.*

1- m i s o l. Guruhlar nazariyasi qat'iy nazariya emas, chunki izomorf bo'lmagan guruhlar mavjud. Ammo ayrim quvvatlarda guruhlar nazariyasi qat'iydir. masalan, $\mu = 3$ quvvatda shunday bo'ladi. ■

2- m i s o l. Evklid geometriyasi qat'iy matematik nazariyaga misol bo'la oladi, chunki uning istalgan ikkita modeli izomorfdir. Haqiqatan ham, Evklid geometriyasining istalgan modeli arifmetik model bilan izomorf ekanligini osongina ko'rsatish mumkin.

Evklid geometriyasining ixtiyoriy modelida to'g'ri chiziqni olamiz va unda O nuqtani belgilaymiz. Bundan keyin o'sha chiziqda o nuqtadan farq qiluvchi M nuqtani tanlab olamiz. OM kesmani birlik sifatida qabul qilamiz. To'g'ri chiziqda musbat yo'nalishni tanlab olish natijasida sonli o'qni hosil qilamiz.

O'zaro perpendikulyar bo'lgan sonli to'g'ri chiziqlar **to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi** deb yuritiladi. Bu sistema tekislikdagi har bir nuqtaga shu nuqtaning koordinatalarini o'zaro bir qiymatli ravishda mos qo'yadi. Xuddi shu kabi, bu sistema tekislikdagi har bir to'g'ri chiziqqa uning tenglamasini mos qo'yadi. Evklid geometriyasining boshqa modelida ham tekislikda xuddi shu tarzda ish ko'ramiz.

Evklid geometriyasining har xil modellari o'rtasida izomorfizmni o'rnatish natijasida analitik geometriyani yaratish mumkin. ■

6.8. Nazariyaning zidsizlik, to'liqlilik va yechilish muammolari

Zidsiz nazariya. Ziddiyatga ega bo'lgan nazariya. Zidsizlik muammosi. Absolyut to'liq nazariya. Tor ma'noda to'liq nazariya. To'liqlilik muammosi. Yechilish muammosi. Birinchi tartibli predikatlar. Predikatlar hisobi. Predikatlar hisobining zidsizligi.

6.8.1. Zidsizlik muammosi.

1- t a ' r i f. *Agar T nazariyada shunday S mulohaza topilib, u o'zining inkori $\overline{S}$ bilan birga teorema bo'lsa, u holda T **ziddiyatga ega bo'lgan nazariya** deb ataladi. Aks holda T **zidsiz nazariya** deyiladi.*

Agar T nazariyada S mulohaza topilib, u o'zining inkori $\overline{S}$ bilan birga teorema bo'lmasa, shunda va faqat shundagina u zidsiz nazariya bo'ladi.

T nazariyada keltirib chiqarish qoidasining biri sifatida xulosa qoidasi mavjud bo'lganidan, ziddiyatga ega bo'lgan nazariyaning istalgan mulohazasi teorema bo'ladi. Haqiqatan ham, T nazariyaning istalgan A mulohazasi uchun $S \to (\overline{S} \to A)$ ifoda teorema bo'ladi, chunki bu mulohaza $S \to (\overline{S} \to A)$ tavtalogiyadir. Bu yerda S va $\overline{S}$ ning teorema ekanligini hisobga olgan holda ikki marta xulosa qoidasidan foydalanib, A teoremadir degan xulosaga kelamiz.

Aksiomatik nazariyalarda zidsizlik muammosini ko'p hollarda model tushunchasi orqali yechish mumkin. Haqiqatan ham, agar T nazariya ziddiyatga ega bo'lsa, u holda uning modeli ham ziddiyatga ega bo'ladi, chunki nazariyaning bir-biriga qarama-qarshi bo'lgan juft teoremalari model holida bir-biriga qarama-qarshi bo'lgan mulohazaga aylanadi. Demak, nazariya zidsiz bo'lishi uchun uning ziddiyatdan holi bo'lgan modeli mavjudligini ko'rsatish kerak. Mulohazalar hisobining zidsizligini xuddi shu sxema orqali isbot qilgan edik.

Agar T nazariya uchun shunday interpretatsiyani topish mumkin bo'lsaki, uning interpretasiyasi chekli to'plamdan iborat bo'lsa, u holda bu interpretatsiyada ziddiyat mavjud emasligi masalasini yechish to'g'ridan-to'g'ri shu chekli to'plamni ko'rish bilan hal bo'ladi.

Masalan, bir elementli to'plam a elementga ega bo'lsin. Agar bu to'plamda $a \cdot a = a$ amali aniqlangan bo'lsa, u holda u ziddiyatga ega bo'lmagan guruh nazariyasining modeli bo'ladi. Demak, guruh nazariyasi zidsizdir. Ammo, ko'pincha modelning zidsizligini isbotlash ancha murakkab fikr yuritishni talab qiladi. Bu, ayniqsa, T nazariya faqat cheksiz modellarga ega bo'lgan hollarda ko'proq yuz beradi.

Masalan, agar Evklid geometriyasining tushunchalari Lobachevskiy[1] geometriyasining interpretatsiyasi sifatida foydalanilsa, u holda Lobachevskiy geometriyasining zidsizligi masalasini Evklid geometriyasining zidsizligi masalasiga keltirish mumkin.

Shuni ta'kidlash kerakki, Evklid geometriyasining zidsizligi va haqiqiy sonlar nazariyasining zidsizligi hozirgacha isbot qilingan emas.

6.8.2. To'liqlilik muammosi. Agar biror nazariyaning zidsizligi isbot qilingan bo'lsa (yoki isbot qilinishi mumkin deb hisoblansa), u holda bu nazariya uchun to'liqlilik muammosini qo'yish ma'noga ega bo'ladi.

---

[1] Lobachevskiy Nikolay Ivanovich (Николай Иванович Лобачевский, 1792-1856) – rus matematigi.

2- t a ' r i f . *Agar T nazariyaning istalgan S mulohazasi uchun yo S, yoki uning inkori $\bar{S}$ teorema bo'lsa, u holda bu nazariya* ***absolyut to'liq*** *deb ataladi.*

Bu ta'rifda ushbu hol hisobga olingan: T nazariyadagi istalgan S mulohazasining biror modelidagi interpretatsiyasi yo chin, yoki yolg'on bo'ladi. U holda T nazariyada yo S, yoki $\bar{S}$ teorema bo'lishi kerak.

Bir vaqtda zidsiz va to'liq bo'lgan T nazariya zidsizlikka nisbatan shu ma'noda maksimal bo'ladiki, bu nazariyaga aksioma sifatida shu nazariyada mumkin bo'lgan istalgan (ammo uning teoremasi bo'lmagan) mulohazani qo'shganda, ziddiyatga ega bo'lgan nazariya hosil bo'ladi.

Ko'p matematik nazariyalar bir vaqtda zidsiz va to'liqlilik xususiyatiga ega emas.

3- t a ' r i f . *Aksiomalari qatoriga hamma keltirib chiqarish qoidalarini saqlagan holda, istalgan isbotlanmaydigan tasdiqni qo'shganda, ziddiyatga ega bo'lgan nazariya hosil bo'ladigan aksiomatik nazariya* ***tor ma'noda to'liq*** *deb ataladi.*

Har qanday absolyut to'liq nazariya tor ma'noda ham to'liq bo'ladi. Haqiqatan ham, biror absolyut to'liq nazariya tor ma'noda to'liq bo'lmasin. U holda bu nazariyada isbotlanmaydigan shunday A tasdiq topiladiki, avvalgi aksiomalar va yangi aksioma sifatidagi A tasdiqdan yaratilgan yangi nazariya zidsiz, demak A yangi nazariyaga tegishli bo'ladi. Ikkinchidan, dastlabki nazariyaning absolyut to'liqligidan va unda A isbotlanmaydigan tasdiq bo'lganidan $\bar{A}$ isbotlanadigan tasdiq bo'ladi. Shunday qilib, yangi nazariyada A va $\bar{A}$ isbotlanuvchi bo'ldi, ya'ni qarama-qarshilikka keldik. Demak, farazimiz noto'g'ri va har qanday absolyut to'liq nazariya tor ma'noda ham to'liq bo'lar ekan.

6.8.3. Yechilish muammosi. Yechilish muammosi algoritmik muammo bo'lib, unda berilgan A to'plam uchun shunday algoritm (uni U bilan belgilaymiz) tuzish kerakki, bu algoritm A ni boshqa B to'plamga nisbatan ($A \subset B$) yechuvchi (hal etuvchi) bo'lsin, ya'ni bu U algoritm B ning har bir elementiga tatbiq etiladi hamda $x \in A$ lar uchun $U(x) = 1$, $x \in B \setminus A$ lar uchun esa $U(x) = 0$ deb hisoblanadi.

Yechilish muammosiga oddiy misol sifatida mulohazalar algebrasidagi yechilish muammosini ko'rsatish mumkin, u shunday algoritmni topishdan iboratki, bu algoritm vositasi bilan mulohazalar algebrasidagi har bir formulaning yo aynan chin, yo aynan yolg'on, yoki bajariluvchi ekanligini aniqlash mumkin. Algoritmik muammoning muhim sinfi formal nazariyalar uchun yechilish muammosidir, ya'ni hamma isbotlanuvchi formulalar to‘plami uchun formulalar nazariyasidagi (A to‘plam) nazariyaning hamma formulalar to‘plamiga (B to‘plam) nisbatan yechilish muammosidir. Biz uni mulohazalar hisobining aksiomatik nazariyasi uchun ko‘rgan edik.

6.8.4. Predikatlar hisobining zidsizligi (maxsus aksiomalarsiz nazariya).

4- ta’rif. *Maxsus aksiomalarga ega bo‘lmagan birinchi tartibli nazariya* ***birinchi tartibli predikatlar hisobi*** *deb ataladi.*

Teorema. *Ixtiyoriy birinchi tartibli predikatlar hisobi zidsizdir.*

Isboti. Ixtiyoriy A formuladan quyidagicha o‘zgartirishlar natijasida hosil qilinadigan ifodani $H(A)$ bilan belgilaymiz. A formuladagi hamma kvantor va termlar qavslar va vergullari bilan birgalikda tashlab yuboriladi. Masalan, $\forall x A_1^2(x,y) \to A_1^1(z)$ formula yuqorida ko‘rsatilgan o‘zgartirishlardan keyin $A_1^2 \to A_1^1$ ko‘rinishni oladi, ya’ni $H(\forall x A_1^2(x,y) \to A_1^1(z))$ ifoda $A_1^2 \to A_1^1$ ko‘rinishga, xuddi shu kabi $H(\overline{\exists t A_2^3(x,y,t)} \to A_3^1(z))$ ifoda $\overline{A_2^3} \to A_3^1$ ko‘rinishga keladi.

Ravshanki, $H(\overline{A}) \equiv \overline{H(A)}$ va $H(A \to B) \equiv H(A) \to H(B)$. Osongina ko‘rsatish mumkinki, predikatlar hisobining A formulasi uchun $H(A)$ formula mulohazalar hisobining formulasidir va qandaydir sxema vositasidai 1–5- aksiomalardan hosil qilingan har qanday A aksioma uchun $H(A)$ tavtologiya bo‘ladi. Bu 1–3-aksiomalar shundaygina ko‘zga tashlanib turibdi. $\forall x A(x) \to A(t)$ aksioma uchun $H(\forall x A(x) \to A(t))$ formula $A \to A$ ko‘rinishda bo‘ladi, ya’ni u tavtologiyadir. $\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ aksioma uchun $H(\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x)))$ ifoda $(A \to B) \to (A \to B)$ munosabatga aylanadi, ya’ni bu ham tavtologiyadir.

Agar mulohazalar hisobidagi xulosa qoidasini A, $A \to B$ tavtologiyalarga qo‘llasak, u holda B tavtologiyaga kelamiz. Shunday qilib, agar $H(A)$ va $H(A \to B)$ tavtologiyalar bo‘lsa, u holda $H(B)$ ham tavtologiya bo‘ladi.

H operatsiyani A va $\forall x A$ formulalarga qo‘llash natijasida olingan natijalar bir xil bo‘lganligi uchun, agar $H(A)$ tavtologiya bo‘lsa, u holda $H(\forall x A)$ ham tavtologiya bo‘ladi.

Demak, agar predikatlar hisobida A teorema bo‘lsa, u holda $H(A)$ tavtologiya bo‘ladi.

Yuqoridagilardan shu narsa kelib chiqadiki, agar predikatlar hisobida B va $\overline{B}$ isbotlanuvchi bo‘ladigan shunday B formula mavjud bo‘lsa edi, u holda mulohazalar hisobida $H(B)$ va $H(\overline{B})$ tavtologiya, ya’ni isbotlanuvchi formulalar bo‘lar edi. Ammo bu mumkin emas. Demak, predikatlar hisobi zidsizdir. ■

Ta’kidlaymizki, H operatsiya predikatlar hisobining bir elementli sohaga interpretatsiyasi bilan teng kuchlidir. Predikatlar hisobining hamma teoremalari bu interpretatsiyada to‘g‘ridir (chindir).

6.9. Natural sonlar nazariyasi. Gyodelning to‘liqsizlik haqidagi teoremasi

Peano aksiomalar sistemasi. Natural sonlar nazariyasining maxsus aksiomalari. Aksiomalar sistemasidan kelib chiqadigan natijalar. Gyodelning to‘liqsizlik haqidagi birinchi va ikkinchi teoremalari.

6.9.1. Natural sonlar nazariyasi. Natural sonlar nazariyasining aksiomatik tavsifnomasini 1888- yilda Dedekind[1] tomonidan berilganiga qaramasdan, natural sonlar arifmetikasining aksiomatik tuzilishini ko‘pincha «Peano[2] aksiomalar sistemasi» deb atashadi.

Aksiomatik natural sonlar nazariyasi **tili** alfavitining harfi quyidagi **formal simvollardan** iborat: 0 – konstanta, sonli o‘zgaruvchilar, $=$ – tenglik simvoli, $+$, $\cdot$, $'$ (1 ni qo‘shish) funksional simvollar va $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ (yoki $\overline{}$), $\forall$, $\exists$ – mantiqiy bog‘lovchilardan iborat.

1- ta’rif. *Formal simvollarning chekli ketma-ketligi **formal ifodalar** deb ataladi.*

Masalan, $)x0=$, $=+)xy$ va $xyz)=$, $(x)'+y$ ko‘rinishdagi ifodalar formal ifodalardir.

Formal ifodalar ikki sinfga bo‘linadi: **termlar sinfi** va **formulalar sinfi**.

Konstanta 0 va sonli o‘zgaruvchilardan funksional simvollar orqali **termlar** tuziladi.

2- ta’rif. 1) *0 – termdir;* 2) *$x, y, z, \ldots$ sonli o‘zgaruvchilar termdir;*. 3–5) *agar r va s term bo‘lsa, u holda (r'), $(r)+(s)$ va $(r)\cdot(s)$ ham*

---

[1] Dedekind Yulius Vilgelm Rixard (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831-1916) – olmon matematigi.

[2] Peano (Giuseppe Peano, 1858-1932) – Italiya matematigi, “latino-sine-fleksione” (lotinchadan “so‘zlari o‘zgarmagan lotincha” ma’nosini beradi) nomli xalqaro sun’iy til ijodkori.

term bo'ladi. 6) *1–5- bandlarda aniqlangan termlardan boshqa hech qanday term yo'q.*

Bu nazariyada elementar formulalar termlar va ularning tengliklaridan iborat bo'ladi. Boshqa formulalar elementar formulalardan $\wedge$, $\vee$, $\to$, , $\forall$, $\exists$ mantiqiy bog'lovchilar vositasida hosil qilinadi.

3- ta'rif. 1) *Agar* r *va* s *termlar bo'lsa, u holda* $(r)=(s)$ *formula bo'ladi;*. 2–5) *agar* A *va* B *formulalar bo'lsa, u holda* $A \to B$, $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$ *ham formulalar bo'ladi;* 6–7) *agar* A *formula va* x *o'zgaruvchi bo'lsa, u holda* $\forall x(A)$ *va* $\exists x(A)$ *formulalar bo'ladi*; 8) *1–7- bandlarda aniqlangan formulalardan boshqa hech qanday formula yo'q.*

Formulalar aksiomatik natural sonlar nazariyasida **arifmetik formulalar** deb ataladi.

1- izoh. 2- ta'rifdagi «r» va «s» formal simvollar emas. Ular metatilda foydalaniladigan matematik o'zgaruvchilardir. Shuning uchun «$(r)+(s)$» formal ifoda emas. Agar «r» va «s» o'rniga termlar qo'yilsa, u holda u formal ifoda bo'ladi.

2- izoh. 3- ta'rifdagi «A» va «B» hamda «x» matematik o'zgaruvchilardir. Ularning o'rniga mos ravishda ma'lum qiymatlari qo'yilgandagina, ta'rifdagi ifodalar formulalarga aylanadi.

Peano aksiomalar sistemasi quyidagilardan iborat:

1) 0 – natural son;

2) har qanday x natural son uchun boshqa x' natural son mavjud va uni x son **ketidan keladigan** deb ataladi;

3) har qanday x natural son uchun $0 \neq x'$;

4) agar $x' = y'$ bo'lsa, u holda $x = y$;

5) agar Q biror xossa bo'lib, ayrim natural sonlar bu xossaga ega bo'lishi, boshqa natural sonlar esa bu xossaga ega bo'lmasligi mumkin bo'lsa va agar:

(1) 0 natural son bu xossaga ega va;

(2) har qanday x natural son uchun, agar x son Q xossaga ega bo'lishidan x' natural son ham Q xossaga ega bo'lishi kelib chiqsa, u holda hamma natural sonlar Q xossaga ega bo'lishi kelib chiqadi (induksiya qonuni (prinsipi)).

Bu aksiomalar to'plamlar nazariyasining ayrim fragmentlari bilan birgalikda, E. Landau[1] ko'rsatganidek, nafaqat natural sonlar, balki haqiqiy, ratsional va kompleks sonlar nazariyalarini yaratishga yetarlidir.

---

[1] Edmund Landau (Edmund Georg Hermann (Yehezkel) Landau, 1877-1938) – olmon matematigi.

Ammo bu aksiomalarda intuitiv tushunchalar mavjud, masalan, **xossa tushunchasi**. Bu narsa butun sistemani qat'iy formalizatsiya qilinishiga to'sqinlik qiladi. Shuning uchun Peano aksiomalari sistemasiga asoslangan yangi birinchi tartibli T nazariya yaratamiz. T nazariya elementar arifmetikaning hamma asosiy natijalarini keltirib chiqarishga yetarlidir.

Bu birinchi tartibli T nazariya bitta A_1^2 predikat harf, yagona a_1 predmet konstanta va uchta f_1^1, f_1^2, f_1^3 funksional harflarga egadir. Formal emas arifmetika bilan aloqani uzmaslik uchun uning belgilaridan foydalanib, A_1^2, a_1 va f_1^j ($j=\overline{1,3}$) quyidagicha yozamiz:

a_1 o'rniga 0,
$A_1^2(t,s)$ o'rniga $t=s$,
$f_1^1(t)$ o'rniga t,
$f_1^2(t,s)$ o'rniga $t+s$,
$f_1^2(t,s)$ o'rniga $t \cdot s$, bu yerda t va s – termlar.

T natural sonlar nazariyasi quyidagi maxsus aksiomalarga ega.

1. $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$.
2. $x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'$.
3. $0 \neq (x_1)'$.
4. $x_1' = x_2' \to x_1 = x_2$.
5. $x_1 + 0 = x_1$.
6. $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$.
7. $x_1 \cdot 0 = 0$.
8. $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 \quad x_1$;
9. $A(0) \to (\forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x))$,

bu yerda $A(x)$ – natural sonlar nazariyasining ixtiyoriy formulasi.

1–8- aksiomalar aniq formulalardir, ammo 9- aksioma cheksiz aksiomalar to'plamini tug'diradigan aksiomalar sxemasidan iborat.

Bu aksiomalar sxemasi **matematik induksiya**[1] **prinsipi** deb ataladi va u Peano aksiomalar sistemasidagi 5- aksiomaga umuman mos kelmaydi, chunki 9- aksiomalar sxemasi faqat T nazariyasi formulalari orqali aniqlanadigan sanoqli xossalar to'plami bilan ish ko'radi.

Nazariyaning 3- va 4- aksiomalari Peano aksiomalar sistemasining 3- va 4- aksiomalariga mos keladi.

Peano aksiomalar sistemasidagi 1- va 2- aksiomalar 0 ning va «ketidan keladigan» amalning mavjudligini ta'minlaydi, T nazariyada esa, bularga

---

[1] II bobning 1- paragrafiga qarang.

0 predmet konstanta va f_1^1 funksional harf mos keladi. T nazariyadagi 1- va 2- aksiomalar tenglikning ayrim zaruriy xossalarini ta'minlaydi. Dedekind va Peano bu xossalarni intuitiv aniq deb faraz qilgan edilar. Nazariyadagi 5–8- aksiomalar rekursiv tengliklarni ifodalaydi. Bu aksiomalar qo'shish va ko'paytirish amallarini aniqlaydi.

Dedekind va Peano bu aksiomalarga mos keladigan hech qanday postulatlar[1] ifodasini berishmagan edi, chunki ular intuitiv to'plamlar nazariyasidan foydalangan edilar. To'plamlar nazariyasida T nazariyadagi 5–8- aksiomalarni qanoatlantiruvchi $+$, $\cdot$ amallar chiqariluvchidir.

9- aksiomalar sxemasidan quyidagi induksiya qoidasini hosil qilamiz: agar $A(0)$ va $\forall x(A(x) \to A(x'))$ bo'lsa, u holda $\forall x A(x)$.

T nazariyaning aksiomalar sistemasidan quyidagi natijalar kelib chiqadi. Bu natijalardan formulalarni soddalashtirish va, umuman olganda, teoremalarni oddiyroq isbotlash uchun foydalaniladi.

1- lemma. *T nazariyaning har qanday t, s va r termlari uchun quyidagi formulalar T da teorema bo'ladi.*

1′. $t = r \to (t = s \to r = s)$.

2′. $t = r \to t' = r'$.

3′. $0 \neq t'$.

4′. $t' = r' \to t = r$.

5′. $t + 0 = t$.

6′. $t + r' = (t + r)'$.

7′. $t \cdot 0 = 0$.

8′. $t \cdot r' = (t \cdot r) + t$.

2- lemma. *Har qanday t, s va r termlar uchun quyidagi formulalar T nazariyada teorema bo'ladi:*

a) $t = t$;

b) $t = r \to r = t$;

d) $t = r \to (r = s \to t = s)$;

e) $r = t \to (s = t \to r = s)$;

f) $t = r \to t + s = r + s$;

g) $t = 0 + t$;

h) $t' + r = (t + r)'$;

i) $t + r = r + t$;

j) $t = r \to s + t = s + r$;

---

[1] Postulat – aksiomaning sinonimi.

k) $(t+r)+s=t+(r+s)$;

l) $t=r \rightarrow t\cdot s=r\cdot s$;

m) $0\cdot t=0$;

n) $t'\cdot r=t\cdot r+r$;

o) $t\cdot r=r\cdot t$;

p) $t=r \quad s\cdot t=s\cdot r$.

6.9.2. Gyodelning to'liqsizlik haqidagi teoremasi. Gyodelning to'liqsizlik haqidagi teoremasi deganda Gyodelning quyida ifodalangan ikkita teoremasiga qo'yilgan umumiy nom tushuniladi.

Kurt Gyodel

Gyodelning birinchi teoremasi (to'liqsizlik haqida). *Minimum arifmetikani qamrab olgan har qanday qarama-qarshilikka ega bo'lmagan formal sistemada va, demak, natural sonlar nazariyasida formal yechilmovchi fikr topiladi, ya'ni shunday yopiq* A *formula topiladiki, na* A, *na* $\overline{A}$ *ni sistemada keltirib chiqarish mumkin emas.*

Gyodelning birinchi teoremasi quyidagini bildiradi: arifmetikada qanday aksiomalar tizimi tanlashimizdan qat'iy nazar, formal nazariya tilida ifodalangan natural sonlar haqida shunday mulohaza topiladiki, uni berilgan nazariyada na isbot qilib bo'ladi va na rad etib bo'ladi.

Gyodelning ikkinchi teoremasi (to'liqsizlik haqida). *Tabiiy qo'shimcha shartlar bajarilganda* A *o'rnida ko'rilayotgan sistemaning qarama-qarshilikka ega emasligi haqidagi tasdiqni olish mumkin.*

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Agar g berilgan I_1 va I_2 interpretatsiyalarning izomorfizmi bo'lsa, u holda T nazariyaning A formulasi va M_1 soha elementlari ketma-ketligi $S=(b_1,b_2,...,b_n)$ ning qanday bo'lishidan qat'i nazar, A formula mos $g(S)=(g(b_1),g(b_2),...,g(b_n))$ ketma-ketlikda bajariluvchi bo'lganda va faqat shundagina S da bajariluvchi bo'lishini A formuladagi kvantorlar va mantiqiy bog'lovchilar soniga qarab induksiya metodi bilan isbotlang.

2. Agar I_1 va I_2 interpretatsiyalar izomorf bo'lsa, u holda ularning sohalari bir xil quvvatga ega bo'lishini isbotlang.

3. Evklid geometriyasining qat'iy matematik nazariyaga misol bo'la olishini ko'rsating.

4. Har qanday absolyut to'liq nazariya tor ma'noda ham to'liq bo'lishini isbotlang.

5. Predikatlar hisobining A formulasi uchun $H(A)$ formula mulohazalar hisobining formulasi bo'lishini ko'rsating.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Interpretatsiyaning izomorfizmligi deganda nimani tushunasiz?
2. Nazariyaning qat'iyligini qanday tushunish kerak?
3. Bajariluvchi formula nima?
4. μ -qat'iy nazariya deganda nimani tushunasiz?
5. Zidsiz va ziddiyatga ega bo'lgan nazariyalarga misollar keltira olasizmi?
6. Zidsizlik muammosi deganda nimani tushunasiz?
7. Absolyut to'liq nazariya bilan tor ma'noda to'liq nazariya bir-biridan qanday farq qiladi?
8. To'liqlilik muammosi deganda nimani tushunasiz?
9. Nazariyaning yechilish muammosi nima?
10. Birinchi tartibli predikatlar hisobi va uning zidsizligi haqida nimani bilasiz?
11. Peano aksiomalar sistemasi qanday sistema hisoblanadi?
12. Natural sonlar nazariyasining maxsus aksiomalarini bilasizmi?
13. Aksiomalar sistemasidan qanday natijalar kelib chiqadi?

Gyodelning to'liqsizlik haqidagi birinchi va ikkinchi teoremalarini qanday tushunish kerak?

VII BOB
ALGORITMLAR

Ushbu bobda algoritm tushunchasi va uning o‘ziga xos xususiyatlari, rekursiv va rekursiv sanaluvchi to‘plamlar, Post teoremasi, algoritm tushunchasini aniqlash, hisoblanuvchi funksiyalar, qismiy rekursiv va umumrekursiv funksiyalar, A.Chyorch va S.Klini tezislari, Tyuring mashinalari, Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish, natural sonlarni qo‘shish algoritmi, Evklid algoritmi, algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi, Markovning normal algoritmlari, Markov bo‘yicha qisman hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar, qismiy rekursiv (umumrekursiv) funksiya bilan Markov bo‘yicha hisoblanuvchi (qismiy hisoblanuvchi) funksiya o‘rtasidagi munosabat, normallashtirish prinsipi, algoritmik yechilmovchi muammolar, matematik mantiqda keltirib chiqaruvchanlikni tanish muammosi, o‘z-o‘ziga tatbiq etuvchanlikni tanish muammosi kabi masalalar ko‘riladi.

7.1. Algoritm tushunchasi va uning o‘ziga xos xususiyatlari

Algoritm tushunchasi. Yechuvchi protsedura. Yechilish muammosi. Algoritmning intuitiv ta'rifi, o'ziga xos xususiyatlari, diskretligi, aniqlanuvchanligi, ommaviyligi, natijaviyligi. Algoritm qadamlarining elementarligi.

7.1.1. Algoritm tushunchasi. Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri **algoritm** tushunchasidir. Algoritm so‘zi (ba’zan, bu so‘z algorifm ko‘rinishida yoziladi) IX asrda yashab ijod etgan vatandoshimiz, buyuk matematik Abu Abdullo Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy nomining lotincha “Algorithmi” tarzida buzib yozilishidan kelib chiqqan.

Har biriga “ha” yoki “yo‘q” degan javob berish mumkin bo‘lgan ayrim sanoqli-cheksiz matematik yoki mantiqiy masalalar sinfini ko‘raylik. Chekli son qadamda ushbu sinfdagi har qanday savolga biz javob bera oladigan jarayon (protsedura) mavjudmi? Agar shunday protsedura mavjud bo‘lsa, u holda u berilgan savollar sinfi uchun **yechuvchi protsedura** yoki **yechuvchi algoritm (algorifm)** deb ataladi. Yechuvchi protsedurani izlash muammosi bu sinf uchun **yechilish muammosi** deb ataladi.

Formal sistemalar uchun yechilish muammosini kun tartibiga birinchi qo‘ygan olimlardan Shryoder[1] (1895), Lyovengeym[2] (1915) va Gilbertni[3] (1918) ko‘rsatish mumkin.

1- misol. Quyidagilar yechuvchi algoritmlarga misol bo‘la oladi.

1. Sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish qoidalari.
2. Kvadrat ildiz chiqarish qoidasi.
3. Eng katta umumiy bo‘luvchini topish qoidasi (Evklid algoritmi).
4. Kvadrat tenglamaning yechimini topish qoidasi.
5. n - tartibli ko‘phadning hosilasini topish qoidasi.
6. Ratsional funksiyani integrallash qoidasi. ■

Yuqorida keltirilgan har bir misolda bir xil tipli (turdagi) masalalar sinfi bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bir xil turdagi masalalar sinfi **ommaviy muammo** deb ataladi. Bunday sinflarning masalalari bir biridan faqat ifodasidagi parametrlar bilan farq qiladi. Masalan, $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamaning yechimini topish masalasida a, b va c parametrlar qatnashadi. Ularning qiymatlarini o‘zgartirish yo‘li bilan bir sinfga mansub turli xil masalalarga kelamiz.

Aytilganlarni hisobga olib algoritmning quyidagi intuitiv ta’rifini berish mumkin.

1- ta’rif. *Berilgan ommaviy muam-modagi barcha masalalarni umumiy bir xil shaklda, aniq ma’lum bo‘lgan usul bilan yechish jarayoni **algoritm** deb ataladi.*

David Gilbert

Bunday ta’rifni qat’iy deb hisoblash mumkin emas. Haqiqatan ham, unda aniq mazmuni noma’lum so‘zlar uchraydi. Bu fikr, xususan, «usul» so‘ziga ham tegishlidir. Shuning uchun ham algoritmning bu qat’iy bo‘lmagan ta’rifi **intuitiv** ta’rifdir.

7.1.2. Algoritmning o‘ziga xos xususiyatlari. Endi algoritmning o‘ziga xos xususiyatlarini ko‘rib o‘taylik.

Algoritmning diskretligi. Algoritm – miqdorlarni shunday ketma-ket qurish jarayoniki, boshlang‘ich holatda miqdorlarning dastlabki chekli sistemasi berilgan bo‘lib, har bir navbatdagi momentda miqdorlar sistemasi ma’lum aniqlangan qonun (dastur) asosida oldingi holatdagi miqdorlar sistemasidan hosil qilinadi.

---

[1] Shryoder (Ernst Schröder, 1841-1902) – olmon matematigi.
[2] Lyovengeym (Leopold Löwenheim, 1878-1957) – olmon matematigi.
[3] Gilbert (David Hilbert, 1862-1943) – olmon matematigi.

Algoritmning determinatsiyalanuvchanligi (aniqlanuvchanligi). Boshlang'ich holatdan farq qiluvchi boshqa holatda aniqlangan miqdorlar sistemasi ilgarigi holatlarda hosil qilingan miqdorlar sistemasi orqali bir qiymatli aniqlanadi.

Algoritm qadamlarining elementarligi. Ilgarigi miqdorlar sistemasidan keyingisini hosil qilish qonuni sodda qadamlardan iborat bo'lishi kerak.

Algoritmning ommaviyligi. Boshlang'ich miqdorlar sistemasini ayrim potensial cheksiz to'plamdan tanlash mumkin.

Algoritmning natijaviyligi. Miqdorlarni topish jarayoni chekli bo'lishi va natijani (masalaning yechimini) berishi kerak.

Matematik amallar asosiy rolni o'ynaydigan algoritmlar **sonli algoritmlar** deb yuritiladi. Bundan tashqari, **mantiqiy algoritmlar** ham mavjud. Mantiqiy algoritmlardan biri quyidagi misoldagi o'yinda ifodalangan.

2- misol. Ikki kishi (boshlovchi va uning raqibi) ishtirok etayot-gan o'yinda har bir o'yinchi navbat bilan 15 ta predmetdan yo bitta, yo ikkita, yoki uchta predmetni oladi. Kim oxirgi predmetni olsa, o'sha kishi o'yinda g'olib hisoblanadi. Boshlovchi o'yinda g'alaba qozonishi uchun bu o'yinda qanday strategiyani qo'llash kerakligini aniqlaymiz. Boshlovchiga bu o'yinda yutuq ta'minlaydigan strategiyani mantiqiy algoritm sifatida 1-jadval shaklida ifodalash mumkin.

Haqiqatan ham, boshlovchi bunday strategiya natijasida $3+(4-n)+(4-m)+(4-p)=15-(n+m+p)$ predmet, raqib esa $n+m+p$ predmet oladi, ya'ni ikkalasi birgalikda 15ta predmet olishadi. Oxirgi predmetni albatta boshlovchi olganligi tufayli, u o'yinda yutuqqa erishadi. ■

1-jadval

Yurish raqami	Boshlovchining yurishida olingan predmetlar soni	Raqibning yurishida olingan predmetlar soni
1	3	n
2	$4-n$	m
3	$4-m$	p
4	$4-p$	–

7.2. Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to‘plamlar

Rekursiv, effektiv rekursiv sanaluvchi to‘plam. Post teoremasi. Rekursiv to‘plam bilan effektiv rekursiv sanaluvchi to‘plamlar o‘rtasidagi munosabatlar.

7.2.1. Rekursiv, rekursiv sanaluvchi to‘plam tushunchalari. Biror alfavit berilgan bo‘lsin. Bu alfavitdagi hamma so‘zlar to‘plamini S bilan va S to‘plamning qism to‘plamini M bilan belgilaymiz.

1- ta’rif. *Agar x so‘zning M to‘plamga qarashlilik muammosini hal qila oladigan algoritm mavjud bo‘lsa, u holda M* ***rekursiv to‘plam*** *deb ataladi.*

2- ta’rif. *Agar M to‘plamning hamma elementlarini sanab chiqa oladigan algoritm mavjud bo‘lsa, u holda M* ***effektiv rekursiv sanaluvchi to‘plam*** *deb ataladi.*

7.2.2. Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to‘plamlar xossalari.

1- teorema. *Agar M va L effektiv rekursiv sanaluvchi to‘plamlar bo‘lsa, u holda $M \bigcup L$ va $M \bigcap L$ ham effektiv rekursiv sanaluvchi to‘plam bo‘ladi.*

Isboti. M va L effektiv rekursiv sanaluvchi to‘plamlar bo‘lsin. U holda, 2- ta’rifga asosan, ularning har biri uchun alohida algoritm mavjudki, ular orqali mos ravishda M va L dagi hamma elementlarni sanab chiqish mumkin. $M \bigcup L$ va $M \bigcap L$ to‘plamlarning effektiv sanaluvchi algoritmi M va L to‘plamlarning effektiv sanaluvchi algoritmlarini bir vaqtda qo‘llash natijasida hosil qilinadi. ■

2- teorema (Post teoremasi). *M to‘plamning o‘zi va to‘ldiruvchisi CM effektiv rekursiv sanaluvchi bo‘lganda va faqat shundagina M to‘plam rekursivdir.*

Isboti. a) M to‘plam va uning CM to‘ldiruvchisi effektiv rekursiv sanaluvchi bo‘lsin. U holda, 2- ta’rifga asosan, bu to‘plamlarning elementlarini sanab chiqa oladigan A va B algoritmlar mavjud bo‘ladi. U holda M va CM to‘plamlarning elementlarini sanab chiqish paytida ularning ro‘yxatida x element uchraydi. Demak, shunday C algoritm yuzaga keladiki, u orqali x element M to‘plamga qarashlimi yoki qarashli emasmi degan muammoni hal qilish mumkin. Shunday qilib, M rekursiv to‘plam bo‘ladi.

b) M rekursiv to‘plam bo‘lsin. U holda, 1- ta’rifga asosan, x bu to‘plamning elementimi yoki elementi emasmi degan muammoni hal qiluvchi algoritm mavjud bo'ladi. Bu algoritmdan foydalanib, M va CM to'plamlarga kiruvchi elementlarning ro'yxatini tuzamiz. Shunday qilib, M va CM to'plamlar elementlarini sanab chiquvchi ikkita A va B algoritmni hosil qilamiz. Demak, M va CM to'plamlar effektiv rekursiv sanaluvchi to'plamlar bo'ladi. ■

1- misol. $M = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ natural sonlar kvadratlari to'plami effektiv rekursiv sanaluvchi to'plam bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlaymiz.

M to'plam effektiv rekursiv sanaluvchi to'plam bo'ladi, chunki uning elementlarini hosil qilish uchun ketma-ket natural sonlarni olib, ularni kvadratga ko'tarish kerak. Bu to'plam ham rekursiv bo'ladi. Haqiqatan ham, birorta x natural sonning M to'plamga kirish yoki kirmasligini aniqlash uchun uni tub ko'paytuvchilarga ajratish kerak. Bu usul x natural son biror natural sonning kvadratimi yoki yo'qmi degan savolga javob topish imkonini beradi. ■

2- misol. Tartiblangan natural sonlar juftliklaridan iborat to'plam effektiv rekursiv sanaluvchi ekanligini isbotlaymiz.

Tartiblangan natural sonlar juftliklaridan iborat to'plamning effektiv rekursiv sanaluvchi ekanligini isbotlash uchun diagonal metodi deb aytiluvchi usuldan foydalanamiz. Buning uchun hamma tartiblangan natural sonlar juftliklarini 1- shakldagi ko'rinishda yozamiz.

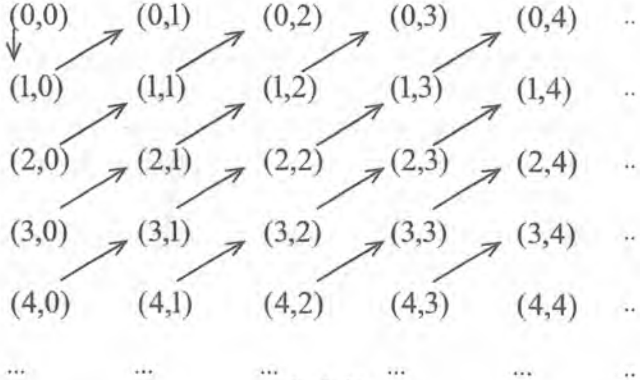
Yuqori chap burchakdan boshlab ketma-ket 1- shaklda ko'rsatilgan yo'nalishlar bo'yicha o'tib to'plam elementlarini sanab chiqamiz. U holda bu juftliklarning

$$(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1)$$
$$(1,2),(0,3),(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4),...$$

ro'yxatini hosil qilamiz. ■

3- teorema. *Rekursiv bo'lmagan effektiv rekursiv sanaluvchi natural sonlar to'plami mavjud.*

Isboti. Effektiv rekursiv sanaluvchi ixtiyoriy U natural sonlar to'plami berilgan bo'lsin. U to'plamning rekursiv emasligini isbotlash uchun, Post teoremasiga (2- teorema) ko'ra, uning CU to'ldiruvchisi effektiv rekursiv sanaluvchi emasligini isbotlash yetarli.



1- shakl

$M_0, M_1, M_2, \ldots$ – hamma rekursiv sanaluvchi natural sonlar to‘plamlaridagi effektiv sanab chiqilgan to‘plamlar bo‘lsin. Demak, har qanday $n \in N$ uchun M_n to‘plamni tiklash mumkin.

Endi U to‘plamning hamma elementlarini sanab chiqadigan A algoritmni kiritaylik. Bu algoritm (m, n) raqamli qadamda $m \in M_n$ ni hisoblab chiqadi. Agar bu son n son bilan ustma-ust tushsa, bu holda A algoritm uni U to‘plamga kiritadi, ya’ni $n \in U \leftrightarrow n \in M_n$.

Bundan ko‘rinib turibdiki, har qanday rekursiv sanaluvchi to‘plamdan CU to‘plam hech bo‘lmaganda bitta element bilan farq qiladi, chunki CU shunday n elementlardan iboratki, $n \notin M_n$. Shuning uchun ham CU rekursiv sanaluvchi to‘plam emas. Demak, Post teoremasiga asosan U rekursiv to‘plam bo‘lmaydi. ■

Izoh. Isbot qilingan bu teorema aslida Gyodelning formal arifme-tika to‘liqsizligi haqidagi teoremasini oshkormas tarzda qamrab olgan.

7.3. Algoritm tushunchasiga aniqlik kiritish

Diofant tenglamasi. Fermaning «buyuk teoremasi». Matiyasevich va Chudnovskiy natijalari. Uch asosiy yo‘nalish. Effektiv hisoblanuvchi funksiya. λ -aniqlanuvchi funksiyalar. Umumrekursiv funksiya. Chyorch va Klini natijalari. Chyorch tezisi. Gyodel natijalari. Tyuring tezisi. Tyuring bo‘yicha hisoblanuvchi funksiyalar. Tyuring mashinalari. Post natijalari. Normal algoritmlar.

7.3.1. Algoritm tushunchasini aniqlashdagi muammolar. Matematika tarixida bir xil turdagi savollar to‘plamiga «ha» yoki «yo‘q» va bir xil turdagi funksiyalar sinfi «hisoblanuvchi» yoki «hisoblanuvchi emas» degan javoblar berilishi mumkin bo‘lgan algoritmlarni izlash uzoq davom etdi. Ayrim vaqtlarda bu izlanishlar natijasiz tugadi. Bu hollarda, tabiiyki, algoritmning mavjudligiga shubha bilan qaraladi.

1- misol. Fermaning «buyuk teoremasi» deb ataluvchi tasdiqni qaraymiz. 1637-yillar atrofida Ferma quyidagi teoremaning isboti o'zida borligini e'lon qildi: «$x^n + y^n = z^n$ *tenglama* $n > 2$ *bo'lganda musbat butun son qiymatli* x, y, z, n *yechimga ega emas*». Bu teorema faqatgina 2000-yilda Angliya olimi Endryu Uals tomonidan isbotlandi. ■

2- misol. 1900-yilda Parijda o'tkazilgan ikkinchi xalqaro matematiklar kongressida olmon matematigi David Gilbert yechilishi muhim bo'lgan 23 matematik muammolar ro'yxatini o'qib berdi. Bu ro'yxatda **Gilbertning 10- muammosi** deb nom olgan quyidagi muammo ham bor edi: «Koeffitsiyentlari butun sonlardan iborat bo'lgan har qanday algebraik tenglamaning butun sonli yechimi mavjudmi?». Gilbert butun sonli koeffitsiyentlardan iborat bo'lgan har qanday algebraik tenglama butun sonli yechimga egami degan muammoni yechadigan (hal qiladigan) algoritm yaratish kerakligini ko'rsatdi. ■

Matematikada butun sonli koeffitsiyentlarga ega bo'lgan algebraik tenglamalar **Diofant tenglamalari**[1] deb ataladi. Masalan,

$$x^2 + y^2 - 2xz = 0,\ 10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$$

ko'rinishdagi tenglamalar diofant tenglamalari bo'ladi, ulardan birinchisi uch o'zgaruvchili va ikkinchisi bir o'zgaruvchili tenglamadir. Umumiy holda tenglama istalgan sondagi o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lishi hamda bunday tenglamalar butun sonli yechimlarga ega bo'lishi ham, ega bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $x^2 + y^2 - 2xz = 0$ cheksiz ko'p butun sonli yechimlarga ega, $10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$ tenglama esa butun sonli yechimga ega emas.

Bir o'zgaruvchili diofant tenglamasining hamma butun sonli yechimlarini topish algoritmi anchadan beri mavjud. Aniqlanganki, agar

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

butun sonli koeffitsiyentlardan iborat tenglamaning ildizi butun son bo'lsa, u holda bu ildiz a_n koeffitsiyentning bo'luvchisi bo'ladi. Bu tasdiqqa asoslanib, quyidagi algoritmni tavsiya etish mumkin:

1) a_n sonning hamma bo'luvchilarini topish: $d_1, d_2, \ldots, d_n$;

---

[1] Bu tushuncha qadimgi yunon matematigi Diofant Aleksandriy (Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς, eramizning 250 y.) nomi bilan bog'liq.

2) a_n sonning har bir bo‘luvchisi uchun $P_n(x)$ ning qiymatini aniqlash: $P_n(d_i)$ $(i=\overline{1,n})$;

3) agar $1,2,...,n$ sonlardan birorta i uchun $P_n(d_i)=0$ bo‘lsa, u holda d_i tenglamaning yechimi bo‘ladi. Agar barcha $i\in\{1,2,...,n\}$ uchun $P_n(d_i)\neq 0$ bo‘lsa, u holda tenglama butun sonli yechimga ega emas (algoritm tugadi).

Gilbertning 10- muammosi bilan dunyoning ko‘p matematiklari deyarli 70 yil mobaynida shug‘ullanishdi va nihoyat, 1968-yilga kelib Sankt-Peterburglik yosh matematik Yu. V. Matiyasevich[1] va sal keyinroq, aniqrog‘i, 1970-yilda rus matematigi G. V. Chudnovskiy[2] bu muammoni hal qilishdi. Aniqlandiki, *qo‘yilgan masalaning yechimini bera oladigan algoritm mavjud emas.*

Algoritmning intuitiv ta’rifi qat’iy emasligiga qaramasdan, u muayyan masalaning yechimini topadigan algoritmning to‘g‘riligiga shubha uyg‘otmaydi.

Matematikada shunday yechimi topilmagan algoritmik muammolar mavjudki, ular yechimga egami yoki ega emasmi ekanligini aniqlash muammosi paydo bo‘ladi. Bu muammoni yechishda algoritmning intuitiv ta’rifi yordam bera olmaydi. Bu hollarda yo algoritmning mavjudligini, yoki uning mavjud emasligini isbotlash kerak bo‘ladi.

Birinchi holda masalani yechadigan jarayonni tasvirlash kifoya. Bu jarayonning haqiqatan ham algoritm ekanligiga ishonch hosil qilish uchun algoritmning intuitiv tushunchasi yetarli bo‘ladi.

Ikkinchi holda algoritmning mavjud emasligini isbotlash kerak. Buning uchun algoritmning nima ekanligini aniq bilish talab qilinadi. XX asrning 30- yillarigacha algoritmga aniq ta’rif berilmagan edi. Shuning uchun algoritm tushunchasiga aniq ta’rif berish keyingi davr matematikasining asosiy masalalaridan biri bo‘lib qoldi. Bu ta’rifni ishlab chiqish jarayonida ko‘p qiyinchilik borligi ma’lum bo‘ldi. Birinchidan, bunday ta’rif algoritm intuitiv ta’rifining mohiyatini aks ettirishi, ikkinchidan esa, u formal aniqlik nuqtai nazaridan mukammal bo‘lishi kerak edi.

Bu muammoning tadqiqotchilari tomonidan algoritmning bir nechta ta’rifi ishlab chiqildi. Ammo vaqt o‘tishi bilan bu ta’riflarning o‘zaro teng kuchliligi aniqlandi. Ana shu ta’rif hozirgi zamon algoritm tushunchasidir.

---

[1] Matiyasevich Yuriy Vladimirovich (Матиясевич Юрий Владимирович, 1947 yilda tug‘ilgan) – rus matematigi. O‘sha vaqtda u atigi 21 yoshda edi.

[2] Чудновский Г.В. Диофантовы предикаты, УМН, 25, № 4, 1970, стр. 185-186.

7.3.2. Algoritm tushunchasini aniqlashga yondashishlar. Algoritm tushunchasini aniqlash bo‘yicha yondashishlarni uch asosiy yo‘nalishga bo‘lish mumkin.

Birinchi yo‘nalish effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasini aniqlash bilan bog‘liq. Bu yo‘nalish bo‘yicha A.Chyorch, K.Gyodel, S.Klini[1] tadqiqot ishlarini olib borishgan.

1932-1935-yillar davomida A.Chyorch va S.Klini tomonidan o‘rganilgan va «λ-aniqlanuvchi funksiyalar» deb atalgan, to‘g‘ri aniqlangan hisoblanuvchi nazariy-sonli funksiyalar sinfining *«λ-aniqlanuvchi funksiyalar» sinfi bizning intuitiv tasavvurimiz bo‘yicha hisoblanuvchi deb qaraladigan hamma funksiyalarni qamrab olishi mumkin* degan fikr tug‘ilganligi 1935-yilda e’lon qilindi. Bu kutilmagan natija edi.

J.Erbranning[2] bir g‘oyasi asosida 1934-yilda K.Gyodel tomonidan aniqlangan va «umumrekursiv funksiyalar» deb atalgan boshqa **hisoblanuvchi funksiyalar** sinfi ham «λ-aniqlanuvchi funksiyalar» xossalariga o‘xshash xossalarga ega edi.

1936-yilda A.Chyorch va S.Klini tomonidan bu ikkita sinf bir xil sinf ekanligi isbotlandi, ya’ni *har qanday λ-aniqlanuvchi funksiya umumrekursiv funksiya bo‘lishi va har qanday umumrekursiv funksiya λ-aniqlanuvchi funksiya ekanligi* tasdiqlandi.

1936-yilda Chyorch quyidagi tezisni e’lon qildi: *har qanday intuitiv effektiv (samarali) hisoblanuvchi funksiyalar umumrekursiv funksiyalardir.*

Bu teorema emas, balki tezisdir: tezis tarkibida intuitiv aniqlangan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi, aniq matematik atamalarda aniqlangan umumrekursiv funksiya tushunchasi bilan aynan tenglashti-rilgan. Shuning uchun bu tezisni isbotlash mumkin emas. Ammo Chyorch va boshqa olimlar tomonidan bu tezisni quvvatlovchi ko‘p dalillar ko‘rsatildi.

Ikkinchi yo‘nalish algoritm tushunchasini bevosita aniqlash bilan bog‘liq: 1936-1937-yillarda, A.Tyuring[3] Chyorch ishlaridan bexabar holda yangi funksiyalar sinfini kiritdi. Bu funksiyalarni «Tyuring bo‘yicha hisoblanuvchi funksiyalar» deb atadilar. Bu sinf ham yuqorida aytilgan xossalarga ega edi va buni **Tyuring tezisi** deb aytamiz. 1937-yilda

---

[1] Stiven Koul Klini (Stephen Cole Kleene, 1909-1994) – AQSh matematigi. U o‘z familiyasini “Kleyni” shaklda talaffuz etishiga qaramasdan, sobiq Sovet Ittifoqida uning ilmiy ishlarini rus tiliga (rus tilidan esa o‘zbek tiliga ham) “Klini” nomi bilan tarjima qilishgan.

[2] Jak Erbran (Jacques Herbrand, 1908-1931) – fransuz matematigi.

[3] Tyuring Alan Matison (Turing Alan Mathison, 1912-1954) – Ingliz matematigi, mantiqchisi, kriptografi.

A.Tyuring *uning hisoblanuvchi funksiyalari* λ*-aniqlanuvchi funksiyalarning o'zi va, demak, umumrekursiv funksiyalarning xuddi o'zi ekanligini isbotladi.* Shuning uchun Chyorch tezisi bilan Tyuring tezisi ekvivalentdir.

1936-yilda E.Post (Tyuring ishlaridan bexabar holda) aynan Tyuring erishgan natijalarga mos keladigan natijalarni e'lon qildi va 1943-yilda, 1920-1922-yillardagi nashr etilmagan ishlariga asoslanib, to'rtinchi ekvivalent tezisni nashr etdi. Shunday qilib, algoritm tushunchasini bevosita aniqlashga va so'ngra uning yordamida hisoblanuvchi funksiya tushunchasini aniqlashga birinchi bo'lib bir-biridan bexabar holda E.Post va A.Tyuring erishdilar.

Post va Tyuring algoritmik jarayonlar ma'lum bir tuzilishga ega bo'lgan «mashina» bajaradigan jarayonlar ekanligini ko'rsatishdi. Ular ushbu «mashinalar» yordamida barcha hisoblanuvchi funksiyalar sinfi bilan barcha qismiy rekursiv funksiyalar sinfi bir xil ekanligini ko'rsatdilar va, demak, Chyorch tezisining yana bitta fundamental tasdig'i yuzaga keldi.

Uchinchi yo'nalish – Rossiya matematigi A.Markov[1] tomonidan ishlab chiqilgan normal algoritmlar tushunchasi bilan bog'liq.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $A=\{4,9,25,49,121,...\}$ tub sonlar kvadratlari to'plami effektiv rekursiv sanaluvchi to'plam bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlang.

2. Algoritm tushunchasi ta'rifini ishlab chiqish jarayonida qanday qiyinchiliklar yuzaga kelishini o'ylab ko'ring.

3. Gilbertning «Koeffitsiyentlari butun sonlardan iborat bo'lgan har qanday algebraik tenglamaning butun sonli yechimi mavjudmi?» kabi ifodalanuvchi 10- muammosini yechish algoritmi mavjud yoki mavjud emasligini o'rganing.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Algoritm tushunchasi ta'rifini ishlab chiqish jarayonida qanday qiyinchiliklar yuzaga kelishi mumkin?

2. Yechuvchi protsedura nima?

3. Yechilish muammosi deganda nimani tushunasiz?

4. Algoritmning intuitiv ta'rifini bilasizmi?

---

[1] Bu yerda bir xil Markov Andrey Andreyevich (Марков Андрей Андреевич) ism-sharifga ega Rossiya matematiklari ota-bola A. A. Markovlarning kichigi (1903-1979) nazarda tutilgan. Ensiklopediyalarda A. A. Markovlarning kattasini (1856-1922) rus, kichigini esa sovet matematigi deb ham atashadi.

5. Algoritmning qanday o‘ziga xos xususiyatlari bor?

6. Algoritmning diskretligi, determinatsiyalanuvchanligi, qadamlarining elementarligi va natijaviyligi deganda nimani tushunasiz?

7. Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to‘plamlar nima?

8. Rekursiv to‘plam bilan effektiv rekursiv sanaluvchi to‘plamlar o‘rtasida qanday munosabatlar bor?

9. Algoritm tushunchasiga aniqlik kiritishning uch asosiy yo‘nalishini ta’riflay olasizmi?

10. Effektiv hisoblanuvchi funksiya deganda nimani tushunasiz?

11. λ-aniqlanuvchi funksiya va hisoblanuvchi funksiya bir-biridan qanday farqlanadi?

12. Umumrekursiv funksiya nima?

13. A.Chyorch va S.Klini erishgan natijalarni bilasizmi?

14. Chyorch tezisini ifodalay olasizmi?

15. K.Gyodel natijalarini bilasizmi?

16. Tyuring tezisi nima?

17. Qanday funksiya Tyuring bo‘yicha hisoblanuvchi funksiya deb ataladi?

18. Tyuring mashinalari deganda nimani tushunasiz?

19. E.Post qanday natijalar olgan?

20. Normal algoritmlar nima?

21. Yu.V.Matiyasevich va G.V.Chudnovskiy Gilbertning 10-muammosini qanday hal qilishgan?

22. Nega Chyorch bilan Tyuring tezislari ekvivalent?

7.4. Hisoblanuvchi funksiyalar. Qismiy rekursiv va umumrekursiv funksiyalar

Arifmetik funksiya, funksiya, boshlang‘ich funksiyalar. Funksiyalar superpozitsiyasi. Primitiv rekursiya sxemasi. Minimallash operatsiyasi (μ - operator). Primitiv rekursiv funksiya. Qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya. Umumrekursiv funksiya. Chyorch tezisi.

7.4.1. Hisoblanuvchi funksiyalar.

1- ta’rif. *Agar birorta funksiyaning aniqlanish sohasi ham, qiymatlar sohasi ham natural sonlar to‘plamining qism to‘plamlari bo‘lsa, u holda bunday funksiya* ***arifmetik (sonli) funksiya*** *deb ataladi. Natural sonlar to‘plamida berilgan har qanday munosabatlarga arifmetik munosabat deyiladi.*

Masalan, natural sonlar to'plamida $f(x,y)=x\cdot y$ (ko'paytma) – ikki argumentli arifmetik funksiyadir, $x+y<z$ – uch argumentli arifmetik munosabat. Arifmetik funksiya va arifmetik munosabat tushunchalari intuitiv tushunchalardir va hech qanday formal sistema bilan bog'langan emas.

Arifmetik (sonli) funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjudligini aniqlash algoritmik muammolardan biridir.

2- ta'rif. *Agar* $g=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjud bo'lsa, u holda u* ***effektiv*** *(**samarali**)* ***hisoblanuvchi funksiya*** *deb ataladi.*

Bu ta'rifda algoritm tushunchasi intuitiv ma'noda tushunilganligi sababli, effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi ham intuitiv tushuncha bo'ladi. Ammo algoritm tushunchasidan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasiga o'tishning o'ziga xos ijobiy tomoni bor. Masalan, algoritm tushunchasiga qo'yilgan hamma talablar (o'ziga xos xususiyatlari sifatida) rekursiv (qaytarish) funksiyalar majmuasi deb ataladigan hamma hisoblanuvchi funksiyalar majmuasi uchun bajariladi.

Gyodel birinchi bo'lib biror formal sistemada aniqlangan hamma sonli funksiyalar sinfini rekursiv funksiyalar sinfi sifatida ifodaladi. 1936-yilda Chyorch ham boshqa asoslarga suyanib rekursiv funksiyalar sinfini tasvirlagan edi. Bu yerda **hisoblanuvchi funksiyalar sinfi** quyidagicha tuziladi.

3- ta'rif. *Quyidagi sonli funksiyalar* ***boshlang'ich*** *(**oddiy, bazis**)* ***funksiyalar*** *deyiladi:*

1) nol funksiya (bekor qilish operatori): har bir x *uchun* $0(x)=0$;

2) birni qo'shish (siljish operatori): har bir x *uchun* $\lambda(x)=x+1$;

3) proyeksiyalash funksiyasi (proyeksiyalash operatori): hamma $x_1,x_2,...,x_n$ *lar uchun,* $I_n^m(x_1,x_2,...,x_n)=x_m$ ($n=1,2,...;\ m=1,2,...,n$).

Argumentlarining barcha qiymatlarida aniqlangan funksiyani **hamma joyda aniqlangan funksiya** deb aytamiz.

Ravshanki, 3- ta'rifdagi uchala boshlang'ich funksiya hamma joyda aniqlangan va intuitiv hisoblanuvchi funksiyalardir.

Quyidagi uchta qoida vositasi bilan mavjud funksiyalardan yangi funksiyalar hosil qilinadi.

Funksiyalar superpozitsiyasi. $\varphi(x_1,x_2,...,x_m)$ va $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$, $f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_m(x_1,x_2,...,x_n)$, funksiyalar berilgan bo'lsin.

4- t a ' r i f. Quyidagi

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$$

tenglik bilan aniqlangan $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya* φ *va* $f_1, f_2, ..., f_m$ ***funksiyalarning superpozitsiyasi*** *deb ataladi.*

Agar biz biror usul bilan φ va $f_1, f_2, ..., f_m$ funksiyalarning qiymatini hisoblash imkoniyatiga ega bo'lsak, u holda ψ funksiyani quyidagicha hisoblash mumkin: $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga mos ravishda $a_1, a_2, ..., a_n$ qiymatlarni beramiz. Hamma $f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ larni hisoblab, $b_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ larni topamiz. Keyin $\varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ ni hisoblab, $c = \psi(a_1, a_2, ..., a_n)$ ni topamiz.

Agar φ va $f_1, f_2, ..., f_m$ lar hamma joyda aniqlangan bo'lsa, u holda ψ funksiya ham hamma joyda aniqlangan bo'lishi aniq. Haqiqatan ham, agar $f_1, f_2, ..., f_m$ larning hech bo'lmaganda birortasi hamma joyda aniqlangan bo'lmasa, u holda ψ funksiya hamma joyda aniqlangan bo'lmaydi. Shu bilan birga ikkinchi tomondan, argumentlarning shunday $a_1, a_2, ..., a_n$ qiymatlari topilishi mumkinki, $b_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ $(i = \overline{1, m})$ bo'lsa, $\varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ ni hisoblab bo'lmaydi. Bu holda ham ψ funksiya hamma joyda aniqlanmagan bo'ladi.

Shunday qilib, agar φ, $f_1, f_2, ..., f_m$ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi bo'lsa, u holda ψ funksiya ham intuitiv hisoblanuvchi bo'ladi.

Shuni ham ta'kidlab o'tamizki, $f_1, f_2, ..., f_m$ funksiyalarning barchasi ham $x_1, x_2, ..., x_n$ argumentlarning hammasidan bog'liq bo'lmasligi mumkin. Bu hollarda ψ funksiyani hosil qilish uchun soxta argumentlardan va $I_n^m(x_1, ..., x_n)$ funksiyalardan foydalanamiz. Masalan, $\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, x)$ funksiya $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ va $F_1(x, y, z) = f_1(x)$, $F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z) = I_3^2(x, y, z)$, $F_4(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)$ funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan.

Primitiv (o'ta sodda) rekursiya sxemasi. $\varphi(x_2, x_3, ..., x_n)$ va $\psi(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ $(n > 1)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Quyidagi tengliklarni qanoatlantiruvchi yangi f funksiyani ko'ramiz:

$$f(0, x_2, x_3, ..., x_n) = \varphi(x_2, x_3, ..., x_n),$$

$$f(y+1,x_2,x_3,...,x_n)=\psi(y,f(y,x_2,...,x_n),x_2,...,x_n), \qquad (1)$$

bu yerda φ funksiya $n-1$, ψ funksiya $n+1$ argumentga, f funksiya esa n argumentga bog'liq funksiyalar.

5- ta'rif. *Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya φ va ψ funksiyalardan (1) munosabat orqali hosil qilinsa, u holda f funksiya φ va ψ funksiyalardan **primitiv (o'ta sodda) rekursiya sxemasi orqali hosil etilgan** deyiladi.*

Agar φ va ψ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda f ham intuitiv hisoblanuvchi funksiya bo'ladi. Haqiqatan ham, $x_1,x_2,...,x_n$ argumentlarning qiymatlar majmuasi $a_1,a_2,...,a_n$ bo'lsa, u holda quyidagilarni ketma-ket topamiz:

$$f(0,a_2,a_3,...,a_n)=\varphi(a_2,a_3,...,a_n)=b_0,$$

$$f(1,a_2,a_3,...,a_n)=\psi(0,b_0,a_2,a_3,...,a_n)=b_1,$$

$$f(2,a_2,a_3,...,a_n)=\psi(1,b_1,a_2,a_3,...,a_n)=b_2 \text{ va hokazo.}$$

Ravshanki, agar φ va ψ funksiyalar argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda f funksiya ham argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'ladi.

Endi primitiv rekursiya sxemasi orqali yangi funksiyalarni hosil qilishni misollarda ko'ramiz.

1- misol. $\varphi(x)=x$ va $\psi(x,y,z)=y+1$ bo'lsin hamda $f(y,x)$ funksiya quyidagi tengliklar orqali aniqlansin:

$$\begin{cases} f(0,x)=x, \\ f(y+1,x)=f(y,x)+1. \end{cases} \qquad (2)$$

$f(y,x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y=5$, $x=2$ qiymatlarida hisoblab chiqaylik. $f(0,2)=\varphi(2)=2$ bo'lgani uchun (2) formulalarning ikkinchisidan ketma-ket ravishda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f(1,2)=\psi(0,2,2)=2+1=3,$$

$$f(2,2)=\psi(1,3,2)=3+1=4,$$

$$f(3,2)=\psi(2,4,2)=4+1=5,$$

$$f(4,2)=\psi(3,5,2)=5+1=6,$$

$$f(5,2)=\psi(4,6,2)=6+1=7.$$

$f(y,x) = y + x$ ekanligini osongina ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z,x) = f(y,x) + z$. Bu tenglikda $y = 0$ deb qabul qilib, $f(z,x) = f(0,x) + z$ yoki $f(z,x) = x + z$ ni hosil qilamiz. ■

2- misol. $f(y,x)$ funksiya quyidagi tengliklar bilan berilgan deylik:

$$\begin{cases} f(0,x) = 0, \\ f(y+1,x) = f(y,x) + x, \end{cases} \tag{3}$$

bu yerda $\varphi(x) = 0$, $\psi(x,y,z) = y + z$.

$f(y,x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y = 2$, $x = 2$ qiymatlari uchun hisoblaymiz. $f(0,x) = \varphi(x) = 0$ bo'lganligi uchun $f(0,2) = \varphi(2) = b_0 = 0$ bo'ladi. Funksiyaning $f(1,2)$ va $f(2,2)$ qiymatlarini ketma-ket topamiz:

$$\begin{cases} f(1,2) = \psi(0,0,2) = b_1 = 0 + 2 = 2, \\ f(2,2) = \psi(1,2,2) = 2 + 2 = 4. \end{cases}$$

Bu misolda $f(y,x) = x \cdot y$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z,x) = f(y,x) + z \cdot x$. Bu tenglikda $y = 0$ deb qabul qilib, $f(z,x) = f(0,x) + z \cdot x$ yoki $f(z,x) = z \cdot x$ ni hosil qilamiz. ■

Minimallash operatsiyasi (μ-operator). Ixtiyoriy $f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Quyidagi masalani ko'rib chiqamiz: x argumentning har qanday qiymatlari uchun y argumentning hech bo'lmaganda shunday bitta qiymatini topish kerakki, $f(x,y) = 0$ bo'lsin. Masalani yana ham murakkabroq holda qo'yamiz: berilgan $f(x,y)$ funksiya va uning muayyan qiymatli x argumenti uchun $f(x,y) = 0$ bo'ladigan y argumentlarning eng kichik qiymatlisini topish kerak bo'lsin. Masalaning yechimi x ga bog'liq bo'lgani uchun $f(x,y) = 0$ bo'ladigan y ning eng kichik qiymati ham x ning funksiyasi bo'ladi, ya'ni

$$\varphi(x) = \mu\, y[f(x,y) = 0] = 0. \tag{4}$$

(4) ifoda quyidagicha o'qiladi: «y shunday eng kichikki, $f(x,y) = 0$».

Xuddi shu tarzda ko'p argumentli $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya aniqlanadi:

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu\, y[f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0]. \tag{5}$$

6- ta'rif. *$f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ funksiyadan $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga o'tish μ **-operatorning tatbig'i** deb ataladi.*

$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani hisoblash uchun quyidagi algoritmni tavsiya etish mumkin.

1. $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ ni hisoblaymiz. Agar $f(x_1, ..., x_n, 0) = 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ deb qabul qilamiz. Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \neq 0$ bo'lsa, u holda navbatdagi qadamga o'tamiz.

2. $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$ ni hisoblaymiz. Agar $f(x_1, ..., x_n, 1) \quad 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ bo'ladi. Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1) \neq 0$ bo'lsa, u holda navbatdagi qadamga o'tamiz va hokazo. ■

Agar y ning hamma qiymatlari uchun $f(x_1, ..., x_n, y) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni **aniqlanmagan funksiya** deb ataymiz.

y argumentning shunday y_0 qiymati mavjud bo'lishi mumkinki, $f(x_1, x_2, ..., x_n, y_0) = 0$ va, demak, eng kichik y mavjudki, $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ bo'ladi; shu vaqtning o'zida, biror z uchun $(0 < z < y_0)$ $f(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ qiymat aniqlanmasligi mumkin. Aniqki, bu holda y ning $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ bo'ladigan eng kichik qiymatini topish jarayoni, y_0 gacha yetib bormaydi. Bu yerda ham $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni aniqlanmagan funksiya deb hisoblaydilar.

3- misol. $f(x, y) = x - y$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya minimizatsiya operatori orqali hosil qilinishi mumkin:

$$f(x, y) = \mu z(y + z = x) = \mu z[I_3^2(x, y, z) + I_3^3(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)].$$

Masalan, argumentlarning $y = 2$, $x = 7$ qiymatlarida $f(x, y)$ funksiyaning qiymatini (ya'ni, $f(7,2)$ ni) hisoblaymiz. Buning uchun $y = 2$ deb olib, x ga ketma-ket qiymatlar beramiz:

$$z = 0, \quad 2 + 0 = 2 \neq 7,$$
$$z = 1, \quad 2 + 1 = 3 \neq 7,$$
$$z = 2, \quad 2 + 2 = 4 \neq 7,$$
$$z = 3, \quad 2 + 3 = 5 \neq 7,$$
$$z = 4, \quad 2 + 4 = 6 \neq 7,$$
$$z = 5, \quad 2 + 5 = 7 = 7.$$

Shunday qilib, $f(7,2)=5$. ■

7- **ta'rif.** *Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani boshlang'ich (oddiy) funksiyalardan superpozitsiya va primitiv rekursiya sxemasi amallarini chekli son marta qo'llash natijasida hosil qilish mumkin bo'lsa, u holda $f(x_1,x_2,...,x_n)$* ***primitiv rekursiv funksiya*** *deb ataladi.*

4- **misol.** Boshlang'ich $0(x)=0$, $\lambda(x)=x+1$, $I_n^m(x_1,x_2,...,x_n)=x_m$ $(1 \le m \le n)$ funksiyalar va $f(x_1,x_2,...,x_n)=a$ $(a \in N)$, $f(x,y)=x+y$, $f(x,y)=x \cdot y$, $f(x,y)=x^y$ $(x^0=1)$ funksiyalar primitiv rekursiv funksiyalar bo'ladi. ■

7.4.2. Qismiy rekursiv va umumrekursiv funksiyalar.

8- **ta'rif.** *Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani boshlang'ich funksiyalardan superpozitsiya, primitiv rekursiya sxemasi va minimallash operatori (μ-operatori) amallarini chekli son marta qo'llash natijasida hosil etish mumkin bo'lsa, u holda $f(x_1,x_2,...,x_n)$* ***qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya*** *deb ataladi.*

8- ta'rif primitiv rekursiv funksiyaning ta'rifidan faqat boshlang'ich funksiyalarga qo'shimcha ravishda μ-operatorini qo'llashga ruxsat berilishi bilan farq qiladi. Shuning uchun ham *har qanday primitiv rekursiv funksiya o'z navbatida qismiy rekursiv funksiya bo'ladi.*

9- **ta'rif.** *Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya qismiy rekursiv va argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda $f(x_1,x_2,...,x_n)$* ***umumrekursiv funksiya*** *deb ataladi.*

Ushbu $\lambda(x)$, $0(x)$, $I_n^m(x)$, $f(y,x)=y+x$, $f(y,x)=x \cdot y$ va $f(y,x)=x \quad n$ funksiyalar umumrekursiv funksiyalardir.

Ushbu bobning 3- paragrafida Chyorch tezisi deb ataluvchi quyidagi tezis o'rganilgan edi.

Har qanday intuitiv hisoblanuvchi funksiya qismiy rekursiv funksiya bo'ladi.

Bu tezisni isbotlash mumkin emasligi yuqorida aniqlangan edi. Chunki u intuitiv hisoblanuvchi funksiya noqat'iy matematik tushunchasini qat'iy aniqlangan qismiy rekursiv funksiya matematik tushunchasi bilan bog'laydi. Ammo, agar shunday intuitiv hisoblanuvchi funsiya tuzish mumkin bo'lsaki, u o'z navbatida qismiy rekursiv funksiya bo'lmasa, u holda bu tezisni rad etish mumkin. Lekin, bunday holning mavjudligini hozirgacha hech kim ko'rsata olmagan.

Teorema. *$g(y_1,y_2,...,y_k)$ primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya va $x_1,x_2,...,x_n$ har xil o'zgaruvchilar bo'lsin. Agar har bir i*

$(1 \le i \le k)$ *uchun* z_i *o'zgaruvchi* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o'zgaruvchilarning biri bo'lsa, u holda* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(z_1, z_2, ..., z_k)$ *funksiya ham primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya bo'ladi.*

Isboti. $z_i = x_{j_i}$ $(1 \le j_i \le n)$ bo'lsin. U holda

$$z_i = I^n_{j_i}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

va

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(I^n_{j_i}(x_1, x_2, ..., x_n), ..., I^n_{j_k}(x_1, x_2, ..., x_n))$$

bo'ladi. Shunday qilib, ψ funksiyani φ, $I^n_{j_i}, ..., I^n_{j_k}$ funksiyalardan superpozitsiya amali orqali hosil qilish mumkin, ya'ni ψ primitiv rekursiv (rekursiv) funksiya bo'ladi. ■

Bu teorema soxta o'zgaruvchilarni kiritish, o'zgaruvchilarning o'rnini almashtirish va ularni aynan tenglashtirish jarayoni primitiv rekursiv va qismiy rekursiv funksiyalarni o'z sinflaridan chiqarmasligini bildiradi.

5- misol. (Soxta argumentlarni kiritish.) Agar $\varphi(x_1, x_3)$ primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_3)$ bo'lsa, u holda $\psi(x_1, x_2, x_3)$ ham primitiv rekursiv funksiya bo'ladi. Bu tasdiqni isbot qilish uchun $z_1 = x_1$ va $z_2 = x_3$ deb belgilab, teoremadan foydalanish kifoya. ■

6- misol. (O'zgaruvchilarning o'rnini almashtirish.) Agar $\varphi(x_1, x_2)$ primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$ bo'lsa, u holda ψ ham primitiv rekursiv funksiya bo'ladi. Bu tasdiqni isbot qilish uchun $z_1 = x_2$ va $z_2 = x_1$ deb belgilab, teoremadan foydalanish kifoya. ■

7- misol. (O'zgaruvchilarni aynan tenglashtirish.) Agar $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ bo'lsa, u holda $\psi(x_1, x_2)$ ham primitiv rekursiv funksiya bo'ladi. Bu tasdiqni $n = 2$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1$ bo'lgan holda teoremadan foydalanib isbotlash mumkin. ■

1- natija. *Nol funksiya* $0(x)$ *primitiv rekursiv funksiyadir.*

2- natija. *Agar* k *biror butun musbat son bo'lsa, u holda* $C^n_k(x_1, x_2, ..., x_n) = k$ *o'zgarmas funksiya primitiv rekursiv funksiyadir.*

3- natija. *Superpozitsiya amalini har bir* f_i *funksiya* $x_1, x_2, ... x_n$ *o'zgaruvchilarning faqat ayrimlaridangina bog'liq bo'lganda ham ishlatish mumkin. Xuddi shunday primitiv rekursiya sxemasida ham* φ *funksiya* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o'zgaruvchilarning ayrimlariga bog'liq bo'lmasligi* *mumkin va ψ funksiya $f(y, x_2, x_3, ..., x_n)$ funksiyaga, hamda shuningdek $x_1, x_2, ..., x_n, y$ o'zgaruvchilarning ayrimlariga bog'liq bo'lmasligi mumkin.*

Shunday qilib, har bir primitiv rekursiv funksiya qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya bo'lgani uchun, qismiy rekursiv funksiyalar sinfi primitiv rekursiv funksiyalar sinfidan kengdir.

Qismiy rekursiv funksiya tushunchasi algoritmlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Shuni ham ta'kidlab o'tamizki, birinchidan, har qanday qismiy rekursiv funksiyaning qiymati mexanik xarakterga ega bo'lgan ma'lum bir protsedura yordamida hisoblanadi va bu protsedura bizning algoritm haqidagi intuitiv tasavvurimizga to'g'ri keladi. Ikkinchidan, hozirgacha qanday muayyan algoritmlar yaratilgan bo'lmasin, ular yordamida qiymatlari hisoblanuvchi sonli (arifmetik) funksiyalar albatta qismiy rekursiv funksiyalar bo'lib chiqdilar. Shuning uchun ham hozirgi paytda qismiy rekursiv funksiya tushunchasi algoritm tushunchasining ilmiy ekvivalenti sifatida qabul qilingan. Buni birinchi bo'lib, yuqorida ta'kidlab o'tganimizdek, ilmiy tezis sifatida A.Chyorch va S.Klini o'rtaga tashladilar.

Xuddi shu kabi har qanday algoritmni mos Tyuring mashinasi yordamida realizatsiya qilish mumkin. Algoritmning ilmiy ekvivalenti qismiy rekursiv funksiya bo'lgani uchun hamma qismiy rekursiv funksiyalar sinfi A bilan Tyuring mashinalari yordamida hisoblanuvchi funksiyalar (Tyuring bo'yicha hisoblanuvchi funksiyalar) sinfi B bilan bir xildir, ya'ni $A = B$.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning primitiv rekursiv va umumrekursiv funksiyalar ekanligini isbotlang:

a) $x + y$, b) x^y, d) $x \cdot y$,

e) $\sigma(x) = \begin{cases} x-1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } x = 1 \text{ bo'lsa}, \end{cases}$

f) $x - y = \begin{cases} x-y, & \text{agar } x \geq y \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } x < y \text{ bo'lsa}, \end{cases}$

g) $|x-y|=\begin{cases} x-y, & \text{agar } x\geq y \text{ bo'lsa,} \\ y-x, & \text{agar } x<y \text{ bo'lsa,} \end{cases}$

h) $sg(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x\neq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$

i) $\overline{sg}(x)=\begin{cases} 1, & \text{agar } x=0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x\neq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$

j) $x!$, k) $\min(x,y)$, l) $\min(x_1,x_2,...,x_n)$,

m) $\max(x,y)$, n) $\max(x_1,x_2,...,x_n)$.

Ko'rsatma. E. Mendelsonning[1] kitobidan foydalaning, 137-138-betlar.

2. $0(x)$ va $I_n^m(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalardan superpozitsiya va primitiv rekursiya sxemasi amallari orqali $x+1$ va $2x$ funksiyalarni hosil qilish mumkin emasligini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Arifmetik funksiya nima?
2. Hisoblanuvchi funksiya deganda nimani tushunasiz?
3. Boshlang'ich funksiyalar qanday aniqlanadi?
4. Funksiyalar superpozitsiyasi nimani anglatadi?
5. Primitiv rekursiya sxemasi qanday sxemadir?
6. Minimallash operasiyasi (μ -operatori) qanday vazifani bajaradi?
7. Primitiv rekursiv funksiya nima?
8. Qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya deganda nimani tushunasiz?
9. Umumrekursiv funksiya rekursiv funksiyadan qanday farq qiladi?
10. Chyorch tezisini bilasizmi?

7.5. Tyuring mashinalari

Ommaviy muammo. Yechish algoritmi. Tyuring mashinasi. Tashqi alfavit. Ichki alfavit. Lenta (mashinaning tashqi xotirasi). Boshqaruvchi kallak. Boshlang'ich axborot. Mashina dasturi. Tyuring funksional sxemasi.

7.5.1. Tyuring mashinasi tushunchasi. Agar qandaydir ommaviy muammoni yechish algoritmi ma'lum bo'lsa, u holda uni realizatsiya qilish

[1] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука. 1976.

uchun shu algoritmda aniq yoritilgan ko‘rsatmalarni ijro qilish zarur. Algoritmni realizatsiya qilish jarayonini avtomatlashtirish g‘oyasi, tabiiyki, inson bajaradigan ishni mashinaga uzatishni taqozo qiladi. Bunday mashinani XX asrning 30- yillarida E.Post va A.Tyuring tavsiya etishgan.

Tyuring mashinasi tushunchasi intuitiv ma’lum bo‘lgan hisoblash protsedurasini elementar operatsiyalarga ajratish natijasida hosil bo‘lgan. Tyuring ta’kidlaydiki, istalgan mumkin bo‘lgan hisoblashni o‘tkazish uchun uning elementar operatsiyalarini qaytarish yetarli.

Tyuring ayrim turdagi nazariy hisoblash mashinasini izohlab berdi. Bu mashina muayyan mexanik qurilma emas, balki «xayoliy» matematik mashinadir. Berilgan ko‘rsatmani bajaruvchi hisoblovchi odamdan yoki mavjud raqamli hisoblash mashinasidan Tyuring mashinasi ikki jihati bilan farq qiladi.

Birinchidan, «Tyuring mashinasi» xato qila olmaydi, ya’ni u og‘ishmay (chetga chiqmasdan) ko‘rsatilgan qoidani be kami-ko‘st bajaradi.

Ikkinchidan, «Tyuring mashinasi» potensial cheksiz xotira bilan ta’minlangan.

Endi Tyuring mashinasi tushunchasi bilan batafsil tanishamiz. Tyuring mashinasini quyidagilar to‘liq aniqlaydi.

Tashqi alfavit, ya’ni $A=\{a_0,a_1,a_2,...,a_n\}$ chekli simvollar to‘plami. A to‘plam elementlarining chekli ketma-ketligi A to‘plamdagi **so‘z** deyiladi. So‘zni tashkil etuvchi simvollar soni shu **so‘zning uzunligi** deyiladi.

Masalan, A alfavitning har bir elementi uzunligi 1ga teng bo‘lgan so‘zdir.

Bu alfavitda so‘z ko‘rinishida mashinaga beriladigan axborot kodlashtiriladi. Mashina so‘z ko‘rinishida berilgan axborotni qayta ishlab, yangi so‘z hosil qiladi.

Ichki alfavit, ya’ni $q_0,q_1,q_2,...,q_m,\text{O}',\text{Ch},\text{J}$ simvollar. $q_0,q_1,q_2,...q_m$ mashinaning chekli son holatlarini ifodalaydi. Istalgan mashinaning holatlari soni tayinlangan bo‘ladi. Ikki holatda maxsus vazifa bajariladi: q_1 mashinaning boshlang‘ich (dastlabki) holati, q_0 natijaviy (oxirgi) holati (to‘xtash holati). $\text{O}',\text{Ch},\text{J}$ surilish simvollaridir (mos ravishda, o‘ngga, chapga va joyida).

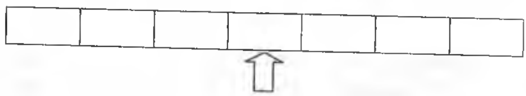
Ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin bo‘lgan lenta (mashinaning tashqi xotirasi). U katakchalarga (yacheykalarga) bo‘lingan bo‘ladi. Har bir katakchaga faqat bitta harf yozilishi mumkin. Bo‘sh katakchani a_0 simvoli bilan belgilaymiz (1-shakl).

a_0	a_2	a_3	a_3	a_7	a_9	a_{11}	a_{12}			

1- shakl

Boshqaruvchi kallak. U lenta bo‘ylab harakat qiladi va biror katakcha (yacheyka) qarshisida to‘xtashi mumkin (2-shakl).

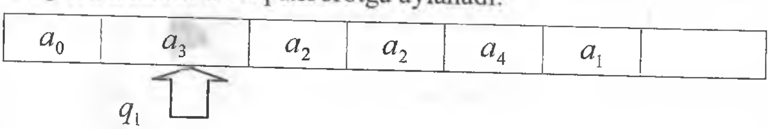
Bu holatda «kallak katakchani, ya’ni simvolni «**ko‘rib turibdi**»» deb aytamiz. Mashinaning bir takt davomidagi ishida kallak faqat bitta katakchaga surilishi (o‘ngga, chapga) yoki joyida qolishi mumkin.



2- shakl

Lentada saqlanayotgan har bir axborot tashqi alfavitning a_0 dan farqli chekli simvollar majmuasi bilan tasvirlanadi. Mashina ish boshlashidan oldin lentaga **boshlang‘ich axborot** (boshlang‘ich ma’lumot) beriladi. Bu holda boshqaruvchi kallak, qoidaga asosan, q_1 boshlang‘ich holatni ko‘rsatuvchi oxirgi chap belgi qarshisida turadi (3-shakl).

Mashinaning ishi taktlar yig‘indisidan iborat bo‘lib, ish davomida boshlang‘ich axborot oraliq axborotga aylanadi.



3- shakl

Boshlang‘ich axborot sifatida lentaga tashqi alfavitning katakchalariga ixtiyoriy ravishda qo‘yilgan chekli simvollar sistemasini (alfavitdagi ixtiyoriy so‘zni) berish mumkin.

Berilgan boshlang‘ich axborot bog‘liq bo‘lgan ikki hol bo‘lishi mumkin.

1. Mashina chekli son taktdan keyin to‘xtaydi (q_0 to‘xtash holatiga o‘tadi) va lentada B axborot tasvirlangan bo‘ladi. Bu holda mashina A boshlang‘ich axborot nisbatan tatbiq etiladigan (qo‘llanib bo‘ladigan) va uni qayta ishlab B natijaviy i axborotga keltirgan deb aytiladi.

2. Mashina hech qachon to'xtamaydi, ya'ni q_0 to'xtash holatiga o'tmaydi. Bu holda mashina A boshlang'ich i axborotga nisbatan tatbiq etilmaydi deb aytiladi.

Mashina ishining har bir taktida quyidagi funksional sxema bo'yicha harakat qiladi:

$$a_i q_j \to a_v \begin{matrix} \text{O'} \\ \text{Ch} \\ \text{J} \end{matrix} q_s ,$$

bu yerda a_i, a_v – tashqi alfavitning harflari; q_j, q_s – mashinaning holatlari; $\text{O'}, \text{Ch}, \text{J}$ – surilish simvollari.

Boshqaruvchi kallak lentada qanday harfni ko'rib turganligi (bizning yozuvda a_i) va mashina qaysi holatda (bizning yozuvda q_j) turganligiga qarab, bu taktda uch elementdan iborat komanda ishlab chiqiladi:

1) ko'rib turilgan harf almashtirilgan tashqi alfavit harfi (a_v);

2) kelgusi takt uchun tashqi xotira adresi $\begin{pmatrix} \text{O'} \\ \text{Ch} \\ \text{J} \end{pmatrix}$;

3) mashinaning kelgusi holati (q_s).

7.5.2. Tyuring mashinasining ishlashi. Barcha komandalar majmuasi **Tyuring mashinasining dasturini** tashkil qiladi. Dastur ikki o'lchovli jadval shaklida bo'lib, u **Tyuring funksional sxemasi** deb ataladi. Bunday sxema 1- jadvalda misol sifatida berilgan. Tyuring mashinasining ishi butunlayiga uning dasturi bilan aniqlanishi ravshan. Agar ikkita Tyuring mashinasining funksional sxemalari bir xil bo'lsa, u holda ular bir-biridan farq qilmaydi. Har xil Tyuring mashinalari har xil dasturga ega bo'ladi.

1-jadval

	a_0	a_1	a_2
q_1	$a_2\text{Ch}\,q_3$	$a_1\text{O'}\,q_2$	$a_2\text{Ch}\,q_1$
q_2	$a_0\text{J}\,q_2$	$a_2\text{J}\,q_1$	$a_1\text{J}\,q_2$
q_3	$a_0\text{O'}\,q_0$	$a_1\text{O'}\,q_4$	$a_2\text{J}\,q_1$
q_4	$a_1\text{J}\,q_3$	$a_0\text{O'}\,q_4$	$a_2\text{O'}\,q_4$

Bundan keyin Tyuring mashinasining har xil **konfiguratsiyalarini** (ko'rinishlarini) soddaroq ifodalash uchun lenta va uning katakchalarini ifodalamasdan axborotni faqat so'z shaklida yozamiz:

Boshqaruvchi kallak va mashina holatini ifodalash sifatida mashina holatini yozamiz.

1- jadvalda berilgan funksional sxemaga mos keluvchi Tyuring mashinasining ishini misollarda ko'rib o'taylik.

1- m i s o l . Dastlabki konfiguratsiya quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & q_1 & \end{array}$$

Boshqaruvchi kallak a_2 harfini ko'rib turganligi va mashina q_1 holatda bo'lganligi uchun mashina $a_2 \text{Ch} a_2$ komandani ishlab chiqadi va natijada ikkinchi konfiguratsiyani hosil qilamiz.

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & q_1 & & \end{array}$$

Ravshanki, navbatdagi konfiguratsiyalar quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0 \\ q_1 & & & \end{array}$$ uchinchi konfiguratsiya,

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 \\ q_3 & & & & \end{array}$$ to'rtinchi konfiguratsiya,

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & q_0 & & & \end{array}$$ beshinchi konfiguratsiya.

Beshinchi konfiguratsiyada mashina q_0 holatda (to'xtash holatida) turganligi uchun $a_2\ a_2\ a_2$ so'z hisoblashning natijasi bo'ladi. ■

2- m i s o l . Boshlang'ich konfiguratsiya quyidagicha bo'lsin:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & & q_1 & \end{array}$$

1- jadvaldagi funksional sxemadan foydalanib, quyidagi konfiguratsiyalarga kelamiz:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & q_1 & & \end{array}$$ ikkinchi konfiguratsiya,

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & q_1 & & & \end{array}$$ uchinchi konfiguratsiya,

$$a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad \underset{q_2}{a_2} \quad a_2 \quad a_0$$ to‘rtinchi konfiguratsiya,

$$a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad \underset{q_2}{a_1} \quad a_2 \quad a_0$$ beshinchi konfiguratsiya,

$$a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad \underset{q_1}{a_2} \quad a_2 \quad a_0$$ oltinchi konfiguratsiya.

Ikkinchi va oltinchi konfiguratsiyalardan ko‘rinib turibdiki, mashinaning ish jarayoni takrorlandi va, demak, natija bo‘lmaydi. ■

7.6. Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish

Algoritm. Realizatsiya qilish. O‘nlik sistemada n dan $n+1$ ga o‘tish. Algoritm. Natural sonlarni qo‘shish. Evklid algoritmi.

Ayrim oddiy arifmetik algoritmlarni realizatsiya qiladigan (amalga oshiradigan) Tyuring mashinasini yasashni misollarda o‘rganamiz.

7.6.1. Tyuring mashinasida o‘nlik sistemada n dan $n+1$ ga o‘tish algoritmini realizatsiya qilish. O‘nlik sanoq sistemasida n sonning yozuvi berilgan bo‘lsin va $n+1$ sonning o‘nlik sistemasidagi yozuvini ko‘rsatish, ya’ni $f(n)=n+1$ funksiyani hisoblash talab etilsin.

Ravshanki, mashinaning tashqi alfaviti 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlardan va bo‘sh katakcha a_0 dan iborat bo‘lishi kerak. Lentaga o‘nlik sistemada n sonini yozamiz. Bu yerda qatorasiga bo‘sh joysiz har bir katakchaga bitta raqam yoziladi.

Qo‘yilgan masalani yechish uchun ishning birinchi taktida mashina n sonning oxirgi raqamini o‘chirib, uni bir birlik katta songa almashtirib va agar oxirgi raqam 9 sonidan kichik bo‘lsa, u holda to‘xtash holatiga o‘tishi kerak.

Agar n sonning oxirgi raqami 9 bo‘lsa, u holda mashina 9 raqamni o‘chirib, bo‘sh qolgan katakchaga 0 raqamni yozib, o‘sha holatda qolgan holda chapga yuqoriroq razryadli qo‘shnisiga surilishi kerak. Bu yerda ishning ikkinchi taktida mashina yuqoriroq razryadli raqamga 1 sonini qo'shishi kerak.

Tabiiyki, chapga surilish paytida yuqoriroq razryadli raqam bo'lmasa, u holda mashinaning boshqaruvchi kallagi bo'sh katakchaga chiqishi mumkin. Bu holatda bo'sh katakchaga mashina 1 raqamini yozadi.

Aytilganlardan shu narsa kelib chiqadiki, $f(n)=n+1$ funksiyani hisoblash algoritmini realizatsiya qilish paytida mashina bor yo'g'i ikkita q_1 va q_0 holatlarda bo'ladi.

Shunday qilib, o'nlik sistemada n dan $n+1$ ga o'tish algoritmini realizatsiya etadigan Tyuring mashinasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1	$1Jq_0$	$1Jq_0$	$2Jq_0$	$3Jq_0$	$4Jq_0$	$5Jq_0$	$6Jq_0$	$7Jq_0$	$8Jq_0$	$9Jq_0$	$0Chq_1$

Quyida $n=183$ va $n=399$ sonlar uchun mos ravishda ularning konfiguratsiyalari keltirilgan:

$$a_0\ 18\underset{q_1}{3}\ a_0 \qquad\qquad a_0\ 39\underset{q_1}{9}\ a_0$$

$$a_0\ 18\underset{q_0}{4}\ a_0 \qquad\qquad a_0\ 3\underset{q_1}{9}0\ a_0$$

$$a_0\ \underset{q_1}{3}00\ a_0$$

$$a_0\ \underset{q_1}{4}00\ a_0$$

7.6.2. Natural sonlarni qo'shish algoritmi. Mashina lentasiga tayoqchalar majmuasi shaklida ikkita son berilgan bo'lsin. Masalan, 2 va 3 sonlari. Bu sonlarni qo'shish talab etilsin. Qo'shish simvolini (belgisini) yulduzcha bilan belgilaymiz. Shunday qilib, mashina lentasiga quyidagi so'z yoziladi.

$$a_0|\,|\ *\ |\,|\,|\ a_0 \qquad (1)$$

(1) so'zga tatbiq qilish natijasida 2 va 3 sonlarining yig'indisini, ya'ni

$$a_0|\,|\,|\,|\,|\ a_0 \qquad (2)$$

so'zni beradigan funksional sxemani topish talab etiladi.

Qo'yilgan masalani yechish jarayonini izohlab beraylik. Dastlabki momentda mashinaning kallagi eng chapdagi tayoqchani ko'rib tursin. Uni to birinchi bo'sh katakchaga erishguncha hamma tayoqcha va yulduzchalarni cheklab o'ngga surish kerak. Bu bo'sh katakchaga birinchi tayoqcha yoziladi. Undan so'ng ikkinchi tayoqchaga qaytib kelish kerak va uni o'chirib to'xtash kerak. Mashina ishining hamma taktini quyidagi mos konfiguratsiyalarda ifodalab beramiz:

1) $a_0 \| \| * \| \| \| a_0$	2) $a_0 \| * \| \| \| a_0$	3) $a_0 \| * \| \| \| a_0$
q_1	q_2	q_2
4) $a_0 \| * \| \| \| a_0$	5) $a_0 \| * \| \| \| a_0$	6) $a_0 \| * \| \| \| a_0$
q_2	q_2	q_2
7) $a_0 \| * \| \| \| a_0$	8) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$	9) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$
q_2	q_3	q_3
10) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$	11) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$	12) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$
q_3	q_3	q_3
13) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$	14) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$	15) $a_0 \| * \| \| \| \| a_0$
q_3	q_3	q_1
16) $a_0 a_0 * \| \| \| \| a_0$	17) $a_0 * \| \| \| \| a_0$	18) $a_0 * \| \| \| \| a_0$
q_2	q_2	q_2
19) $a_0 * \| \| \| \| a_0$	20) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$	21) $a_0 * \| \| \| \| a_0$
q_2	q_2	q_2
22) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$	23) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$	24) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$
q_3	q_3	q_3
25) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$	26) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$	27) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$
q_3	q_3	q_3
28) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$	29) $a_0 * \| \| \| \| \| a_0$	30) $a_0 a_0 * \| \| \| \| \| a_0$
q_3	q_1	q_0

Bu jarayon masalaning yechish algoritmini ikki o'lchovli 1- jadval shaklida yozishga imkoniyat yaratadi.

Shunday qilib, bu yerda $< a_0, *, | >$ – tashqi alfavit va q_0, q_1, q_2, q_3 – mashina holatlaridan foydalanildi.

7.6.3. Evklid algoritmi. Evklid algoritmi berilgan ikkita natural son uchun ularning eng katta umumiy bo'luvchisini topish kabi masalalarni yechishda qo'llaniladi. Ma'lumki, Evklid algoritmi quyidagi kamayuvchi sonlar ketma-ketligini tuzishga keltiriladi: birinchisi berilgan ikki sonning eng kattasi bo'ladi, ikkinchisi – kichigi, uchinchisi – birinchi sonni ikinchisiga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq, to'rtinchisi – ikkinchi sonni uchinchisiga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq va hokazo, bu jarayon qoldiqsiz bo'linguncha davom ettiriladi. Oxirgi bo'lishdagi bo'luvchi masala yechimining natijasi bo'ladi.

1-jadval

	a_0	$*$	$\vert$
q_1		$a_0 \mathrm{J}\, q_0$	$a_0 \mathrm{O'} q_2$
q_2	$\vert \mathrm{J}\, q_3$	$* \mathrm{O'} q_2$	$\vert \mathrm{O'} q_2$
q_3	$a_0 \mathrm{O'} q_1$	$* \mathrm{Gh}\, q_3$	$\vert \mathrm{Ch}\, q_3$

Evklid algoritmini Tyuring mashinasining dasturi sifatida ifodalash talab etilgan bo'lsin. Bu dastur sonlarni taqqoslash va ayirish sikllarining navbatma-navbat (navbatlashib) kelishini ta'minlashi kerak.

To'rtta harfdan iborat $< a_0, |, \alpha, \beta >$ tashqi alfavitdan foydalanamiz. Bu yerda a_0 – bo'sh katakcha simvoli, $|$ – tayoqcha, α va β – tayoqcha rolini vaqtinchalik o'ynaydigan harflar.

Masalaning yechilishini boshlang'ich konfiguratsiyasi

$$\underset{q_1}{a_0\,||||||||||\,a_0}$$

bo'lgan hol uchun 4 va 6 sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini topish misolida ko'rib o'taylik.

Birinchi navbatda mashina lentada yozilgan sonlarni taqqoslashi kerak. Shu maqsadga erishish uchun mashina birinchi sonni ifodalovchi tayoqchalarni α harfi bilan va ikkinchi sonni ifodalovchi sonlarni β harfi bilan almashtirishi kerak. Mashina ishining birinchi to'rt taktiga mos keluvchi uning konfiguratsiyasi quyidagicha bo'ladi:

1) $\underset{q_1}{a_0\,||||||||||\,a_0}$ 2) $\underset{q_2}{a_0\,|||\alpha||||||\,a_0}$

3) $\underset{q_2}{a_0\,|||\alpha||||||\,a_0}$ 4) $\underset{q_1}{a_0\,|||\alpha\beta|||||\,a_0}$

Shu bilan dastlabki sonlarni taqqoslash sikli tamom bo‘lib, ayirish sikli boshlanadi. Bu sikl davomida kichik son lentadan butunlayiga o‘chiriladi, β harfi bilan belgilangan ikkinchi son tayoqchalar bilan almashinadi va, demak, katta 6 soni ikkita 4 va 2 sonlariga bo‘linadi.

Bu operatsiyalarga bir qator konfiguratsiyalar to‘g‘ri keladi. Shulardan ayrimlarini yozamiz:

$$a_0\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\,|\,|\,a_0$$
$$q_1$$
$$a_0\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\,|\,|\,a_0$$
$$q_3$$
$$a_0a_0\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\,|\,|\,a_0$$
$$q_3$$

....

$$a_0a_0a_0a_0a_0\beta\beta\beta\beta\,|\,|\,a_0$$
$$q_3$$
$$a_0a_0a_0a_0a_0\,|\,\beta\beta\beta\,|\,|\,a_0$$
$$q_3$$

....

$$a_0a_0a_0a_0a_0\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,a_0$$
$$q_3$$
$$a_0a_0a_0a_0a_0\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,a_0$$
$$q_2$$

Shu bilan birinchi ayirish sikli tamom bo‘ladi.

Endi mashina 4 va 2 sonlarini taqqoslashi kerak. Bu sonlarni taqqoslash sikli quyidagi

$$a_0\,|\,|\,\alpha\alpha\beta\beta a_0$$
$$q_4$$

konfiguratsiyaga va ayirish sikli

$$a_0\,|\,|\,|\,|\,a_0$$
$$q_1$$

konfiguratsiyaga olib keladi.

Uchinchi taqqoslash sikli 2 va 2 sonlarini

$$\underset{q_3}{a_0\alpha\alpha\beta\beta a_0}$$

konfiguratsiyaga va ayirish sikli

$$\underset{q_0}{a_0 \mid \mid a_0}$$

oxirgi konfiguratsiyaga olib keladi.

Shunday qilib, Tyuring funksional sxemasi 2- jadval ko'rinishida bo'ladi.

2- jadval

	a_0	|	α	β
q_1	a_0O'q_3	α J q_2	α Ch q_1	β Ch q_1
q_2	a_0Ch q_4	β J q_1	α O'q_2	O'q_2
q_3	a_0J q_0	| J q_2	a_0O'q_3	| O'q_3
q_4	a_0J q_0	| J q_1	| Gh q_4	a_0Ch q_4

7.7. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi

Universal usul. Tyuring tezisi. Tyuring, Chyorch, Gyodel, Klini va Markov olgan natijalarning ekvivalentligi.

7.7.1. Tyuring tezisi. Tyuring mashinasi algoritm tushunchasini aniqlashning bitta yo'lini ko'rsatadi. Shu tufayli bir necha savollar paydo bo'ladi:

– Tyuring mashinasi tushunchasi qancha umumiylik xususiyatiga ega?

– algoritmlarni Tyuring mashinasi vositasi bilan berish usulini universal usul deb bo'ladimi?

– hamma algoritmlarni shu usul bilan berish mumkinmi?

Bu savollarga hozirgi vaqtda mavjud bo'lgan algoritmlar nazariyasi quyidagi gipoteza bilan javob beradi: *har qanday algoritmni Tyuring funksional sxemasi orqali berish va mos Tyuring mashinasida realizatsiya etish (amalga oshirish) mumkin.*

Bu gipoteza **Tyuring tezisi** deb ataladi. Uni isbotlash mumkin emas, chunki bu tezis qat'iy ta'riflanmagan algoritm tushunchasini qat'iy aniqlangan Tyuring mashinasi tushunchasi bilan bog'laydi.

Bu tezisni rad etish uchun Tyuring mashinasida realizatsiyalanmaydigan (amalga oshirilmaydigan) algoritm mavjudligini ko'rsatish kerak. Ammo hozirgacha aniqlangan hamma algoritmlarni Tyuring funksional sxemasi orqali realizatsiya etish mumkin.

7.7.2. Ekvivalent tushunchalar. Shuni ham ta'kidlab o'tamizki, Markovning normal algoritm tushunchasi hamda Chyorch, Gyodel va Klini tomonidan kiritilgan rekursiv algoritm va rekursiv funksiya tushunchalari, mos ravishda, Tyuring tomonidan kiritilgan algoritm tushunchasi va Tyuring funksional sxemasi bilan ekvivalentligi isbotlangan.

Bu dalil o'z navbatida Tyuring gipotezasining to'g'riligini yana bir marta tasdiqlaydi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarni hisoblovchi algoritmlarni Tyuring mashinasining dasturlari sifatida ifodalang:

a) $\varphi(n) = n+2$; b) $\varphi(n) = n+4$; d) $\varphi(n) = 0$.

2. Quyidagi funksiyalarni funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasini tuzing:

a) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0, \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$

b) $\overline{\operatorname{sgn} x} = \begin{cases} 1, \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$

3. Ushbu $\varphi(n) = 2n$ funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasini tuzing.

4. Ushbu

$f_p(n) = \begin{cases} 1, \text{ agar } n \text{ son } p \text{ songa qoldiqsiz bo'linsa,} \\ 0, \text{ aks holda,} \end{cases}$ funksiyani

hisoblovchi Tyuring mashinasining dasturlarini $\{a_0, 1\}$ alfavitda yozing.

5. Funksional sxemalari 1- va 2-jadvallarda berilgan Tyuring mashinasi qanday funksiyalarni hisoblashi mumkinligini aniqlang

1- jadval

	a_0	$\mid$
q_1	$a_0\text{O'}q_{p+1}$	$\mid \text{Ch}\, q_2$
q_2	$a_0\text{O'}q_{p+3}$	$\mid \text{Ch}\, q_3$
...	...	...
q_{p-1}	$a_0\text{O'}q_{p+3}$	$\mid \text{Ch}\, q_p$
q_p	$a_0\text{O'}q_{p+1}$	$\mid \text{Ch}\, q_1$
q_{p+1}	$\mid \text{J}\, q_0$	$a_0\text{J}\, q_{p+2}$
q_{p+2}	$a_0\text{O'}q_{p+1}$	
q_{p+3}	$a_0\text{J}\, q_0$	$a_0\text{J}\, q_{p+4}$
q_{p+4}	$a_0\text{O'}q_{p+3}$	

2- jadval

	a_0	$\mid$
q_1	$\mid \text{O'}q_4$	$\mid \text{Ch}\, q_2$
q_2	$a_0\text{O'}q_6$	$\mid \text{Ch}\, q_3$
q_3	$a_0\text{O'}q_6$	$\mid \text{Ch}\, q_1$
q_4	$\mid \text{J}\, q_0$	$a_0\text{J}\, q_5$
q_5	$a_0\text{O'}q_4$	
q_6	$a_0\text{J}\, q_0$	$\mid \text{J}\, q_7$
q_7	$a_0\text{O'}q_6$	$a_0\text{O'}q_6$

6. Dasturi 3- jadvaldagi funksional sxema orqali berilgan Tyuring mashinasi qanday ko‘rinishdagi funksiyani hisoblashi mumkinligini aniqlang.

3- jadval

	a_0	$\mid$	α	β
q_1	$a_0\, \text{Ch}\, q_2$	$\mid \text{O'}q_1$	$\alpha\, \text{O'}q_1$	$\beta\, \text{O'}q_1$
q_2		$\beta\, \text{Ch}\, q_3$	$\alpha\, \text{Ch}\, q_2$	$\beta\, \text{Ch}\, q_2$
q_3	$a_0\text{O'}q_4$	$\mid \text{J}\, q_1$		
q_4	$a_0\, \text{J}\, q_0$		$\mid \text{O'}q_4$	$\mid \text{O'}q_4$

K o ‘ r s a t m a. Misollarni yechishda L.M.Lixtarnikov va T.G.Sukachevaning (Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Санкт-Петербург. Лань. 1999.) kitobidan foydalanishni tavsiya etamiz, 248–250- va 275–281- sahifalar.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Ommaviy muammo deganda nimani tushunasiz?
2. Yechish algoritmi nima?
3. Tyuring mashinsining ta'rifini bilasizmi?
4. Tashqi va ichki alfavitlar bir-biridan nima bilan farq qiladi?
5. Mashinaning tashqi xotirasi deganda nimani tushunasiz?
6. Boshqaruvchi kallak joyida turadimi yo siljiydimi?
7. Boshlang'ich axborot sifatida lentaga beriladigan axborot qanday bo'lishi kerak?
8. Mashina dasturi nimalardan tashkil topgan bo'ladi?
9. Tyuring funksional sxemasi deb nimaga aytiladi?
10. Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish qanday amalga oshiriladi?
11. Tyuring mashinasida natural sonlarni qo'shish algoritmini realizatsiya etishni bilasizmi?
12. Tyuring mashinasida Evklid algoritmini realizatsiya etish qanday bajariladi?
13. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasini bilasizmi?
14. Tyuring, Chyorch, Gyodel, Klini va Markov olgan natijalarning ekvivalentligini qanday tushunasiz?

7.8. Markovning normal algoritmlari

Alfavit. Simvollar. Harflar. So'z. Bo'sh so'z. Algoritm. Alfavit ustidagi algoritm. Alfavitdagi algoritm. Tatbiq etiladigan, tatbiq etilmaydigan algoritmlar. O'rniga qo'yish usuli. Algoritm sxemasi. Normal algoritm (Markov algoritmi).

7.8.1. Markovning normal algoritmi tushunchasi.

1- ta'rif. *Bo'sh bo'lmagan chekli simvollar to'plami* ***alfavit,*** *alfavitdagi simvollar esa* ***harflar*** *deb ataladi.*

2- ta'rif. *A alfavitdagi harflarning har qanday chekli ketma-ketligi shu to'plamdagi* ***so'z*** *deb ataladi. Harflarning bo'sh ketma-ketligi* ***bo'sh so'z*** *deb ataladi va u* $\wedge$ *simvoli bilan belgilanadi.*

Agar $S_{j_1}\ S_{j_2}\ldots S_{j_k}$ so'zni P bilan va $S_{r_1}\ S_{r_2}\ldots S_{r_m}$ so'zni Q bilan belgilasak, u holda $S_{j_1}\ S_{j_2}\ldots S_{j_k} S_{r_1}\ S_{r_2}\ldots S_{r_k}$ so'z P va Q so'zlarning birlashmasi PQ ni bildiradi. Xususiy holda, $P\wedge=\wedge P=P$ va $(P_1P_2)P_3=P_1(P_2P_3)$.

Agar $B \subset A$ bo‘lsa, u holda A alfavit B alfavitning **kengayishi** (**kengaytirilgani**) deb ataladi. Ravshanki, bu holda B alfavitdagi har bir so‘z o‘z navbatida A alfavitining ham so‘zi bo‘ladi.

A alfavitdagi hamma so‘zlar to‘plamini D bilan belgilaymiz. D to‘plamning biror qism to‘plami C bo‘lsin, ya’ni $C \subset D$.

3- ta’rif. *Aniqlanish sohasi C va qiymatlar sohasi D bo‘lgan effektiv hisoblanuvchi funksiya A alfavitdagi **algoritm** (**algorifm**) deb ataladi.*

4- ta’rif. Agar *A alfavitdagi biror P so‘z U algoritmning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lsa, u holda U algoritm P **so‘zga tatbiq etiladigan algoritm** deb ataladi.*

5- ta’rif. *Agar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda B alfavitdagi har bir algoritm A **alfavit ustidagi algoritm** deb ataladi.*

A alfavitdagi normal algoritm tushunchasi bilan A alfavit ustidagi normal algoritm tushunchasi o‘rtasidagi farq juda ham muhimdir. A alfavitdagi har qanday normal algoritm faqat A alfavitning harflaridan foydalanadi. A alfavit ustidagi normal algoritm esa A alfavitga kirmagan boshqa qo‘shimcha harflardan ham foydalanishi mumkin. Shunday qilib, A alfavitdagi har qanday normal algoritm A ustidagi normal algoritm ham bo‘ladi. Ammo, A alfavitda shunday algoritmlar mavjudki, ular A ustida normal algoritm bo‘lishiga qaramasdan, A alfavitda normal algoritm bo‘la olmaydi.

Ko‘pchilik aniqlangan algoritmlarni birmuncha oddiyroq qadamlarga bo‘lish mumkin. Shu maqsadda A.A.Markov XX asrning 50- yillarida algoritm tuzishning asosi (negizi) qilib, elementar operatsiya sifatida **bir so‘zni ikkinchi so‘z o‘rniga qo‘yishni** olgan.

Agar P va Qlar A alfavitdagi so‘zlar bo‘lsa, u holda $P \to Q$ va $P \to \cdot Q$ larni A **alfavitdagi o‘rniga qo‘yish formulalari** deb ataymiz. Bu yerda “$\to$” va “$\cdot$” simvollari A alfavitning harflari emas hamda P va Q larning har biri so‘z bo‘lishi mumkin. $P \to Q$ o‘rniga qo‘yish formulasi **oddiy formula,** $P \to \cdot Q$ o‘rniga qo‘yish formulasi esa **natijaviy (xulosaviy) formula** deb ataladi.

Berilgan $P \to Q$ va $P \to \ Q$ o‘rniga qo‘yish formulalarining istalgan birini ifodalash uchun $P \to (\cdot)\, Q$ umumiy ko‘rinishdagi yozuvni ishlatamiz.

Alfavitning quyidagi o‘rniga qo‘yish formulalarining chekli ro‘yxati

$$P_1 \to (\cdot)\, Q_1$$
$$P_2 \to (\cdot)\, Q_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_r \to (\cdot)\, Q_r$$

algoritm sxemasi deb ataladi va u A alfavitda quyidagi algoritmni yuzaga keltiradi.

Agar shunday W, V so‘zlar (ular bo‘sh so‘z bo‘lishi ham mumkin) topilib, $Q = W\,T\,V$ bo‘lsa, u holda T so‘z Q so‘zning tarkibiga kiradi deb kelishib olamiz.

Endi A alfavitda P so‘z berilgan bo‘lsin. Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin.

1. $P_1, P_2, \dots, P_r$ so‘zlarning birortasi ham P so‘zning tarkibiga kirmaydi. Bu tasdiqni qisqa ravishda $U : P \supset$ shaklida yozamiz.

2. $P_1, P_2, \dots, P_r$ so‘zlarning orasida P so‘zning tarkibiga kiradiganlari topiladi. Endi $1 \le m \le r$ munosabatni qanoatlantiruvchi eng kichik butun son m va P_m so‘z P so‘zning tarkibiga kiruvchi so‘z bo‘lsin.

P so‘zning tarkibiga eng chapdan kirgan P_m so‘zni Q_m bilan almashtirishdan hosil bo‘ladigan so‘zni R deylik. P va R orasidagi aytilgan munosabatni:

a) $P \to (\cdot)\, Q_m$ o‘rniga qo‘yish formulasi oddiy formula bo‘lganda

$$U : P \vdash R \tag{1}$$

shakldа va;

b) $P \to (\cdot)\, Q_m$ o‘rniga qo‘yish formulasi natijaviy formula bo‘lganda esa

$$U : P \vdash \cdot\, R \tag{2}$$

shaklda yozamiz.

(1) holda U algoritm P so‘zini R so‘zga **oddiy o‘tkazadi**, (2) holda esa U algoritm P so‘zini R so‘zga **natijaviy o‘tkazadi** deb ataladi.

$U : P \vdash R$ yozuv A alfavitda shunday $R_0, R_1, \dots, R_k$ so‘zlar ketma-ketligi mavjudki, $P = R_0$, $R = R_k$, $j = 0,1,\dots,k-2$ lar uchun

$U : R_j \vdash R_{j+1}$ va yoki $U : R_{k-1} \vdash R_k$, yoki $U : R_{k-1} \vdash \cdot R_k$ (oxirgi holda $U : P \vdash R$ o'rniga $U : P \vdash \cdot R$ yoziladi) ekanligini bildiradi.

Yo $U : P \vdash \cdot R$, yoki $U : P \vdash R$ va $U : R \supset$ bo'lganda, shunda va faqat shundagina $U(P) = R$ deb qabul qilamiz.

Yuqoridagi kabi aniqlangan algoritm **normal algoritm** yoki **Markov algoritmi** deb ataladi.

U algoritmning amal qilishini quyidagicha ifodalash mumkin. A alfavitda P so'z berilgan bo'lsin. U algoritm sxemasida P_m so'z P so'zning tarkibiga kiruvchi birinchi $P_m \to (\cdot)\, Q_m$ o'rniga qo'yish formulasini topamiz. P so'zning tarkibiga eng chapdan kirgan P_m so'z o'rniga Q_m formulani qo'yamiz. R_1 shunday o'rniga qo'yishning natijasi bo'lsin. Agar $P_m \to (\cdot)\, Q_m$ o'rniga qo'yish formulasi natijaviy bo'lsa, u holda algoritmning ishi tugaydi va uning qiymati R_1 bo'ladi. Agar $P_m \to (\cdot)\, Q_m$ o'rniga qo'yish formulasi oddiy bo'lsa, u holda R_1 ga P ga nisbatan ishlatilgan protsedurani bajaramiz va hokazo. Agar oxirgi bosqichda $U : R_i \supset$ munosabatni qanoatlantiruvchi (ya'ni $P_1, P_2, ..., P_r$ so'zlarning birortasi R_i tarkibiga kirmaydi) R_i so'z hosil bo'lsa, u holda algoritmning ishi tugaydi va R_i uning qiymati bo'ladi.

Agar ifodalangan jarayon oxirgi bosqichda tamom bo'lmasa, u holda U algoritm P so'zga **tatbiq etilmaydi** deb ataladi.

7.8.2. Misollar.

1- misol. A alfavit $\{b, c\}$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. Quyidagi algoritm sxemasini ko'ramiz:

$$\left.\begin{array}{l} b \to \cdot \wedge \\ c \to c \end{array}\right\}.$$

Bu sxema bilan berilgan U normal algoritm A alfavitdagi tarkibiga kamida bitta b harfi kirgan har qanday P so'zni shunday o'zgartiradiki, bu so'z P so'zdan uning tarkibiga eng chapdan kirgan b so'zni o'chirish natijasida hosil bo'ladi.

Haqiqatan ham, P so'z tarkibiga eng chapdan kirgan b so'zdan chaproqda turgan har qanday c harfni $c \to c$ oddiy o'rniga qo'yish formulasi yana c harfiga o'tkazadi va eng chapdagi b harfini $b \to \cdot \wedge$

natijaviy o'rniga qo'yish formulasi $\wedge$ natijaviy bo'sh so'zga o'zgartiradi. Masalan, agar $P = ccbbc$ bo'lsa, u holda $P \to \cdot Q$ bo'ladi, bu yerda $Q = ccbc$. U algoritm bo'sh so'zni o'z-o'ziga o'zgartiradi.

U algoritmi b harfi kirmagan bo'sh bo'lmagan so'zlarga tatbiq etilmaydi. Haqiqatan ham, agar P so'z faqat c harflardan iborat bo'lsa, u holda $c \to c$ oddiy o'rniga qo'yish formulasi uni yana o'ziga aylantiradi. U holda hamma vaqt $P \to P$ bo'ladi va biz natijaviy o'rniga qo'yish formulasiga kela olmaymiz, ya'ni jarayon cheksiz davom etadi. ■

2- misol. A alfavit $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. Quyidagi sxemani ko'ramiz:

$$\begin{cases} a_0 \to \Lambda \\ a_1 \to \Lambda \\ \dots \\ a_n \to \Lambda. \end{cases}$$

Bu sxemani $\forall i (a_i \to \wedge)$ ($a_i \in A$) ko'rinishida ham yozish mumkin. Bu sxema A alfavitdagi har qanday so'zni bo'sh so'zga o'zgartiradigan U normal algoritmdir.

Masalan, $U : a_1 a_2 a_1 a_3 a_0 \vdash a_1 a_2 a_1 a_3 \vdash a_2 a_1 a_3 \vdash a_2 a_3 \vdash \wedge$ va oxiri $U : \wedge \supset$. Demak, $U(a_1 a_2 a_1 a_3 a_0) = \wedge$. ■

3- misol. A alfavit S_1 harfdan iborat bo'lsin. Bu harfni 1 bilan belgilaymiz. Har qanday n natural son uchun induksiya metodi bo'yicha $\overline{0} = 1$ va $\overline{n+1} = \overline{n}1$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, $\overline{1} = 11$, $\overline{2} = 111$ va hokazo. $\overline{n}$ so'zlar raqamlar deb aytiladi.

Ushbu

$$\{\wedge \to \cdot 1$$

sxema orqali berilgan U normal algoritmni aniqlaymiz. A alfavitidagi har qanday P so'z uchun $U(P) = 1P$ ga ega bo'lamiz. Xususiy holda, har qanday n natural son uchun $U(\overline{n}) = \overline{n+1}$. Har qanday P so'z $\wedge$ bo'sh so'zning kirishidan boshlanishini (chunki $P = \wedge P$) eslasak, keltirilgan algoritmning to'g'riligiga ishonamiz. ■

7.9. Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar

Batamom ekvivalent algoritmlar. Ekvivalent algoritmlar. Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiyalar. Markov bo'yicha hisoblanuvchi funksiyalar. Qismiy rekursiv funksiya. Umumrekursiv funksiya.

7.9.1. Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiya tushunchalari. U va K algoritmlar, P esa so'z bo'lsin. Agar U va K algoritmlarning ikkalasi ham P so'zga tatbiq etilmaydigan yoki ikkalasi ham unga tatbiq etiladigan va keyingi holda $U(P)=K(P)$ bo'lsa, bu holatni $U(P)\simeq K(P)$ ko'rinishda ifodalaymiz.

Umuman, agar C va D biror ifodalar bo'lsa, u holda $C\simeq D$ munosabat quyidagini bildiradi: yo ikkala ifoda ham aniqlanmagan, yoki ikkalasi ham aniqlangan va ular bir xil obyektni belgilaydi.

1- ta'rif. *Agar A alfavitdagi istalgan P so'z uchun $U(P)\simeq K(P)$ bo'lsa, u holda U va K algoritmlar A ga nisbatan A alfavit ustida* ***batamom (tamomila) ekvivalent*** *deb ataladi.*

Agar P berilgan A alfavitdagi so'z bo'lganida har doim $U(P)\simeq K(P)$ hamda hech bo'lmaganda $U(P)$ yoki $K(P)$ so'zlarning birortasi aniqlangan va yana A ning so'zi bo'lsa, U va K algoritmlar A ***alfavitga nisbatan ekvivalent*** *deb ataladi.*

M ushbu $\{1,*\}$ alfavit, ω hamma natural sonlar to'plami, φ esa n argumentli qismiy effektiv hisoblanuvchi arifmetik funksiya, ya'ni ω^n to'plamning ayrim qism to'plamini ω ga akslantiruvchi funksiya bo'lsin.

B_φ orqali hech bo'lmaganda bir tomoni aniqlangan holda har doim $B_\varphi(\overline{(k_1,k_2,...,k_n)})=\overline{\varphi(k_1,k_2,...,k_n)}$ tenglikni o'rinli qiladigan M dagi algoritmni belgilaymiz. Bu algoritm $\overline{(k_1,k_2,...,k_n)}$ so'zdan farq qiluvchi boshqa so'zlarga tatbiq etilmaydi deb faraz qilamiz.

2- ta'rif. *Agar M ustida M ga nisbatan B_φ ga batamom ekvivalent bo'lgan normal algoritm mavjud bo'lsa, u holda φ* ***Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya*** *deb ataladi.*

3- ta'rif. *Agar φ funksiya har qanday n natural son uchun (hamma joyda) aniqlangan va Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya bo'lsa, u holda u* ***Markov bo'yicha hisoblanuvchi funksiya*** *deb ataladi.*

Markov bo‘yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan qismiy rekursiv funksiya tushunchasi hamda Markov bo‘yicha hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan umumrekursiv funksiya tushunchalari ekvivalentdir.

Yuqoridagi tasdiqni tasdiqlovchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1- teorema. *Har qanday qismiy rekursiv funksiya Markov bo‘yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya bo‘ladi va har qanday umumrekursiv funksiya Markov bo‘yicha hisoblanuvchi funksiyadir.*

Quyidagi teoremalarni ham isbotsiz keltiramiz.

2- teorema. *Agar A alfavit ustidagi U algoritm bo‘yicha, ψ_U funksiya qismiy rekursiv (rekursiv) bo‘lsa, u holda A alfavit ustida A ga nisbatan U algoritmga batamom ekvivalent bo‘lgan normal algoritm mavjuddir.*

3- teorema. *Agar U algoritm A alfavit ustidagi normal algoritm bo‘lsa, u holda ψ_U qismiy rekursiv funksiya bo‘ladi; agar, bundan tashqari, U algoritm A alfavitdagi har qanday so‘zga tatbiq etiladigan bo‘lsa, u holda ψ_U umumrekursiv funksiya bo‘ladi.*

Natija. *Agar berilgan φ qismiy funksiya Markov bo‘yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya bo‘lsa, u qismiy rekursiv funksiya ham bo‘ladi va agar φ Markov bo‘yicha hisoblanuvchi funksiya bo‘lsa, u holda φ umumrekursiv funksiya hamdir.*

Teoremalar va natijaning isbotini o‘rganishni o‘quvchiga topshiriq sifatida havola qilamiz[1].

7.9.2. Normallashtirish (normalizatsiya) prinsipi. Yuqorida keltirilgan 1- teorema va natija Markov bo‘yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan qismiy rekursiv funksiya (xuddi shunday Markov bo‘yicha hisoblash bilan rekursivlik) tushunchasining ekvivalentligini ko‘rsatadi.

O‘z navbatida Chyorch tezisi bo‘yicha hisoblanuvchanlik tushunchasi bilan rekursivlik tushunchasi (qismiy effektiv hisoblanuvchanlik tushunchasi qismiy rekursivlik tushunchasiga) ekvivalentdir. A.A.Markov algoritmlar atamasida **normallashtirish (normalizatsiya) prinsipini** yaratdi: *A alfavitdagi har qanday algoritm A ga nisbatan A ustidagi biror normal algoritmga batamom ekvivalentdir.*

---

[1] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука. 1976.

Chyorch tezisi yordamida normallashtirish prinsipining ekvivalentligi aniqlandi. Haqiqatan ham, Chyorch tezisi to‘g‘ri va A alfavitda U algoritm berilgan bo‘lsin. Unga mos keladigan ψ_U funksiya qisman effektiv hisoblanuvchi bo‘ladi. U holda, Chyorch tezisiga asosan, ψ_U qismiy rekursiv funksiyadir. Demak, 2- teoremaga ko‘ra, U algoritm A ustidagi biror normal algoritmga A ga nisbatan batamom ekvivalentdir. Shunday qilib, agar Chyorch tezisi to‘g‘ri bo‘lsa, u holda Markovning normallashtirish prinsipi ham to‘g‘ridir.

Endi normallashtirish prinsipi to‘g‘ri va φ ixtiyoriy qisman effektiv hisoblanuvchi funksiya, B_φ esa φ funksiyaga mos keluvchi M dagi algoritm bo‘lsin. Normallashtirish prinsipiga asosan B_φ algoritm M ustidagi biror normal algoritmga M ga nisbatan batamom ekvivalentdir. Demak, φ funksiya Markov bo‘yicha qisman hisoblanuvchi funksiyadir. U holda olingan natijaga ko‘ra φ qisman rekursiv (rekursiv) funksiya bo‘ladi. Shunday qilib, Markovning normallashtirish prinsipidan Chyorch tezisini keltirib chiqardik.

Ma’lumki, algoritm va effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchalari intuitiv tushunchalar bo‘lganligi uchun biz Markovning normallashtirish prinsipi va Chyorch tezisining to‘g‘riligini isbot qila olmaymiz.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, Chyorchning λ-hisoblanuvchanlik nazariyasi va Postning normal sistemalar nazariyasidan kelib chiqadigan tushunchalar ham qisman rekursiv funksiya yoki normal algoritm tushunchalariga ekvivalent bo‘ladi.

7.10. Algoritmik yechilmovchi muammolar

Yechilish algoritmi. Rekursiv muammolar. Yechilmovchi muammolar. Matematik mantiqda keltirib chiqaruvchanlikni tanish muammosi. Chyorch teoremasi. O‘z-o‘ziga tatbiq etiluvchanlikni tanish muammosi. Assotsiativ hisobidagi so‘zlarning ekvivalentlik muammosi. Markov, Post, Novikov, Seytin, Chyorch va boshqa matematiklar olgan ilmiy natijalar.

7.10.1. Matematik mantiqda keltirib chiqaruvchanlikni tanish muammosi. Matematika tarixida biror masalani yechish, odatda uning yechilish algoritmini topish deb hisoblanardi. Deyarli XX asr boshlarigacha hamma matematik masalalar algoritmik rekursiv masalalar deb qaralgan va ularni yechuvchi algoritmlar izlangan. Masalan, haqiqiy koeffitsiyentli n- darajali ko‘phadning ildizlarini uning koeffitsiyentlari yordamida radikallarda ifoda etish algoritmini izlash bir necha asrlar davom etdi. Masalan, uchinchi va to'rtinchi darajali tenglamalar uchun bu algoritmni XVI asrda italyan matematiklari Kardano[1] va Ferrari[2] yaratdilar. Uzoq yillardan keyin Abel[3] $n \geq 5$ bo'lganda bunday algoritm mavjud emasligini ko'rsatdi. Ikkinchi misol sifatida Gilbertning **Diofant tenglamalari haqidagi 10- muammosi** deb ataluvchi muammoni ko'rsatish mumkin. Bu muammo Gilbert tomonidan 1900-yilda Parijda e'lon qilingan edi[4].

Faqat algoritmning intuitiv tushunchasidan Tyuring mashinasining aniq tushunchasiga o'tish berilgan ommaviy muammoning algoritmik yechiluvchanlik masalasiga aniqlik kiritdi. Bu masalani quyidagicha ifodalash mumkin: *berilgan ommaviy muammoni yechadigan Tyuring mashinasi mavjudmi yoki bunday mashina mavjud emasmi?*

Bu savolga algoritmlar nazariyasi ayrim hollarda salbiy javob beradi. Shu turdagi natijalarni birinchilar qatorida 1936-yilda amerikalik matematik A.Chyorch oldi. U predikatlar mantiqidagi yechilish muammosi umumiy holda algoritmik yechimga ega emasligini ko'rsatdi. O'sha yilning o'zida u matematik mantiqdagi keltirib chiqaruvchanlikni tanish muammosi ham algoritmik yechilmasligini isbot qildi. Keyingi masalani batafsilroq ko'rib o'taylik.

Matematikada aksiomatik metodning mazmuni quyidagidan iborat: berilgan **nazariyaning hamma mulohazalari (teoremalari) shu nazariyada isbotsiz qabul qilingan mulohazalardan (aksiomalardan) formal mantiqiy keltirib chiqarish vositasi bilan olinadi.**

Matematik mantiqda formulalarning maxsus tili ifodalanadi. U orqali matematik nazariyaning istalgan mulohazasi butunlay aniqlangan formula ko'rinishida yoziladi. A asosdan (shartdan) B natijani mantiqiy keltirib chiqarish jarayonini dastlabki formulalarni formal almashtirishlar jarayoni sifatida ifodalash mumkin. Bunga mantiqiy hisobdan foydalanish yo'li bilan erishish mumkin.

Tanlangan mantiqiy hisobda B mulohazani A asosdan mantiqiy keltirib chiqarish masalasi A formuladan B formulaga olib keluvchi deduktiv zanjirning mavjudligi masalasidir. Shu tufayli keltirib

---

[1] Kardano (Cardano Girolamo, 1501-1576) – Italiya matematigi, mexanigi, faylasufi va tibbiyotchisi.

[2] Ferrari Lodoviko (Ferrari Lodovico, 1522-1565) – Italiya matematigi.

[3] II bobning 3- paragrafiga qarang.

[4] Ushbu bobning 3- paragrafiga qarang.

chiqaruvchanlikni tanish muammosi paydo bo'ladi: mantiqiy hisobdagi istalgan ikkita A va B formula uchun A dan B ga olib keluvchi deduktiv zanjir mavjudmi yoki yo'qmi? Bu muammoning yechimi sifatida har qanday A va B uchun javob beradigan algoritm mavjudligi ma'nosida tushuniladi. Chyorch olgan natija quyidagicha izohlanadi.

1- teorema (Chyorch teoremasi). *Keltirib chiqaruvchanlikni tanish muammosi algoritmik yechilmovchidir.*

7.10.2. O'z-o'ziga tatbiq etuvchanlikni tanish muammosi. Tyuring mashinasining shifri tushunchasini kiritamiz. Hozirgacha Tyuring mashinasining dasturini ikki o'lchovli $m \times n$ jadval ko'rinishida yozar edik. Ammo uni bir o'lchovli shaklda ham tasvirlash mumkin. Buning uchun 5ta simvolni shunday ketma-ketlikda yozish kerakki, beshlikning birinchi simvoli jadvalning ustunini, ikkinchisi satrini va keyingi uchtasi jadvalning yuqorida ko'rsatilgan ustun va satrlari kesishmasidagi uchta simvolni (komandani) ifodalasin.

Masalan, ushbu bobning 6- paragrafidagi 2- jadvalda ifodalangan Evklid algoritmining funksional sxemaga mos quyidagi bir o'lchovli satrni hosil qilamiz:

$$a_0 q_1 a_0 \text{O}' q_3 \mid q_1 \alpha \text{J} q_2 \alpha q_1 \alpha \text{Ch} q_1 \beta q_1 \beta \text{Ch} q_1 a_0 q_2 a_0 \text{Ch} q_4 \ldots \qquad (1)$$

Mashina konfiguratsiyasini ifodalashda ham shu usuldan foydalanamiz, ya'ni holatni ifodalovchi harfni «ko'rilayotgan» harfning tagidan emas, balki chap yonidan yozamiz. Masalan,

$$\begin{array}{cccccc} | & | & | & | & | & | \\ & & & & q_4 & \end{array}$$

konfiguratsiyani quyidagi shaklda yozamiz: $| \; | \; | \; | q_4 | \; |$.

(1) satrdagi har bir harfni quyidagi shartlarga rioya qilgan holda qayta nomlaymiz:

1) (1) satrni ayrim kodlashtirilgan guruhlarga bir qiymatli qilib bo'lmoq kerak;

2) kod simvollari quyidagi uch turda bo'lishi kerak:

a) Ch , O', J harflari uchun;

b) tashqi alfavit harflari uchun;

d) mashina holatini ifodalovchi harflar uchun.

Shu munosabat bilan kodlashtirish jadvalidan foydalanamiz (1- jadvalga qarang):

Agar (1) satrdagi $1, \alpha, \beta$ simvollarni mos ravishda a_1, a_2, a_3 harflar deb qarasak, u holda uni shu kodlashtirish sistemasi asosida

1000011000001100001100011000000000110000001100001...

1-jadval

Alfavit	Harf	Kodlashtirilgan guruh	Eslatmalar
Adreslar harfi	Ch	101	1lar orasida 1ta nol
	J	1001	1lar orasida 2ta nol
	O'	10001	1lar orasida 3ta nol
Tashqi alfavit	a_0	100001	2dan katta juft sonli nollar
	a_1	10000001	
	...	...	
	a_n	$1\underbrace{00...00}_{2(n+2)\text{ta nol}}1$	
Ichki alfavit	q_1	1000001	3dan katta toq sonli nollar
	q_2	100000001	
	...	....	
	q_m	$1\underbrace{00...00}_{2(m+1)+1\text{ta nol}}1$	

ko'rinishda yozish mumkin.

Funksional sxema yoki alohida olingan biror konfiguratsiya uchun tuzilgan 1 va 0 lardan iborat bo'lgan bunday satr **funksional sxemaning shifri** yoki **konfiguratsiyaning shifri** deb ataladi.

Tyuring mashinasining lentasida mashina alfavitida yozilgan uning o'z (xususiy) shifri tasvirlangan bo'lsin.

Ikki hol bo'lishi mumkin.

1. Mashina o'zining shifriga tatbiq etiladi, ya'ni mashina bu shifrni qayta ishlaydi va chekli sondagi qadamlardan so'ng to'xtaydi.

2. Mashina o'zining shifriga tatbiq etilmaydi, ya'ni mashina hech qachon to'xtash holatiga o'tmaydi.

Shunday qilib, mashinalarning o'zi (ularning shifri) ikki sinfga bo'linadi: tatbiq etiladigan Tyuring mashinalari sinfiga va tatbiq etilmaydigan Tyuring mashinalari sinfi. Shuning uchun quyidagi **ommaviy muammo** deb ataluvchi "o'z-o'ziga tatbiq etiluvchanlikni tanish muammosi" paydo bo'ladi.

Berilgan har qanday shifrga nisbatan shifrlangan Tyuring mashinasi qaysi sinfga kirishini aniqlash kerak: tatbiq etiladigan sinfgami yoki tatbiq etilmaydigan sinfgami?

2- teorema. *O'z-o'ziga tatbiq etiluvchanlikni tanish muammosi algoritmik yechimga ega emas (yechilmovchidir).*

7.10.3. Assotsiativlik hisobidagi so'zlarning ekvivalentlik muammosi. Algoritmik hal etilmaslik haqidagi dastlabki natijalar matematik mantiq va algoritmlar nazariyalarida paydo bo'lgan muammolar uchun olingan edi. Ushbu muammolardan ayrimlarini ushbu paragrafning 1- va 2- bandlarida keltirdik.

Keyinchalik shunga o'xshash muammolar matematikaning turli xil qismlarida ham mavjud ekanligi aniqlandi. Shular qatorida birinchi navbatda algebraik muammolar, shu jumladan, so'zlar ekvivalentligi muammosidir.

$A=\{a,b,c,...\}$ alfavit va undagi so'zlar to'plamini ko'rib o'taylik. Agar L so'z M so'zning bir qismi bo'lsa, u holda L so'z M so'zning **tarkibiga kiradi** deb ataymiz. Masalan, bca so'z $abcabac$ so'zning tarkibiga kiradi.

Endi yo'nalishli (oriyentirlangan) $P \to Q$ va yo'nalishsiz $P - Q$ ko'rinishidagi joiz (ruxsat etilgan) o'rniga qo'yishlar orqali bir xil so'zlarni ikkinchi xil so'zlarga o'zgartirishni ko'rib o'tamiz.

R so'zning tarkibiga kamida bitta P so'z kirgan bo'lsagina, belgilangan yo'nalishli $P \to Q$ o'rniga qo'yishni R so'zga qo'llash mumkin. Bu holda uning tarkibidagi istalgan bitta P so'z Q so'z bilan almashtiriladi.

Yo'nalishsiz $P - Q$ o'rniga qo'yishni R so'zga qo'llash, uning tarkibidagi P so'zni Q so'zga yoki Q so'zini P so'zga almashtirishni bildiradi.

Asosan yo'nalishsiz o'rniga qo'yishlarni ko'rib o'tamiz.

Misol. Yo'nalishsiz $ac - aca$ o'rniga qo'yishni $bcacab$ so'zga ikki xil usul bilan tatbiq etish mumkin: bu so'z tarkibidagi aca so'zni almashtirish $bcacab$ so'zni va ac so'zni almashtirish $bcacaab$ so'zni beradi. Bu o'rniga qo'yish formulasi $abcab$ so'zga tatbiq etilmaydi. ■

1- ta'rif. *Biror alfavitdagi hamma so'zlar majmuasi bilan joiz o'rniga qo'yishlarning chekli sistemasi (tizimi)* ***assotsiativ hisob*** *deb ataladi.*

Assotsiativ hisobni berilgan deb hisoblash uchun unga mos bo'lgan alfavit va o'rniga qo'yish sistemasini berish kifoya.

Agar R so'zni joiz o'rniga qo'yishni bir marta tatbiq etish natijasida S so'zga almashtirish mumkin bo'lsa, u holda S so'zni ham shu yo'sinda R so'zga almashtirish mumkin. Bu holatda R va S so'zlar **qo'shni so'zlar** deb ataladi.

2- ta'rif. *Har bir* R_i *va* R_{i+1} $(i=1,2,...,n-1)$ *juft so'zlar* $R_1, R_2, ..., R_{n-1}, R_n$ *so'zlar ketma-ketligining qo'shni so'zlari bo'lsa, u holda* $R_1, R_2, ..., R_{n-1}, R_n$ *so'zlar ketma-ketligi* R *so'zdan* S *so'zga olib keladigan* ***deduktiv zanjir*** *deb ataladi.*

Agar R so'zdan S so'zga olib boradigan deduktiv zanjir mavjud bo'lsa, u holda S so'zdan R so'zga olib boradigan deduktiv zanjir ham mavjud bo'ladi. Bu holda R va S so'zlar **ekvivalent** so'zlar deb ataladi va $R \sim S$ ko'rinishda belgilanadi.

Har bir assotsiativ hisob uchun o'zining maxsus **so'zlar ekvivalentligi muammosi** deb ataluvchi "berilgan assotsiativ hisobdagi har qanday ikkita so'z uchun ular o'zaro ekvivalentmi yoki yo'qmi" degan muammoni hal qilish talab etiladi.

Assotsiativ hisob uchun so'zlar ekvivalentligi muammosi dastlab 1911-yilda qo'yilgan edi. O'sha yilning o'zida maxsus ko'rinishdagi ba'zi assotsiativ hisoblar uchun so'zlar ekvivalentligini tanish algoritmi tavsiya etilgan edi.

Shunday qilib, istalgan assotsiativ hisobga tatbiq etilishi mumkin bo'lgan umumiy algoritmni topish masalasi vujudga keldi.

1946 va 1947-yillarda bir-biridan bexabar holda A.Markov va E.Post *istalgan assotsiativ hisobi uchun so'zlar ekvivalentligini tanish algoritmi mavjud emasligini* ko'rsatishdi. Ular har biri uchun so'zlar ekvivalentligi muammosi algoritmik yechilmovchi bo'lgan assotsiativ hisoblar tuzishdi.

1955-yilda P.S.Novikov[1] guruhlarning aynan tengligi muammosi algoritmik yechimga ega emasligini isbotladi. Bu muammo formal ravishda assotsiativ hisobdagi so'zlar ekvivalentligi muammosining xususiy holidir.

A.Markov va E.Post tomonidan tadqiq etilayotgan muammoning algorimik yechimga ega emasligini ko'rsatish uchun tuzilgan misollar ancha murakkab va bu misollarda yuzdan ortiq joiz o'rniga qo'yishlar qo'llanilgan edi.

Shu muammoning algoritmik yechilmovchiligini isbotlash uchun Sankt-Peterburglik matematik G.S.Seytin[2] tuzgan misolida faqatgina yettita joiz o'rniga qo'yishdan foydalandi.

Navbatdagi misol sifatida predikatlar mantiqidagi yechilish muammosi va diofant tenglamalar to'g'risidagi Gilbertning 10- muammosini ko'rsatish mumkin.

---

[1] Novikov Pyotr Sergeyevich (Новиков, Пётр Сергеевич, 1901-1975) – sovet matematigi.

[2] Seytin Grigoriy Samuilovich (Цейтин Григорий Самуилович, 1936 yilda tug'ilgan) – rus matematigi, mantiqchisi.

1936-yilda A.Chyorch predikatlar mantiqidagi yechilish muammosi umumiy holda algoritmik yechilmovchiligini isbotladi. Rus matematiklari Yu.V.Matiyasevich va G.V.Chudnovskiy mos ravishda 1968 va 1970-yillarda Gilbertning diofant tenglamalar haqidagi 10- muammosi algoritmik yechimga ega emasligini ko'rsatganliklarini yana bir marta eslatamiz[1].

Shunday qilib, matematikada ko'plab ommaviy muammolar algoritmik yechimga ega emas.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. A alfavit va bu alfavitda ixtiyoriy Q so'z berilgan bo'lsin. Quyidagi sxemalar orqali berilgan normal algoritmlarning ishini ifodalang:

a) $\{\wedge \to \cdot\, Q$;

b) $B = A \bigcup \{\alpha\}$ alfavitidagi sxema, bu yerda $\alpha \notin A$:

$$\begin{cases} a\xi \to \xi\alpha \quad (\xi \in A), \\ \alpha \to \cdot\, Q, \\ \wedge \to \alpha; \end{cases}$$

d) $\begin{cases} \xi \to \wedge \quad (\xi \in A), \\ \wedge \to \cdot\, Q; \end{cases}$

e) $B = A \bigcup \{1\}$ alfavitdagi sxema: $\{\xi \to 1 \ \ (\xi \in A - \{1\}) \ \ \{\xi \to 1$.

2. f funksiya qisman rekursiv funksiya bo'lmasligini isbot qiling:

a) $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ agar } \varphi_x(y) \text{ aniqlangan bo'lsa}, \\ 0, \text{ aks holda}; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ agar } \varphi_x(x) \text{ aniqlangan bo'lsa}, \\ 0, \text{ aks holda}; \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \varphi_x(y), \text{ agar } \varphi_x(y) \text{ aniqlangan bo'lsa}, \\ 0, \text{ aks holda}; \end{cases}$

e) $f(x,y,z) = \begin{cases} 1, \text{ agar } \varphi_x(y) = z \text{ bo'lsa}, \\ 0, \text{ aks holda}; \end{cases}$

---

[1] Ushbu bobning 3- paragrafiga qarang.

f) $f(x,y,z)=\begin{cases} 1, \text{ agar shunday } y \text{ mavjud bo'lsaki,} \\ \qquad\qquad \varphi_x(y)=z \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ aks holda.} \end{cases}$

3. f funksiya qisman rekursiv funksiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlang:

a) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } \varphi_x(x)=1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ aks holda;} \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \text{aniqlanmagan, agar } \varphi_x(x) \text{ aniqlangan bo'lsa,} \\ 0, \text{ aks holda;} \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } 1\ \varphi_x \text{ funksiya qiymatlar} \\ \quad \text{to'plamining elementi bo'lsa,} \\ 0, \text{ aks holda;} \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } \varphi_x(y) \text{ primitiv rekursiv funksiya bo'lsa,} \\ 0, \text{ aks holda;} \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } \pi \text{ sonning o'nlik sanoq sistemasidagi} \\ \quad \text{yoyilmasida cheksiz ko'p nollar bo'lsa,} \\ 0, \text{ aks holda.} \end{cases}$

4. Markov bo‘yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan qismiy rekursiv funksiya tushunchasi hamda Markov bo‘yicha hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan umumrekursiv funksiya tushunchalari ekvivalentligini o‘rganing.

K o ‘ r s a t m a. E. Mendelsonning (Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука. 1976.) kitobidagi 242-244 va 246-249 sahifalarga murojaat qiling.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Markovning normal algoritmlari deganda nimani tushunasiz?

2. Alfavit, simvollar, harflar, so‘z, bo‘sh so‘z tushunchalarini bilasizmi?

3. Algoritm ta’rifi qanday berilgan?

4. Alfavit ustidagi algoritm deb nimaga aytiladi?
5. Alfavitdagi algoritm bilan alfavit ustidagi algoritm bir-biridan qanday farqlanadi?
6. Tatbiq etiladigan va etilmaydigan algoritmlar tushunchalarini bilasizmi?
7. O'rniga qo'yish usuli deganda nimani tushunasiz?
8. Algoritm sxemasi nima?
9. Normal algoritm va Markov algoritmi bir-biridan farqlanadimi?
10. Batamom ekvivalent algoritmlar deganda nimani tushunasiz?
11. Qanday algoritmlar ekvivalent algoritmlar deb ataladi?
12. Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar deganda nimani tushunasiz?
13. Qismiy rekursiv funksiya bilan Markov bo'yiicha qismiy hisoblanuvchi funksiya orasida qanday munosabat bor?
14. Umumrekursiv funksiya bilan Markov bo'yicha hisoblanuvchi funksiya orasidagi munosabatni bilasizmi?
15. Algoritmik rekursiv va yechilmovchi muammolar haqida nimalar bilasiz?
16. Qanday muammo matematik mantiqda keltirib chiqaruv-chanlikni tanish muammosi deb yuritiladi?
17. Chyorch teoremasini bilasizmi?
18. Markov, Post, Novikov, Seytin, Chyorch va boshqa matematiklar algoritmik rekursiv va yechilmovchi muammolarga doir olgan ilmiy natijalardan qaysilarini bilasiz?

VIII BOB
MATEMATIK MANTIQNING TEXNIKAGA TATBIQI

Ushbu bobda mulohazalar algebrasining diskret texnikaga, matematik kibernetikaga tatbiq etilishi, rele-kontaktli sxemalar, kontaktli sxemalar va ularning sintezi, funksional elementlar va ulardan sxemalar yasash, ko‘p taktli sxemalar, funksional elementlar sistemasining to‘liqligi, sxemalarni minimallashtirish muammosi, teskari bog‘lanishi bo‘lmagan avtomatlar, chekli avtomat haqida umumiy tushunchalar, Mili va Mur avtomatlari kabi masalalar ko‘rib chiqilgan. Mantiq algebrasi funksiyalarini sxemalar (avtomatlar) orqali realizatsiya qilish masalasiga alohida ahamiyat beriladi.

8.1. Funksional elementlar va ulardan sxemalar yasash

Funksional element. Qurilma. Sxema yasash usullari. Funksiyaning realizatsiyasi. Sxemaning matematik induksiya metodi bo‘yicha ta’rifi. Soxta kirish. Funksional elementlar sistemasining to‘liqligi. Sikl.

8.1.1. Funksional elementlar. Biror qurilma berilgan bo‘lsin, uning ichki tarkibi bizni qiziqtirmaydi. Qurilmaning n ta tartiblangan (masalan, 1dan $n$gacha raqamlangan) “kirishi” va bitta “chiqishi” bo‘lsin (1- shakl).

Qurilmaning har bir kirishiga ikki xil signal berish mumkin (elektr toki bor yoki elektr toki yo‘q). Bu signallarni mos ravishda 1 va 0 bilan belgilaymiz. Qurilma kirishlariga berilgan har bir signallar majmuasi uchun uning chiqishida bitta signal paydo bo‘ladi (1 yoki 0). Chiqishdagi signalning qiymati kirishlarga berilgan signallar majmuasiga bog‘liq bo‘ladi. Shunday aniqlangan qurilmaga biz **funksional element** deb ataymiz.

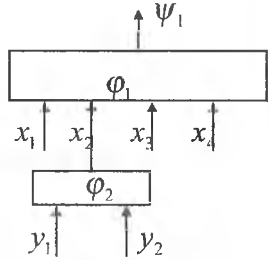
Ma’lumki, har bir funksional elementga mantiq algebrasining bitta $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasi to‘g‘ri keladi, bu holda **har bir funksional element mantiq algebrasining bitta funksiyasini realizatsiya qiladi** deb aytamiz. Buning uchun kirishning har bir i raqamiga x_i $(1 \le i \le n)$ o‘zgaruvchini mos qilib qo‘yamiz. U holda o‘zgaruvchilarning har bir $a_1,...,a_n$ qiymatlar majmuasiga $f(x_1,...,x_n)$ funksiyaning 0 yoki 1ga teng $f(a_1,...,a_n)$ qiymati mos keladi.

1- shakl

8.1.2. Funksional elementlar va ulardan sxemalar yasash. Agar $\varphi_1,...,\varphi_n$

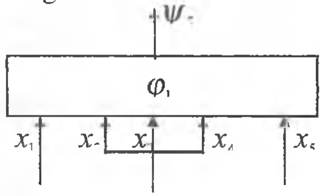
funksional elementlar mavjud bo‘lsa, u holda ulardan yangi murakkab funksional elementlarni quyidagicha yasash mumkin.

1. Birorta funksional elementning kirishini ikkinchi bir funksional elementning chiqishi bilan tutashtirish natijasida murakkab funksional element hosil qilish mumkin (2- shakl).



2- shakl

Hosil qilingan qurilmani yangi funksional element deb qabul qilish mumkin. Bu funksional elementning chiqishi φ_1 elementning chiqishidan, kirishlari esa, φ_1 va φ_2 elementlarning ozod kirishlaridan iborat bo‘ladi. Agar yangi hosil bo‘lgan qurilmaning kirishlariga signallar majmuasini yuborsak, u holda φ_1 elementning ozod kirishlariga signallar bir vaqtda yetib boradi, qolgan(lar)iga bo‘lsa, φ_2 elementning chiqishidagi signal tushadi.



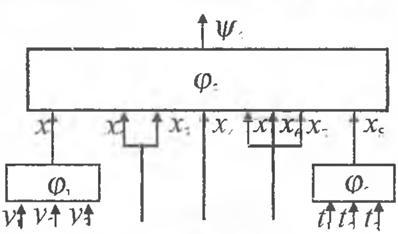
3- shakl

2. Biror funksional elementning ikki va undan ortiq kirishlarini aynan tutashtirish natijasida yangi murakkab funksional element hosil qilish mumkin (3- shakl). Bu funksional elementning chiqishi φ_1 elementning chiqishidan iborat, kirishlari esa, tutashtirilmagan kirishlardan va aynan tutashtirilgan kirishlarga mos keladigan bitta kirishdan iboratdir.

3. Uchinchi usul birinchi va ikkinchi usullarning kombinatsiyasidan iborat. Masalan, qandaydir φ elementning biror kirishiga φ_1 elementning chiqishi, boshqa kirishiga φ_2 elementning chiqishi ulanadi va ayrim kirishlari aynan tenglashtiriladi va hokazo (4- shakl).

Hosil bo‘lgan yangi murakkab funksional elementga birinchi va ikkinchi usullarni qo‘llab, yana yangi murakkab funksional elementga ega bo‘lamiz. Shu jarayonni cheksiz davom ettirish mumkin.

Agar $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funksional elementlar mos ravishda $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funksiyalarni realizatsiya qilsa, u holda hosil bo‘lgan yangi murakkab funksional element realizatsiya qiladigan funksiya $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funksiyalarning superpozitsiyasidan iborat bo‘ladi.



4- shakl

Haqiqatan ham, agar biror S_i funksiyani realizatsiya qiladigan φ_i

elementning kirishiga f_i funksiyani realizatsiya qiladigan φ_j elementning chiqishi ulangan bo'lsa, u holda f_i funksiyaning o'sha kirishiga mos bo'lgan argumenti o'rniga f_i funksiyani keltirib qo'yishimiz kerak. Hamma aynan tutashtirilgan kirishlar o'rniga ularga mos kelgan faqat bitta argument qo'yish kerak, shuning uchun 2- shaklga asosan, φ_1 funksional element realizatsiya qiladigan $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ funksiyaning x_2 argumentti o'rniga φ_2 funksional element realizatsiya qiladigan $f_1(y_1,y_2)$ funksiyani keltirib qo'yish kerak. Natijada, $f(x_1,f_1(y_1,y_2),x_3,x_4)=$ $=\psi_3(x_1,x_3,x_4,y_1,y_2)$ funksiyani realizetsiya qiladigan murakkab funksional elementga ega bo'lamiz, ψ_1 funksiyasi esa, ta'rifga asosan, f va f_1 funksiyalar superpozitsiyasi mahsulidir. 3- shakldagi funksional element $f(x_1,x_2,x_2,x_4,x_5)=\psi_2(x_1,x_2,x_5)$ funksiyani, 4- shakldagi funksional element esa

$$f(x_1,x_2,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7,x_7,x_7,x_8)=f(x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)=$$
$$=f(\varphi_1(y_1,y_2),x_2,x_4,x_5,\varphi_2(t_1,t_2,t_3))=\psi_3(x_2,x_5,y_1,y_2,t_1,t_2,t_3)$$

funksiyani realizatsiya qiladi. Demak, ψ_1 funksiya f va f_1 funksiyalarning, ψ_2 funksiya f funksiyaning va ψ_3 funksiya esa f, f_1, f_2, f_3 funksiyalarning superpozitsiyasidir.

Birinchi va ikkinchi usullarni qo'llash natijasida hosil qilingan qurilmalar **sxemalar (to'g'ri sxemalar)** deb ataladi.

Endi sxemaning induksiya metodiga asoslangan ta'rifini beraylik.

1- ta'rif. *a) Har qanday funksional element sxema bo'ladi. Uning kirishi funksional elementning kirishidan, chiqishi esa uning chiqishidan iborat bo'ladi;*

b) agar S_0 sxema va uning ikkita kirishi aynan tutashtirilgan bo'lsa, u holda hosil bo'lgan S qurilma ham sxema bo'ladi. S ning chiqishi S_0 ning chiqishidan va S ning kirishlari bo'lsa, S_0 ning tutashtirilmagan kirishlaridan va aynan tutashtirilgan ikkita kirishga mos kelgan kirishdan iborat bo'ladi;

d) agar S_0 va S_1 sxemalar bo'lsa, u holda S_0 sxemaning birorta kirishiga S_1 sxemaning chiqishini ulash natijasida hosil bo'lgan S qurilma ham sxema bo'ladi. S sxemaning chiqishi S_0 sxemaning chiqishidan va uning kirishlari S_1 ning hamma kirishlaridan hamda S ning chiqishi bilan tutashtirilgan S_0 ning kirishidan tashqari ozod qolgan hamma kirishlaridan iboratdir;

e) ushbu ta'rifning b) va d) bandlarida tasvirlangan usullar orqali chekli qadamda har qanday sxemani funksional elementlardan yasash mumkin.

Bu ta'rif oldingi paragraflarda funksiyalar superpozitsiyasi haqida berilgan ta'rifdan shakli jihatdan birmuncha farq qiladi. Bu farq birinchi navbatda sxemaning rangi (funksional elementlardan sxema yasash uchun bajarilgan qadamlar soniga **sxemaning rangi** deb ataladi) tushunchasi kiritilmaganligi tufayli paydo bo'ldi. Ikkala ta'rifni taqqoslab tahlil qilishni o'quvchiga havola etamiz.

Endi mantiq algebrasining sxema realizatsiya qiladigan funksiyasini induksiya metodi orqali topaylik.

1. Induksiya asosi. Har bir funksional element mantiq algebrasining bitta funksiyasini realizatsiya qilishi aniqlangan.

2. Induktiv o'tish. a) Agar S_0 sxema $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizatsiya qilsa, u holda 1- ta'rifning b) bandi asosida qurilgan S_1 sxema aynan tutashtirilgan kirishlarga mos keladigan x_i, x_j argumentlarni aynan tenglashtirish natijasida hosil qilingan funksiyani realizatsiya qiladi;

b) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani S_0 sxema va $\psi(y_1, y_2, ..., y_m)$ funksiyani S_1 sxema realizatsiya qilsin, bu yerda $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ lar bir-biriga teng bo'lmagan o'zgaruvchilar bo'lsin. U holda 1- ta'rifning d) bandiga asosan qurilgan S sxema $f(x_1, ..., x_{i-1}, \psi(y_1, ..., y_m), x_{i+1}, ..., x_n)$ni realizatsiya qiladi. Bu yerda $\psi(y_1, ..., y_m)$ funksiya f funksiyaning x_i argumenti o'rniga qo'yilgan.

Teng kuchli funksiyalarni bir xil funksional element realizatsiya qiladi deb qabul qilamiz. Buning uchun **soxta kirish** tushunchasini kiritamiz.

2- ta'rif. *Agar φ funksional element realizatsiya qiladigan $f(x, y_1, ..., y_n)$ funksiyaning qiymati x argumentga mos kelgan kirish signalining qiymatiga (0 yoki 1ga) bog'liq bo'lmasa (ya'ni, x o'zgaruvchi $f(x, y_1, ..., y_n)$ning soxta argumenti bo'lsa, u holda φ elementning x argumentga mos kirishi **soxta kirish** deb ataladi.*

3- ta'rif. *Faqatgina kirishlarning raqamlanish tartibi va soxta kirishlari bilan farq qiladigan funksional elementlar **ekvivalent funksional elementlar** deb ataladi.*

Demak, funksional elementni o'zgartirmasdan istalgancha soxta kirishlarni olib tashlash yoki qo'yish mumkin.

$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ sistema $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlar sistemasi va $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ sistema $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlar mos ravishda realizatsiya qiladigan $f_1, f_2, ..., f_n$ funksiyalar sistemasi bo‘lsin. $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ sistema qanday shartlarni qanoatlantirganda, mantiq algebrasining istalgan funksiyasini uning $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlaridan yasalgan sxema orqali realizatsiya qilish mumkinligi masalasini ko‘raylik.

4- ta’rif. *Mantiq algebrasidagi istalgan $f(x_1, x_1, ..., x_n)$ funksiyani Φ sistemadagi $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlardan yasalgan sxema orqali realizatsiya qilish mumkin bo‘lsa, bu funksional elementlar sistemasi **to‘liq sistema** deb ataladi.*

Biz yuqorida sxema realizatsiya qiladigan funksiya shu sxemani yasashda foydalanilgan funksional elementlar realizatsiya qiladigan funksiyalarning superpozitsiyasidan iborat ekanligini ko‘rgan edik. Demak, $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ funksiyalar sistemasi Post teoremasining shartlarini qanoatlantirgan taqdirdagina, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ sistemasidagi funksional elementlar orqali mantiq algebrasining istalgan funksiyasini realizatsiya qiladigan sxema yasashimiz mumkin ekan. Bu yerdan funksional elementlardan yasalgan sxemalar tili mantiq algebrasi funksiyalarining superpozitsiyasi tiliga ekvivalentligi kelib chiqadi.

1- misol. $F_1 = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lganligi uchun, F_1ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ elementlardan iborat $\Phi_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ sistema to‘liq bo‘ladi.■

2- misol. $F_2 = \{xy, x \vee y\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lmagani uchun, F_2ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan φ_1, φ_2 elementlardan iborat $\Phi_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ sistema to‘liq bo‘lmaydi. ■

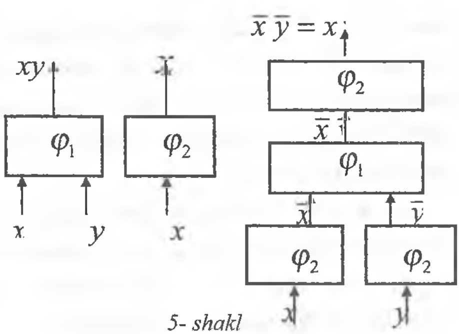
3- misol. $F_3 = \{xy, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lgani uchun, F_3ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan φ_1, φ_3 elementlardan iborat $\Phi_3 = \{\varphi_1, \varphi_3\}$ sistema ham to‘liq bo‘ladi. ■

4- misol. $F_4 = \{x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lgani uchun, F_4ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan φ_2, φ_3 elementlardan iborat $\Phi_4 = \{\varphi_2, \varphi_3\}$ sistema ham to‘liq bo‘ladi. ■

5- misol. $\Phi_1 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ va $F_1 = \{xy, \bar{x}\}$ bo‘lsin. φ_1 funksional element xy funksiyani, φ_2 esa $\bar{x}$ funksiyani realizatsiya qiladi. Bu funksional elementlar orqali $x \vee y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$, 0 va 1 elementar funksiyalarni realizatsiya qilish talab etilsin.

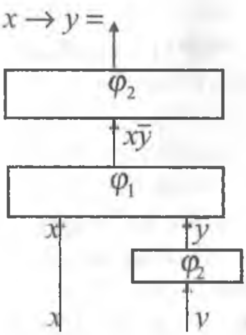
1) $x \vee y$ funksiyani realizatsiya qilish uchun $x \vee y = \overline{\bar{x}\,\bar{y}}$ formuladan foydalanamiz. Agar $\varphi_2$ning kirishiga $\bar{x}\,\bar{y}$ signal bersak, u holda uning

chiqishida $\overline{\overline{x}\,\overline{y}} = x \vee y$ signal paydo bo'ladi. $\overline{x}\,\overline{y}$ signalni hosil qilish uchun φ_1 element kirishlarining biriga $\overline{x}$ va ikkinchisiga $\overline{y}$ signallarni beramiz. Natijada, uning chiqishida $\overline{x}\,\overline{y}$ signal paydo bo'ladi va uni φ_2 ning kirishi bilan ulaymiz. $\overline{x}$ va $\overline{y}$ ni hosil qilish uchun ikkita φ_2 elementdan birining kirishiga x, ikkinchisining kirishiga esa y signal berib, ularning chiqishlari φ_1 ning kirishlari bilan ulanadi. Shunday qilib, 5- shaklda ifodalangan $(x \vee y)$ funksiyani realizatsiya qiladigan S_1 sxemaga ega bo'lamiz.

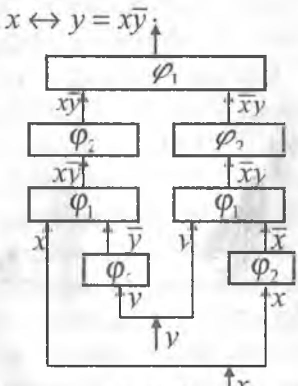


5- shakl

2) $x \to y$ funksiyani sxema orqali realizatsiya qilish uchun $x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x\overline{y}}$ formuladan foydalanamiz. Agar φ_2 elementning kirishiga $x\overline{y}$ signal berilsa, u holda uning chiqishida berilgan signalning inkori, ya'ni $\overline{x\overline{y}} = x \to y$ signal paydo bo'ladi. O'z navbatida $x\overline{y}$ signalni hosil qilish uchun φ_1 element kirishlarining biriga x va ikkinchisiga $\overline{y}$ signalni berish kerak hamda uning chiqishini $x\overline{y}$ funksiyani realizatsiya qiladigan φ_2 elementning kirishiga ulash kerak. $\overline{y}$ signalni hosil qilish uchun φ_2 elementning kirishiga y signal berib, uning chiqishini φ_1 ning ikkinchi kirishiga ulaymiz. Natijada, $x \to y = \overline{x\overline{y}}$ funksiyani realizatsiya qiladigan S_2 sxemaga ega bo'lamiz (6- shakl).



6- shakl



7- shakl

3) $x \leftrightarrow y$ funksiyani realizatsiya qiladigan sxemani yasash uchun $x \Leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = (\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{y}) = \overline{x\overline{y}} \cdot \overline{\overline{x}y}$ formuladan foydalanamiz. Yuqorida aks ettirilgan uslubdan foydalanib, $x \Leftrightarrow y = (\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{y}) = \overline{x\overline{y}} \cdot \overline{\overline{x}y}$ funksiyani realizatsiya qiladigan S_3 sxemani hosil qilamiz (7- shakl).

4) 1 konstantani realizatsiya qilish uchun $x \vee \bar{x} = 1$ formuladan, 0 ni realizatsiya qilish uchun esa $x\bar{x} = 0$ formulalardan foydalanamiz. Ularni realizatsiya qiladigan sxemalar 8- shaklda keltirilgan. ■

Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki, ixtiyoriy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani sxema orqali realizatsiya qilish uchun:

1) berilgan Φ sistemadagi $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlardan ko'p pog'onali sxema tuzishga to'g'ri keladi;

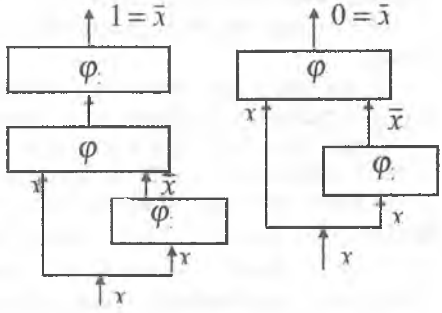
2) ko'p pog'onali sxemani yuqoridan pastga qarab yasashga to'g'ri keladi;

3) sxemaning ozod chiqishli funksional elementi kirishlariga shunday signallar majmuasini berish kerakki, uning chiqishida qurilayotgan sxema realizatsiya qilishi kerak bo'lgan f funksiyaga mos keladigan signal paydo bo'lsin;

4) sxemaning ichki funksional elementlari kirishlariga shunday signallar majmuasini berish kerakki, uning chiqishida kerakli signal paydo bo'lsin.

Berilgan qurilmaning sxema ekanligini uning ta'rifiga asosan aniqlash mumkin. Ammo sxema emasligini aniqlash uchun berilgan qurilmaning sxemaga loyiq bo'lgan xususiyatlarga ega emasligini ko'rsatish kerak bo'ladi.

5- ta'rif. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *funksional elementlar berilgan bo'lsin. Agar* φ_1 *elementning chiqishi* φ_2 *elementning kirishiga,* φ_2 *elementning chiqishi* φ_3 *elementning kirishiga va hokazo,* φ_{k-1} *elementning chiqishi* φ_k *elementning kirishiga va* φ_k *elementning chiqishi* φ_1 *elementning kirishiga ulangan bo'lsa, u holda bunday qurilma* ***sikl*** *va* ***qurilmada teskari bog'lanish*** *bor deb aytiladi.*



8- shakl

Teorema. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlardan yasalgan S qurilma:

1) φ_i $(i = 1, ..., n)$ elementlardan faqatgina bittasining chiqishi ozod bo'lsa;

2) har bir φ_i elementning kirishi faqatgina φ_j elementlardan bittasining chiqishi bilan ulangan bo'lsa;

3) S qurilmada sikl (teskari bog'lanish) mavjud bo'lmaganda va faqat shundagina sxema bo'ladi.

Teoremani isbot qilishni o'quvchilarga havola qilamiz.

8.2. Ko‘p taktli sxemalar

Takt. Ushlab turish vaqti. Ushlab turish elementi. Ko‘p taktli sxema. Bir taktli funksional elementlar sistemasining to‘liqligi.

8.2.1. Ko‘p taktli sxema tushunchasi. Mazkur bobning 1- paragrafida ko‘rilgan funksional elementlar va ulardan yasalgan sxemalar oniy ravishda ishlaydi deb faraz qilingan, ya’ni ularning kirishlariga signallar majmuasi berilgan zahotiyoq ularning chiqishlarida natijaviy signal paydo bo‘ladi deb hisoblangan edi. Boshqacha aytganda, kirishlarga berilgan signallar majmuasini ishlab chiqish uchun hech qanday vaqt sarflanmasligi faraz qilingan edi. Amalda esa funksional element kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan uning chiqishidagi natijaviy signalni olish uchun vaqt sarf bo‘ladi. Sxemaning kirishlariga berilgan signallar majmuasi uning ichki funksional elementlarining kirishlariga har xil vaqtda yetib keladi, chunki, birinchidan, elementlarning kirishlariga yetib kelgan signallar bir qancha elementlardan o‘tib keladi, ikkinchidan, har bir element kirishlariga yetib kelgan signallarni har xil vaqtlarda ishlab chiqadi. Bu holda sxema kirishlariga berilgan signallar majmuasini yetarlicha uzoq vaqt berib turish mumkinki, toki sxema ichki elementlarining hamma kirishlariga signallar yetib kelsin. Natijada, sxemaning chiqishida ma’lum vaqtdan keyin uning kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal paydo bo‘ladi. Shundan keyin kirishlarga berilayotgan signallar majmuasini to‘xtatish mumkin va bu sxemani u realizatsiya qiladigan funksiya qiymatini argumentlar qiymatining boshqa majmuasida hisoblash uchun ishlatish mumkin.

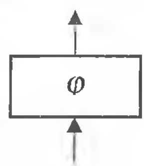
Funksional elementning yuqorida ifodalangan ikkinchi xil ishlashi quyidagi kamchiliklarga egadir:

1) kirishga signallar majmuasini ma’lum vaqt davomida berib turish kerak;

2) ma’lum vaqt davomida sxema chiqishida paydo bo‘ladigan signal uning kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos kelmasligi mumkin.

Yangi sharoitda “qanday qurilmani funksional element deb hisoblash kerak?” degan savolga javob beraylik.

1- ta’rif. *Agar biror element (1- shakl) uchun aniq bo‘lgan v vaqtdan keyin uning chiqishida kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal (realizatsiya qilinadigan funksiyaning berilgan signallar majmuasidagi qiymati) paydo bo‘lsa, u holda bunday qurilma* ***funksional element*** *deb ataladi.*



1- shakl

Agar kelgusi momentda element kirishlariga yangi signallar majmuasi berilsa, u holda v vaqtdan keyin uning chiqishida berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal paydo bo‘ladi, ya’ni kirishlarga ketma-ket berila-digan signallar majmuasi bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ishlab chiqiladi.

Vaqtning diskret $t = 1,2,3,\dots,k$ momentlarini qarab, ikkita qo‘shni vaqt momentlari orasidagi vaqt birligini bir takt deb aytamiz.

2- ta’rif. *Element kirishiga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal uning chiqishida paydo bo‘lishigacha sarf qilingan vaqt (v vaqt) funksional elementning* ***ushlab turish vaqti*** *deb ataladi.*

Bundan keyin sxemani berilgan ta’rifga mos keladigan yangi ma’nodagi funksional element sifatida qaraymiz. Bunday sxemalarni yasash jarayonida ushlab turish elementlari katta rol o‘ynaydi.

3- ta’rif. *Agar funksional element chiqishida ma’lum vaqtdan (taktdan) keyin uning kirishiga berilgan (0 yoki 1) signalning o‘zi paydo bo‘lsa, u holda bunday funksional elementga* ***ushlab turish elementi*** *deb ataladi* (1- shakl).

Ushlab turish elementi funksiyani realizatsiya qiladigan funksional elementdir, ya’ni uning chiqishida ma’lum vaqtdan keyin kirishiga berilgan signalning o‘zi paydo bo‘ladi.

Bundan keyin (agar maxsus aytilgan bo‘lmasa) hamma funksonal elementlarni bir taktli, ya’ni elementning kirishiga signal berilgandan keyin uning chiqishida natijaviy signal paydo bo‘lguncha bir takt vaqt o‘tadi deb faraz qilamiz.

4- ta’rif. *Agar S sxemaning n ta kirishiga $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ signallar majmuasini bergandan ma’lum v taktdan keyin uning chiqishida f funksiyaning $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymati hosil bo‘lsa, u holda S sxema $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyani v ushlab turish vaqti bilan* ***realizatsiya qiladi*** *deb ataladi.*

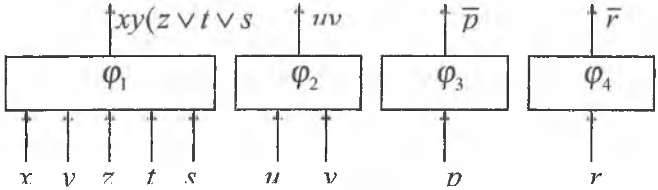
Bunday S sxemani v ushlab turish vaqti bilan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan funksional element deb qarash mumkin.

Mantiq algebrasining istalgan funksiyasini realizatsiya qiladigan sxema **to‘g‘ri** sxema deb ataladi.

Bir taktli funksional elementlardan tuzilgan sxemani **ko‘p taktli**, oniy ravishda ishlaydigan funksional elementlardan tuzilgan sxemani esa **nol taktli** sxema deb ataymiz.

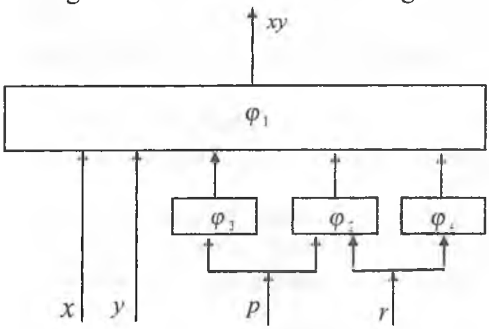
1- izoh. Agar (bir taktli funksional elementlardan tuzilgan) to‘g‘ri sxemadagi hamma funksional elementlarni nol taktli deb faraz qilsak, u holda hosil bo‘lgan nol taktli sxema ham ko‘p taktli sxema realizatsiya qiladigan funksiyani realizatsiya qiladi.

2- izoh. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan S to'g'ri sxemaning ushlab turish vaqti v doimo sxemaning ketma-ket ulangan



2- shakl

ichki funksional elementlari soniga teng emas. Masalan, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlardan (2- shakl) tuzilgan sxema (3- shakl), ketma-ket ulangan funksional elementlarning soni ikkiga teng bo'lishiga qaramasdan, xy funksiyani realizatsiya qiluvchi bir taktli sxemadir.



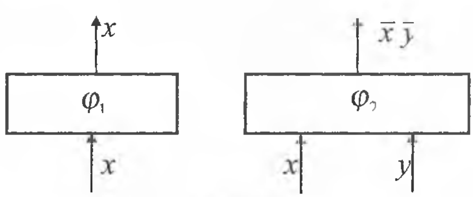
3- shakl

3- izoh. Konstantalarni (0 yoki 1) realizatsiya qiladigan sxemalar yoki funksional elementlarning hamma kirishlari soxta kirishlardir. Bunday sxemalarni nol taktli sxemalar deb aytish mumkin.

8.2.2. To'liq sistema. Endi $\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_n$ bir taktli funksional elementlardan iborat Φ sistemaning to'liqlik masalasini ko'rishga o'tamiz.

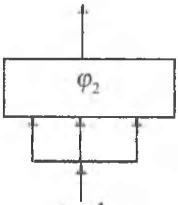
5- ta'rif. *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ sistemasidagi funksional elementlardan tuzilgan sxema orqali realizatsiya qilish mumkin bo'lsa, u holda Φ sistemasi **to'liq sistema** deb ataladi.*

1- misol. Bir taktli funksional elementlar sistemasi $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ berilgan bo'lsin, bu yerda φ_1 element x funksiyani realizatsiya qiladigan ushlab turish elementi, φ_2 esa $x \mid y$ Sheffer funksiyasini realizatsiya qiladigan funksional elementdir (4- shakl).



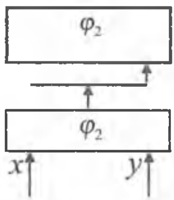
4- shakl

Ushbu a) $\overline{x}$, b) xy, d) $x \vee y$, e) 1, f) 0, g) $x + y$, *a)* $\bar{x} = \varphi_2(x,x)$ *b)* $xy = \overline{\varphi_2(x,y)}$



$v = 1$

5- shakl



$v = 2$

6- shakl

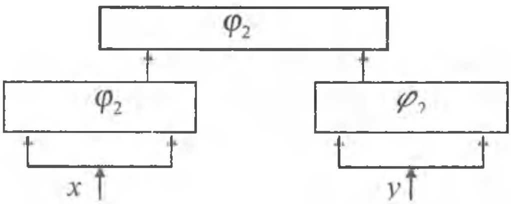
h) $x \to y$ va i) $x \leftrightarrow y$ funksiyalarni realizatsiya qiluvchi sxemalarni φ_1 va φ_2 funksional elementlar orqali yasash va ushlab turish vaqtini (taktini) aniqlash talab qilingan bo‘lsin. Yuqorida keltirilgan a) –i) sxemalar 5–12- shakllardagidek tasvirlanishi mumkin.■

2- misol. 1. Sheffer funksiyasini realizatsiya qiladigan φ elementdan iborat $\Phi = \{\varphi\}$ sistema to‘liq boladimi?

2. $\Phi_1 = \{0,1\}$ elementlar sistemasining to‘liqligini isbot qiling. ■

Misollar yechimlarining tahlilidan ma’lumki, bir taktli $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlar sistemasi $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ ning to‘liqlik shartlari

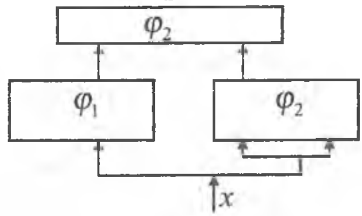
d) $x \vee y = \varphi_2(\bar{x}, \bar{y})$



$v = 2$

7- shakl

e) $1 = xx = \varphi_2(x,x)$

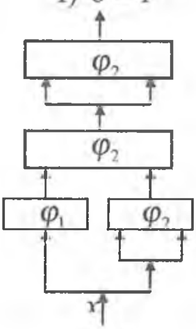


$v = 2$

8- shakl

nol taktli $\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_n^*$ funksional elementlar sistemasi $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_n^*\}$ ning to‘liqlik shartlariga mos kelmaydi.

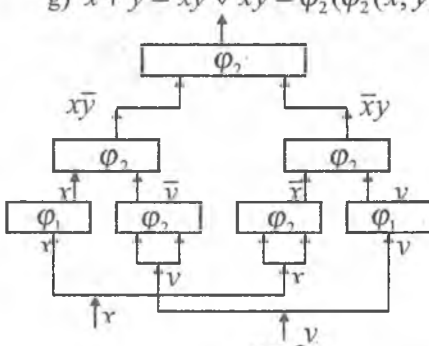
f) $0 = 1$



$v = 3$

9- shakl

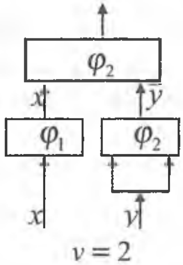
g) $x + y = x\bar{y} \vee \bar{x}y = \varphi_2(\varphi_2(x, \bar{y}), \varphi_2(\bar{x}, y))$



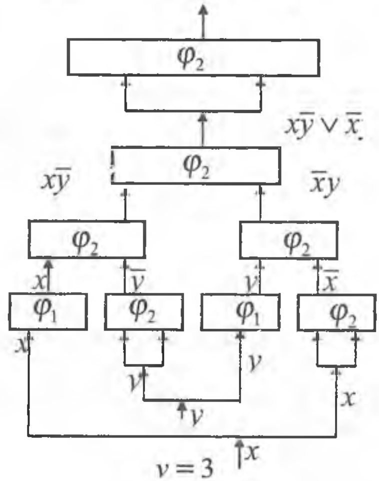
$v = 3$

10- shakl

h) $x \to y = \varphi_2(x, \bar{y})$ i) $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = x\bar{y} \vee \bar{x}y$



11- shakl



12- shakl

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: 1) mantiq algebrasining elementlari $f(0,0,...,0) = 1$ va $f(1,1,...,1) = 0$ (0 va 1 saqlamovchi funksiyalar, ya'ni argumentlarini aynan tenglashtirganda f funksiyaga teng bo'ladi) funksiyalardan iborat to'plamni Q bilan;

2) istalgan qism o'zgaruvchilar o'rniga konstantalarni (0 yoki 1) qo'yib, qolgan qismini aynan tenglashtirganda 0,1 yoki $\bar{x}$ (ya'ni x paydo bo'lmaydi) hosil bo'ladigan funksiyalardan iborat to'plamni R bilan belgilaymiz.

Teorema. *Agar $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ bir taktli funksional elementlar sistemasi realizatsiya qiladigan funksiyalar ichida*

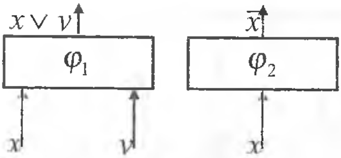
a) Post teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi funksiyalar sistemasi;

b) Q to'plam elementi bo'lmagan funksiyalar;

d) R to'plam elementi bo'lmagan funksiyalar mavjud bo'lganda va faqat shundagina bunday sistema to'liq bo'ladi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $F_2 = \{x \vee y, \bar{x}\}$ sistemadagi funksiyalarni realizatsiya qiladigan $\Phi_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ funksional elementlar sistemasi berilgan bo'lsin (13-shakl). xy, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$, 0 va 1 elementar funksiyalarni realilizasiya qiladigan sxemalar yasang.

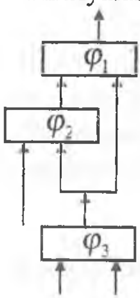


13- shakl

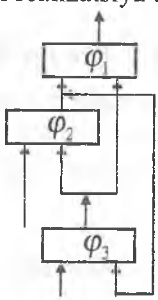
2. $F_1 = \{\overline{xy}\}$ va $\Phi_1 = \{\varphi_1\}$ hamda $F_2 = \{\overline{x \vee y}\}$ va $\Phi_2 = \{\varphi_2\}$ berilgan bo'lsin. Hamma elementar funksiyalarni realizatsiya qiladigan sxemalarni avval φ_1 funksional element orqali, keyin φ_2 orqali yasang.

3. 14–18- shakllardagi funksional elementlardan tuzilgan qurilmalarning qaysilari sxema bo'lishini aniqlang.

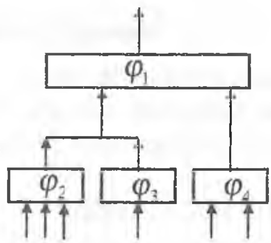
4. $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ bo'lsin, bu yerda φ_1 funksional element $\overline{x \vee y}$ Sheffer funksiyasini va φ_2 funksional element x funksiyasini (ushlab turish elementini) realizatsiya qiladi. Mantiq algebrasining hamma elementar funksiyalarini realizatsiya qiladigan sxemalar yasang.



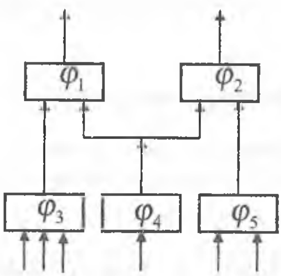
14- shakl



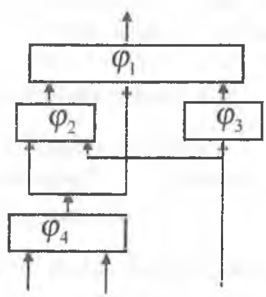
15- shakl



16- shakl



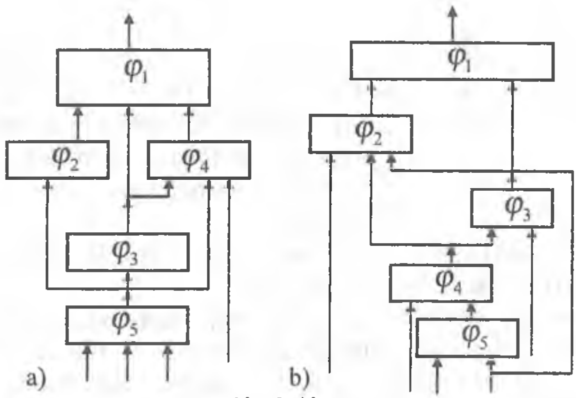
17- shakl



18- shakl

5. $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ bo'lsin, bu yerda φ_1 funksional element $\overline{x \wedge y}$ Sheffer funksiyasini va φ_2 funksional element x funksiyasini (ushlab turish elementini) realizatsiya qiladi. $x \to y \to z$, $(x \vee y) \leftrightarrow z$, $xz \to y$, $(x \leftrightarrow y) \to z$, $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$, $(x \to y) \vee z$ funksiyalarni realizatsiya qiladigan sxemalar yasang.

6. 19- shakldagi qurilmalarning qaysi biri sxema bo'lishini aniqlang.



19- shakl

Mustaqil ishlash uchun savollar

Funksional elementlar va ulardan sxemalar yasashni bilasizmi?

1. Sxema matematik induksiya metodi vositasida qanday ta'riflanadi?

2. Fuknksional elementlar sistemasining to'liqligi haqidagi teoremani bilasizmi?

3. Sikl deb nimaga aytiladi?

4. Ushlab turish vaqti va ushlab turish elementi deganda nimani tushunasiz?

5. Ko'p taktli sxemaning ta'rifini bilasizmi?

6. Bir taktli funksional elementlar sistemasining to'liqligi haqidagi teorema qanday ifodalanadi?

8.3. Teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomatlar

Elementning yuqori va quyi indeksi. To'g'ri sxema. Teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomat. Xarakteristik funksiya. ρ -indeks. Kuchsiz avtomatli to'liq sistema.

8.3.1. Funksional elementning quyi va yuqori indekslari tushunchalari. Oldingi paragrafda mantiq algebrasining funksiyalarini faqat to'g'ri sxemalargina realizatsiya qilishini ko'rdik. Bir taktli funksional elementlardan yasalgan sxemaning umumiy holda ishlash jarayonini ko'raylik. Sxema kirishlariga har momentda signallar majmuasi berib turiladi. Tabiiyki, sxemaning chiqishidagi signal uning kirishlariga oldingi momentlarda berilgan signallar majmuasiga bog'liq bo'ladi.

Funksional elementning quyi va yuqori indekslari tushunchasini kiritaylik.

1- ta'rif. *Sxemaning kirishlariga berilgan signallar φ funksional elementning chiqishida hosil bo'lishiga qadar bosib o'tilgan ichki funksional elementlarning maksimal soni (φ elementning o'zi ham kiradi) elementning* ***yuqori indeksi*** *va minimal soni* ***quyi indeksi*** *deb ataladi.*

φ funksional element S sxemaning chiqish elementi (ya'ni ozod chiqishga ega bo'lgan elementi) bo'lsin. U holda φ elementning yuqori va quyi indekslarini mos ravishda $\mu = \mu(S)$ va $\eta = \eta(S)$ bilan belgilaymiz.

Demak, sxema to'g'ri bo'lishi uchun biror φ elementning kirishlariga chiqishlari ulangan hamma funksional elementlarning yuqori indekslari teng bo'lishi kerak (yetarli shart).

Sxema ta'rifiga asosan, t vaqt momentida sxemaning chiqishidagi signal uning kirishlariga $t-\mu$ dan $t-\eta$ momentgacha berilgan signallar majmuasiga bog'liq bo'ladi. Demak, t momentdagi chiqish signali uning kirishlariga $\rho = \mu - \eta + 1$ ketma-ket berilgan signallar majmuasining funksiyasi bo'ladi: $F(x_1^0,...,x_n^0;\ x_1^1,...,x_n^1;\ ...;\ x_1^{\rho-1},...,x_n^{\rho-1})$.

Bu yerda F mantiq *algebrasining ρ^n argumentli funksiyasi va kirishlarga $t-\mu+i$ momentda berilgan signallar majmuasi bo'ladi. Agar sxema to'g'ri bo'lsa, u holda F funksiya qat'iyan $t-\nu$ momentda (ya'ni $i = \eta - \nu$, albatta $\eta \geq \nu$) berilgan faqatgina* bitta signallar $(x_1^i,...,x_n^i)$ majmuasiga bog'liq bo'ladi va S sxema F funksiyani ν ushlab turish vaqti (ν takt) bilan realizatsiya qiladi.

8.3.2. Teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomat bilan bitta funksional elementlardan tuzilgan sxema orasidagi munosabat.

2- ta'rif. *n kirishga va bitta chiqishga ega bo'lgan qurilma berilgan bo'lsin (1- shakl). Har bir momentda uning kirishlariga 0 yoki 1 signal berilganda, chiqishida har bir t momentda 0 yoki 1 signal hosil bo'ladi. Chiqishdagi signal kirishlarga $t-\mu$ momentdan $t-\eta$ momentgacha ρ ($\rho = \mu - \eta + 1$) ketma-ket berilgan signallar majmuasining funksiyasi bo'ladi: $F(x_1^0,...,x_n^0;\ x_1^1,...,x_n^1;\ ...;\ x_1^{\rho-1},...,x_n^{\rho-1})$. Bu yerda $t-$ i momentda berilgan signallar majmuiga teng bo'ladi. U holda bunday qurilma* ***teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomat*** *deb ataladi. Mantiq algebrasining F funksiyasi uning* ***xarakteristik funksiyasi,*** *ρ* ***-indeksi,*** *ν* ***-ushlab turish vaqti*** *deb ataladi.*

Agar teskari bog'lanishi bo'lmagan ikkita avtomatlarning F_1 va F_2 xarakteristik funksiyalari faqatgina soxta argumentlari bilan farq qilsa, u holda bunday avtomatlar **ekvivalent avtomatlar** deb ataladi.

Har qanday funksional element birorta teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomatni ifodalaydi. Bu element uchun xarakteristik funksiya u realizatsiya qiladigan funksiya bilan mos tushadi, indeks va ushlab turish vaqti esa birga teng bo'ladi.

Shunday qilib, bir taktli funksional elementlardan tuzilgan har qanday sxema teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomatni ifodalaydi. Aslida funksional elementlar bir taktli bo'lishi shart emas. Faqatgina sxemaning quyi va yuqori indekslarini boshqacha hisoblash kerak:

φ elementning **quyi** va **yuqori indekslari** deb, sxemaning kirishlariga berilgan signallar φ elementning chiqishida hosil bo'lguncha bosib o'tilgan funksional elementlar ushlab turish vaqtlari yig'indisining mos ravishda minimumi va maksimumiga aytiladi.

Har qanday teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomat o'z navbatida bitta funksional elementdan tuzilgan sxemani ifodalaydi (ushbu fikrning to'g'riligini isbotlashni o'quvchiga havola etamiz).

3- ta'rif. *Funksional elementlardan tuzilgan S sxema bilan ifodalanadigan avtomat teskari bog'lanishi bo'lmagan A avtomatdan faqatgina ushlab turish vaqti v bilan farq qilsa, bu avtomat A* ***avtomatni realizatsiya qiladi*** *deyiladi.*

4- ta'rif. *Agar har qanday teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomatni $\varphi_1,...,\varphi_n$ funksional elementlardan tuzilgan sxema orqali realizatsiya qilish mumkin bo'lsa, u holda funksional elementlar sistemasi* ***kuchsiz avtomatli to'liq sistema*** *deb ataladi.*

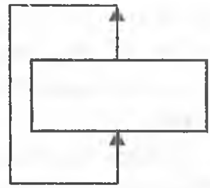
Bir taktli funksional elementlar sistemasi to'liqligining yetarli va zarur sharti elementlar sistemasining kuchsiz avtomatli to'liqlik shartiga mos keladi.

8.4. Teskari bog'lanishi bo'lgan funksional elementlardan sxemalar yasash. Chekli avtomat haqida umumiy tushunchalar

Teskari bog'lanishli funksional elementlar. Xotirada saqlovchi qurilma. Sxemaning $(t+1)$ momentdagi holati. $U(\Omega, n)$ avtomat. Avtomat holatlari. Avtomat ishining natijalari.

8.4.1. Teskari bog'lanishi bo'lgan funksional elementlardan sxemalar yasash. Hozirgacha funksional elementlardan yasalgan va teskari bog'lanishi bo'lmagan sxemalarni ko'rib o'tdik. Bunday cheklash nol taktli funksional elementlardan sxemalar yasash masalasini yechish uchun qo'yilgan edi, chunki, aks holda, bunday sxemalarning ish jarayonini yoritish mumkin emas.

1- shaklda ko‘rsatilgan funksiyani realizatsiya qiladigan sxemaning ish jarayonini ko‘rib o‘taylik. φ funksionalni bir taktli element deb hisoblaymiz. Agar biror t momentda φ ning chiqishida 1 signal paydo bo‘lsa, u holda shu momentning o‘zida o‘sha signal uning kirishida paydo bo‘ladi va $(t+1)$ momentda uning chiqishida 0 signal paydo bo‘ladi va hokazo. Natijada, φ funksional elementning chiqishida ketma-ket 1,0,1,0,1,0,... signallar paydo bo‘ladi va φ nol taktli funksional element bo‘lgan vaqtdagi qarama-qarshiliklar o‘z-o‘zidan yo‘qoladi. Bu sxemani “qo‘ng‘iroq” sxemasi deb atash mumkin, chunki qo‘ng‘iroqda bir taktda qarama-qarshi qiymatlarga o‘zgaradigan ketma-ket beriladigan signallar foydalaniladi.



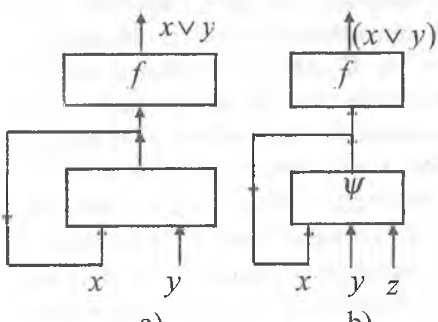
1- shakl

Ushbu paragrafda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi teskari bog‘lanishli sxemalarni ko‘rib chiqamiz:

1) qurilmaning φ_i $(i=1,2,...,n)$ elementlari orasida faqat va faqat bittasi ozod chiqishga ega;

2) φ_i elementning har bir kirishi φ_j elementlarning faqatgina bittasining chiqishi bilan ulanadi.

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi bir taktli funksional elementlardan yasalgan teskari bog‘lanishli sxemalarning ishlash jarayonini ko‘rib o‘taylik. Sxema teskari bog‘lanishli bo‘lgani uchun uning chiqishidagi signal faqat sxema kirishlariga berilgan signallar majmuiga emas, balki uning ichki elementlarining chiqishidagi signallarga ham bog‘liq bo‘ladi. Bu keyingi signallar sxema kirishlariga berilgan signallarga bog‘liq bo‘lmasligi ham mumkin yoki ancha oldin berilgan kirish signallariga bog‘liq bo‘lishi mumkin. Masalan, sikl elementlarining kirishi sxema kirishi bo‘lmasligi mumkin. 2- shakldagi φ bir taktli element $x \vee y$ funksiyani, ψ bir taktli elementi esa $(x \vee y)z$ funksiyani realizatsiya qiladi, bu yerda f – bir taktli ushlab turish elementi.



2- shakl

Agar 2-a shakldagi sxemaning y kirishiga istalgancha ancha oldin 1 signali berilgan bo‘lsa, u holda shu signalning o‘zi doimo uning chiqishida paydo bo‘lib turadi (ya’ni y signal xotirada saqlanadi).

2-b shakldagi sxemada y signal faqat $z = 1$ bo'lgandagina xotirada saqlanadi. $z = 0$ signal berib, xotirani tozalashimiz mumkin. Shundan keyingina y ning yangi qiymatini xotirada saqlay olamiz ($z = 1$ qiymatda). Real sxemalarda "xotirada saqlovchi qurilma" sikl yordamida realizatsiya qilinadi.

Teskari bog'lanishli sxema ish jarayonining xarakteristikasini ifodalashda undagi ichki elementlarining holatini hisobga olish kerak.

S teskari bog'lanishli sxema va $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_k$ uning elementlari bo'lsin. Bu yerda φ_0 – chiqish elementi, ya'ni ozod chiqishga ega bo'lgan element bo'lsin. φ_i elementning chiqishidagi t vaqt momentidagi signalini $\varphi_i(t)$ bilan belgilaymiz ($\varphi_i(t)$ signal 0 yoki 1 ga teng). Sxema chiqishida t momentdagi signal $\varphi_0(t)$ ga teng bo'ladi.

$\varphi(t) = \{\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t)\}$ sistema S sxemaning t vaqt momentidagi **holati** deb ataladi. t momentda S sxema kirishlariga berilgan signallarni $s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t)$ bilan va $s(t) = \{s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t)\}$ orqali ularning majmuini belgilaymiz. U holda sxemaning $(t+1)$ momentdagi holati $\varphi(t+1)$, sxemaning t momentdagi $\varphi(t)$ va $s(t)$ lari orqali bir qiymatli aniqlanadi, ya'ni $\varphi(t+1) = \Phi(\varphi(t), s(t))$.

Demak, elementlarning chiqishidagi $(t+1)$ momentdagi signallar ularning kirishlariga t momentda berilgan signallarga bog'liq bo'lar ekan, ya'ni t momentda sxemaning kirishlariga berilgan signallar va elementlarning shu momentdagi chiqish signallariga bog'liqdir. Aniqrog'i, Φ sistema $(k+n+1)$ argumentli $(k+1)$ta $\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_k$ mantiq algebrasi funksiyalarining majmuidan (to'plamidan) iborat bo'ladi. Bu $(k+n+1)$ argumentlarning ayrimlari soxta bo'lishi mumkin. Masalan, Φ_i uchun faqat quyidagi argumentlar soxta emas: φ_i elementning kirishlariga chiqishlar ulangan funksional elementlarga va sxemaning kirishlari bevosita φ_i elementning ham kirishlari deb hisoblanadigan signallarga mos keladigan argumentlar. Agar faqat shunday soxta emas argumentlarni hisobga olsak, u holda Φ_i funksiya φ_i element realizatsiya qiladigan funksiyaga mos keladi va yuqoridagi formula $(t+1)$ vaqt momentida φ_i elementlarning chiqishlarida t momentda ularning kirishlariga berilgan signallar majmuiga bog'liq bo'lgan qanday signal paydo bo'lishini ko'rsatadi.

8.4.2. Chekli avtomat haqida umumiy tushunchalar.

T a ' r i f. Ω *to'plam* $(k+1) > 0$ *uzunlikdagi ikkilik majmualarning biror to'plami bo'lsin. Agar* $(n+k+1)$ *argumentli* $(k+1)$ *ta qisman* *aniqlangan mantiq algebrasining Φ_i funksiyalaridan iborat Φ majmua ko'rsatilgan bo'lsa, u holda Ω ruxsat qilingan holatlar to'plamida n kirishga ega bo'lgan $U(\Omega,n)$* ***avtomat berilgan*** *deb ataladi.*

Bu yerda Φ_i funksiyalar shunday $(n+k+1)$ uzunlikdagi ikkilik majmualarda aniqlanganki, ulardan $(k+1)$ ta elementi Ω kiruvchi majmua bo'ladi va shu majmuadagi Φ_i funksiyalarning qiymati Ω ga kiradi. Ω to'plamdagi elementlar soni avtomatning **xotirasi** deb ataladi. Agar avtomatning boshlang'ich holati $\varphi^0 \in \Omega$ biror natural son v (ushlab turish vaqti deb aytiladi) va har bir vaqt momentida n uzunlikdagi $s(t) = \{s_1(t), s_2(t),..., s_n(t)\}$ kirish signallar majmui berilgan bo'lsa, u holda $U(\Omega,n)$ avtomatning **ish jarayoni aniqlangan** deb ataladi.

Agar avtomatning ish jarayoni aniqlangan bo'lsa, u holda $t \geq v$ uchun uning ketma-ket holatlari $\varphi(t+v) = \Phi(\varphi(t), s(t))$, $\varphi(0) = \varphi^0$, formula orqali aniqlanadi. Bu formula **avtomatning holatlar tenglamasi** deb ataladi. Ravshanki, avtomatning har qanday vaqt momentidagi holati $\varphi(t) \in \Omega$ bo'ladi. $\varphi^0(t)$ $(t \geq v)$ ketma-ketlik **avtomatning chiqishi (ishning natijasi)** deb ataladi. Agar $k=0$ va Φ faqatgina $s(t)$ ga bog'liq bo'lsa, u holda $U(\Omega,n)$ avtomat mantiq algebrasining funksiyasiga aylanadi.

Qabul qilingan belgilashlarda bir taktli funksional elementlardan yasalgan teskari bog'lanishli S sxema quyidagi xarakteristikaga ega bo'lgan avtomatni ifodalaydi: $v=1$; $\varphi^0 - t = 0$ momentdagi S sxema elementlar chiqishlaridagi signallari; Ω – hamma mumkin bo'lgan elementlar chiqishidagi signallar majmui.

Shunday qilib $v=1$ ushlab turish vaqtiga ega bo'lgan chekli avtomatni bir taktli funksional elementlardan yasalgan teskari bog'lanishli sxema orqali ifodalash mumkin.

8.5. Mili va Mur avtomatlari

Chekli avtomat modeli. Avtomat ishining kanonik tenglamasi. Initsial va noinitsial avtomatlar. Mili va Mur avtomatlari va ular orasidagi munosabatlar.

8.5.1. Avtomatning ishini kanonik tenglama bilan ifodalash. Chekli xotirali diskret qurilmalar chekli avtomat modeli bo'ladi. Bu avtomatning n ta $x_1, x_2,..., x_n$ kirishi, m ta $y_1, y_2,..., y_m$ chiqishi va $Q = \{g_0, g_1,..., g_{r-1}\}$ chekli ichki holati mavjud.

Chekli avtomat diskret vaqt $t = 0,1,2,...$ momentlarida ishlaydi. Agar t momentdagi x_i kirish, y_j chiqish va g holatining qiymatlarini mos ravishda $x_i(t)$, $y_j(t)$ va $g(t)$ bilan belgilasak, u holda avtomatning ishi quyidagi kanonik tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \Phi_j(x_1(t),...,x_n(t), g(t-1)),\ j = 1,...,m, \\ g(t) &= \psi(x_1(t),...,x_n(t), g(t-1)). \end{aligned} \qquad (1)$$

(1) tenglamalardagi Φ_j va ψ funksiyalar mos ravishda j **chiqishning funksiyasi** va **o'tishlar funksiyasi** deb ataladi. Avtomatning ish jarayonini aniqlash uchun uning boshlang'ich $g(0)$ holatini ko'rsatish kerak.

Agar $g(0)$ va 1 momentdagi kirish qiymatlari $x_1(1), x_2(1),..., x_n(1)$ ma'lum bo'lsa, u holda (1) kanonik tenglamadan foydalanib 1 momentdagi chiqish $y_j(1)$ va $g(1)$ holatning qiymatini, $g(1)$ va $x_1(2),..., x_n(2)$ asosida 2 momentdagi chiqish $y_j(2)$ va $g(2)$ holatlarini aniqlash mumkin va hokazo.

Ikki turdagi avtomatlar mavjud: **initsial** va **initsialmas** (noinitsial). Initsial avtomatlarda boshlang'ich holat tayinlangan (mahkamlangan) bo'ladi. Noinitsial avtomatlarda boshlang'ich holat sifatida istalgan holatni olish mumkin.

8.5.2. Mili va Mur avtomatlari. Ixtiyoriy sondagi kirish va chiqishga ega bo'lgan avtomat ishini aniqlash masalasi 1ta kirish va 1ta chiqishga ega bo'lgan avtomatning ishini aniqlash masalasiga keltiriladi. Shuning uchun asosiy model sifatida 1ta x kirishga va 1ta y chiqishga ega bo'lgan avtomatlarni ko'ramiz. Bunday avtomatlar quyidagi kanonik tenglama bilan ifodalanadi:

$$y(t) = \Phi(x(t), g(t-1)),\ g(t) = \psi(x(t), g(t-1)).$$

Bunday turdagi avtomat **Mili**[1] **avtomati** deb ataladi.

Mili avtomati chekli xotirali diskret qurilmaning yagona modeli emas. Ikkinchi model – **Mur**[2] **avtomati** mavjud. Mur avtomatida chiqish qiymati o'sha momentning o'zidayoq ichki holatning qiymati bilan aniqlanadi. Mur avtomatining kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$g(t) = \psi(x(t), g(t-1)),\ y(t) = \lambda(\ g(t-1)).$$

---

[1] Mili (Mealy G.H.) – AQSh matematigi. Bu avtomatga Mili nomi berilishiga uning ushbu ilmiy ishi sababchi bo'lgan: Mealy G.H. *A Method to Synthesizing Sequential Circuits*. Bell System Technical J, (1955). 1045-1079.

[2] Mur Eduard (Edward F. Moore, 1925-2003) – AQSh matematigi va informatigi.

Agar birinchi tenglamadan ikkinchisiga $g(t)$ qiymatini qo'ysak va $\Phi = \lambda(\psi)$ deb belgilasak, u holda ikkinchi tenglama quyidagi ko'rinishga keladi. $y(t) = \lambda(\psi((x(t), g(t-1)))) = \Phi(x(t), g(t-1))$.

Demak, Mur avtomatini Mili avtomatining xususiy holi deb qarash mumkin. Bu yerda o'tish funksiyasi maxsus $\Phi = \lambda(\psi)$ ko'rinishda bo'ladi. Xuddi shu kabi, Mili avtomatini ham (qandaydir ma'noda) Mur avtomatiga keltirish mumkin.

Demak, *har qanday initsial va noinitsial Mili avtomatlari uchun ularga ekvivalent bo'lgan initsial va noinitsial Mur avtomatlari mavjud.*[1]

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Har qanday teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomatni funksional elementlardan yasalgan biror sxema orqali ifodalash mumkinligini isbotlang.

2. Har qanday initsial va noinitsial Mili avtomatlari uchun ularga ekvivalent bo'lgan initsial va noinitsial Mur avtomatlari mavjud ekanligini isbotlang.

3. Har qanday ishlab turish vaqti $v = 1$ bo'lgan chekli avtomatni bir taktli funksional elementlardan yasalgan sxema orqali ifodalanishini ko'rsating.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Elementning yuqori va quyi indeksi deganda nimani tushunasiz?

2. To'g'ri sxema nima?

3. Qanday avtomatlar teskari bog'lanishi bo'lmagan avtomatlar deb ataladi?

4. Xarakteristik funksiya nima?

5. Funksional elementlar sistemasi qanday shartlarni qanoatlantirsa, kuchsiz avtomatli to'liq sistema deyiladi?

6. Teskari bog'lanishi bo'lgan funksional elementlardan sxemalar yasashni bilasizmi?

7. Chekli avtomat haqida qanday tushunchalarni bilasiz?

8. Mili va Mur avtomatlari deganda nimani tushunasiz?

---

[1] Bu tasdiqning isbotini A.A.Sholomovning (Шоломов Л.А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. М.: Наука. 1960.) kitobidan o'rganishni tavsiya etamiz.

9. Mili va Mur avtomatlari orasidagi munosabatlarni bilasizmi?

10. Avtomat ishining kanonik tenglamasida ishtirok etuvchi funksiyalar nima deb ataladi?

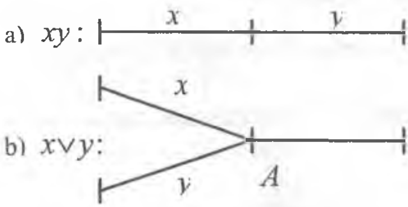
11. Initsial va noinitsial avtomatlar bir-biridan nima bilan farq qiladi?

8.6. Rele-kontaktli sxemalar

O'tkazgichlar. Rele-kontaktli sxemalar. Manfiy kontaktli rele. Musbat kontaktli rele. Ushlab turish elementi. Rele-kontaktli sxema orqali funksiyani realizatsiya qililsh.

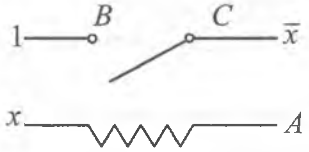
8.6.1. Mantiq algebrasi funksiyalarini rele-kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qilish usuli. Bu paragrafda mantiq algebrasi funksiyalarini rele-kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qilish usulini ko'ramiz.

Agar har bir o'tkazgichga x o'zgaruvchini mos qilib qo'ysak, u holda $x=1$ da o'tkazgichda tok bor va $x=0$ da o'tkazgichda tok yo'q deb hisoblaymiz. U holda o'tkazgichlarning ketma-ket ulanishiga o'zgaruvchilarning kon'yunksiyasi (1-a shakl), parallel ulanishiga esa o'zgaruvchilarning diz'yunksiyasi (1-b shakl) mos keladi. O'tkazgichlarni ketma-ket va parallel ulash natijasida sxema hosil qilamiz. Bu sxema faqatgina monoton funksiyalarni realizatsiya qiladi, chunki kon'yunksiya va diz'yunksiyalarning superpozitsiyasi orqali faqat monoton funksiyalarni ifodalash mumkin.

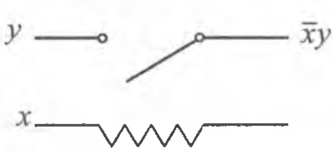


1- shakl

Ixtiyoriy funksiyalarni realizatsiya qilish uchun $\bar{x}$ funksiyani realizatsiya qiladigan qurilma kerak bo'ladi. Buni **manfiy kontaktli rele** orqali realizatsiya qilish mumkin. Bunday relening sxemasi 2- shaklda tasvirlangan. Agar A g'altak o'ramlari orqali elektr toki o'tmasa $(x=0)$, u holda prujina B kontaktni yuqoriga tortadi va zanjir ulanadi (tutashadi). Natijada, C chiqishda tok paydo bo'ladi ($\bar{x}=1$). Agar $x=1$ bo'lsa va A g'altak o'rami orqali tok o'tsa, u holda kontakt B pastga tortiladi va C chiqishda tok bo'lmaydi, ya'ni $\bar{x}=0$ bo'ladi. Demak, manfiy kontaktli rele $\bar{x}$ funksiyani realizatsiya qiladi. Agar B kontakt kirishiga 1 o'rniga y signal bersak, u holda $\bar{x}y$ funksiya realizatsiya qilingan bo'ladi (3- shakl).

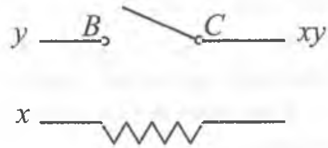


2- shakl



3- shakl

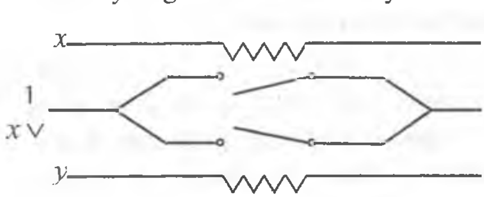
Musbat kontaktli releda agar g‘altak o‘ramida tok bo‘lsa ($x=1$), u holda B kontakt ulanadi va C chiqishda tok bo‘lmaydi ($x=0$). Shunday qilib, x funksiyani musbat kontaktli rele orqali realizatsiya qilish mumkin (4- shakl).



4- shakl

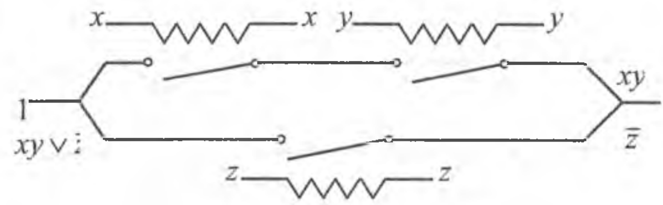
Ma’lumki, agar o‘tkazgichda tok bo‘lsa, u holda y har tarafga tarqaladi. Masalan, $x \vee y$ ni 1- shakldagi sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda $x=1$ va $y=0$ bo‘lganda, tok A nuqtadan har tarafga, shu jumladan y o‘tkazgichga mos bo‘lgan o‘tkazgich orqali ham o‘tadi ($y=0$ bo‘lishiga qaramasdan). Bunday sharoitda sxemaning ish jarayonida noaniqliklar paydo bo‘ladi. Bu holdan qutulish uchun faqat bir tomonga tok o‘tkazadigan asboblardan, musbat kontaktli reledan foydalanish mumkin. Masalan, musbat kontaktli reledan foydalanib, $x \vee y$ ni realizatsiya qiladigan sxemani 5- shaklda tasvirlangandek yasash mumkin.

8.6.2. Rele-kontaktli sxemaning ishlash vaqti. Endi rele-kontaktli sxemaning ishlash vaqtini ko‘rib o‘taylik. Tok o‘tkazgichlar bo‘yicha birdaniga tarqaladi va rele ishlashi uchun (kontakt ulanishi uchun) bir takt vaqt ketadi deb hisoblaymiz. Demak, 3- va 4- shakllarda x signalga nisbatan y signali bir taktdan keyin berilishi kerak.



5- shakl

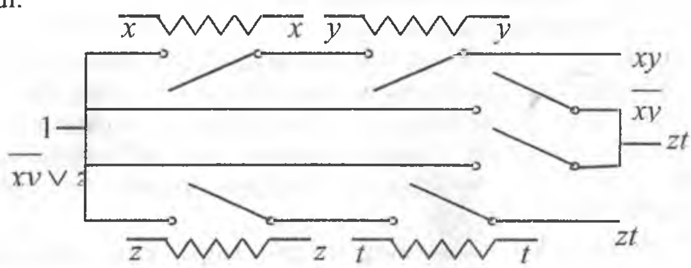
Sxema chiqishidagi signal (xy yoki $\bar{x}y$) y signal bilan bir vaqtda paydo bo‘ladi. Shuning uchun sxemada berilgan signallarni ishlab chiqish uchun sarf bo‘ladigan vaqtni doimo hisobga olish kerak, realizatsiya bo‘ladigan funksiyani o‘zgartirmasdan, ayrim vaqtlarda, bu vaqtni o‘zgartirish kerak. Bu jarayonni, xuddi bir taktli funksional elementlardan yasalgan ko‘p taktli sxemalarda qilganimizday, ushlab turish elementlari yordami bilan bajarish mumkin. Ushlab turish elementi vazifasini musbat kontaktli rele bajaradi (4- shakl). Ushlab turish vaqti 1 taktga teng bo‘ladi.



6- shakl

Ta'rif. *Agar rele-kontaktli sxemaning kirishlariga t momentda $x_1, x_2, ..., x_n$ signallar majmuasi berilganda, uning chiqishida $t+v$ momentda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ signal paydo bo'lsa, u holda rele-kontaktli sxema $f(x_1, x_2, ..., x_n)$* ***funksiyani v ushlab turish vaqti bilan realizatsiya qiladi*** *deb ataladi.*

Ketma-ket berilgan signallar bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ishlab chiqiladi.

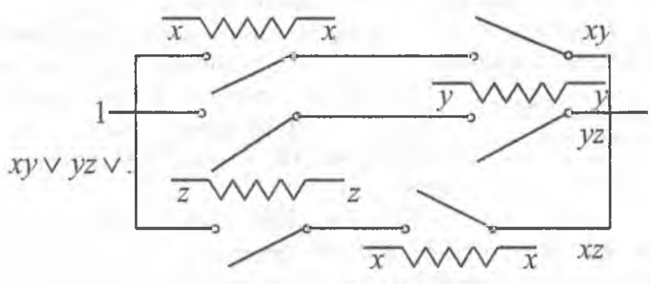


7- shakl

Shunday qilib, mantiq algebrasining istalgan funksiyasini ayrim ushlab turish vaqti bilan rele-kontaktli sxema orqali realizatsiya qilish mumkin. (Ushbu xulosani isbot qilishni o'quvchiga havola qilamiz.)

Misol. Berilgan a) $xy \vee \bar{z}$; b) $\overline{xy} \vee zt$; d) $xy \vee yx \vee xz$ funksiyalarni rele-kontaktli sxema orqali realizaiya qilish masalasini qaraymiz. Bu funksiyalarni sxema orqali realizatsiya qilish uchun o't-kazgichlarni ketma-ket va parallel ulash natijasida elementar kon'yunksiyalarini va ularning diz'yunksiyalarini realizatsiya qilamiz.

Manfiy kontaktli reledan foydalanib o'zgaruvchilarning va ayrim elementar kon'yunksiyalarning inkorlarini realizatsiya qilamiz. Musbat kontaktli rele orqali signallarning bir vaqtda yetib kelishini ta'minlaymiz. Natijada, 6–8- shakllarda ko'rsatilgan sxemalarga ega bo'lamiz. ∎

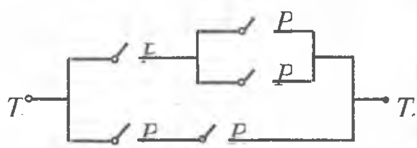


8- shakl

8.7. Kontaktli sxemalar va ularning sintezi

Avtomatning kirishi. Avtomatning chiqishi. Kontaktlarni parallel va ketma-ket ulash. O'tkazuvchanlik funksiyasi. Muhim zanjir. P -sxema.

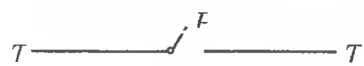
8.7.1. Kontaktli sxema tushunchasi. Har bir avtomat turlicha kontaktli yoki kontaktsiz sxemalardan foydalanish asosida tuziladi. Kontaktli sxemalar bilan jihozlangan avtomatlarning ishini umumiy holda ko'rib o'tamiz. Masalan, 1- shaklda ko'rsatilganidek, o'tkazgichlar, ikkita T_1 va T_2 qutb, beshta P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 knopka bilan ta'minlangan kontaktlardan yasalgan tuzilma **kontaktli sxema** deb hisoblanishi mumkin. T_1 qutb elektr toki manbaini ifodalaydi, T_2 qutb esa avtomatning "chiqishi"da ishni bajaruvchi qurilmani bildiradi. Avtomatning chiqishida ish bajarilganligi haqida xabar beruvchi nazorat lampa o'rnatish mumkinligidan, T_2 qutb mana shu lampani tasvirlaydi deb ayta olamiz.


1- shakl

Sxemada knopkalar tegishli ravishda yoqilsa, va demak, sxema bo'yicha tok yuradigan bo'lib kontaktlar tiklansa, T_1 qutbdan T_2 qutbga borgan tok nazorat lampasini yondiradi.

8.7.2. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. Avvalo har bir murakkab kontaktli sxemaning tarkibiy qismlarini tashkil etuvchi eng sodda kontaktli sxemalar bilan tanishamiz.

2- shakldagi sxema bitta o'tkazgichdan, T_1 va T_2 qutblardan va P knopkali bitta kontaktdan yasalgan.


2- shakl

P knopka yoqilganda, kontakt tiklanib, tok sxema bo'yicha T_1 dan T_2 ga tomon yuradi va nazorat lampa yonadi.

P knopka ochiq bo'lganda kontakt uzilib, tok o'tmaydi va lampa yonmaydi. P knopkaga x – " P knopka yopiq" degan mulohazani mos qo'yamiz. P knopka haqiqatan yopiq bo'lsa, x mulohaza chin bo'ladi.

1- jadval

x	Sxemada tok
ch	bor
yo	yo'q

Bu holda nazorat lampa yonadi. P knopka ochiq bo'lganda esa, x mulohaza yolg'on bo'ladi va bu holda nazorat lampa yonmaydi.

Shunday qilib, x mulohazaning chin-yolg'onligi bilan tok bor-yo'qligi (nazorat lampaning yonish-yonmasligi) orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatildi va buni 1- jadval ifodalaydi.

Endi ketma - ket

0	0	yo'q	0

ulangan ikkita P va Q knopkali (ikki ketma-ket kontaktli) sxemani olaylik (3- shakl). P va Q knopkalarga mos ravishda x – "P knopka yopiq" va y – "Q knopka yopiq" degan mulohazalarni mos keltiramiz. U holda, sxemada tok bor-yo'qligi $x \wedge y$ kon'yunksiyaning chin-yolg'onligiga mos keladi (2- jadval).

2- jadval

x	y	Sxemada tok	$x \wedge y$
1	1	bor	1
1	0	yo'q	0
0	1	yo'q	0
0	0	yo'q	0

Parallel ulangan ikki P va Q knopkali sxemalarga murojaat qilamiz (4- shakl). Demak, parallel ulangan ikki P va Q kontaktli sxemada tok bor-yo'qligi $x \vee y$ diz'yunksiyaning chin-yolg'onligi bilan aniqlanadi (3- jadval).

3- jadval

x	y	Sxemada tok	$x \vee y$
1	1	bor	1
1	0	bor	1
0	1	bor	1
0	0	yo'q	0

3 va 4- shakllarda berilgan sxemalarni umumlashtirib, n ta $P_1,...,P_n$ knopkalarni ketma-ket va shuningdek parallel ulash mumkin. Buning natijasida n ta ketma-ket va n ta parallel kontaktli sxemalar yasalgan bo'ladi. Ular mos ravishda $(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$ va $(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)$ funksiyalarni realizatsiya qiladi, bu yerda x_i mulohaza P_i knopka yopiq ekanligini bildiradi.

Shunday juft-juft knopkalar bilan ta'minlangan kontaktli sxemalarni ham yasash mumkinki, har juft knopkaning istalgan biri yopilganda (ochilganda), ikkinchisi ochiladi (yopiladi). Bir juft knopka $\overline{P}$ va P kabi belgilanadi. P knopkaga x mulohaza mos kelganda, $\overline{P}$ knopkaga $\overline{x}$ inkorni mos keltirish tabiiydir, chunki P – yopiq, demak, x chin bo'lganda, $\overline{P}$ – ochiq, ya'ni $\overline{x}$ yolg'on bo'ladi.

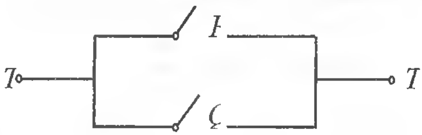
4- jadval

x	$\overline{x}$	Sxemada tok	$x \wedge \overline{x}$
1	0	yo'q	0
0	1	yo'q	0

3- shakl

Bir juft knopkali eng sodda sxemalardan biri 5- shakldagidek tasvirlanishi mumkin. Knopkalarning biri ochilganda, ikkinchisi albatta yopilgani uchun, bunday sxemada hech qachon tok bo'lmaydi. 5- shakldagi sxema uchun 4- jadvalni tuzish mumkin.

Bir juft knopkali eng sodda sxemalardan yana birini 6- shakldagidek tasvirlasa bo'ladi. Bu sxemada tok har doim bor, chunki agar P yopiq bo'lsa, u holda $\overline{P}$ ochiq bo'ladi va tok yuqoridagi o'tkazgichdan P orqali o'tadi, aksincha, P ochiq bo'lganda, $\overline{P}$ yopiq bo'ladi va tok pastdagi o'tkazgichdan $\overline{P}$ orqali o'tadi. 6- shakldagi sxema uchun 5- jadvalni tuzish mumkin.



4- shakl

5- jadval

x	$\overline{x}$	Sxemada tok	$x \vee \overline{x}$
1	0	bor	1
0	1	bor	1

Shunday qilib, har bir sodda kontaktli sxema mulohazalar algebrasining ma'lum bir funksiyasini realizatsiya qiladi.

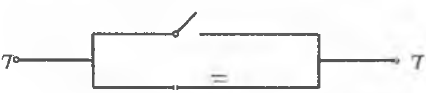
Bu funksiyaga kontaktli sxemaning **o'tkazuvchanlik funksiyasi** deb ataladi. Yuqorida ko'rilgan eng sodda sxemalarning o'tkazuvchanlik funksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$x,\ x \wedge y,\ x \vee y,\ x \wedge \overline{x},\ x \vee \overline{x}. \tag{1}$$

Bu funksiyalarning chinlik jadvallari tegishli sxemalarda qachon tok bo'lishi va qachon bo'lmasligini ko'rsatadi.

5- shakl

Sodda sxemalarning turli kombinatsiyalaridan har xil murakkab kontaktli sxemalarni tuzish mumkin. Bunday sxemalarning har biriga (1) funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan funksiyalar mos keladi. Aksincha, mulohazalar algebrasining har bir funksiyasiga qandaydir kontaktli sxemani mos qo'ish mumkin.



6- shakl

1- misol. 7- shaklda tasvirlangan sxemaning o'tkazuvchanlik funksiyasini topaylik. Avvalo, P, Q, R knopkalarga mos ravishda x, y, z mulohazalarni mos keltiramiz. U holda $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ knopkalarga $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ mulohazalar mos keladi. Sxemaning yuqori qismi $\overline{x} \wedge ((y \wedge \overline{z}) \vee x)$ formula bilan, pastki qismi $z \wedge \overline{y} \wedge (x \vee \overline{y})$ formula bilan ifodalanadi. Yuqori va pastki qismlar parallel ulangani uchun butun sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasi

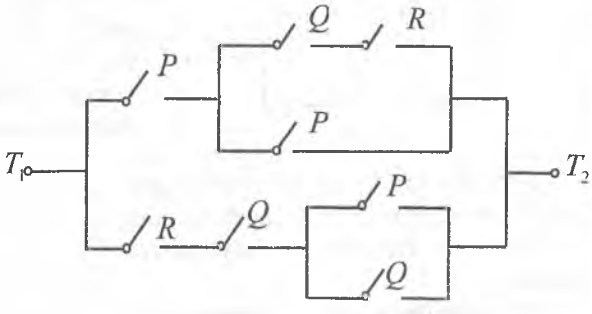
$$f(x,y,z) = (\overline{x} \wedge ((y \wedge \overline{z}) \vee x)) \vee (z \wedge \overline{y} \wedge (x \vee \overline{y}))$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ■

2- misol. Berilgan

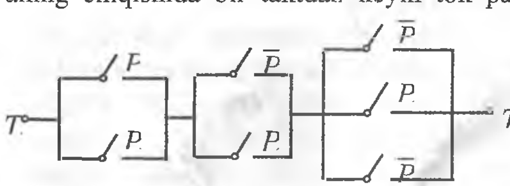
$$f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \qquad (2)$$

funksiyaning x, y, z o‘zgaruvchilariga P_1, P_2, P_3 knopkalar mos qo‘yilgan bo‘lsin. U holda (2) funksiyaga 8- shaklda tasvirlangan kontaktli sxema mos keladi. ■



7- shakl

Bundan keyin, sxemalarning ko‘rinishi oddiy bo‘lishi uchun, kontaktni ikki qutbga ega bo‘lgan kesma orqali ifodalaymiz (kesmani **ikki qutbli** deb ataymiz). Agar kesma ulanuvchi bo‘lsa, uni x bilan, ajratuvchi bo‘lsa, $\overline{x}$ bilan belgilaymiz, bu yerda x – g‘altakda realizatsiya qilinadigan o‘zgaruvchi. Har bir g‘altakka bitta o‘zgaruvchi mos keladi va u bilan istalgancha sondagi kontaktlar ulanishi mumkin. Kesmalar qutblari orqali bir-birlari bilan ulanadi. Har bir sxema kirish va chiqishga ega bo‘ladi. Sxemaning kirishiga tok berilganda, uning chiqishida bir taktdan keyin tok paydo bo‘lsa, u holda sxemada **o‘tkazuvchanlik bor** deb, aks holda esa, **o‘tkazuvchanlik yo‘q** deb aytiladi.



8- shakl

Kesmalarning 9- shakldagidek ketma-ket ulanishini **zanjir** deb ataymiz.

Zanjirda bitta kontakt bir necha marta qatnashishi mumkin. Birinchi kontaktning kirishi sxemaning kirishiga va oxirgi kontaktning chiqishi sxemaning chiqishiga to‘g‘ri keladi. O‘zgaruvchilarning biror qiymatlari majmuida sxemaning (DNSh ko‘rinishidagi funksiyani realizatsiya qiladigan sxemaning) chiqishida tok bo‘lishi uchun hech bo‘lmaganda birorta zanjirning hamma kontaktlari ulangan bo‘lishi yetarli va zarurdir.

Agar sxemaga kiruvchi har bir Γ zanjirga o'zgaruvchilarning yoki ular inkorlarining U_Γ elementar kon'yunksiyasini mos qilib qo'ysak, u holda sxemaga kiruvchi zanjirlarga mos kelgan Γ elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga sxemaning o'tkazuvchanlik funksiyasi mos keladi.

9- shakl

Shuni ta'kidlash kerakki, sxemaning o'tkazuvchanlik funksiyasini hosil qilish uchun ayrim zanjirlarning diz'yunksiyasini olish kifoyadir.

1- ta'rif. *Har bir qutbdan bir marta o'tgan zanjir **muhim** (**jiddiy**) **zanjir** deb ataladi.*

Ya'ni, sxemaning kirishi va chiqishiga bittadan kontakt va zanjirning qolgan qutblariga ikkitadan kontakt to'g'ri keladigan zanjir muhim zanjirdir.

Har bir sxemada chekli sondagi muhim zanjirlar mavjud bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bundan tashqari, muhim zanjirlarga mos keluvchi kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasi sxemaning o'tkazuvchanlik funksiyasiga teng kuchli ekanligini ham isbot qilish mumkin. Bularga asosan, sxemaga qarab uning o'tkazuvchanlik funksiyasini yozsa bo'ladi.

Bundan keyin bo'yalmagan doiracha bilan sxemaning kirishi va qora rangli doiracha bilan sxemaning chiqishini belgilaymiz.

3- misol. 10- shaklda berilgan sxemalarning o'tkazuvchanlik funksiyalarini topaylik.

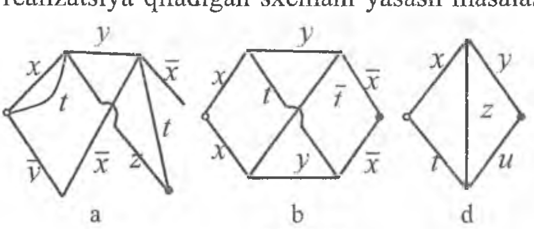
a) $xyt \vee tyt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee \bar{y}\bar{x}yz = yt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t$,

b) $xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} \vee xty\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee x\bar{t}yt\bar{x} \vee xyty\bar{x} = 0$,

d) $xy \vee tu \vee xzu \vee tzv$

formulalar mos ravishda 10- shaklning a), b) va d) qismlarida tasvirlangan sxemalarning o'tkazuvchanlik funksiyalari bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. ■

Endi teskari masalani ko'raylik, ya'ni berilgan funksiyaga qarab uni realizatsiya qiladigan sxemani yasash masalasini ko'ramiz. Buning uchun funksiyani DNSh ko'rinishiga keltiramiz. DNSh ifodasidagi har bir $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \ldots x_k^{\sigma_k}$ elementar kon'yunksiyaga mos ravishda bitta ketma-ket ulangan kontaktlarni mos qo'yamiz (9- shakl). Bun-



10- shakl

dan keyin hamma kirishlarni va chiqishlarni mos ravishda aynan tutashtiramiz. Hosil qilingan sxema DNSh ko‘rinishidagi funksiyani realizatsiya qiladi.

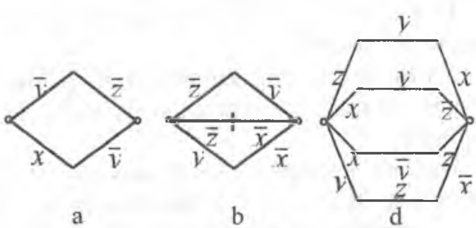
4- misol. Berilgan a) $(y \vee z) \to x\bar{y}$, b) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$, d) $(x+y+z)$ funksiyalarni kontakt sxemalar orqali realizatsiya qilaylik. Buning uchun berilgan funksiyalarni DNSh ko‘rinishiga keltiramiz:

$$a)\ (y \vee z) \to x\bar{y} = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \quad \text{(11-a shakl)};$$

$$b)\ z\bar{y} \leftrightarrow yx = (\overline{z\bar{y}} \vee yx)(z\bar{y} \vee \overline{yx}) = (\bar{z} \vee y \vee yx)(z\bar{y} \vee \bar{y} \vee x) =$$

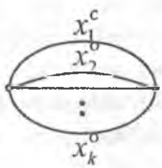
$$= (\bar{z} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}) = \bar{z}\bar{y} \vee \bar{z}\bar{x} \vee y\bar{x} \quad \text{(11-b shakl)};$$

$$d)\ x+y+z = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \quad \text{(11-d shakl)}. \blacksquare$$

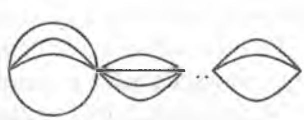


11- shakl

Biz yuqorida DNSh ko‘rinishdagi funksiyani kontakt sxema orqali realizatsiya qilishni ko‘rdik. Tabiiyki, KNSh ko‘rinishdagi funksiyani ham kontakt sxema orqali realizatsiya qilish mumkin. Buning uchun, birinchi navbatda, har bir elementar diz’yunksiyalarni realizatsiya qiladigan sxemalar tuzamiz (12- shakl). Ikkinchi navbatda, elementar diz’yunksiyalarga mos kelgan sxemalardan bittasining chiqishini ikkinchisining kirishiga, ikkinchisining chiqishini uchinchisining kirishiga va hokazo ulab chiqamiz (13- shakl). Birinchisining kirishi kontaktli sxemaning kirishi va oxirgisining chiqishi sxemaning chiqishi bo‘ladi. Hosil qilingan sxema KNSh ko‘rinishdagi funksiyani realizatsiya qiladi.



12- shakl



13- shakl

5- misol. Yuqorida keltirilgan algoritmdan foydalanib, a) $(y \vee z) \quad x\bar{y}$, b) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$ va d) $x+y+z$ funksiyalarni kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qi-lish kerak bo‘lsin.

a) $f_1(x,y,z) = (y \vee z) \to x\bar{y}$ funksiyani KNSh ko‘rinishga keltiramiz va uni soddalashtirish uchun tanish bo‘lgan ushbu

$$x \vee xy = x, \qquad x(x \vee y) = x,$$

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y, \qquad \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y,$$

$$x(\bar{x} \vee y) = xy, \qquad \bar{x}(x \vee y) = \bar{x}y$$

teng kuchli formulalardan foydalanamiz:

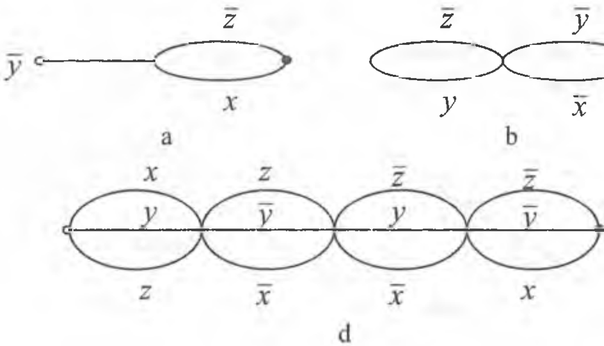
$$f_1(x,y,z)=\overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{y}(\bar{z} \vee x) \quad \text{(14-a shakl)},$$

$$\text{b)}\ f_2(x,y,z) = z\bar{y} \leftrightarrow yx = (z\bar{y} \vee yx)(\overline{yx} \vee z\bar{y}) =$$
$$=(\bar{z} \vee y \vee yx)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\bar{y}) = (\bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \quad \text{(14-b shakl)},$$

$$\text{d)}\ f_3 = x+y+z = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \quad \text{(14-d shakl).} \ ■$$

Parallel-ketma-ket ulash natijasida hosil qilingan sxemalar klassini induktiv tarzda ifodalaylik.

2- ta'rif. *Bir kontaktdan iborat sxema* ***elementar sxema*** *deb ataladi. Elementar sxemalarning ayrimlarini chekli son marta parallel va ketma-ket ulash natijasida hosil bo'lgan kontakt sxema* ***parallel–ketma-ket sxema*** *yoki* P ***-sxema*** *deb ataladi.*



14- shakl

Ravshanki, elementar sxemalardan har qanday usul bilan yasalgan P-sxemaga diz'yunksiya, kon'yunksiya va inkor amallari bilan ifodalangan o'tkazuvchanlik funksiyasi mos keladi va, aksincha, har qanday shunday funksiya uchun ma'lum P-sxema yasash mumkin.

Ta'kidlaymizki, har qanday kontakt sxema P-sxema bo'la olmaydi.

6- misol. Berilgan $f_1(x,y,z,t)=(x \vee y\bar{z})(xy \vee zt)$ va $f_2(x,y,z,t)= = (\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$ funksiyalar uchun P-sxemalar yasash talab qilingan bo'lsin.

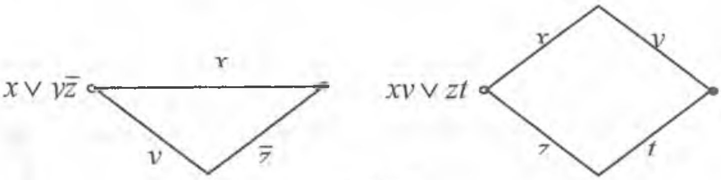
a) x, y, z, t, $\bar{z}$ elementar formulalarni realizatsiya qiladigan elementar sxemalarni tuzamiz (15- shakl).

15- shakl

x va y o'zgaruvchilarga mos kontaktlar ikki donadan bo'lishi kerak. Endi kontaktlarni ketma-ket ulab, $y\bar{z}$, xy va zt elementar kon'yunksiyalarni realizatsiya qilamiz (16- shakl).

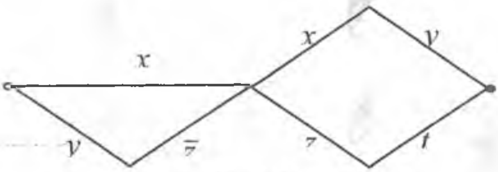
16- shakl

Uchinchi qadamda, parallel ulashdan foydalanib, $x \vee y\bar{z}$ va $xy \vee zt$ funksiyalarni realizatsiya qilamiz (17- shakl).



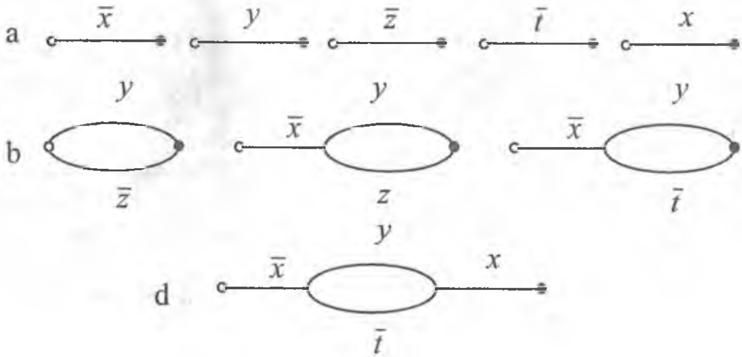
17- shakl

Hosil qilingan sxemalarni ketma-ket ulab, berilgan $f_1(x, y, z, t)$ funksiyani realizatsiya qiladigan P-sxemaga ega bo'lamiz (18- shakl).



18- shakl

b) $f_2(x, y, z, t)$ funksiyani realizatsiya qiladigan P-sxema 19- shaklning a), b) va d) qismlarida ko'rsatilgan.■



19- shakl

8.8. Kontakt sxemalarni minimallashtirish muammosi

Minimal sxema. Sxemalarni minimallashtirish muammosi. Minimal sxema bo'lish sharti. Shennon funksiyasi. Kontaktlar sonini baholash.

8.8.1. Minimal kontaktli sxema tushunchasi. Ma'lumki, bitta funksiyaning o'zini har xil kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qilish mumkin, chunki funksiyaning DNSh (KNSh) ko'rinishi yagona emas. Funksiyani kontaktli sxema orqali realizatsiya qilishda, tabiiyki, sxemada mavjud bo'lgan kontaktlar soni mumkin bo'lguncha eng kam bo'lishiga yoki, hech bo'lmaganda, shu eng kam sondan salgina ortiqroq bo'lishiga intilamiz. Bitta o'tkazuvchanlik funksiyasiga ega bo'lgan hamma sxemalar ichida mumkin bo'lguncha eng kam sonli kontaktga ega bo'lgan sxema **minimal sxema** deb ataladi.

Mantiq algebrasi funksiyalarini minimal sxemalar orqali realizatsiya qilish muammosini yechish juda katta ilmiy-amaliy ahamiyatga ega bo'lgan dolzarb muammodir. Afsuski, aniq sxemalarning minimal sxema ekanligini isbotlash ayrim hollardagina mumkin.

Sxemalarni minimallashtirish muammosi mantiq algebrasi funksiyalarini minimallashtirish muammosi bilan chambarchas bog'langandir.

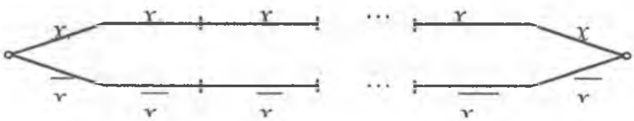
Ayrim hollarda berilgan sxemaning minimal sxema ekanligini ko'rsatadigan xususiyatlarni topish mumkin. Buni misollarda ko'raylik.

Agar birorta o'zgaruvchi funksiyaning soxta emas (muhim) argumenti bo'lsa, u holda ushbu funksiyani realizatsiya qiladigan sxemada kamida o'sha o'zgaruvchiga mos keladigan bir dona kontakt mavjud bo'lishi kerak. "Ko'prikcha" realizatsiya qiladigan o'tkazuvchanlik funksiyasi $f(x,y,z,u,t) = xy \vee tu \vee xzu \vee tzu$ bo'ladi. Bu funksiyaning hamma x,y,z,t,u argumentlari muhim argumentlardir (masalan, $t = z = u = 0$, $y = 1$ bo'lganda, funksiyaning qiymati x ga bog'liq, $x = u = 1$ bo'lganda funksiyaning qiymati z ga bog'liq bo'ladi va hokazo). Sxemada bu argumentlarga mos kelgan kontaktlar bir martadan qatnashgan. Demak, "ko'prikcha" sxemasi minimal sxemadir.

Shunday qilib, agar sxemadagi kontaktlar har xil o'zgaruvchilarga mos kelsa va bu o'zgaruvchilar o'tkazuvchanlik funksiyasining muhim argumentlari bo'lsa, u holda sxema minimal sxema bo'ladi.

Endi 1- shaklda ifodalangan sxema minimal sxema bo'lishmi ko'rsataylik.

Berilgan ixtiyoriy sxemada x_1 o'zgaruvchiga mos bo'lgan kontaktlar faqat musbat kontakt bo'lsin. U holda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o'tkazuvchanlik



1- shakl

funksiyasi uchun $f(x_1,x_2,...,x_n) \geq f(0,x_2,...,x_n)$ munosabat hamma $x_2,...,x_n$ uchun bajariladi (agar sxemada ayrim kontaktlar ulangan bo'lsa, u holda sxemada o'tkazuvchanlik yo'qolmaydi). Xuddi shu kabi, agar x_1 ga faqatgina manfiy kontaktli kontaktlar mos kelsa, u holda

$$f(1,x_2,...,x_n) \leq f(0,x_2,...,x_n)$$

munosabat hamma $x_2,x_3,...,x_n$ uchun bajariladi.

Shunday signallar majmui $(\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n)$ mavjud bo'lsinki, $f(1,\alpha_2,...,\alpha_n) < f(0,\alpha_2,...,\alpha_n)$ bajarilsin. U holda f funksiya x_1 argument bo'yicha o'smaydi va f funsksiyani realizatsiya qiladigan har qanday sxemada x_1 ga mos bo'lgan manfiy kontakt bor deb aytamiz.

Xuddi shu kabi, $(\beta_2,...,\beta_n)$ majmua uchun

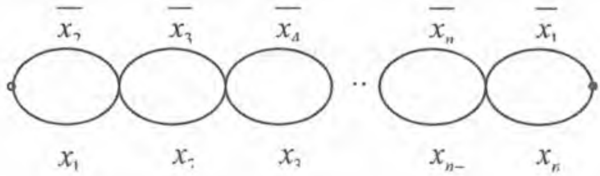
$$f(1,\beta_2,...,\beta_n) > f(0,\beta_2,...,\beta_n)$$

bajarilsa, u holda f funksiya x_1 argument bo'yicha kamaymaydi va f ni realizatsiya qiladigan sxemada x_1 ga mos musbat kontakt bor deb aytamiz. Agar f funksiya x_1 argument bo'yicha na kamayuvchi va na o'suvchi funksiya bo'lsa, u holda f funksiyani realizatsiya qiluvchi sxemada x_1 argument bo'yicha ham manfiy, ham musbat kontaktlar mavjud bo'ladi. 2-shakldagi sxemada o'tkazuvchanlik funksiyasi $f = x_1x_2...x_n \vee \bar{x}_1\bar{x}_2...\bar{x}_n$ ko'rinishda bo'ladi. $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$ da f funksiya x_1 argumenti bo'yicha o'suvchi bo'lmaydi va $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 1$ da kamayuvchi bo'lmaydi. Ko'rilayotgan funksiya hamma argumentlariga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun, qolgan hamma argumentlari bo'yicha ham o'suvchi va kamayuvchi funksiya bo'lmaydi. Ko'rilayotgan sxemada har bir o'zgaruvchiga musbat va manfiy kontakt to'g'ri kelgani uchun bu sxema minimal sxema bo'ladi.

Demak, *agar sxemada har bir o'zgaruvchiga bittadan musbat va manfiy kontakt mos kelib, funksiyaning hamma argumentlari muhim argumentlar bo'lsa va bu o'zgaruvchilar bo'yicha funksiya o'suvchi ham kamayuvchi ham bo'lmasa, u holda sxema* ***minimal sxema*** *bo'ladi.*

$f = x_1x_2...x_n \vee \bar{x}_1\bar{x}_2...\bar{x}_n$ funksiyani realizatsiya qiladigan 2- shakldagi sxemadan farq qiladigan minimal sxema tuzish talab qilingan bo'lsin. Buning uchun f funksiyani

$$f=(x_1\vee\overline{x_2})(x_2\vee\overline{x_3})(x_3\vee\overline{x_4})\dots(x_{n-1}\vee\overline{x_n})(x_n\vee\overline{x_1})$$
ko'rinishdagi KNShga keltiramiz va uni realizatsiya qiladigan sxema minimal bo'ladi.



2- shakl

Demak, bitta funk-siyani har xil minimal sxemalar orqali realizatsiya qilish mumkin ekan, ya'ni minimal sxema yagona emas.

P-sxemalar to'plamida (sinfida) ham minimal sxemalar mavjud bo'ladi. "Minimal P-sxema hamma sxemalar sinfida ham minimal sxema bo'la oladimi yoki yo'qmi?" degan savol tug'iladi.

"Ko'prikcha" minimal sxemasi orqali realizatsiya qilingan $f=xy\vee tu\vee xzu\vee tzy$ funksiya uchun 5 kontaktli P-sxema mavjud emasligi qo'yilgan savolga javob beradi.

$f(x_1,\dots,x_n)$ mantiq algebrasining funksiyasi bo'lsin. $L(f)$ orqali uni realizatsiya qiladigan minimal sxemadagi kontaktlar sonini va $L_P(f)$ orqali P-sxemadagi kontaktlar sonini belgilaymiz. U holda $L(f)\le L_P(f)$ bo'ladi.

$\max L(f)=L(n)$ va $\max L_P(f)=L_P(n)$ lar **Shennon**[1] **funksiyalari** deb aytiladi.

n argumentli $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyani sxema orqali realizatsiya qilish uchun zarur bo'lgan maksimal va minimal kontaktlar sonini topish masalasi katta amaliy ahamiyatga ega ekanligi hammamizga ma'lum. Ilmiy izlanishlar hozirgi vaqtda
quyidagi bahoni beradi:

$$\frac{2^n}{n}<L(n)\le 3\cdot 2^{n-1}-2\,.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Har bir sxemada chekli sondagi muhim zanjirlar mavjud bo'lishini ko'rsating.

[1] Shennon Klod Elvud (Shannon Claude Elwood, 1916-2001) – AQSh muhandisi, matematigi.

2. Muhim zanjirlarga mos keluvchi kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasi sxemaning o'tkazuvchanlik funksiyasiga teng kuchli ekanligini ham isbot qilish mumkinligini ko'rsating.

3. Quyida berilgan funksiyalarni realizatsiya qiladigan rele-kontaktli sxemalar yasang:

a) $x+y+z$; b) $(x\to y)\leftrightarrow z$; d) $(xy\vee\bar{z})\to t$;

e) $x\to y\to z$; f) $(x\vee y)\leftrightarrow z$; g) $xz\to y$;

h) $(x\leftrightarrow y)\to z$; i) $(x\leftrightarrow y)\leftrightarrow z$; j) $(x\to y)\vee z$.

4. Har bir sxemada chekli sondagi muhim zanjirlar mavjud bo'lishini isbot qiling.

5. Muhim zanjirlarga mos keluvchi kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasi sxemaning o'tkazuvchanlik funksiyasiga teng kuchli ekanligini isbot qiling. Misolning natijasiga asosan, sxemaga qarab uning o'tkazuvchanlik funksiyasini yozing.

6. Har qanday kontakt sxema P-sxema bo'la olmasligini isbotlang.

7. Quyidagi funksiyalarni realizatsiya qiladigan P-sxemalarni toping:

a) $f_1(x,y,z)=x\to y\to z$, b) $f_2(x,y,z)=x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$,

d) $f_3(x,y,z,t)=(xy\vee t)\leftrightarrow(\bar{x}y\to z)$,

e) $f_4(x,y,z,t)=(x\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee t)(xt\vee\bar{y}z)$.

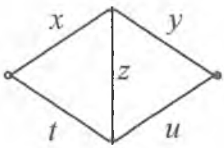
8. 3- shaklda ko'rsatilgan sxema ("ko'prikcha") P-sxema bo'la olmasligini isbotlang.

9. Agar quyidagilar aniq bo'lsa, u holda to'rtta talabadan qaysi biri imtihon topshirgan:

1) agar birinchi talaba imtihon topshirgan bo'lsa, u holda ikkinchisi ham topshirgan;

2) agar ikkinchi talaba imtihon topshirgan bo'lsa, u holda uchinchisi topshirgan yoki birinchisi topshirmagan;

3) agar to'rtinchi talaba imtihon topshirmagan bo'lsa, u holda birinchisi topshirgan va uchinchisi topshirmagan;



3- shakl

4) agar to'rtinchi talaba imtihon topshirgan bo'lsa, u holda birinchisi ham topshirgan.

10. To'rtta do'st – Safarov (S), Bekmurodov (B), Xo'jayev (X), Azizov (A) mehnat ta'tillarini to'rtta har xil shaharda (Toshkent, Buxoro, Samarqand va Farg'onada) o'tkazishga kelishdilar. Quyidagi cheklashlar mavjud bo'lgan holda ulardan har birining qaysi shaharga borishini aniqlang:

1) agar S Toshkentga bormasa, u holda X Buxoroga bormaydi;

2) agar B Toshkentga ham, Farg'onaga ham bormasa, u holda S Toshkentga boradi.

3) agar X Farg'onaga bormasa, u holda B Samarqandga boradi.

4) agar A Toshkentga bormasa, u holda B Toshkentga bormaydi.

5) agar A Buxoroga bormasa, u holda B Toshkentga bormaydi.

11. Tergovchi bir vaqtda uch guvohni – Donaqul, Toshpo'lat va Qosimni so'roq qildi. Ularning ko'rsatmalari bir-birinikiga qarama-qarshi edi va ularning har biri kimnidir yolg'onchilikda ayblardi:

1) Donaqul Toshpo'latni yolg'on ko'rsatma berayapti deb ayblardi;

2) Toshpo'lat Qosimni yolg'onchi deb ayblardi.

3) Qosim tergovchini Toshpo'latga ham Donaqulga ham ishonmaslikka chaqirardi.

Ammo tergovchi ularga birorta ham savol bermasdan kim to'g'ri gapirayotganini aniqladi. Guvohlardan qaysi biri to'g'ri gapirayotgan edi?

12. "Uch talabadan qaysi biri matematik mantiqni o'qigan?" degan savolga ushbu to'g'ri javob olingan: "Agar birinchisi o'qigan bo'lsa, u holda uchinchisi ham o'qigan, ammo, agar ikkinchisi o'qigan bo'lsa, u holda uchinchisi ham o'qigan degani noto'g'ri". Kim matematik mantiqni o'qigan?

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Musbat va manfiy kontaktli relelar bir-biridan nima bilan farq qiladi?

2. Rele-kontaktli sxema orqali funksiya qanday realizatsiya qilinadi?

3. Kontaktlarni parallel va ketma-ket ulashga qanday funksiya mos qo'yiladi?

4. O'tkazuvchanlik funksiyasi nima?

5. Muhim zanjir va P-sxemalar haqida nima bilasiz?

6. Minimal sxema nima?

7. Kontakt sxemalarni minimallashtirish muammosini qanday hal qilish mumkin?

8. Qanday shartlar bajarilsa, berilgan sxema minimal sxema bo'ladi?

9. Shennon funksiyasi deganda nimani tushunasiz?

10. Hozirgi vaqtda kontaktlar sonini baholashning qanday formulasi bor?

IX BOB
MATEMATIK MANTIQ FUNKSIYALARINI MINIMALLASHTIRISH MUAMMOSI

Ushbu bobda matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosi bayon etilgan. Minimal diz'yunktiv normal shakldagi (DNShdagi) funksiyalarni yasash uchun DNShni soddalashtirish, eng qisqa DNSh, qisqartirilgan DNSh, tupikli DNSh, Kvayn DNSh va minimal DNShni yasash algoritmlari hamda analitik va geometrik tarzdagi algoritmlarning ekvivalentligi ko'rsatiladi.

9.1. Masalaning qo'yilishi

Elementar kon'yunksiyaning rangi. Mulohazalar algebrasi funksiyalarini minimallashtirish muammosi. Soddalik indeksi va uning xususiyatlari. Minimal DNSh. Eng qisqa DNSh. Trivial algoritm. Birma-bir ko'zdan kechirish algoritmi.

9.1.1. Mantiq algebrasining funksiyalarini minimallashtirish muammosining dolzarbligi. Xalq xo'jaligi uchun muhim amaliy ahamiyatga ega bo'lgan ko'pchilik masalalarni hal qilishda mantiq algebrasidan foydalanish mumkin. Quyida shunday masalalardan biri mantiq algebrasining funksiyalarini minimallashtirish muammosi sifatida qaralgan.

1-ta'rif. *Ushbu*

$$K = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r} \ \ (\gamma \neq \mu \ \ bo\text{'}lganda\ \ i_\gamma \neq i_\mu) \qquad (1)$$

*ifoda **elementar kon'yunksiya** deb ataladi. r son **elementar kon'yunksiyaning rangi** deyiladi. Konstanta 1 ni rangi 0 ga teng bo'lgan elementar kon'yunksiya deb hisoblaymiz.*

2-ta'rif. *Ushbu*

$$D = \mathop{\vee}_{i=1}^{s} K_i (i \neq j\ bo\text{'}lganda\ K_i \neq K_j) \qquad (2)$$

*ifoda **diz'yunktiv normal shakl** (DNSh) deb ataladi, bu yerda K_i – rangi i ga teng bo'lgan elementar kon'yunksiya.*

Ma'lumki, D diz'yunktiv normal shakl mantiq algebrasining ma'lum bir $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasini realizatsiya qiladi va mantiq algebrasining berilgan funksiyasi bir nechta DNSh ko'rinishida ifodalanishi mumkin.

Mantiq algebrasining har qanday $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(f \neq 0)$ funksiyasini DNSh ko‘rinishiga keltirish mumkinligini, ya’ni

$$D = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (3)$$

III bobda ta’kidlangan edi.

Bunday DNSh sifatida f funksiyaning mukammal diz’yunktiv normal shaklini (MDNSh) olish mumkin, ya’ni

$$D = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n} \, . \qquad (4)$$

1- misol. $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya 1- chinlik jadvali bilan berilgan bo‘lsin.

1- jadval

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1

U holda $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya

$$D_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \quad (5)$$

MDNSh ko‘rinishida ifodalanishi mumkin.

Ikkinchi tarafdan, shu funksiyaning o‘zini

$$D_2 = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \qquad (6)$$

DNSh ko‘rinishida ham ifodalash mumkin (chinlik jadvali orqali aniqlashni o‘quvchiga havola etamiz).

Agar D_1 bilan D_2 ko‘rinishlarini taqqoslasak, u holda D_1 ifodasida 15ta o‘zgaruvchi simvollari va 5ta elementar kon’yunksiyalar qatnashayotganligini, D_2 ifodasida esa, 3 ta o‘zgaruvchi simvollari va 2 ta elementar kon’yunksiyalar qatnashayotganligini ko‘ramiz. Demak, D_2 formula o‘zgaruvchilar simvoli (elementar kon’yunksiyalar) soniga nisbatan D_1 DNShga qaraganda soddaroq formula hisoblanadi.

Agar D_1 va D_2 ko‘rinishdagi funksiyani:

a) kontaktli sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda D_1 DNShni realizatsiya qilish uchun 15 ta kontakt, D_2 DNShni realizatsiya qilish uchun esa 3 ta kontakt talab qilinadi;

b) nol taktli funksional elementlardan yasalgan sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda D_1ni realizatsiya qilish uchun 21 dona funksional element va D_2 ni realizatsiya qilish uchun 4 dona funksional element sarf bo'ladi;

d) bir taktli funksional elementlardan yasalgan ko'p taktli to'g'ri sxema orqali realizatsiya qilish talab qilinsa, u holda D_1 ni realizatsiya qilish uchun 33 dona funksional element, shu jumladan, 12 dona ushlab turish elementi va D_2 ni realizatsiya qilish uchun 6 dona, shu jumladan, 2 dona ushlab turish elementi kerak bo'ladi.

Bu mulohazalarning chinligini isbotlashni o'quvchiga havola etamiz.

Demak, D_1 DNShni realizatsiya qiladigan sxemaning (qanday sxema bo'lishidan qat'i nazar) tannarxi D_2 DNShni realizatsiya qiladigan sxemaning tannarxidan ancha qimmat (ortiq) turadi. ■

1- misoldan ko'rinib turibdiki, mantiq algebrasining funksiyalarini minimallashtirish muammosi ko'pchilik hollarda (jumladan, xalq xo'jaligi uchun) katta amaliy ahamiyatga egadir.

Bu masalani hal qilish uchun DNShning "murakkabligini" ifodalovchi $L(D)$ **soddalik indeksi** tushunchasini kiritamiz.

$L(D)$ funksional uchun qo'yidagi aksiomalarning bajarilishini talab qilamiz.

I. Manfiy emasligi haqidagi aksioma. Har qanday DNSh uchun $L(D) \geq 0$.

II. Monotonligi haqidagi aksioma (ko'paytmaga nisbatan). Agar $D = D^1 \vee x_i^{\sigma_i} K^1$ bo'lsa, u holda

$$L(D) \geq L(D^1 \vee K^1). \qquad (7)$$

III. Qavariqligi haqidagi aksioma (qo'shishga nisbatan). Agar $D = D_1 \vee D_2$ va $D_1 \wedge D_2 \equiv 0$ bo'lsa, u holda

$$L(D) \geq L(D_1) + L(D_2). \qquad (8)$$

IV. Invariantlik haqidagi aksioma (izomorfizmga nisbatan). Agar R^1 DNSh R DNShdan o'zgaruvchilarni qayta nomlash (aynan tenglashtirishsiz) usuli bilan hosil qilingan bo'lsa, u holda $L(D^1) = L(D)$.

Diz'yunktiv normal shakllar uchun **soddalik indekslari** deb ataluvchi quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

1. $L_h(D)$ – berilgan D DNShdagi o'zgaruvchilar harflarining soni.
2. $L_k(D)$ – berilgan D DNShdagi elementar kon'yunksiyalar soni.
3. $L_i(D)$ – berilgan D DNShdagi inkor ($\neg$) simvollari soni.

$L_h(D)$, $L_k(D)$ va $L_i(D)$ indekslar yuqorida keltirilgan aksiomalarni qanoatlantiradi.

2- misol. 1- misoldagi D_1 va D_2 DNShlar berilgan bo'lsin. Ravshanki, $L_h(D_1)=15$ va $L_h(D_2)=3$, ya'ni D_2 DNSh o'zgaruvchilar harflarining soni indeksiga nisbatan D_1 DNShga qaraganda soddaroqdir.

D_1 va D_2 DNShlar uchun $L_k(D_1)=5$ va $L_k(D_2)=2$ bo'lgani uchun D_2 DNSh elementar kon'yunksiyalar soni indeksiga nisbatan ham D_1 DNShga qaraganda soddaroqdir. $L_i(D_1)=6$ va $L_i(D_2)=2$, ya'ni D_2 DNSh inkor simvollari soni indeksi uchun ham D_1 DNShga nisbatan soddaroq ekan. ■

Ma'lumki, $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ o'zgaruvchilar to'plamidan 3^n ta elementar kon'yunksiya tuzish mumkin ("bo'sh" kon'yunksiyaga 1 konstanta mos qilib qo'yilgan). Bundan o'z navbatida $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ to'plam elementlaridan 2^{3^n} ta diz'yunktiv normal shakl tuzish mumkinligi kelib chiqadi.

3- ta'rif. *Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani realizatsiya qiluvchi DNSh $L(D)$ indeksga nisbatan minimal bo'lsa, u holda bunday DNSh L ga nisbatan minimal DNSh, L_k indeksga nisbatan minimal bo'lgan DNSh **eng qisqa diz'yunktiv normal shakl** deb ataladi.*

Bundan keyin L_h indeksga nisbatan minimal bo'lgan DNShni **minimal diz'yunktiv shakl** deb ataymiz.

3- misol. 1- misoldagi D_1 va D_2 DNShlarni tahlil qilamiz. D_2 DNSh minimal DNShdir, chunki ushbu DNSh orqali ifodalangan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaning x_1,x_2,x_3 argumentlari muhim (soxta emas) argumentlardir. Shuning uchun uni uchtadan kam harf bilan ifodalash mumkin emas.

D_2 DNSh eng qisqa DNShdir, chunki ushbu DNSh bilan ifodalangan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya har qanday elementar kon'yunksiyadan farq qiladi.

D_2 DNSh L_i indeksga nisbatan ham minimal DNShdir, chunki ushbu DNSh bilan ifodalangan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya x_2 va x_3 o'zgaruvchilari bo'yicha o'suvchi funksiya emas va demak, uni ikkita inkordan kam inkor qatnashgan DNSh ko'rinishida ifodalash mumkin. ■

Shunday qilib, asosiy muammo matematik mantiqning ixtiyoriy $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasi uchun L indeksga nisbatan minimal diz'yunktiv normal shaklni topishdan iboratdir. Bu muammo **matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosi** deb ataladi.

9.1.2. Matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosini hal qilish algoritmining mavjudligi. Bu bobda matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosini hal qilish usullari bilan shug'ullanamiz. Avvalo bu masala yechimining trivial algoritmi mavjudligini ta'kidlaymiz. Bu algoritm **birma-bir ko'zdan kechirish algoritmi** deb yuritiladi va quyidagi 4 bandda ifodalangan jarayonlarni bajarishni taqozo qiladi.

1. $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ o‘zgaruvchilar to‘plamida barcha 2^{3^n} ta $D_1,D_2,...,D_{2^{3^n}}$ diz’yunktiv normal shakllarni ma’lum tartibda tuzamiz.

2. Bu DNSh lardan $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan DNShlarni ajratib olamiz.

3. Ajratib olingan DNShlar soddalik indekslarining (L_h, L_k, L_i) miqdorlarini hisoblaymiz.

4. L_h, L_k, L_i indekslar miqdorlarini bir-biri bilan taqqoslash yo‘li bilan L ga nisbatan minimal bo‘lgan DNShni topamiz. ■

Keltirilgan algoritmni amaliy realizatsiya qilish uchun juda ham ko‘p mehnat talab etiladi, chunki kamida 2^{3^n} ta sodda amalni (operatsiyani) bajarishga to‘g‘ri keladi. Masalan, $n=3$ bo‘lganda, $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyani realizatsiya qiladigan L indeksga nisbatan minimal diz’yunktiv normal shakllarni topish uchun kamida $2^{3^n}=2^{3^3}=134\ 217\ 728$ ta amalni bajarishga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun $n\geq 3$ dan boshlab bu algoritmdan foydalanish (hattoki tez hisoblah imkoniyatiga ega bo‘lgan hozilrgi zamon hisoblash mashinalarini ishlatganda ham) mantiqqa to‘g‘ri kelmaydi. Bu algoritmdan faqatgina $n=1$ va $n=2$ bo‘lgan hollar uchun foydalanish mumkin.

Demak, umuman olganda, birma-bir ko‘zdan kechirish algoritmi minimal diz’yunktiv normal shaklni topish masalasida amaliy yordam bermaydigan algoritmdir. Shuning uchun mantiq algebrasi funksiyasini minimallashtirishning boshqa usullarini izlashga to‘g‘ri keladi.

9.2. Diz’yunktiv normal shaklni soddalashtirish va tupikli DNSh

DNShni soddalashtirishning ikki xil yo‘li. Elementar kon’yunksiyani chetlashtirish jarayoni. Ko‘paytuvchini chetlashtirish jarayoni. Tupikli DNSh. Minimal DNShga keltirish.

9.2.1. Tupikli DNSh. Mantiq algebrasining DNShdagi ixtiyoriy D formulasi uchun

$$D=D^1\vee K\,,\ D=D^1\vee x_i^{\sigma_i}K^1\,, \qquad (1)$$

bo‘lsin, bu yerda D^1 – biror DNSh, K – berilgan D formulaning biror elementar kon’yunksiyasi, $x_i^{\sigma_i}$ – shu K elementar kon’yunksiyaning birorta (i indeksli) ko‘paytuvchisi, K^1 – K ning qolgan ko‘paytuvchilari, ya’ni $K=x_i^{\sigma_i}K^1$. DNShni soddalashtirishning ikki xil yo‘lini (tipini) ko‘rib o‘taylik.

I. Elementar kon’yunksiyani chetlashtirish operatsiyasi. D DNShdan D^1 DNShga o‘tish uchun K elementar kon’yunksiyani chetlashtirish kerak. Bunday o‘zgartirish $D = D^1$ bo‘lganda va faqat shundagina mumkin.

II. Ko‘paytuvchini chetlashtirish operatsiyasi. D DNShdan $D^1 \vee K^1$ DNShga o‘tish operatsiyasi. Buni bajarish uchun K elementar kon’yunksiya ifodasidan $x_i^{\sigma_i}$ ko‘paytuvchini chetlashtirish kerak. Bu almashtirish $D = D^1 \vee K^1$ bo‘lganda aniqlangan.

1- ta’rif. *I va II almashtirishlar yo‘llari bilan soddalashtirish mumkin bo‘lmagan D DNSh (I va II almashtirishlarga nisbatan)* ***tupikli DNSh (TDNSh)*** *deb ataladi.*

1- misol. $D = x_2 x_3 \vee x_1$ DNSh I va II almashtirishlarga nisbatan tupikli DNShdir. ■

(1) va monotonlik aksiomasiga asosan $L(D^1) \leq L(D)$ va $L(D^1 \vee K^1) \leq L(D)$ bo‘ladi. Shuning uchun TDNShlar orasida har doim minimal diz’yunktiv normal shakllar mavjud bo‘ladi.

9.2.2. Diz’yunktiv normal shaklni soddalashtirish. Endi yuqorida keltirilgan ikkita almashtirish asosida berilgan $f_1(x_1, x_2, x_3)$ **DNShni soddalashtirish algoritmini** keltiramiz.

1. $f_1(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani ifodalovchi biror DNShni dastlabki DNSh sifatida olamiz. Masalan, shunday DNSh sifatida uning mukammal diz’yunktiv normal shaklini olamiz (chunki chinlik jadvali asosida uni formula orqali osongina yozish mumkin).

2. Dastlabki diz’yunktiv normal shaklda qo‘shiluvchilarni va har bir qo‘shiluvchidagi ko‘paytuvchilarni tartibga solamiz. Bu tartiblash bilan DNSh ko‘rinishi beriladi.

3. Chapdan o‘ngga qarab DNSh ko‘rinishi ko‘rilib o‘tiladi. Navbatdagi K_i $(i = 1,2,...,n)$ elementar kon’yunksiyaga nisbatan K_i elementar kon’yunksiyani chetlashtirish operatsiyasi qo‘llaniladi, agar bu mumkin bo‘lmasa, u vaqtda chapdan o‘ngga qarab $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$ elementar kon’yunksiyalarning $x_{i_v}^{\sigma_v}$ $(v = 1,2,...,r)$ ko‘paytuvchi hadlari ko‘rib chiqiladi va ularga nisbatan mumkin bo‘lgunga qadar $x_{i_v}^{\sigma_v}$ ko‘paytuvchini chetlashtirish operatsiyasi qo‘llaniladi. Shundan so‘ng keyingi elementar kon’yunksiyaga o‘tiladi.

Oxirgi elementar kon’yuknsiyani ishlab chiqqandan keyin, hosil bo‘lgan DNSh yana qaytadan chapdan o‘ngga qarab ko‘rib chiqiladi va elementar kon’yunksiyani chetlashtirish operatsiyasi sinab ko‘riladi. Natijada izlangan diz’yunktiv normal shaklga ega bo‘lamiz. ■

1- teorema. *Soddalashtirish algoritmini qo'llash natijasida hosil qilingan diz'yunktiv normal shakl (I va II almashtirishlarga nisbatan) minimal DNSh bo'ladi.*

2- misol. Chinlik jadvali vositasida berilgan (1- jadval) $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyani ko'rib o'taylik.

1- jadval

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

$f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya uchun dastlabki DNSh sifatida MDNShni olamiz va ikki tartiblashni o'tkazamiz:

$$D' = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3,$$

$$D'' = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1 x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Tartibga solingan D' DNSh uchun algoritmning ishlashini ko'ramiz.

1. $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ kon'yunksiyani chetlashtirish mumkin emas, ammo $\bar{x}_1$ ko'paytuvchini chetlashtirish mumkin, chunki $\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Natijada $\bar{x}_2\bar{x}_3$ kon'yunksiyaga ega bo'lamiz, undan birorta ham ko'paytuvchini chetlashtirish mumkin emas.

2. $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$ kon'yunksiyani ham chetlashtirish mumkin emas. Bu kon'yunksiyadan $\bar{x}_1$ ko'paytuvchini chetlashtirish mumkin emasligini osongina ko'rish mumkin, lekin x_2 ko'paytuvchiga nisbatan $\bar{x}_2$ ko'paytuvchini chetlashtirish operatsiyasini qo'llash mumkin. $\bar{x}_1 x_3$ kon'yunksiyani hosil qilamiz. Ko'paytuvchini chetlashtirish operatsiyasini ishlatib soddalashtirish mumkin emas.

3. $\bar{x}_1 x_2 x_3$ kon'yunksiyani chetlashtirish mumkin, chunki $\bar{x}_1 x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$.

4. $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ kon'yunksiyani ham chetlashtirish mumkin, chunki $\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

5. $x_1 x_2 \bar{x}_3$ kon'yunksiyani chetlashtirish mumkin emas, biroq x_2 ko'paytuvchini tashlab yuborish mumkin. Natijada $x_1\bar{x}_3$ kon'yunksiyaga

ega bo‘lamiz. Bu kon’yunksiyaga nisbatan ko‘paytuvchini chetlashtirish operatsiyasini ishlatib, uni soddalashtirish mumkin emas.

6. $x_1\,x_2\,x_3$ kon’yunksiyani ham chetlashtirish mumkin emas, ammo undan x_1 ko‘paytuvchini chetlashtirish mumkin. Natijada, $x_2\,x_3$ kon’yunksiyani hosil qilamiz va uni boshqa soddalashtirish mumkin emas.

Shunday qilib, $\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_3 \vee x_2\,x_3$ DNShni hosil qilamiz. Bu DNShga nisbatan kon’yunksiyani chetlashtirish operatsiyasini ishlatish natija bermaydi.

Demak, soddalashtirish algoritmini ishlatish natijasida

$$D_1 = \bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_3 \vee x_2\,x_3 \tag{2}$$

DNShni hosil qilamiz. Yuqorida keltirilgan hisoblashlar 2- jadvalda aks ettirilgan.

Agar soddalashtirish algoritmini D''ga nisbatan ishlatsak, u holda

$$D_2 = \bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,x_3 \vee x_1\,x_2 \tag{3}$$

diz’yunktiv normal shaklga ega bo‘lamiz.

3- jadvalda D''ga nisbatan ishlatilgan soddalashtirish algoritmi ishining asosiy bosqichlari keltirilgan. ■

2- misoldan ko‘rinib turibdiki, soddalashtirish algoritmi tatbiqining natijasi dastlabki DNShni qanday tartiblashga bog‘liq bo‘lar ekan.

2- jadval

Qadam tartib raqami	DNSh va ko‘rilayotgan tartib	Tekshirilayotgan kon’yunksiya	Operatsiya turi
1	$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,x_3 \vee$ $\vee\, \bar{x}_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$	$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$	$\bar{x}_1$ ni chetlashtirish
2	$\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,x_3 \vee$ $\vee\, \bar{x}_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$	$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,x_3$	$\bar{x}_2$ ni chetlashtirish
3	$\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,x_3 \vee$ $\vee\, \bar{x}_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$	$\bar{x}_1\,x_2\,x_3$	$\bar{x}_1\,x_2\,x_3$ ni chetlashtirish
4	$\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$	$x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$	$x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$ ni chetlashtirish

5	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$ $\vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	x_2 ni chetlashtirish
6	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$ $\vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	x_1 ni chetlashtirish
7	$x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$ $\vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$		
	Ikkinchi ko'rish yangi natija bermaydi	Algoritmning ishi tugadi	

Masalan, $L_h(D_1)=8$, $L_h(D_2)=6$, $L_k(D_1)=4$, $L_k(D_2)=3$, $L_i(D_1)=4$, $L_i(D_2)=3$ va bu yerdan $L_h(D_1)\neq L_h(D_2)$, $L_k(D_1)\neq L_k(D_2)$, $L_i(D_1)\neq L_i(D_2)$ munosabatlar kelib chiqadi.

3- jadval

Qadam tartib raqami	DNSh va ko'rilayotgan tartib	Tekshirilayotgan kon'yunksiya	Operatsiya turi
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\vee x_2\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1$ ni chetlashtirish
2	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\vee x_2\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_3\bar{x}_1\bar{x}_2$	x_3 ni chetlashtirish
3	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\vee x_2\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_1 x_3$	x_2 ni chetlashtirish
4	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1 x_2 x_3$	x_1 ni chetlashtirish
5	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_3 x_1 x_2$	$\bar{x}_3$ ni chetlashtirish

6	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee$ $\vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ ni chetlashtirish
7	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	qo‘llanilmaydi
8	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ $\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$ ni chetlashtirish
9	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$ $\vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_3$	qo‘llanilmaydi
10	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$ $\vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$	$x_2 x_3$	$x_2 x_3$ ni chetlashtirish
11	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$	$x_1 x_2$	qo‘llanilmaydi
12	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$	Algoritmning ishi tugadi	

“Istalgan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya uchun biror tartiblash oqibatida soddalashtirish algoritmini tatbiq etib minimal DNShni hosil etish mumkinmi yoki yo‘qmi?” degan savol tug‘iladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

2- teorema. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *– matematik mantiq algebrasining ixtiyoriy funksiyasi* $(f \neq 0)$ *va* $D = \underset{i=1}{\overset{n}{\vee}} K_i$ *uning ixtiyoriy (I va II almashtirishlarga nisbatan) tupikli DNSh bo‘lsin. U holda MDNShning shunday tartiblashi mavjud bo‘ladiki, undan soddalashtirish algoritmi yordami bilan* D *tupikli DNShni hosil qilish mumkin.*

Natija. *Tupikli DNShlar orasida albatta L indeksga nisbatan minimal DNShlar (hammasi bo‘lishi shart emas) mavjud bo‘lgani uchun, soddalashtirish algoritmi, MDNShni ma’lum ravishda tartiblash natijasida, minimal DNShni ham topishga imkon yaratadi.*

Shunday qilib, minimal DNShni topish uchun MDNShni tartiblash kerak va unga nisbatan soddalashtirish algoritmini ishlatish kerak.

Teoremaning isbotidan[1] soddalashtirish algoritmi yordami bilan tupikli DNShlarni mukammal DNShdan yasash uchun faqat kon'yunksiyalar ifodasida ko'paytuvchilar joylashishini variatsiyalash yetarligi kelib chiqadi.

Hozirgi vaqtda kon'yunksiyalarni DNSh ifodasidan chetlashtirish va ko'paytuvchilarni kon'yunksiyalar ifodasidan chetlashtirish mumkinligini tekshirishlar soni (MDNSh tartiblashning hamma turi bo'yicha)

$$2^{\left(n\log\frac{n}{2}+1\right)2^{n}}\cdot(n+2)\cdot 2^{n}$$

sondan ortiq emasligi isbotlangan. Bu son 2^{3^n} sondan ancha kamdir, ya'ni soddalashtirish algoritmi birma-bir ko'zdan kechirish algoritmidan yaxshiroq ekanligi ma'lum bo'ladi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Ushbu bobning 1- paragrafidagi 1- chinlik jadvali bilan berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyani $\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1$ DNSh ko'rinishda ifodalash mumkinligini ko'rsating.

2. $D_1=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3$ va $D_2=\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1$ DNShlar berilgan bo'lsin. Quyidagi mulohazalarning chinligini isbotlang. Agar D_1 va D_2 ko'rinishdagi funksiyani:

a) kontaktli sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda D_1 DNShni realizatsiya qilish uchun 15 ta kontakt, D_2 DNShni realizatsiya qilish uchun esa 3ta kontakt talab etiladi;

b) nol taktli funksional elementlardan yasalgan sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda D_1ni realizatsiya qilish uchun 21 dona funksional element va D_2 ni realizatsiya qilish uchun 4 dona funksional element sarf bo'ladi;

d) bir taktli funksional elementlardan yasalgan ko'p taktli to'g'ri sxema orqali realizatsiya qilish talab etilsa, u holda D_1ni realizatsiya qilish uchun 33 dona funksional element, shu jumladan, 12 dona ushlab turish elementi va D_2ni realizatsiya qilish uchun 6 dona, shu jumladan, 2 dona ushlab turish elementi kerak bo'ladi.

3. Quyidagi funksiyalarni MKNShga keltirib, L_h, L_k, L_i soddalik indekslarining miqdorini toping:

a) $f_1=((x\vee y)\vee z)\to((x\vee y)(x\vee z))$; b) $f_2=x\leftrightarrow z$;
d) $f_3=(x\to y)\to z$; e) $f_4=x\to(y\to z)$.

---

[1] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука. 1979. 213-sahifaga qarang.

4. Quyidagi funksiyalarni soddalashtirish algoritmidan foydalanib, minimal diz'yunktiv normal shaklga keltiring:

a) $f_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$; b) $f_2 = x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;

d) $f_3 = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4$.

5. Diz'yunktiv normal shaklda berilgan quyidagi funksiyalarning tupik diz'yunktiv normal shaklini toping:

a) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;

b) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;

d) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)$.

6. 5- bandda berilgan funksiyalarning har biri uchun minimal diz'yunktiv normal shaklni toping.

7. Matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosining amaliy ahamiyatini tushuntirib bering. Matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish masalasini yechishda trivial algoritmni qo'llash noqulayligi nimadan iboratligini tushuntiring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosi deganda nimani tushunasiz?

2. Soddalik indeksi va uning xususiyatlarini bilasizmi?

3. Minimal va eng qisqa DNSh qanday ta'riflanadi?

4. Trivial algoritm tushunchasini bilasizmi?

5. Nega birma-bir ko'zdan kechirish algoritmi qulay bo'lsada kam qo'llaniladi?

6. DNShni soddalashtirishning necha xil yo'lini bilasiz?

7. Elementar kon'yunksiyani va ko'paytuvchini chetlashtirish jarayonlari qanday jaroyonlar?

8. Tupikli DNSh deganda nimani tushunasiz?

9. Minimal DNShga keltirishda qanday muammolar bor?

9.3. Minimallashtirish masalasining geometrik tarzda qo'yilishi

Birlik kubning hamma uchlari to'plami. Uch o'lchovli yoq. N_f to'plam. Interval. To'plam qobig'i. To'plam qobig'i bilan funksiya orasidagi munosabat.

9.3.1. Birlik kub va uning elementlariga mos keladigan funksiya. Hamma $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ majmua to'plamini E^n bilan belgilaymiz. E^n to'plamni birlik kubning hamma uchlari to'plami sifatida qarash mumkin.

Shu sababli E^n to'plam n **o'lchovli kub**, $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ esa **kub uchlari** deb ataladi.

$n = 3$ o'lchovli kub 1- shakldagidek tasvirlanishi mumkin.

1- ta'rif. $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, ..., \sigma_{i_r}$ *shunday 0 va 1 sonlardan iborat tayinlangan sonlar sistemasi bo'lib,* $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n$, *uchun* $\alpha_{i_1} = \sigma_{i_1}$, $\alpha_{i_2} = \sigma_{i_2}, ..., \alpha_{i_r} = \sigma_{i_r}$ *bajarilganda* E^n *kubning uchlaridan tuzilgan to'plam* $(n-r)$ ***o'lchovli yoq*** *deb ataladi.*

Mantiq algebrasining $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasi berilgan bo'lsin. E^n kubning $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1$ shartni qanoatlantiradigan barcha uchlaridan tashkil topgan to'plamni N_f bilan belgilaymiz, ya'ni $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1$ bajarilganda va faqat shunda $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in N_f$ bo'ladi. Masalan, ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- jadvalda berilgan $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyaga

$$N_f = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

to'plam mos keladi.

Ravshanki, $N_f \subseteq E^n$. Agar N_f to'plam berilgan bo'lsa, u holda unga mos f funksiyaning analitik ko'rinishini yozish mumkin.

1- misol. Quyidagi to'plamlarga mos keladigan funksiyalarning analitik ko'rinishini topamiz:

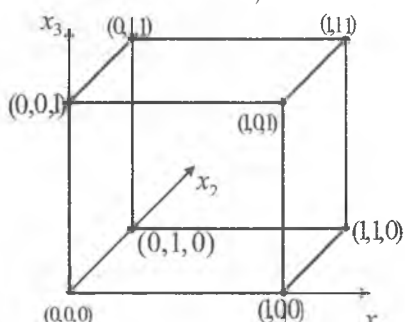
$N_{f_1} = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1)\}$;

$N_{f_2} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,0,1)\}$.

Berilgan to'plamlarga mos keladigan funksiyalarning analitik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, x_3$;

$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, x_3$. ■

Shunday qilib, N_f to'plam berilgan bo'lsa, u holda unga mos f funksiyani, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya berilganda esa, N_f to'plamni topish mumkin.



1- shakl

Dastlabki funksiya sifatida r rangli $k(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$ elementar kon'yunksiyani olaylik.

2-ta'rif. *K kon'yunksiyaga mos* N_k *to'plam* r ***rangli interval*** *deb ataladi.*

O'z-o'zidan ravshanki, r rangli N in-terval $(n-r)$ o'lchovli yoqni ifodalaydi.

2- misol. $k_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$, $k_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$, $k_3(x_1, x_2, x_3) = x_1$

kon'yunksiyalarga $N_{k_1}=\{(1,1,1),(0,1,1)\}$, $N_{k_2}=\{(0,0,0),(0,0,1)\}$, $N_{k_3}=\{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$ inter-vallar mos keladi. Bu intervallar mos ravishda 2, 2 va 1 rangli hamda 1 o'lchovli yoq (qirra), 1 o'lchovli yoq (qirra) va 2 o'lchovli yoqdir. ■

Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)=g(x_1,x_2,...,x_n)\vee h(x_1,x_2,...,x_n)$ bo'lsa, u holda 1) $N_g\subseteq N_f$, $N_h\subseteq N_f$; 2) $N_f=N_g\bigcup N_h$ bo'ladi.

Umuman olganda, agar $f(x_1,x_2,...,x_n)=D$ va $D=K_1\vee K_2\vee...\vee K_s$ bo'lsa, u holda yuqoridagi xossalarga asosan $N_{k_i}\subseteq N_f$ $(i=1,2,...,s)$ va $N_f=N_{k_1}\bigcup N_{k_2}\bigcup...\bigcup N_{k_s}$, ya'ni f funksiyaga N_f to'plamning N_{k_1}, N_{k_2}, ... , N_{k_s} intervallardan iborat **qobiq** mos keladi va har bir N_{k_1}, N_{k_2},..., N_{k_s} intervallardan iborat N_f to'plamning qobig'iga D diz'yunktiv normal shaklda ifodalangan f funksiya mos keladi.

Demak, mantiq algebrasining har bir $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasiga bitta N_f to'plamning $N_{k_1},N_{k_2},...,N_{k_n}$ intervallardan ($N_{k_i}=N_f$) iborat qobig'i va, aksincha, har bir N_f to'plamning $N_{k_1},N_{k_2},...,N_{k_n}$ intervallardan iborat qobig'iga bitta $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya mos keladi, ya'ni N_f ning qobig'i bilan $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik bor.

3- misol. Ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- jadval bilan berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya uchun

$$D_1=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\vee x_1\,x_2\,x_3,$$

$$D_2=\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1$$

diz'yunktiv normal shakllar topilgan edi. Bu DNShlarga $N_f=\{(0,0,0),\ (1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$ to'plamning quyidagi ikkita qoplamasi mos keladi:

$N_f=N_{k_1}\bigcup N_{k_2}\bigcup N_{k_3}\bigcup N_{k_4}\bigcup N_{k_5}$, $N_f=N_{k_0^1}\bigcup N_{k_0^2}$, bu yerda $N_{k_1}=\{(0,0,0)\}$, $N_{k_2}=\{(1,0,0)\}$, $N_{k_3}=\{(1,0,1)\}$, $N_{k_4}=\{(1,1,0)\}$, $N_{k_5}=\{(1,1,1)\}$, $N_{k_1^0}=\{(0,0,0),(1,0,0)\}$, $N_{k_2^0}=\{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Birinchi qoplama beshta nuqtadan, ikkinchisi esa qirra va ikki o'lchovli yoqdan iborat. N_{k_i} intervalning rangi r_i bo'lsin (u K_i kon'yunksiyaning rangiga teng). U holda

$$r=\sum_{i=1}^{s}r_i \qquad (4)$$

qoplamaning rangi deb ataladi.

9.3.2. Mantiq algebrasi funksiyasini minimallashtirish muammosiga ekvivalent qoplamalar haqidagi geometrik masala. Mantiq algebrasi funksiyasi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni minimallashtirish muammosiga ekvivalent bo'lgan qoplamalar haqidagi geometrik masala quyidagicha qo'yiladi. Berilgan $N_f = N_{k_1} \bigcup N_{k_2} \bigcup ... \bigcup N_{k_s}$ to'plamning $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_s}$ ($N_{k_j} \subseteq N_f$, $j = 1,2,...,s$) intervallardan iborat shunday qobig'ini topish kerakki, uning r rangi eng kichik bo'lsin, ya'ni qaralayotgan masala

$$\min r = \min \sum_{i=1}^{s} r_i \qquad (5)$$

ni topish masalasiga keladi.

Demak, mantiq algebrasi funksiyasini minimallashtirish masalasini ikki shaklda ko'rish mumkin: birinchisi – analitik shaklda, ikkinchisi – geometrik formada. Shuning uchun adabiyotda ikki til ishlatiladi: analitik va geometrik. Ayrim hollarda ikki tilning kombinatsiyasidan foydalaniladi. Masalan, kon'yunksiyani interval va DNShni qoplama deb ataydilar.

9.4. Joiz (ruxsat etilgan) kon'yunksiyalar

Joiz kon'yunksiyalar. Trivial algoritmni soddalashtirish.

9.4.1. Joiz kon'yunksiya tushunchasi. Ma'lumki, $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilardan 3^n ta elementar kon'yunksiya va 2^{3^n} ta diz'yunktiv normal shakl tuzish mumkin. Masalan, $n = 3$ bo'lsa, ya'ni x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilardan

$$\begin{gathered} 1,\ x_1,\ x_2,\ x_3\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3,\ \bar{x}_1x_2,\ x_1\bar{x}_2,\ \bar{x}_1x_3, \\ \bar{x}_1x_3\ \ x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_2x_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_3,\ \bar{x}_2\bar{x}_3,\ x_1x_2x_3,\ \bar{x}_1x_2x_3, \qquad (1) \\ x_1\bar{x}_2x_3,\ x_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3,\ \bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \end{gathered}$$

elementar kon'yunksiya tuzish mumkin. Ammo, bu elementar kon'yunksiyalarning hammasi ham berilgan ixtiyoriy $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani realizatsiya qiladigan diz'yunktiv normal shakllarning ifodasida ishtirok etavermaydi. Shuning uchun "3^n ta kon'yunksiyaning qaysilari $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning DNShda ishtirok qiladi?" degan masalani yechishga to'g'ri keladi. Buning uchun, birinchi navbatda, $E_n \setminus N_f$

to‘plamning elementlarida 1 qiymat qabul qiladigan kon’yunksiyalarni topish kerak bo‘ladi. Masalan,

$$f_1(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{y}z\vee\bar{x}yz\vee\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee xyz \qquad (2)$$

bo‘lsin. U holda

$$N_{f_1}=\{(0,0,0),\ (0,1,1),\ (0,1,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\} \qquad (3)$$

bo‘ladi. Demak, 1- jadvalga ega bo‘lamiz.

1- jadval

$E_n \setminus N_{f_1}$	1 qiymat qabul qiladigan kon’yunksiyalar
(0,0,0)	$1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}\,\bar{y}, \bar{x}\,\bar{z}, \bar{y}\,\bar{z}, \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$
(0,0,1)	$1, \bar{x}, \bar{y}, z, \bar{x}\,\bar{y}, \bar{x}\,z, \bar{y}\,z, \bar{x}\,\bar{y}\,z$

Ikkinchi navbatda, (1) kon’yunksiyalar orasidan 1-jadvaldagi kon’yunksiyalarni chetlashtiramiz, chunki $f(x,y,z)$ funksiyaga N_{f_1} ((3)ga qarang) to‘plam mos kelgani uchun 1-jadvaldagi kon’yunksiyalar (2) funksiyani realizatsiya qiladigan diz’yunktiv normal shakllar ifodasida umuman qatnashmaydi. Bu operatsiya natijasida $f_1(x,y,z)$ funksiyani realizatsiya qiladigan DNShlar ifodasida qatnashishi mumkin bo‘lgan (qatnashishga ruxsat etilgan, qatnashishga joiz) kon’yunksiyalarga ega bo‘lamiz:

$$x,\ y,\ xy,\ xz,\ x\bar{y},\ x\bar{z},$$
$$yz,\ \bar{x}y,\ y\bar{z},\ xyz,\ xy\bar{z}, \qquad (4)$$
$$\bar{x}yz,\ x\bar{y}z,\ \bar{x}y\bar{z},\ x\bar{y}\,\bar{z}.$$

Shunday qilib, $3^3=27$ kon’yunksiyadan 15 tasining berilgan $f(x,y,z)$ funksiyani realizatsiya qiladigan DNShlar ifodasida qatnashishi joiz ekan.

1- ta’rif. *Ixtiyoriy $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya va unga mos N_f to‘plam berilgan bo‘lsin. $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan DNShlar ifodasida qatnashishi mumkin bo‘lgan kon’yunksiyalar, ya’ni $E_n \setminus N_f$ to‘plamning nuqtalarida 1 qiymatga ega bo‘lgan kon’yunksiyalardan tashqari qolgan hamma kon’yunksiyalar* ***joiz kon’yunksiyalar*** *deb ataladi.*

Masalan, (4) dagi hamma kon’yunksiyalar joiz kon’yunksiyalar bo‘ladi.

8.4.2. Joiz kon’yunksiyalarni topish.

Misol.
$$f_2(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3\vee$$
$$\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2x_3\vee x_1x_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3 \qquad (5)$$

va unga mos

$$N_{f_2}=\{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (1,0,1),\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (0,1,0)\} \qquad (6)$$

to‘plam berilgan bo‘lsin.

Joiz kon’yunksiyalarni topish uchun 2- jadvalni tuzamiz.

2- jadval

$E_n \setminus N_f$	1 qiymat qabul qiladigan kon'yunksiyalar
(1,0,0)	$1, x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_1 \bar{x}_2, x_1 \bar{x}_3, \bar{x}_2 \bar{x}_3, x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
(0,1,1)	$1, \bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_1 x_2, \bar{x}_1 x_3, x_2 x_3, \bar{x}_1 x_2 x_3$

U holda (1) dagi kon'yunksiyalardan 2- jadvaldagi kon'yunksiyalarni chetlashtirish natijasida quyidagi joiz kon'yunksiyalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{gathered} x_1 x_2,\ x_1 x_3,\ x_2 \bar{x}_3,\ \bar{x}_2 x_3,\ \bar{x}_1 \bar{x}_2, \\ \bar{x}_1 \bar{x}_3,\ x_1 x_2 x_3,\ x_1 x_2 \bar{x}_3,\ x_1 \bar{x}_2 x_3, \\ \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3,\ \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3,\ \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3. \ \blacksquare \end{gathered} \tag{7}$$

O'zgaruvchilar soni n ta bo'lganda, 3^n ta kon'yunksiya va ulardan 2^{3^n} ta $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizatsiya qilishi mumkin bo'lgan DNSh tuzish mumkinligini aytgan edik. Demak, berilgan ixtiyoriy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan tupikli (minimal) DNShlarni 2^{3^n} ta DNShlar orasidan izlamasdan, balki 2^{λ} DNShlar ichidan izlash kerak degan natijaga keldik, bu yerda λ – joiz kon'yunksiyalar soni.

9.5. Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl

Maksimal interval. Oddiy implikant. Qisqartirilgan DNSh.

9.5.1. Maksimal interval va oddiy implikant tushunchalari.

1- ta'rif. *Agar N_f to'plamning qism to'plami bo'lgan N_k interval uchun: 1) $N_k \subseteq N_k^1 \subseteq N_f$; 2) N_k^1 intervalning rangi N_k intervalning rangidan kichik shartlarni qanoatlantiruvchi N_k^1 interval mavjud bo'lmasa, u holda N_k (N_f ga nisbatan)* ***maksimal interval*** *deb ataladi.*

1- misol. $k_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2$, $k_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2$, $k_3(x_1, x_2, x_3) = x_2$ bo'lsin. U holda N_{k_2}, N_{k_3} maksimal intervallar bo'lib, N_{k_1} interval esa N_f ning maksimal intervali bo'lmaydi, chunki $N_{k_1} \subset N_{k_3}$ va N_{k_3} ning rangi N_{k_1} ning rangidan kichik. ■

2- misol. Ushbu bobning 4- paragrafidagi (4) joiz kon'yunksiyalarga mos kelgan 15ta intervaldan faqat N_{x_1} va N_{x_2} intervallar va o'sha paragraf, (7) dagi 12ta intervaldan faqat $N_{x_1x_2}$, $N_{x_1x_3}$, $N_{x_2\bar{x}_3}$, $N_{\bar{x}_2x_3}$, $N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, $N_{\bar{x}_1\bar{x}_3}$, intervallargina mos ravishda N_{f_1} va N_{f_2} to'plamlarga nisbatan maksimal intervallar bo'ladi. ■

2- ta'rif. *N_f to'plamning N_k maksimal intervaliga mos kelgan K kon'yunksiya f funksiyaning **oddiy implikanti** deb ataladi.*

Agar k^1 kon'yunksiyaning hamma ko'paytuvchilari k kon'yunksiyada ham mavjud bo'lsa, u holda $N_k \subseteq N_{k^1}$ deb yozish mumkin. U holda, ma'lum ma'noda, f funksiyaning k oddiy implikanti ifodasidan birorta ham ko'paytuvchini chetlashtirish mumkin emas, chunki ko'paytuvchini chetlashtirish natijasida $N_{k^1} \not\subset N_f$ munosabatda bo'lgan k^1 kon'yunksiyaga ega bo'lamiz.

Har qanday N_k intervalni $(N_k \subseteq N_f)$ maksimal intervalgacha kengaytirish mumkin.

N_f to'plamning hamma maksimal intervallari

$$N_{k_1^0}, N_{k_2^0}, \dots, N_{k_m^0} \tag{1}$$

lardan iborat bo'lsin. U holda

$$N_f = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \cup \dots \cup N_{k_m^0} \tag{2}$$

bo'ladi, chunki $N_{k_i^0} \subseteq N_f$ $(i = 1,2,\dots,m)$ va N_f ning har bir nuqtasi (1) dagi maksimal intervallarning birortasining elementi bo'ladi. (2) tenglik quyidagi munosabatga ekvivalentdir:

$$f = k_1^0 \vee k_2^0 \vee \dots \vee k_m^0 . \tag{3}$$

9.5.2. Qisqartirilgan DNSh tushunchasi.

3- ta'rif. *f funksiyani hamma oddiy implikantlarining diz'yunksiyasi (3) **qisqartirilgan DNSh** deb ataladi.*

Demak,

$$D_s(f) = k_1^0 \vee k_2^0 \vee \dots\dots \vee k_m^0 \tag{4}$$

f funksiyaning qisqartirilgan DNShi bo'ladi. $D_s(f)$ qisqartirilgan DNSh f funksiya orqali bir qiymati aniqlanadi va f funksiyani realizatsiya qiladi.

3- misol. Ushbu bobning 4- paragrafidagi (2) formulada berilgan $f_1(x_1, x_2, x_3)$ uchun maksimal intervallardan iborat

$$N_{f_1} = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \tag{5}$$

qobiqqa va o‘sha yerdagi (5) formulada berilgan $f_2(x_1,x_2,x_3)$ funksiya uchun

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6} \qquad (6)$$

qobiqqa ega bo‘lamiz. Bu yerda $k_1^0 = x_1$, $k_2^0 = x_2$, $k_1 = x_1x_2$, $k_2 = x_1x_3$, $k_3 = x_2\bar{x}_3$, $k_4 = \bar{x}_2x_3$, $k_5 = \bar{x}_1\bar{x}_2$, $k_6 = \bar{x}_1\bar{x}_3$. Bu qobiqlarga $D_s(f_1) = x_1 \vee x_2$, $D_s(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$ qisqartirilgan DNShlar mos keladi. ■

9.6. Qisqartirilgan diz’yunktiv normal shaklni yasash algoritmi

Funksiya. Qisqartirilgan DNSh. Algoritm.

9.6.1. Qisqartirilgan DNSh yasash algoritmi. Ixtiyoriy $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyaning qisqartirilgan diz’yunktiv normal shaklini yasash uchun quyidagi operasiyalarni bajaramiz:

1) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyaning istalgan kon’yunktiv normal shaklini olamiz, masalan, mukammal KNSh;

2) qavslarni ochib chiqamiz, ya’ni $\wedge\vee \to \vee\wedge$ turdagi almashtirishni o‘tkazamiz;

3) hosil qilingan ifodadan 0 ga teng hadlarni chetlashtiramiz va

$$K_1K_2 \vee K_2 = K_1, \quad K_1 \vee K_1 = K_1$$

formulalardan foydalanib uni soddalashtiramiz. Natijada, qisqartirilgan DNShga kelamiz. ■

9.6.2. Misollar.

1- misol. $N_{f_2} = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$ to‘plamga mos $f_2(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaning MKNShni

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}) \qquad (1)$$

formuladan foydalanib yozamiz:

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Algoritmning 2- va 3- qadamlarini bajaramiz:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) = x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_2 \vee$$

$$\vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 =$$

$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3.$$

Qisqartirilgan DNSh quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$D_s(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 . \blacksquare \qquad (2)$$

2- misol. Quyidagi funksiya berilgan bo‘lsin:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 .$$

Bu funksiyaga

$$N_{f_1} = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

to‘plam mos keladi. Funksiyaning MKNSh ko‘rinishi

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) .$$

Algoritmning 2- va 3- qadamlarini bajaramiz:

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$$
$$\vee \bar{x}_2\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 .$$

Demak, funksiyaning qisqartirilgan DNSh quyidagicha bo‘ladi:

$$D_s(f_1) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 . \blacksquare \qquad (3)$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi to‘plamlarga mos keladigan f_1 va f_2 funksiyalarning analitik ko‘rinishlarini yozing:

a) $N_{f_1} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$;

b) $N_{f_2} = \{(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

2. Quyidagi intervallarga mos keluvchi kon’yunksiyalarning analitik ko‘rinishlarini yozing:

a) $N_{k_1} = \{(0,0,0),(0,1,1)\}$, b) $N_{k_2} = \{(1,1,1),(1,0,0)\}$, d) $N_{k_3} = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

3. Har bir $N_{k_1}, N_{k_2}, N_{k_3}$ intervallardan iborat N_f to‘plamning qobig‘iga D diz’yunktiv normal shakldа ifodalangan f funksiya mos kelishini isbotlang.

4. Quyida berilgan funksiyalarning joiz kon’yunksiyalarini toping:

a) $f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;

b) $f_2 = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;

d) $f_3 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4$;

e) $f_4 = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

f) $f_5 = (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

h) $f_6 = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

5. 4- bandda berilgan funksiyalarni qisqartirilgan DNShga keltiring.

6. Qisqartirilgan DNShni yasash algoritmi asosida quyidagi funksiyalarni qisqartirilgan DNSh ko'rinishga keltiring:

a) $f_1 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_2$; b) $f_2 = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$;

d) $f_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Interval tushunchasi nimani anglatadi?

2. To'plam qobig'i nima?

3. To'plam qobig'i bilan funksiya orasida qanday munosabat bor?

4. Joiz (ruxsat etilgan) kon'yunksiyalar deganda nimani tushunasiz?

5. Trivial algoritmni soddalashtirish qanday amalga oshiriladi?

6. Maksimal interval va oddiy implikant haqida nimalarni bilasiz?

7. Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl deganda nimani tushunasiz?

8. Funksiyani qisqartirilgan diz'yunktiv normal shaklga keltirish algoritmini bilasizmi?

9.7. Tupikli diz'yunktiv normal shakllarni geometrik asosda yasash usullari

Tupikli DNShga keltirish algoritmi. Ayrim maksimal intervallarni chetlashtirish. Keltirilmaydigan qoplamalar (qobiqlar). Qisqartirilgan, tupikli va minimal DNShlar orasidagi munosabatlar.

9.7.1. Geometrik ma'nodagi tupikli diz'yunktiv normal shakllar. Geometrik ma'nodagi tupikli diz'yunktiv normal shakl tushunchasini o'rganish uchun misolga murojaat qilamiz.

1- misol. Ushbu bobning 4- paragrafidagi misolda (5) formula bilan berilgan $f_2(x_1, x_2, x_3)$ funksiyaning $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_6}$ maksimal intervallardan iborat N_{f_2} qoplama

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6} \qquad (1)$$

ekanligini ko'rsatgan edik. Bu yerda

$$N_{f_2} = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\},$$

$$N_{k_1} = \{(1,1,0),(1,1,1)\}, \qquad N_{k_2} = \{(1,0,1),(1,1,1)\},$$

$$N_{k_3}=\{(0,1,0),(1,1,0)\},\qquad N_{k_4}=\{(0,0,1),(1,0,1)\},$$
$$N_{k_5}=\{(0,0,0),(0,0,1)\},\qquad N_{k_6}=\{(0,0,0),(0,1,0)\}. \qquad (2)$$

Quyidagi savolga javob topaylik. N_{f_2} to'plamning $N_{k_1}, N_{k_2}, N_{k_3}$, N_{k_4}, N_{k_5}, N_{k_6} maksimal intervallardan iborat bo'lgan qoplamadan ayrim maksimal intervallarni chetlashtirganimizda, qolgan qismi yana N_{f_2} ning qobig'i bo'ladimi yoki yo'qmi?

(1) va (2) munosabatlardan quyidagilar kelib chiqadi:

$$N_{f_2}=N_{k_2}\cup N_{k_3}\cup N_{k_5}\cup N_{k_6},\ N_{f_2}=N_{k_1}\cup N_{k_4}\cup N_{k_6},$$
$$N_{f_2}=N_{k_1}\cup N_{k_2}\cup N_{k_5}\cup N_{k_6},\ N_{f_2}=N_{k_5}\cup N_{k_2}\cup N_{k_3},$$
$$N_{f_2}=N_{k_4}\cup N_{k_2}\cup N_{k_3}\cup N_{k_6}. \qquad (3)$$

N_{f_2} to'plamning (3) da ko'rsatilgan qoplamalaridan boshqa qopla-malari mavjud emas. Bu qobiqlar (1) keltirilgan qobiqdan ayrim maksimal intervallarni chetlashtirish natijasida hosil qilingan. Shunday qilib, qo'yilgan savolning birinchi qismiga ijobiy javob berdik.

(3) da keltirilgan N_{f_2} to'plamning istalgan qoplamadan ixtiyoriy birorta maksimal intervalni chetlashtirganimizda, qolgan maksimal intervallar N_{f_2} to'plamning qoplamasi bo'la olmaydi. Bunday qoplamalar N_{f_2} to'plamning **keltirilmaydigan qoplamalari** deb ataladi.

Shunday qilib,

$$1)\ N_{k_2},N_{k_3},N_{k_5},N_{k_6};\quad 2)\ N_{k_1},N_{k_4},N_{k_6};\quad 3)\ N_{k_1},N_{k_2},N_{k_5},N_{k_6};$$
$$4)\ N_{k_2},N_{k_3},N_{k_5};\quad 5)\ N_{k_2},N_{k_3},N_{k_4},N_{k_6} \qquad (4)$$

qobiqlar N_{f_2} to'plamning keltirilmaydigan qoplamalari bo'ladi. ■

1- ta'rif. *Agar $N_{k_1}, N_{k_2},\ldots,N_{k_m}$ maksimal intervallardan iborat qobiq uning tarkibidan istalgan maksimal intervalni $(N_{k_j},\ j=1,2,\ldots,m)$ chetlashtirganimizda, qolgan qismi N_f ning qobig'i bo'la olmasa, u holda bu qobiq N_{f_2} to'plamning **keltirilmaydigan qoplami** deb ataladi.*

2- ta'rif. *N_f to'plamning keltirilmaydigan qobig'iga mos bo'lgan DNSh **tupikli diz'yunktiv normal shakl** deb ataladi (geometrik ma'noda).*

2- misol. 1- misoldagi N_{f_2} to'plamning (4) da ifodalangan kel-tirilmaydigan qobiqlariga mos

$$D_1=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_3\vee x_2\bar{x}_3,\qquad D_2=\bar{x}_2x_2\vee x_1x_2\vee \bar{x}_1\bar{x}_3,$$
$$D_3=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee \bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\vee x_2\bar{x}_3,\ D_4=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_3\vee x_1x_2\vee \bar{x}_1\bar{x}_3, \ (5)$$

$$D_5 = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

DNShlar f_2 funksiyaning tupikli diz'yunktiv normal shakllari bo'ladi.■

T e o r e m a . *I va II almashtirishlarga nisbatan tupikli DNSh tushunchasi bilan geometrik ma'nodagi tupikli DNSh tushunchasi ekvivalentdir.*

9.7.2. MDNSh asosida minimal DNSh yasash jarayonining sxemasi. Yuqorida ta'riflangan qisqartirilgan, tupikli va minimal DNShlar quyidagi munosabatda bo'ladi.

Tupikli DNSh qisqartirilgan DNShdan ayrim kon'yunksiyalarni chetlashtirish yo'li bilan hosil qilinadi.

L_h ga nisbatan minimal DNSh tupikli bo'ladi.

Tupikli DNShlar orasida L_h ga nisbatan minimal DNShlar mavjud bo'ladi.

3 - m i s o l . Ushbu bobning 4- paragrafidagi misolda (5) formula bilan berilgan $f_2(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ funksiyaning $D_s(f_2)$ qisqartirilgan DNShni topdik (6- paragrafdagi (1) ga qarang):

$$D_s(f_2) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 .$$

Undan keyin (5) da ifodalangan tupikli DNShlarni hosil qildik. U yerdan ko'rinib turibdiki,

$$L_h(D_1) = L_h(D_2) = 6 \text{ va}$$

$$L_h(D_3) = L_h(D_4) = L_h(D_5) = 8 .$$

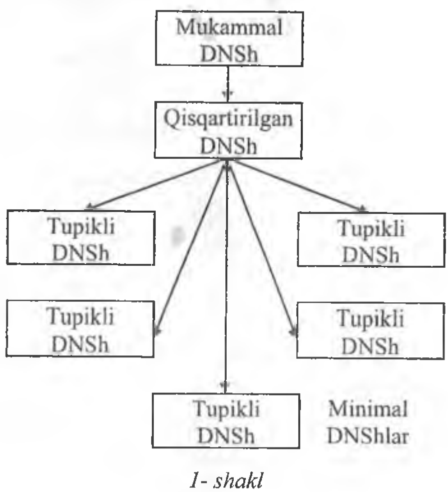
Demak,

$$D_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \text{ va}$$

$$D_2 = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

tupikli DNShlar $f_2(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaning minimal diz'yunktiv normal shakllari bo'ladi. Ravshanki, bu DNShlar o'z navbatida $f_2(x_1,x_2,x_3)$ning eng qisqa DNShlari ham bo'ladi.

MDNSh asosida minimal DNSh yasash jarayonining sxemasi 1-shaklda ifodalangan.



1- shakl

9.8. Tupikli diz'yunktiv normal shakllarni yasash algoritmi

Tupikli DNShl. Geometrik g'oya. Algoritm.

9.8.1. Tupikli diz'yunktiv normal shakllarni yasash algoritmi. Hamma tupikli DNShlarni topishning geometrik g'oyalarga asoslangan algoritmini keltiramiz. N_f to'plamning hamma maksimal intervallar sistemasi $N^0_{k_1}, N^0_{k_2}, ..., N^0_{k_m}$ bo'lsin. $N_f = \{P_1, P_2, ..., P_\lambda\}$ va $P_0 \notin N_f$ ixtiyoriy nuqta hamda f funksiya aynan 1ga teng bo'lmagan funksiya bo'lsin. 1- jadvalni tuzamiz,

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ agar } P_j \notin N_{k_i^0} \text{ bo'lsa } (i = 1, ..., m), \\ 1, \text{ agar } P_j \in N_{k_i^0} \text{ bo'lsa } (j = 0, 1, ..., \lambda), \end{cases}$$

bu yerda 1- jadvalning P_0 ga mos 1- ustuni 0 lardan iborat bo'ladi, chunki $P_0 \notin N_f$. Qolgan har bir ustunida hech bo'lmaganda bitta 1 mavjud bo'ladi. Demak, birinchi ustun qolgan hamma ustunlardan farq qiladi.

Har bir j $(0 \le j \le \lambda)$ uchun hamma satrlar raqamlari (nomerlari) to'plami E_j ni topamiz, bu yerda P_j ustunda 1_λ mavjud bo'ladi. Faraz qilaylik, $E_j = \{e_{j1}, e_{j2}, ..., e_{j\mu(j)}\}$ bo'lsin. U holda $\bigwedge_{j=1} (e_{j1} \vee e_{j2} \vee ... \vee e_{j\mu(j)})$ ifodani tuzamiz va $\wedge\vee \to \vee\wedge$ turdagi almashtirishni bajaramiz. Bu almashtirish vaqtida e simvolni buliy qiymatli deb hisoblaymiz.

1-jadval

	P_0	P_1	...	P_j	...	P
$N_{k_1^0}$	σ_{10}	σ_{11}	...	σ_{1j}	...	$\sigma_{1\lambda}$
...	...	...	...	...	...	...
$N_{k_i^0}$	σ_{i0}	σ_{i1}	...	σ_{ij}	...	$\sigma_{i\lambda}$
...	...	...	...	...	...	...
$N_{k_m^0}$	σ_{m0}	σ_{m1}	...	σ_{mj}	...	$\sigma_{m\lambda}$

Hosil qilingan ifodani

$$AB \vee A = A, \qquad A \vee A = A$$

teng kuchli formulalardan foydalanib soddalashtiramiz. Buning natijasida $\vee\wedge$ ifodaning qismi bo'lgan $\vee\wedge^1$ ifodani hosil qilamiz. Ravshanki, $\vee\wedge^1$ ifodadagi har bir qo'shiluvchi had keltirilmaydigan qobiqni ifodalaydi.

9.8.2. Misol. Chinlik jadvali 2- jadvaldagidek berilgan $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani ko'ramiz.

2- jadval

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

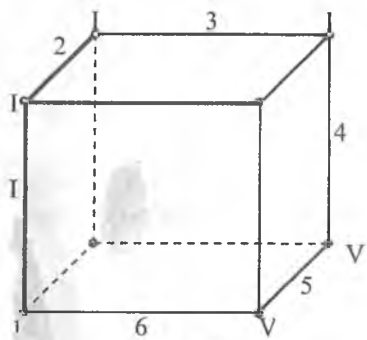
Bu funksiya uchun

$$N_f = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

to'plam 6 ta uchdan iborat. Ularni I, II, III, IV, V va VI sonlar bilan belgilaymiz. Maksimal intervallari qirralardan iborat, ularni 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlar bilan raqamlaymiz (1- shakl). 3- jadvalni tuzamiz.

3- jadval

	0	I	II	III	IV	V	VI
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1
6	0	1	0	0	0	0	1



1- shakl

Bu yerdan $E_{\mathrm{I}} = \{1,6\}$, $E_{\mathrm{II}} = \{1,2\}$, $E_{\mathrm{III}} = \{2,3\}$, $E_{\mathrm{IV}} = \{3,4\}$, $E_{\mathrm{V}} = \{4,5\}$, $E_{\mathrm{VI}} = \{5,6\}$. U holda

$$\vee\wedge = (1\vee 6)(1\vee 2)(2\vee 3)(3\vee 4)(4\vee 5)(5\vee 6) =$$
$$= (1\vee 2\cdot 6)\cdot(3\vee 2\cdot 4)\cdot(5\vee 4\cdot 6) =$$
$$= (1\cdot 3\vee 2\cdot 3\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\vee 2\cdot 4\cdot 6)\cdot(5\vee 4\cdot 6) =$$
$$= 1\cdot 3\cdot 5\vee 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\vee 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\vee$$
$$\vee 1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\vee 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\vee 2\cdot 4\cdot 6 =$$
$$= 1\cdot 3\cdot 5\vee 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\vee 1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\vee 2\cdot 4\cdot 6.$$

Natijada 5 ta keltirilmaydigan qobiqqa va ularga mos kelgan 5 ta tupikli DNShga ega bo'lamiz:

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3, \qquad D_2 = \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,$$
$$D_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3, \qquad D_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,$$
$$D_5 = \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$$

Bulardan D_1 va D_5 minimal DNSh bo'ladi. ■

Yuqorida o'rganilgan algoritm ko'p argumentli funksiyalar uchun ko'p mehnat talab qiladi va amalda deyarli ishlatilmaydi.

9.9.Ayrim yagona tarzda hosil qilinadigan diz'yunktiv normal shakllar

Tupikli DNShl. Yagona tarzda tupikli DNShni hosil qilish algoritmi. Asosiy qismi. Yadro. Kvayn diz'yunktiv normal shakli. ΣT *turdagi DNSh.* $D_{\Sigma T}$. *Dasta. Regulyar nuqta. Regulyar maksimal interval. Yu.Juravlev teoremasi. Funksiyani minimallashtirish jarayonining sxemasi.*

9.9.1. MDNShdan minimal DNShni hosil qilish jarayoni. Mukammal diz'yunktiv normal shakldan minimal diz'yunktiv normal shaklni hosil qilish jarayonining sxemasini ushbu bobning 8- paragrafidagi 1- shaklda keltirgan edik.

Avval qisqartirilgan DNSh olinadi. Keyin yagona tarzdagi jarayon tarmoqlanishga o'tadi, ya'ni hamma tupikli DNShlarni yasash jarayoniga o'tiladi. Oxiri tupikli DNShlardan minimal DNShlar ajratib olinadi. Bu jarayonning eng og'ir qismi tupikli DNShlarni yasash qismidir (tarmoqlanish qismi). Uni ikki holatda soddalashtirish mumkin.

1- jadval

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Tupikli DNShlar yasash jarayonida qatnashmaydigan qisqartirilgan DNShning ayrim hadlarini oldindan chetlashtirish kerak. Natijada qisqartirilgan DNShning qolgan hadlarini birma-bir ko'-rish kamayadi.

2. Qisqartirilgan DNShning ayrim hadlarini shunday chetlashtirish kerakki, qolgan qismidan hech bo'lmaganda bitta minimal DNSh yasash mumkin bo'lsin. Ushbu qadam yagona tarzda amalga oshishi maqsadga muvofiq keladi.

Ushbu paragrafda shunday yagona tarzda tupikli DNShni hosil qilishning ikkita algoritmini keltiramiz.

9.9.2. Kvayn[2] diz'yunktiv normal shakli. N_k interval N_f to'plamning maksimal intervali bo'lsin.

1- ta'rif. *Agar N_f to'plamning shunday α nuqtasi mavjud bo'lsaki, $\alpha \in N_k$ va α nuqta N_f ning boshqa maksimal intervallarining elementi bo'lmasa, u holda N_k maksimal interval N_f ning* ***asosiy qismi*** *deb ataladi.*

1- misol. 1- jadvalda berilgan $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani ko'raylik. 1- shaklda N_f to'plam va uning N_1, N_2, N_3 maksimal intervallari (qirralari) aks ettirilgan. Bu yerda $N_1 = \{0,0,0),(0,0,1)\}$, $N_2 = \{(0,0,1),(1,0,1)\}$ va $N_3 = \{(1,0,1),(1,1,1)\}$. (0,0,0) nuqta faqat N_1 interval bilan, (1,1,1) nuqta esa faqat N_3 interval bilan qoplanganligi ko'rinib turibdi. Demak, N_1 va N_3 maksimal intervallar N_f to'plamning asosiy qismlari bo'ladi.

2- ta'rif. *N_f to'plamning hamma asosiy qismlaridan (yoqlaridan) tuzilgan to'plam* ***yadro*** *deb ataladi.*

1- misolda keltirilgan $\{N_1, N_3\}$ to'plam yadro bo'lishi ravshan. Yadro har bir keltirilmaydigan qobiqqa kiradi. Bu yerdan yadro bilan qoplanadigan yoq (qirra) hech bir keltirilmaydigan qobiqqa kirmasligi kelib chiqadi.

3- ta'rif. *Yadro bilan qoplangan maksimal yoqlarga (qirralarga) mos keladigan hamma oddiy implikantlarni mukammal DNShdan (qisqartirilgan DNShdan) chetlashtirish natijasida hosil qilinadigan DNSh* ***Kvayn diz'yunktiv normal shakli*** *deb ataladi va D_{kv} deb belgilanadi.*

---

[2] Kvayn Uillard Van O'rman (Quine Willard Van Orman, 1908-2000) – AQSh faylasufi va mantiqchisi.

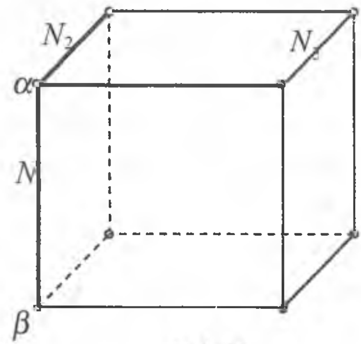
U.Kvayn isbot qilgan (1959 y.) quyidagi teoremani keltiramiz.

1- teorema. *Har bir aynan 0 ga teng bo'lmagan $f(x_1,...,x_n)$ funksiyaning yagona Kvayn diz'yunktiv normal shakli mavjud.*

2- misol. 1- jadvalda berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaning qisqartirilgan DNSh quyidagicha bo'ladi:

$$D_s = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 .$$

$\{N_1, N_3\}$ yadro N_2 yoqni (qirrani) qoplaydi. N_2 ga $\bar{x}_2 x_3$ oddiy implikant mos keladi. Ta'rifga asosan, bu oddiy implikantni qisqartirilgan DNSh ifodasidan chetlashtirsak, Kvayn DNSh kelib chiqadi: $D_{kv} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3$.

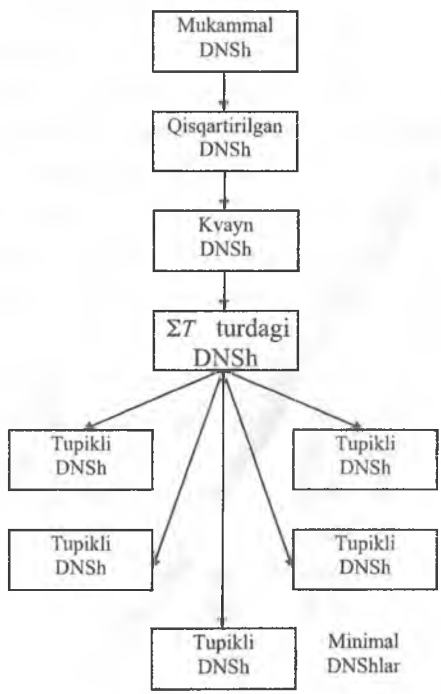


1- shakl

Demak, qisqartirilgan DNShdan ayrim oddiy implikantlarni chetlashtirish yo'li bilan yagona tarzda aniqlangan Kvayn DNShga o'tish mumkin. Kvayn DNSh o'sha funksiyani realizasiya qiladi va bu funksiyaning hamma tupikli DNShlarini o'z ichiga olgan bo'ladi.

4- ta'rif. *Hech bo'lmaganda birorta keltirilmaydigan qobiqqa kiruvchi shunday maksimal yoqlar majmuasi bilan qoplangan N_f to'plamga mos keluvchi diz'yunktiv normal shakl **ΣT turdagi DNSh** deb ataladi va u $D_{\Sigma T}$ bilan belgilanadi.*

$f(x_1,...,x_n)$ funksiyaning hamma tupik DNShlari diz'yunksiyasi (mantiqiy yig'indisi) va uni soddalashtirish natijasida $D_{\Sigma T}$ diz'yunktiv normal shakl hosil bo'ladi.



2- shakl

Ta'rifga asosan, har bir $f(x_1,...,x_n)$ funksiya uchun yagona $D_{\Sigma T}$ DNSh mavjud va u $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladi. $D_{\Sigma T}$ DNSh qisqartirilgan DNShdan ayrim hadlarini chetlashtirish yo'li bilan hosil qilinadi.

5- ta'rif. *$\alpha \in N_f$ bo'lsin. U holda α nuqtani o'z ichiga olgan hamma N_f ga nisbatan maksimal yoqlarning (qirralarning) Π_α majmuasiga α nuqtadan o'tuvchi* ***dasta (tutash)*** *deb ataladi.*

6- ta'rif. *$\alpha \in N_f$ va $\alpha \in N_k^0$ bo'lsin. N_K^0 shu N_f to'plamning maksimal yog'i (qirrasi). Agar $\beta \in N_f \setminus N_K^0$ va $\Pi_\beta \subseteq \Pi_\alpha$ bo'lsa, u holda α nuqta (N_K^0 va N_f larga nisbatan)* ***regulyar nuqta*** *deb ataladi.*

3- misol. 1- jadvalda berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya uchun (1-shaklga qarang) α nuqta sifatida (0,0,1) nuqtani va $N_2 = \{(0,0,1),(1,0,1)\}$ maksimal yoqni olamiz. Ravshanki, $\alpha \in N_2$. α regulyar nuqta (N_2 va N_f ga nisbatan) ekanligini ko'rsatamiz. $\beta = (0,0,0)$ bo'lsin. U holda ($N_1 = \{(0,0,0),(0,0,1)\}$) $\Pi_\alpha = \{N_1, N_2\}$, $\Pi_\beta = \{N_1\}$ va $\Pi_\beta \subseteq \Pi_\alpha$. Demak, α nuqta regulyar nuqta bo'ladi.

7- ta'rif. *Agar N_k^0 maksimal intervalning har bir nuqtasi (N_k^0 va N_f larga nisbatan) regulyar nuqta bo'lsa, u holda N_f uchun N_k^0* ***regulyar maksimal interval*** *deb ataladi.*

9.9.3. Yu.I.Juravlev[3] teoremasi.

2- teorema (Juravlev teoremasi). *$f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaning k^0 oddiy implikanti $D_{\Sigma T}$ turdagi DNShning ifodasida bo'lmasligi uchun, unga mos bo'lgan N_k^0 regulyar maksimal interval bo'lishi yetarli va zarurdir.*

5- misol. 1- jadvalda berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya uchun bitta N_2 regulyar interval mavjud. Uni chetlashtirsak, u holda $N_1 \cup N_3$ ga ega bo'lamiz. Bu yerdan $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_3$ kelib chiqadi va u $D_{\Sigma T}$ turdagi DNShi bo'ladi. Bu DNSh funksiyaning yagona tupikli DNShi ham bo'ladi.

3- teorema. *$f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaning ΣT turdagi DNSh shu funksiyaning Kvayn DNShdan ayrim oddiy implikantlarni chetlashtirish yo'li bilan hosil qilinishi mumkin.*

---

[3] Juravlyov Yuriy Ivanovich (Журавлёв Юрий Иванович, 1935- yilda tug'ilgan) – rus matematigi, informatigi.

Shunday qilib, $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani minimallashtirish jarayonini 2-shaklda aks ettirilgan sxema orqali ifodalash mumkin.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 2- jadval bilan berilgan $f_j(x_1, x_2, x_3)$ $(j = \overline{1, 8})$ funksiyalarning mukammal, qisqartirilgan, Kvayn, ΣT turdagi, tupikli va minimal diz'yunktiv normal shakllarini toping.

2. Quyida berilgan DNShlarning mukammal, qisqartirilgan, tupikli va minimal diz'yunktiv normal shakllarini toping:

a) $D = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$; b) $D = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$.

3. Berilgan KNShlarning mukammal, qisqartirilgan, tupikli va minimal diz'yunktiv normal shakllarini toping:

a) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

b) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

2- jadval

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0

4. Quyidagi funksiyalarning hamma tupikli DNShlarini toping:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$;

b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110011000\,010101)$;

d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0110101110101011)$.

5. Quyidagi diz'yunktiv normal shakllar tupikli, eng qisqa va minimal DNSh bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlang:

a) $x_1x_2 \vee \bar{x}_2$; b) $\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

d) $x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.

6. Quyidagi f_i funksiyalarga mos kelgan N_{f_i} $(i=\overline{1,9})$ to‘plamlarni toping va ularni tupikli DNSh ko‘rinishiga keltiring:

a) $f_1(x,y,z)=x+y+z$; b) $f_2(x,y,z)=(x\to y)\leftrightarrow z$;

d) $f_3(x,y,z,t)=(xy\vee\bar{z})\to t)$; e) $f_4(x,y,z)=x\to y\to z$;

f) $f_5(x,y,z)=(x\vee y)\leftrightarrow z$; h) $f_6(x,y,z)=xz\to y$;

i) $f_7(x,y,z)=(x\leftrightarrow y)\to z$; j) $f_8(x,y,z)=(x\leftrightarrow y)\leftrightarrow z$;

k) $f_9(x,y,z)=(x\to y)\vee z$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Tupikli diz’yunktiv normal shaklga keltirish algoritmini bilasizmi?
2. Keltirilmaydigan qoplamalar deganda nimani tushunasiz?
3. Qisqartililgan, tupikli va minimal DNShlar orasida qanday munosabatlar bor?
4. Hamma tupikli DNShlarni topishning geometrik g‘oyalarga asoslangan algoritmi qanday qo‘llaniladi?
5. Tupikli DNShlar yasashni qanday soddalashtirish mumkin?
6. Yagona tarzda tupikli DNShni hosil qilish algoritmini bilasizmi?
7. Kvayn diz’yunktiv normal shakli deganda nimani tushunasiz?
8. Yu.Juravlev teoremasini bilasizmi?
9. Funksiyani minimallashtirish jarayonining sxemasi qanday ko‘rinishga ega?

X BOB
GRAFLAR NAZARIYASINING ELEMENTLARI

Ushbu bobda graflar haqida qisqa tarixiy ma'lumotlar, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar, graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi, grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi tushunchasi, Eyler va Gamilton graflari, graflarda masofa tushunchasi, minimal masofali yo'l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni, tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar, maksimal oqim haqidagi masala va bu masalalarni hal qilish uchun Ford algoritmi yoritiladi.

10.1. Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari

Graf. Uch. Qirra. Yoy. Yo'nalish. Orgraf. Qo'shni uchlar. Yakkalangan uch. Karrali qirralar. Multigraf. Psevdograf. Nolgraf. To'la, belgilangan va izomorf graflar. Grafning geometrik ifodalanishi. Uchlar, qirralar va yoylar insidentligi.

10.1.1. Graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar. 1736- yilda L. Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg[1] ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko'prikning joylashuvi 1- shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan va qurilishi tartibida 1, 2, 3, 4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o'sha davrda to'rtta A, B, C va D qismlarga bo'lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib yettita ko'prikdan

1- shakl

[1] Kyonigsberg (Königsberg) – bu shahar 1255- yilda asoslangan bo'lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg'oqlarida joylashgan. 1946- yildan boshlab Kaliningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibida.

faqat bir martadan o'tib, yana o'sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonigsberg ko'priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut (hozirgi vaqtda graflar nazariyasida bu marshrut Eyler sikli nomi bilan yuritiladi, ushbu bobning 5- paragrafiga qarang) mavjudligi shartlari ham topildi. Bu natijalar e'lon qilingan tarixiy ilmiy ishning birinchi sahifasi 2- shaklda keltirilgan. L. Eylerning bu maqolasi yuz yildan ko'p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo'yicha yagona ilmiy ish bo'lib keldi.

Denes Kyonig

XIX asrning o'rtalarida graflar nazariyasi bilan bog'liq tadqiqotlar G. Kirxgof[1] va A. Keli[2] ishlarida paydo bo'ldi.

"Graf" iborasi D. Kyonig[3] tomonidan 1936- yilda graflar nazariyasiga bag'ishlangan dastlabki darslikda[4] uchraydi.

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar; yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komp'yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

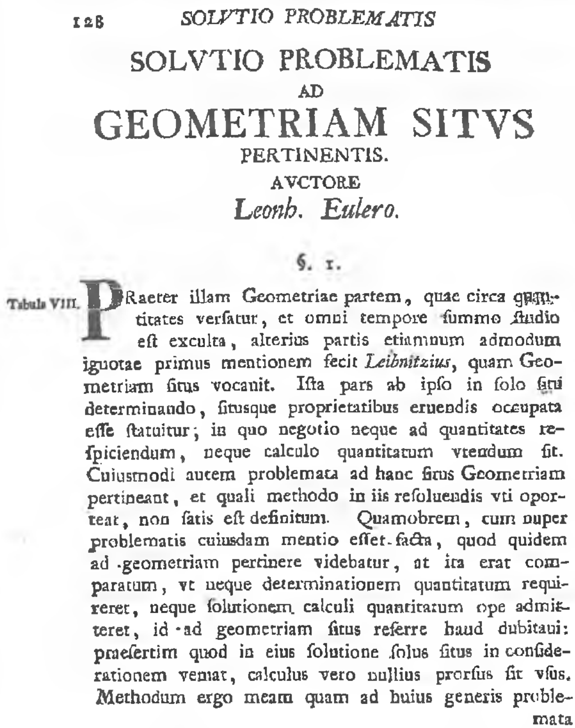
10.1.2. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar. Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf[5] deb shunday $< V, U >$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va U – $< v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko'rinishdagi juftliklar korteji[6] bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

---

[1] Kirxgof (Kirchhoff Gustav Robert, 1824-1887) – olmon faylasufi, fizigi.
[2] Keli yoki Keyli (Cayley Artur, 1821-1895) – ingliz matematigi.
[3] Kyonig (Dénes Kőnig, 1884-1944) – venger matematigi.
[4] Bu darslik olmon tilida yozilgan.
[5] Yunoncha γράφω tirnayman, chizaman, yozaman ma'nosini beradi.
[6] Bundan keyin "juftliklar korteji" iborasi o'rniga, qisqacha kortej iborasini qo'llaymiz.

Bundan buyon grafni belgilashda $<V,U>$ yozuv o‘rniga (V,U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko‘rsatish muhim bo‘lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz.



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſituſque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

2- shakl

$G=(V,U)$ graf berilgan bo‘lsin. V to‘plamning elementlariga G **grafning uchlari**, V to‘plamning o‘ziga esa, **graf uchlari to‘plami** deyiladi.

Graflar nazariyasida “uch” iborasi o‘rniga, ba’zan, **tugun** yoki **nuqta** iborasi ham qo‘llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba’zi iboralari bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta’riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

$G=(V,U)$ grafning ta’rifiga ko‘ra, U bo‘sh kortej bo‘lishi ham mumkin. Agar U bo‘sh bo‘lmasa, u holda bu kortej (a,b) ($a\in V$, $b\in V$) ko‘rinishdagi juftliklardan[1] tashkil topadi, bunda $a=b$ bo‘lishi hamda ixtiyoriy (a,b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin.

$(a,b)\in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibiga bog‘liq holda, ya’ni yo‘nalishning borligi yoki yo‘qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a,b) juftlik uchun uni tashkil

[1] Bu yerda ham juftlikning (kortejning) odatdagi $<a,b>$ yozuvi o‘rniga (a,b) yozuvdan foydalanamiz.

etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya'ni $(a,b)=(b,a)$ bo‘lsa, (a,b) juftlikka **yo‘naltirilmagan (oriyentirlanmagan) qirra** (yoki, qisqacha, **qirra**) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya'ni $(a,b)\neq(b,a)$ bo‘lsa, u holda (a,b) juftlikka **yoy** yoki **yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) qirra** deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo **grafning qirralari korteji**, yo **yoylari korteji**, yoki **qirralari va yoylari korteji** deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirralari (yoylari) uning **elementlari** deb ataladi. $G=(V,U)$ graf elementlarining soni ($|V|+|U|$)ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V|\neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan.

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a,b), yoki ab, yoki $(a;b)$ ko‘rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $\overrightarrow{(a,b)}$ yoki $\overleftarrow{(a,b)}$, qirra uchun $\overleftrightarrow{(a,b)}$, yoy yoki qirra uchun u (ya'ni uchlari ko‘rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko‘rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko‘rsatish tartibi muhim ekanligini ta'kidlaymiz, ya'ni (a,b) va (b,a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a,b) ko‘rinishda ifodalangan bo‘lsa, u holda a uning **boshlang‘ich uchi**, b esa **oxirgi uchi** deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a,b) ko‘rinishda yozilsa, u haqida a **uchdan chiquvchi (boshlanuvchi)** va b **uchga kiruvchi (uchda tugovchi)** yoy deb aytish ham odat tusiga kirgan.

Qirra uchun uning (a,b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol o‘ynamaydi, a va b elementlar **qirraning uchlari** yoki **chetlari** deb ataladi.

Agar grafda yo (a,b) qirra, yo (a,b) yoy, yoki (b,a) yoy topilsa, u holda a **va** b **uchlar tutashtirilgan** deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo‘lsa, u holda ular **qo‘shni uchlar** deb, aks holda esa, **qo‘shni bo‘lmagan uchlar** deb aytiladi.

Grafning ikkita uchi qo‘shni bo‘lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi **qirraga (yoyga) insident**, o‘z navbatida, qirra yoki yoy bu **uchlarga insident** deyiladi.

Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo‘lsa, ular **qo‘shni qirralar** (**yoylar**) deyiladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, qo‘shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

Ba’zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya’ni **uchlar soni** m va **qirralar** (**yoylar**) **soni** n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m,n)-**graf** deb ataydilar.

Agar $G\ \ (V,U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo‘lsa, u holda **yo‘naltirilmagan** (**oriyentirlanmagan**) va faqat yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) qirralardan (ya’ni, yoylardan) tashkil topgan bo‘lsa, u holda u **yo‘naltirilgan** (**oriyentirlangan**) **graf** deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, **orgraf** deb ham ataladi.

Qator hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo‘lgan graflar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday graflar **aralash graflar** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ grafning (orgrafning) U korteji tarkibida $V\times V$ to‘plamdan olingan takrorlanuvchi elementlar bo‘lsa, u holda ular **karrali** yoki **parallel qirralar** (**yoylar**) deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo‘lgan graf **multigraf** deyiladi.

Ikkala chetki (boshlang‘ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy), ya’ni grafning $(a,a)\in U$ elementi **sirtmoq** deb ataladi. Sirtmoq, odatda, yo‘naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo‘lgan graf **psevdograf** deyiladi.

Umumiy holda uchlar to‘plami V va (yoki) qirralar (yoylar, qirra va yoylar) korteji U cheksiz ko‘p elementli bo‘lishi mumkin. Bundan keyin V to‘plam va U kortej faqat chekli bo‘lgan $G\ \ (V,U)$ graflarni qaraymiz. Bunday graflar **chekli graflar** deb ataladi.

Hech qanaqa qirra (yoy) bilan bog‘lanmagan uch **yakkalangan** (**ajralgan, xolis, yalong‘och**) **uch** deb ataladi.

Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya’ni, grafda qirralar va yoylar bo‘lmasa) **nolgraf** yoki **bo‘sh graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan bo‘sh grafni O_m yoki N_m kabi belgilash qabul qilingan.

Istalgan ikkita uchlari qo‘shni bo‘lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf **to‘la graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan to‘la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ bo‘ladi.

Agar orgrafning istalgan ikkita uchini har bir yo‘nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo‘lsa, u holda unga **to‘la orgraf** deb ataladi. Ravshanki, to‘la grafdagi qirralarning har birini ikkita (yo‘nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo‘lgan) yoylarga almashtirilsa, natijada to‘la orgraf hosil bo‘ladi. Shuning uchun, to‘la orgrafdagi yoylar soni oriyentirlanmagan to‘la grafdagi qirralar sonidan ikki baravar ko‘pdir, ya’ni uchlari m ta bo‘lgan to‘la orgrafdagi yoylar soni $2C_m^2 = m(m-1)$ bo‘ladi.

Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo‘yilgan bo‘lsa, u **belgilangan graf** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflarning uchlari to‘plamlari, ya’ni V va V' to‘plamlar orasida uchlarning qo‘shnilik munosabatini saqlaydigan o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, u holda G va G' graflar **izomorf graflar** deb ataladi. Bu ta’rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin: agar $\forall\, x,y \in V$ va ularga mos bo‘lgan $x', y' \in V'$ ($x \leftrightarrow y$, $x' \leftrightarrow y'$) uchun $xy \leftrightarrow x'y'$ ($xy \in U$, $x'y' \in U'$) bo‘lsa, u holda G va G' graflar izomorfdir. Agar izomorf graflardan biri oriyentirlangan bo‘lsa, u holda ikkinchisi ham, albatta, oriyentirlangan bo‘lishi va ulardagi mos yoylarning yo‘nalishlari ham bir-birlariga mos bo‘lishi shart.

Graf uchiga insident qirralar soni shu **uchning lokal darajasi**, yoki, qisqacha, **darajasi**, yoki **valentligi** deb ataladi. Grafdagi a uchning darajasini $\rho(a)$ bilan belgilaymiz.

Sirtmoqqa insident bo‘lgan uchning darajasini aniqlashda shuni e’tiborga olish kerakki, qaralayotgan masalaga bog‘liq holda sirtmoqni bitta qirra deb ham, ikkita qirra deb ham hisoblash mumkin. Ravshanki, ajralgan uchning darajasi nolga teng. Darajasi birga teng uch **chetki** (yoki **osilgan**) **uch** deb ataladi. Chetki (osilgan) uchga insident qirra ham **chetki** (yoki **osilgan**) **qirra** deb ataladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo‘lsa, u holda bunday graf r **darajali regulyar graf** deb ataladi. Uch darajali regulyar graf **kubik** (yoki **uch valentli**) **graf** deb ataladi. O_m graf nol darajali regulyar graf ekanligini, K_m esa ($m-1$) darajali regulyar graf ekanligini ta’kidlaymiz.

Ko‘rinib turibdiki, oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalarining yig‘indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo‘ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra hisobda ikki marta qatnashadi. Shunday qilib, XVIII asrdayoq L. Eyler tomonidan isbotlangan quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

1- lemma ("ko‘rishishlar" haqida). *Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig‘indisi qirralar sonining ikki baravariga teng.*

Agar grafning uchlar to‘plamini o‘zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to‘plamga (bo‘lakka) ajratish mumkin bo‘lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to‘plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to‘plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo‘lsa, u holda bunday graf **ikki bo‘lakli graf (bixromatik** yoki **Kyonig grafi)** deb ataladi. Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, ikki bo‘lakli grafning har bir bo‘lagidagi ixtiyoriy ikkita uchlar qo‘shni bo‘la olmaydi. Biror bo‘lagida faqat bitta uch bo‘lgan to‘la ikki bo‘lakli graf **yulduz** deb ataladi.

Agar ikki bo‘lakli grafning turli bo‘laklariga tegishli istalgan ikkita uchi qo‘shni bo‘lsa, u holda bu graf **to‘la ikki bo‘lakli graf** deb ataladi. To‘la ikki bo‘lakli grafni $K_{m,n}$ bilan belgilaymiz, bu yerda m va n bilan grafning bo‘laklaridagi uchlar sonlari belgilangan. $K_{m,n}=(V,U)$ graf uchun $|V|=m+n$ va $|U|=mn$ bo‘lishi ravshan, bu yerda $|V|$ – $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ – uning qirralari soni.

Grafning ikki bo‘lakli graf bo‘lishi haqidagi ba’zi qo‘shimcha ma’lumotlar (Kyonig teoremasi) ushbu bobning 4- paragrafida keltirilgan.

Ikkidan katta ixtiyoriy natural k son uchun k **bo‘lakli graf** tushunchasini ham kiritish mumkin.

1- misol. O‘zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to‘plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo‘nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib qo‘nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo‘lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko‘ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo‘nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi. ∎

2- misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo'ling[1]. 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $< a,b,c >$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko'ra a, b va c o'zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \leq a \leq 8$, $0 \leq b \leq 5$, $0 \leq c \leq 3$ va $a+b+c=8$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi barcha holatlar (uchliklar) quyidagilardir:

$$< 8,0,0 >,\ < 7,1,0 >,\ < 7,0,1 >,\ < 6,2,0 >,\ < 6,1,1 >,\ < 6,0,2 >,$$
$$< 5,3,0 >,\ < 5,2,1 >,\ < 5,1,2 >,\ < 5,0,3 >,\ < 4,4,0 >,\ < 4,3,1 >,$$
$$< 4,2,2 >,\ < 4,1,3 >,\ < 3,5,0 >,\ < 3,4,1 >,\ < 3,3,2 >,\ < 3,2,3 >,$$
$$< 2,5,1 >,\ < 2,4,2 >,\ < 2,3,3 >,\ < 1,5,2 >,\ < 1,4,3 >,\ < 0,5,3 >.$$

Holatlar to'plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o'tishi mumkin. Ta'kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birortasiga bevosita yoki bilvosita o'tish imkoniyati mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o'tishlari to'plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo'lgan (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o'tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V,U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $< 8,0,0 >$, oxirgi hadi esa $< 4,4,0 >$ bo'lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$$< 8,0,0 >,\ < 5,0,3 >,\ < 5,3,0 >,\ < 2,3,3 >,\ < 2,5,1 >,$$
$$< 7,0,1 >,\ < 7,1,0 >,\ < 4,1,3 >,\ < 4,4,0 >. \ \blacksquare$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Graf tushunchasini qo'llash mumkin bo'lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.

2. To'la graf bilan bog'liq biror misol keltiring.

3. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo'lish haqidagi

---

[1] Bu masalani fransuz shoiri va yozuvchisi Bashe de Mezeriakning (1587-1638) matematikaga bag'ishlangan ishlarida topish mumkin.

boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.

4. Ko‘rishishlar haqidagi lemmaning qo‘llanilishiga doir amaliy misol keltiring.

5. Kubik graf bilan bog‘liq amaliy misollar keltiring.

6. Qadimgi boshqotirma masala: biror idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmli idishlar yordamida teng ikki qismga ajrating[1]. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

7. Qadimgi boshqotirma masala: yo‘lovchi daryodan bo‘ri, qo‘y va bir bog‘ pichanni olib o’tishi kerak, lekin u qayiqda o‘zi bilan faqat bitta narsani olib o‘tish imkoniyatiga ega. Agar sohilda bo‘ri va qo‘y birga qolsa bo‘ri qo‘yni, qo‘y va pichan birga qolganda esa, qo‘y pichanni yeb qo‘yadi. Yo‘lovchi narsalarni daryoning bir sohilidan ikkinchi sohiliga olib o’tishni ularning butunligini saqlagan holda amalga oshirishi kerak. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

8. Barcha belgilangan (m,n)-graflar sonini aniqlang.

9. O‘zaro izomorf bo‘lmagan

a) uchta, b) to‘rtta, d) beshta

uchga ega barcha belgilangan $G=(V,U)$ graflar uchun V to‘plam vU kortejlarni aniqlang.

10. Shaxmat o‘yinida shaxmat donalarining taxtada joylashuvi va o‘yin navbati birgalikda vaziyatni tashkil etadi. Barcha vaziyatlar to‘plamini graf uchlari to‘plami deb qarasak, vaziyatlarning biridan boshqasiga mumkin bo‘lgan o‘tishlar (yurishlar) grafning qirralari yoki yoylariga mos keladi deb hisoblash mumkin. Shaxmat o‘yinining qoidalariga rioya qilgan holda yuqorida bayon qilingan grafning shaxmat o‘yinidagi dastlabki vaziyatni ham o‘z ichiga oluvchi qandaydir oltita vaziyatlariga mos uchlari va bu uchlarni bog‘lovchi qirra va yoylarini aniqlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qanday masalaning qo‘yilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo bo‘lishiga asos bo‘ldi?

2. “Graf” iborasi birinchi bo‘lib kim tomonidan va qachon kiritilgan?

[1] Bu masalani fransuz matematigi va fizigi S. Puasson (1781-1840) ishlarida topish mumkin.

3. Grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini bilasizmi?

4. Grafning abstrakt ta'rifidagi juftlikni tashkil etuvchilar bir-biridan nima bilan farq qiladi?

5. Grafning uchi deganda nimani tushunasiz?

6. Grafning qirrasi nima?

7. Grafning elementlari deganda nimani tushunasiz?

8. Grafdagi yoy bilan qirra bir-biridan nima bilan farq qiladi?

9. Qanday holda uchlar tutashtirilgan deyiladi?

10. Qo'shni uchlarning qo'shni bo'lmagan uchlardan qanday farqi bor?

11. Insidentlik tushunchasini bilasizmi?

12. Yo'naltirilmagan graf va orgraf bir-biridan nima bilan farq qiladi?

13. Karrali yoki parallel qirralar (yoylar) deganda nimani tushunasiz?

14. Multigraf, psevdograf, nolgraf, to'la, aralash va belgilangan graflar bir-biridan nima bilan farq qiladi?

15. Sirtmoq deganda grafning qanday elementi tushuniladi?

16. Grafning qanday elementi yakkalangan (ajralgan, xolis, yalong'och) uch deb ataladi?

17. Izomorf graflar deganda nimani tushunasiz?

18. Grafdagi uchning lokal darajasi (darajasi, valentligi) qanday aniqlanadi?

19. Qanday holda r darajali regulyar graf kubik graf bo'ladi?

20. Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig'indisi bilan uning qirralari soni orasida qanday bog'lanish bor?

21. Qanday holda Kyonig grafi yulduz deb ataladi?

22. To'la ikki bo'lakli grafning uchlari va qirralari sonlarini qanday hisoblab topish mumkin?

23. k bo'lakli graf nima?

10.2. Graflarning berilish usullari

Graf. Orgraf. Uch. Qirra. Yoy. Sirtmoq. Karrali qirralar. Uchning local darajasi. multigraf. Ko'phad. Grafning uchlari qo'shniligi matritsasi. Oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo'shniligi matritsasi. Oriyentirlangan grafning uchlari qo'shniligi matritsasi. Sirtmoqsiz orgraf uchlari qo'shniligi matritsasi. Grafning qirralari qo'shniligi matritsasi. Insidentlik matritsasi.

10.2.1. Grafning geometrik ifodalanishi. Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o'rganish va bu xossalarni amalda qo'llash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tug'dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – **grafning ko'rgazmali tasviriga** ega bo'lamiz. Agar uchlar to'plami va bu uchlarning tutashishlarini ko'rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo'lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog'ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.

Shuni ta'kidlaymizki, ba'zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to'g'ri yoki egri bo'lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo'lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo'nalishga ega bo'lsa (ya'ni u yoy bo'lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo'nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko'rsatiladi.

Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, bunday diagramma **grafning geometrik ifodaianishi** deyiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta'rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqib, abstrakt ta'rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o'zaro izomorf bo'ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

1- teorema. *Har qanday chekli gräfni 3 o'lchovli Evklid[1] fazosida[2] geometrik ifodalash mumkin.*

---

[1] Evklid (Ευκλειδης, eramizdan oldingi III asrda yashagan) – qadimgi yunon (grek) olimi.

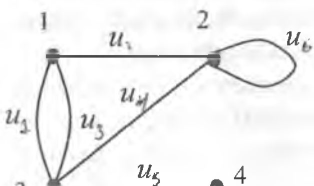
[2] n o'lchovli Evklid fazosida ikkita $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ vektorlar orasidagi masofa (metrika) $d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$ formula bo'yicha aniqlanadi.

Isboti. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta'rifiga binoan uning hech bo'lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo'lsa, u holda uni 3 o'lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko'p bo'lsa, u holda ularni uch o'lchovli Evklid fazosidagi biror to'g'ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to'g'ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o'tkazamiz (graf chekli bo'lgani uchun buning imkoniyati bor). Har bir qirrani (yoyni) unga mos yarim tekislikda, chetlari mos uchlarni ifodalovchi nuqtalarda bo'lgan hamda bu to'g'ri chiziq bilan boshqa umumiy nuqtasi bo'lmagan qandaydir chiziq vositasida ifodalaymiz. Yarim tekisliklarning tuzilishiga ko'ra bu chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega emas. ■

Shuni ham ta'kidlash kerakki, 1- teoremadagi 3 ni 2 ga almashtirib bo'lmaydi, chunki tekislikda qirralarini (yoylarini) ifodalovchi kesishmaydigan (aniqrog'i, chetki nuqtalaridan boshqa umumiy nuqtalari bo'lmagan) chiziqlar yordamida tasvirlash imkoniyati faqat ba'zi graflargagina xos, ya'ni har qanday grafning 2 o'lchovli Evklid fazosida (tekislikda) geometrik ifodalanishi mavjud bo'lavermaydi.

Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

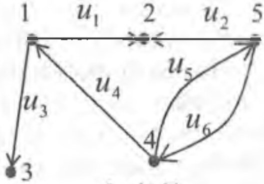
1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo'lib, 4 ta uch va 6 ta qirraga ega.



1- shakl

Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,2)$, $u_2=u_3=(1,3)$, $u_4=(2,3)$, $u_5=(3,4)$, $u_6=(2,2)$. G grafning barcha u_i $(i=\overline{1,6})$ qirralari oriyentirlanmagan (chunki uchlarini tutashtiruvchi chiziqlarda yo'nalish ko'rsatilmagan) bo'lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog'i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo'shni, 1 va 4 uchlar esa qo'shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo'shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo'shni emas. ■

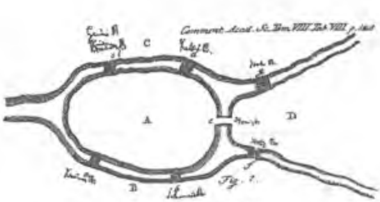
2- misol. Geometrik ifodalanishi 2-shakldagi ko‘rinishda bo‘lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda o‘n bitta element bor: 5 ta uch va 6 ta yoy, ya’ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2),$



2- shakl

$(1,3),(5,2),(4,1),(4,5),(5,4)>$ yoki $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$. Berilgan G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo‘q. Bu grafning $(1,3)$ yoyi uchun 1 boshlang‘ich, 3 uch esa oxirgi uchdir. ■

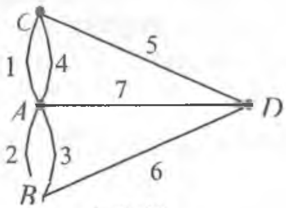
3- misol. XVIII asrda Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaning qo‘yilishi va L. Eyler tomonidan yechilishi graflarning matematik nazariyasi paydo bo‘lishiga xizmat qilganligi yuqorida ta’kidlangan edi.


3- shakl

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko‘priklar joylashuvi 3- shaklda tasvirlangan (bu shakl L. Eylerning birinchi sahifasi ushbu bobning 1- paragrafida keltirilgan ilmiy ishidan olindi).

Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalada quyidagi savolga javob berish so‘raladi: “Shaharning to‘rtta A, B, C va D qismlaridan birida joylashgan uydan chiqib, yettita ko‘priklarning har biridan faqat bir marta o‘tgan holda yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkinmi?”

Bu savolga javob izlash maqsadida ko‘priklardan o‘tishlar muhimligini e’tiborga olgan holda qo‘yilgan masalani tahlil qilish uchun 4- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu grafning uchlari shaharning A, B, C va D qismlariga, qirralari esa ko‘priklarga mos keladi. Qaralayotgan graf oriyentirlanmagan graf bo‘lib, 4 ta uch va 7 ta qirralardan tashkil topgan. Uning qirralari orasida karralilari bor, lekin sirtmoqlar yo‘q.



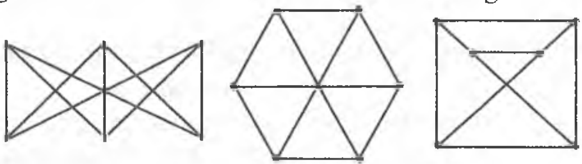
4- shakl

Kyonigsberg shahridagi ko‘priklardan faqat bir marta o‘tgan holda yurish boshlangan joyga qaytib kelish muammosi, 4-shakldagi grafdan foydalangan holda, ushbu bobning 5- paragrafida hal qilinadi. ■

4- misol. 5- shaklda tasvirlangan graflar bir-biriga izomorfdir. ■

5- misol. 6- shaklda tasvirlangan graflarning har biri oltita uch va yettita qirralarga ega bo‘lib, ular izomorf emas. ■

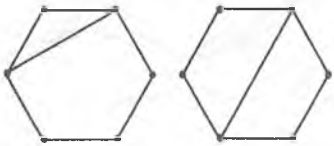
Hammasi bo‘lib beshta **qavariq muntazam ko‘pyoqli** mavjudligi qadimdan ma’lum (Evklid isbotlagan): **tetraedr**, **kub**, **oktaedr**, **dodekaedr** va **ikosaedr**. Bu ko‘pyoqlilarning umumiy nomi ham bor – **Platon**[1] **jismlari**. Shunisi qiziqki, barcha Platon jismlariga mos graflar tekislikda geometrik ifodalanadi. Masalan, tetraedr va kubga mos graflarning geometrik ifodalanishi 7- shaklda tasvirlangan.



5- shakl

Darvoqe, Platon jismlaridan tetraedr, kub va dodekaedr kubik grafga misol bo‘ladi.

Petersen[2] **grafi**[3] deb ataluvchi 8- shaklda tasvirlangan graf ham kubik grafdir.

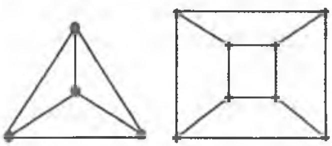


6- shakl

Agar graf tekislikda geometrik ifodalanishga ega bo‘lsa, u holda bunday graf **tekis (yassi) graf** deb ataladi. Bunday graf **tekislikda yotuvchi graf** deb ham atalishi mumkin.

Boshqacha so‘zlar bilan aytganda, tekis grafning barcha uchlari bir tekislikda yotadi hamda barcha qirralari (yoylari) o‘sha tekislikda yotuvchi o‘zaro kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar bo‘lib, ular faqat o‘zlari insident bo‘lgan uchlardagina umumiy nuqtalarga ega.

Platon jismlariga mos barcha graflar tekis graflardir.



7- shakl

Tekis grafga izomorf graf **planar graf** deb ataladi.

Tekis bo‘lmagan grafga ajoyib misol **uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga** mos grafdir. Uchta u_1,

---

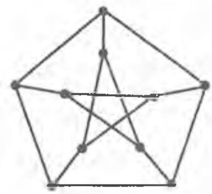
[1] Platon (Πλάτων, eramizdan oldingi 428 yoki 427 yil - eramizdan oldingi 348 yoki 347 yil) – yunon faylasufi.

[2] Petersen (Julius Peter Christian, 1839-1910) – Daniya matematigi.

[3] Bu graf haqidagi dastlabki ma’lumot 1891 yilda e’lon qilingan: J. Petersen, Die Theorie der regulären graphs, Acta Math. **15** (1891) 193-220.

u_2, u_3 uy va uchta q_1, q_2, q_3 quduq bor. Har bir uydan har bir quduqqa ixtiyoriy ikkitasi kesishmaydigan qilib uzluksiz yo‘lakchalar o‘tkazish mumkinmi?

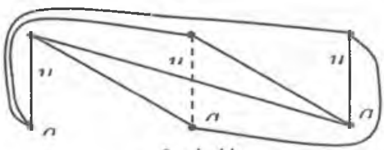
Qog‘ozda masala shartini qanoatlantiradigan grafni chizishga urinishlar muvaffaqiyatsiz tugaydi. Shunday urinishlardan biri 9- shaklda keltirilgan.



8- shakl

Darvoqe, uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf har bir bo‘lagida uchtadan uchi bo‘lgan ikki bo‘lakli to‘la grafga misol bo‘la oladi.

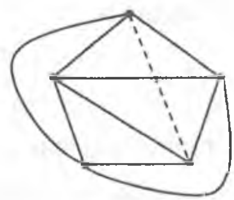
Tekis bo‘lmagan grafga yana bir misol beshta uchga ega bo‘lgan to‘la graf – K_5 grafdir. Bu grafning o‘nta qirrasi borligi ravshan. Bu yerda ham K_5 grafni hech qaysi ikkita qirrasi kesishmay-digan qilib tekislikda chizish muvaffaqiyatsiz tugaydi. 10- shaklda K_5 grafning to‘qqizta qirrasi kesish-maydigan uzluksiz chiziqlar qilib chizilgan, lekin o‘ninchi chiziq esa uzilishlarga ega, unga tekislikda «joy yo‘q»!



9- shakl

10.2.2. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi. Grafni maxsus turdagi ko‘phad yordamida ham berish mumkinligini ta’kidlaymiz. Uchlari to‘plami $V=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ bo‘lgan G graf berilgan bo‘lsin. G grafning yakkalangan uchlari yo‘q deb faraz qilamiz,. Bu grafni m ta $x_1,x_2,...,x_m$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq

$$f(G)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_m^{\sigma_m}\prod_{i<j}(x_j-x_i)^{\alpha_{ij}}$$



10- shakl

ko‘rinishdagi ko‘phad yordamida tasvirlash mumkin, bu yerda ko‘paytma $i<j$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (i,j) juftlar bo‘yicha amalga oshiriladi, x_i o‘zgaruvchi $v_i \in V$ uchga mos keladi, α_{ij} – v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi qirralar soni, σ_i – v_i uchdagi sirtmoqlar soni.

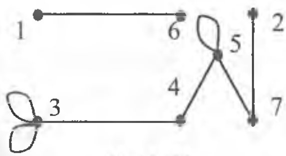
$f(G)$ ko‘phad G grafga izomorflik aniqligida mos kelishini isbotlash mumkin.

6- misol. 11- shaklda tasvirlangan G grafga mos ko‘phadni aniqlaymiz. Berilgan oriyentirlanmagan grafda yettita uch va sakkizta qirra bor. Uning har bir uchiga bitta x_i ($i=1,2,...,7$) o‘zgaruvchini mos q1ilib qo‘yamiz. G grafda karrali qirralari yo‘q, uning uchta qirrasi sirtmoqlardan iborat bo‘lib, ulardan ikkitasi 3 uchga, biri esa 5 uchga insidentdir. Shuning uchun $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\sigma_6=\sigma_7=0$, $\sigma_3=2$, $\sigma_5=1$; $\alpha_{16}=\alpha_{27}=\alpha_{34}=\alpha_{45}=\alpha_{57}=1$, qolgan barcha $\alpha_{ij}=0$ bo‘ladi. Berilgan G grafga mos ko‘phad

$$f(G)=x_3^2x_5(x_6-x_1)(x_7-x_2)(x_4-x_3)(x_5-x_4)(x_7-x_5)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. ■

7- misol. $f(G)=x_2(x_2-x_1)(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)(x_4-x_3)$ ko‘phadga mos keluvchi grafning geometrik tasvirini topamiz. Bu ko‘phadning tarkibiga ko‘ra unga mos keluvchi oriyentirlanmagan grafda 4 ta uch va 6 ta qirra bo‘lib, bu qirralardan ikkitasi karrali ($\alpha_{13}=2$) va bittasi sirtmoq ($\sigma_2=1$) ekanligini ta’kidlaymiz. Berilgan grafning geometrik tasvirlanishlaridan biri 1- shaklda keltirilgan. ■



11- shakl

10.2.3. Qo‘shnilik matritsalari. Endi grafning boshqa bir berilish usuli negizida yotuvchi **graf uchlari qo‘shniligi matritsasi** tushunchasini qarab chiqamiz.

$G=(V,U)$ – uchlari soni m ga teng bo‘lgan belgilangan, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf bo‘lsin.

Elementlari

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & agar\ \ i\ va\ j\ uchlar\ qo'shni\ bo'lsa,\\ 0, & aks\ holda\end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ ($i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,m$) matritsani grafning uchlari qo‘shniligi matritsasi deb ataymiz.

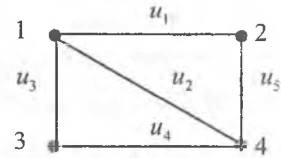
Bu ta’rifdan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan graf uchlari qo‘shniligi matritsasining bosh diagonalida faqat nollar bo‘lishi, satrlaridagi birlar soni esa mos uchlarning darajalariga tengligi kelib chiqadi.

8- misol. 12- shaklda tasvirlangan grafning uchlari qo‘shniligi matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ■

Uchlari soni m ga teng bo‘lgan belgilangan **oriyentirlangan** $G=(V,U)$ **grafning uchlari qo‘shniligi** $m\times m$**-matritsasi** deb elementlari



12-

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ agar } (i,j)\in U \text{ bo'lsa,}\\0, \text{ aks holda,}\end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,m)$ matritsaga aytiladi.

9- misol. 2- shaklda tasvirlangan orgrafning uchlari qo‘shniligi matritsasi quyidagicha bo‘ladi:
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}. ■$$

Endi G uchlari $1,2,...,m$ bo‘lgan belgilangan oriyentirlanmagan multigraf bo‘lsin. a_{ij} elementlari G grafning i va j uchlarini tutashtiruvchi qirralar soniga teng bo‘lgan $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ matritsa **oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo‘shniligi matritsasi** deb ataladi.

10- misol. 1- shaklda tasvirlangan oriyentirlanmagan multigraf uchlari qo‘shniligi matritsasi quyidagicha bo‘ladi:

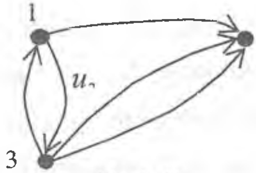
$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&1&1&0\\2&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}. ■$$

Karrali yoylari bo‘lgan **sirtmoqsiz orgraf uchlari qo‘shniligi matritsasi** tushunchasini ham yuqoridagiga o‘xshash ta’riflash mumkin.

2- teorema. *Graflar faqat va faqat uchlari qo‘shniligi matritsalari bir-birlaridan satrlarining o‘rinlarini va ustunlarining o‘rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo‘lsagina izomorf bo‘ladi.*

Isboti. Abstrakt grafga, uning uchlarini belgilashga (raqamlashga) bog‘liq ravishda, turlicha qo‘shnilik matritsalari mos kelishi tabiiydir. Bu matritsalarni solishtirish maqsadida har birining m ta uchlari bo‘lgan ixtiyoriy ikkita belgilangan, o‘zaro izomorf G va H graflarni qaraymiz. G va H graflar uchlariga mos qo‘yilgan belgilar turlicha va ulardan biri boshqasidan uchlarning qo‘shniligini saqlovchi qandaydir f qoidani qo‘llab hosil qilingan bo‘lsin, ya’ni H grafdagi $f(u_i)$ va $f(u_j)$ uchlar faqat va faqat G grafning u_i va u_j uchlari qo‘shni bo‘lsagina qo‘shni bo‘lsin. G grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ bilan H grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini esa $B=(b_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ bilan belgilasak, $b_{f(i)f(j)}=a_{ij}$ o‘rinli bo‘ladi.■

Shunday qilib, manfiymas butun sonlardan tashkil topgan va graf uchun uchlari qo‘shniligi matritsasi bo‘lgan kvadrat matritsa bilan graf orasida bir qiymatli moslik (izomorflik aniqligida) bor degan xulosa va, bundan, graflar nazariyasi bo‘yicha izlanishlar maxsus shartlarni qanoatlantiruvchi matritsalarni tadqiq qilishga keltirilishi mumkinligi kelib chiqadi.



13- shakl

$u_1, u_2, ..., u_n$ $(n \geq 1)$ qirralarga ega yakkalangan uchlari, sirtmoq va karrali qirralari bo‘lmagan graf uchun elementlari

$$c_{ij}=\begin{cases}1, \text{agar } u_i \text{ va } u_j \text{ qirralar umumiy uchga ega bo'lsa,}\\ 0, \text{agar } u_i=u_j \text{ bo'lsa yoki ularning umumiy uchi bo'lmasa,}\end{cases}$$

quyidagicha aniqlangan: $C=(c_{ij})$ $(i=1,2,...,n,\ \ j=1,2,...,n)$. $n\times n$ - matritsa **grafning qirralari qo‘shniligi matritsasi** deb ataladi.

11- misol. 12- shaklda tasvirlangan grafda 5ta qirra bo‘lib, uning qirralari qo‘shniligi matritsasi

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga egadir. ■

Ravshanki, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf qirralari qo‘shniligi matritsasi bosh diagonalga nisbatan simmetrik kvadrat matritsadir va uning bosh diagonali nollardan iborat.

10.2.4. Insidentlik matritsalari. Uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ ($n\geq 1$) bo‘lgan belgilangan graf berilgan bo‘lsin. Bu grafning uchlariga satrlari, qirralariga esa ustunlari mos keluvchi va elementlari

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga insident bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga intsident bo'lmasa,} \end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,n)$ matritsa grafning **insidentlik matritsasi** deb ataladi.

12- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo‘ladi:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. ■$$

Endi uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ $(n\geq 1)$ bo‘lgan belgilangan sirtmoqsiz orgrafni qaraymiz. Elementlari

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \textit{ agar i uch } u_j \textit{ yoyning boshlang'ich uchi bo'lsa,} \\ -1, \textit{ agar i uch } u_j \textit{ yoyning oxirgi uchi bo'lsa,} \\ 0, \textit{ agar i uch va } u_j \textit{ yoy intsident bo'lmasa,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n)$ matritsaga grafning **insidentlik matritsasi** deb ataladi.

13- misol. 13- shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

3- teorema. *Graflar (orgraflar) faqat va faqat insidentlik matritsalari bir-birlaridan satrlarining o'rinlarini va ustunlarining o'rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo'lsagina izomorf bo'ladi.*

Isboti 2- teoremaning isbotiga o'xshash bajariladi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Grafning abstrakt ta'rifi yordamida biror grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog'ozda tasvirlang.

2. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.

3. Har qanday chekli grafni 3 o'lchovli Evklid fazosida qirralariga to'g'ri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligini isbotlang.

4. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yettita ko'prikdan (3- shakl) tashqari shaharning B va C qismlarini bevosita tutashtiruvchi sakkizinchi ko'prik ham bor deb hisoblab, bunday qo'shimcha shartga ega Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.

5. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo'lib, o'zaro izomorf bo'lmagan graflarga misollar keltiring.

6. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.

7. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikkita qismga bo'lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish maqsadida ushbu bobning 1- paragrafida tuzilgan grafni geometrik ifodalang.

8. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo'lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko'phadlarni, uchlari qo'shniligi, qirralari qo'shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.

9. 14- shaklda tasvirlangan G_1 va G_2 graflarning izomorfligini isbotlang.

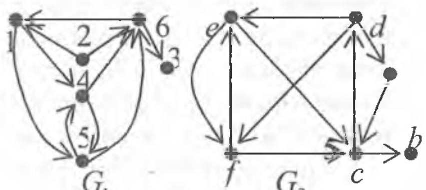
10. Uchlari qo'shniligi matritsalari quyida berilgan graflarni geometrik ifodalang, ularga mos maxsus ko'phad, qirralar qo'shniligi va insidentlik matritsalarni yozing:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. To'la grafga mos keluvchi uchlar qo'shniligi matritsasini tahlil qiling.

12. Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaga mos grafning uchlari qo'shniligi matritsasini tuzing.

13. K_3, K_4 va $K_{3,3}$ graflarga mos uchlari qo'shniligi, qirralari qo'shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.



14- shakl

14. Siz yashayotgan aholi punkti yoki uning bir qismida joylashgan yo'llar va chorrahalar bilan bog'liq biror masalani graflar yordamida hal qiling.

15. Uchlari soni yettidan oshmagan barcha kubik graflarning geometrik ifodalanishi yordamida ularga mos uchlar qo'shniligi matritsalarni tuzing.

16. To'qqizta uchga ega bo'lgan barcha ikki, uch va to'rt bo'lakli to'la graflarga mos uchlar qo'shniligi matritsalarni tuzing.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Grafning ko'rgazmali tasviri deganda nimani tushunasiz?

2. Nima uchun izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin?

3. Qanday grafni 3 o'lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkin?

4. Har qanday chekli grafni 2 o‘lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkinmi?

5. Petersen grafi qanday geometrik ifodalanishga ega?

6. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishini bilasizmi?

7. Grafning uchlari qo‘shniligi matritsasi qanday tuziladi?

8. Grafning qirralari qo‘shniligi matritsasi qanday tuziladi?

9. Grafning insidentlik matritsasi deganda nimani tushunasiz?

10. Graflar izomorfligining qanday zarur va yetarli shartlarini bilasiz?

11. O‘zaro izomorf bo‘lmagan sakkizta uchga ega barcha kubik graflarning geometrik ifodalanishini aniqlang.

10.3. Graflar ustida amallar

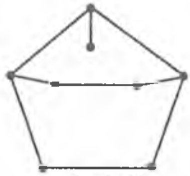
Graf. Uch. Qirra. Graflarni birlashtirish. Grafdan uchni, qirrani, yoyni olib tashlash. Qism graf. To‘ldiruvchi graf. Grafga uchni, qirrani, yoyni qo‘shish. Qirrani ikkiga bo‘lish. Izomorf va gomeomorf graflar. Bo‘linish grafi. Graflarning birlashmasi. Diz'yunkt birlashma. Graflarning birikmasi. Graflarning ko‘paytmasi. n o‘lchovli kub.

10.3.1. Graflar ustida sodda amallar. Graflar ustida turli amallar bajarish mumkin, masalan, graflarni birlashtirish, biriktirish, ko‘paytirish, grafni qismlarga ajratish va hokazo.

Eng sodda amallardan biri sifatida grafdan **uchni olib tashlash** amalini keltirsa bo‘ladi. Bu amalni qo‘llash berilgan grafning uchlari to‘plamidan birorta element yo‘qotishni (olib tashlashni) anglatadi. Natijada uchlari soni bittaga kamaygan yangi graf hosil bo‘ladi. Albatta, bu amalni uchlari soni ikkitadan kam bo‘lmagan graflar uchun qo‘llash mumkin bo‘lib, uni bajarish jarayonida olib tashlanayotgan uch bilan birgalikda shu uchga insident bo‘lgan barcha qirralar (yoylar) ham olib tashlanadi.

Eng sodda amallar qatoriga grafdan **qirrani (yoyni) olib tashlash** amalini ham kiritish mumkin. Bu amalga ko‘ra berilgan grafning qirralari (yoylari) to‘plamidan birorta element yo‘qotiladi (olib tashlanadi). Berilgan grafdan qirrani (yoyni) olib tashlayotganda shu qirraga (yoyga) insident uchlarni grafda qoldirish ham yo‘qotish ham mumkin. Bu yerda vaziyatga qarab ish yuritiladi.

$G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflar berilgan bo‘lsin. Agar $V\subseteq V'$ va G grafning barcha qirralari (yoylari) G' grafning ham qirralari (yoylari), ya’ni $U\subseteq U'$ bo‘lsa, u holda G graf G' grafning **qism grafi** deb ataladi.



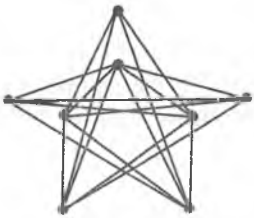
1- shakl

1- misol. 1- shaklda Petersen grafining (ushbu bobning 2-paragrafidagi 8- shaklga qarang) qism graflaridan biri tasvirlangan. ■

Agar G graf karrali qirralarga ega bo'lmasa, u holda uchlari G grafning barcha uchlaridan iborat bo'lgan shunday yagona $\overline{G}$ graf mavjudki, $\overline{G}$ grafdagi barcha juft uchlar faqat va faqat G grafda qo'shni bo'lmagandagina qo'shnidir. Bunday $\overline{G}$ graf berilgan G grafning **to'ldiruvchi grafi** deb ataladi.

Berilgan graf uchun to'ldiruvchi grafni qurish jarayonini ham graflar ustida bajariladigan amallar qatoriga kiritish mumkin. G graf uchun **to'ldiruvchi grafni qurish** amalini qo'llash natijasida $\overline{G}$ graf hosil bo'ladi. Isbotlash mumkinki, $\overline{\overline{G}} = G$ munosabat o'rinlidir.

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan graf 1- shaklda ifodalangan graf uchun to'ldiruvchi grafdir.



2- shakl

Graflar ustida shunday amallarni bajarish mumkinki, ular elementlari soni berilgan grafdagidan ko'proq bo'lgan boshqa graflarning hosil bo'lishiga olib keladi. Bunday amallar qatoriga **uchni qo'shish amali** yoki **qirrani (yoyni) qo'shish amalini** kiritish mumkin.

Grafga yangi uchni qo'shish turlicha usul bilan amalga oshirilishi mumkin. Masalan, yangi v uchni berilgan grafga qo'shish shu grafning v_1 va v_2 uchlariga insident bo'lgan qandaydir u qirrasiga qo'shish orqali quyidagicha ikki bosqichda bajarilishi mumkin:

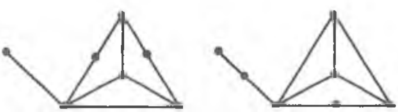
1) u qirra berilgan grafdan olib tashlanadi;

2) hosil bo'lgan grafga ikkita yangi qirralar: v va v_1 uchlarga insident u_1 qirra hamda v va v_2 uchlarga insident u_2 qirra qo'shiladi.

Bu jarayon grafda **qirraga darajasi 2 bo'lgan yangi uchni qo'shish (kiritish)** yoki **qirrani ikkiga bo'lish amali** deb ataladi.

Agar G graf G' grafdan qirrani ikkiga bo'lish amalini chekli marta ketma-ket qo'llash vositasida hosil qilingan bo'lsa, u holda **G graf G' grafning bo'linish grafi** deb ataladi.

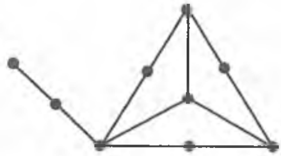
Bo'linish graflari izomorf bo'lgan graflar **gomeomorf graflar** deb ataladi.



3- shakl

3- shaklda tasvirlangan graflar izomorf emas, lekin ular gomeomorf, chunki bu graflarning har biri 4-

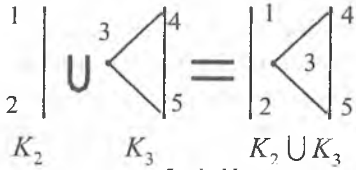
shaklda tasvirlangan bo‘linish grafiga ega.



4- shakl

10.3.2. Graflarni birlashtirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. Uchlari to‘plami $V=V_1\bigcup V_2$ va qirralari (yoylari) korteji $U=U_1\bigcup U_2$ kabi aniqlangan[1] $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birlashmasi** (**uyushmasi**) deb ataladi va $G=G_1\bigcup G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.

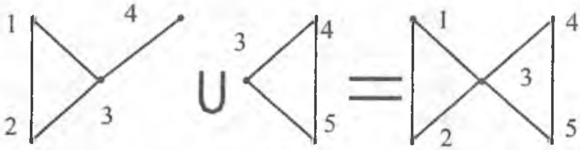
3- misol. 5- shaklda uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birlashmasi amali tasvirlangan. ■



5- shakl

4- misol. Uchlari to‘plamlari kesishadigan graflarning birlashmasi amali 6- shaklda tasvirlangan. ■

Agar birlashtirilayotgan graflarning uchlari to‘plamlari kesishmasa, u holda bu graflarning birlashmasi **diz’yunkt birlashma** deb ataladi.



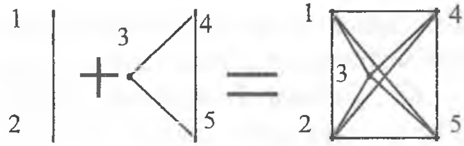
6- shakl

Masalan, 5- shaklda tasvirlangan birlashma diz’yunkt, 6- shakldagi birlashma esa – diz’yunkt emas.

10.3.3. Graflarni biriktirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. G_1 va G_2 graflar birlashtirilishi hamda G_1 grafning har bir uchi G_2 grafning har bir uchi bilan qirra vositasida tutashtirilishi natijasida hosil bo‘lgan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birikmasi (tutashmasi)** deb ataladi va $G=G_1+G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.

[1] Bu yerda birlashma “$\bigcup$” amali V ning to‘plam, U ning esa kortej ekanligini e’tiborga olgan holda amalga oshiriladi.

5- m i s o l. Uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf (ushbu bobning 2- paragrafidagi 9- shaklga qarang) uchlari to'plamlari kesishmaydigan ikkita (O_3) nolgraflarning birikmasidir. ■



7- shakl

6- m i s o l. 7- shaklda uchlari to'plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birikmasi amali tasvirlangan. ■

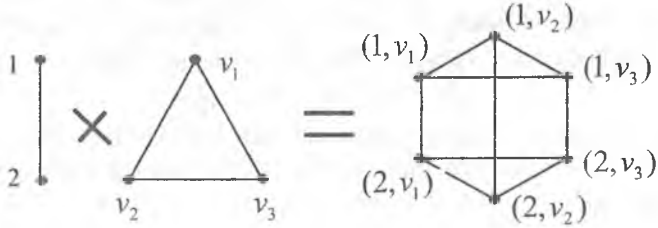
Agar uchlari to'plamlari kesishmasi bo'sh bo'lmagan graflarni biriktirish zarur bo'lsa, u holda hal qilinayotgan masala xossalarini e'tiborga olib ish ko'rish kerakligini ta'kidlaymiz.

10.3.4. Graflarni ko'paytirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. Uchlari to'plami $V=V_1\times V_2$ bo'lgan $G=(V,U)$ grafning qirralari (yoylari) kortejini quyidagicha aniqlaymiz: agar $v_1'=v_1''$ va $(v_2',v_2'')\in U_2$ yoki $v_2'=v_2''$ va $(v_1',v_1'')\in U_1$ bo'lsa, u holda $(v',v'')\in U$ bo'ladi, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1$, $v_2',v_2''\in V_2$, $v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$. Shunday usul bilan qurilgan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning ko'paytmasi** deb ataladi va $G=G_1\times G_2$ kabi belgilanadi.

Graflarning ko'paytmasi ta'rifiga asosan berilgan $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflarning ko'paytmasi hisoblangan G grafdagi:

– uchlar (v_1,v_2) yoki (v_2,v_1) ko'rinishdagi juftliklardan iboratdir, bu yerda $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$;

– $v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$ uchlar faqat va faqat shu holda qo'shni bo'ladilarki, bu uchlarni (juftliklarni) tashkil qiluvchi



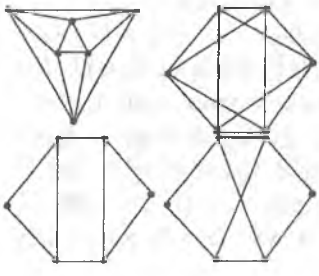
8- shakl

elementlarning biri unga mos element bilan ustma-ust tushgan holda boshqa elementlar o'z grafida qo'shni bo'lishsa, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1$, $v_2',v_2''\in V_2$;

– $|V_1|=m_1$, $|V_2|=m_2$, $|U_1|=n_1$ va $|U_2|=n_2$ munosabatlardan $|V|=m_1m_2$ va $|U|=m_1n_2+m_2n_1$ bo‘lishi kelib chiqadi.

7- misol. 8- shaklda uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning ko‘paytmasi amali tasvirlangan. ■

I bobning 4- paragrafida ta’kidlanganidek, Dekart ko‘paytmalar bilan bog‘liq tuzilmalar ustida bajariladigan amallar boshqalaridan o‘ziga xosligi bilan ajralib turadi. Bu o‘ziga xoslik graflarni ko‘paytirish amalida namoyon bo‘ladi. Aniqrog‘i, graflar ko‘patmasida qatnashgan birorta grafning qirralari korteji bo‘sh bo‘lsada, ko‘paytirish amalini qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan grafning qirralari korteji bo‘sh bo‘lmasligi ham mumkin. Haqiqatdan ham, yuqorida keltirilgan graflarning ko‘paytmasi ta’rifidan kelib chiqadiki, agar $G=(V,U)$ graf $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflarning ko‘paytmasi, ya’ni, $G=G_1\times G_2$ bo‘lsa, u holda $V=V_1\times V_2$ bo‘ladi va U kortej elementlari bilan $(V_1\times U_2)\bigcup(U_1\times V_2)$ birlashma elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Shuning uchun, agar, masalan, $U_1=\varnothing$, $U_2\neq\varnothing$ bo‘lsa, u holda $(V_1\times U_2)\bigcup(U_1\times V_2)=V_1\times U_2\neq\varnothing$ bo‘ladi, chunki grafning tarifiga ko‘ra $V_1\neq\varnothing$. Demak, $U\neq\varnothing$, ya’ni G_1 bo‘sh graf bo‘lsada, $G=G_1\times G_2$ bo‘sh bo‘lmagan grafdir.



9- shakl

Graflarni ko‘paytirish amalini takror qo‘llash usuli bilan graflar nazariyasining muhim sinfini tashkil etuvchi n o‘lchovli kublarni aniqlash mumkin. n **o‘lchovli kub** (Q_n) uchlari soni ikkiga teng bo‘lgan to‘la graf K_2 yordamida quyidagi rekurrent formula bilan aniqlanadi:

$$Q_1=K_2,\ Q_n=K_2\times Q_{n-1}.$$

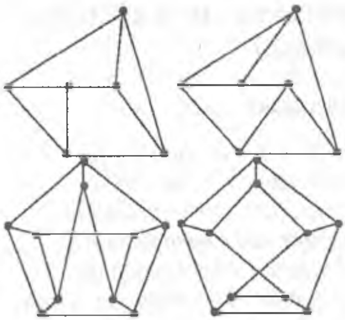
Yuqorida graflar ustidagi ba’zi amallar haqida qisqacha ma’lumot berildi. Shuni ta’kidlash lozimki, graflar ustida bundan boshqa bir qator amallar ham bor.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 9- va 10- shakllarda tasvirlangan sakkizta graflar orasidan o‘zaro izomorf bo‘lgan graflar juftlarini aniqlang.

2. 9- shaklda tasvirlan to'rtta grafning har biri uchun uchni olib tashlash va qirrani olib tashlash amallarini qo'llang.

3. 10- shaklda tasvirlangan to'rtta grafning har biri uchun uchtadan qism graf va to'ldiruvchi grafni tuzing.



10- shakl

4. Gomeomorf va gomeomorf bo'lmagan graflarga misollar keltiring.

5. K_3 va K_4 graflarning birlashmasini toping (bunda graflar uchlari to'plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).

6. Ikkita K_3 grafning birikmasini toping (bunda graflar uchlari to'plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).

7. Graflarni ko'paytirish amalini qo'llab, $O_3 \times O_4$, $O_3 \times K_3$, $O_4 \times K_3$ va $K_3 \times K_3$ graflarni toping.

8. $K_{1,2}$ va $K_{2,3}$ graflarning geometrik ifodalanishidan foydalanib ular ustida birlashma, birikma va ko'paytma amallarini bajaring (bunda graflar uchlari to'plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Grafdan uchni olib tashlash amali qanday bajariladi?

2. Grafdan qirrani (yoyni) olib tashlash amali qanday bajariladi?

3. Qism graf deganda nima tushuniladi?

4. To'ldiruvchi graf deb qanday grafga aytiladi?

5. Grafga yangi uchni qo'shish amalini bajarishning qanday usullarini bilasiz?

6. Berilgan grafning bo'linish grafi qanday tuziladi?

7. Qanday graflar gomeomorf graflar deb ataladi?

8. Berilgan graflarning birlashmasi (uyushmasi) qanday hosil qilinadi?

9. Berilgan graflarning diz'yunkt birlashmasi natijasida hosil bo'lgan graf uchlarining soni haqida nima deyish mumkin?

10. Graflarning birlashmasi (uyushmasi) amali bilan ularning birikmasi (tutashmasi) amali orasida qanday o'xshashlik va farqlar bor?

11. Berilgan ikkita grafning ko‘paytmasi qanday hosil qilinadi?

12. Berilgan graf bilan nol graf ko‘paytmasi haqida nima deyish mumkin?

13. Graflar ko‘patmasida qatnashgan birorta grafning qirralari korteji bo‘sh bo‘lsada, ko‘paytirish amalini qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan grafning qirralari korteji bo‘sh bo‘lmasligi mumkinmi?

10.4.Marshrutlar va zanjirlar

Graf. Uch. Qirra. Marshrut. Boshlang‘ich, oxirgi, ichki, oraliq uch. Ikki tomonlama cheksiz, bir tomonlama cheksiz, notrivial va nol marshrut. Marshrutning uzunligi. Zanjir. Oddiy, yopiq zanjir. Sikl. Oriyentirlangan marshrut. Yo‘l. Kontur. Bog‘langan uchlar. Uchlarni bog‘lovchi marshrut. Bog‘lamli graf. Bog‘lamlilik komponentlari. Ekvivalentlik munosabati. Diz’yunktiv birlashma. Ajratuvchi qirralar. Kesim. Ko‘prik. Ko‘ndalangiga izlash.

10.4.1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar. Uchlari to‘plami $V=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ va qirralar korteji $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan $G=(V,U)$ graf berilgan bo‘lsin. Bu G grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo‘shni qirralari umumiy chetki uchga ega

$$(...,v_{i_1},u_{j_1},v_{i_2},u_{j_2},v_{i_3},...)$$

ko‘rinishidagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi **marshrut** deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi $(...,v_{i_1},v_{i_2},...)$ yoki qirralari ketma-ketligi $(...,u_{j_1},u_{j_2},...)$ ko‘rinishida ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo‘lmasa, bu uchni marshrutning **boshlang‘ich uchi** deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo‘lmaganda esa, uni marshrutning **oxirgi uchi** deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang‘ich uchi v_p va oxirgi uchi v_q bo‘lsa, u holda uni v_p **uchdan** v_q **uchga yo‘nalgan marshrut** yoki **chetlari** v_p **va** v_q **bo‘lgan marshrut** deb ataladi.

Marshrutdagi ikkita qoshni qirralarga tegishli uch **ichki uch** yoki **oraliq uch** deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo‘lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o‘zida, uning boshlang‘ich va (yoki) oxirgi uchi bo‘lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang‘ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo‘lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

– boshlang‘ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo‘lmasligi mumkin (bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deb ataladi);

– boshlangich uchga ega bo‘lib, oxirgi uchga ega bo‘lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo‘lib, boshlangich uchga ega bo‘lmasligi mumkin (**bir tomonlama cheksiz marshrut**);

– yagona qirradan iborat bo‘lishi mumkin (**notrivial marshrut**);

– birorta ham qirraga ega bo‘lmasligi mumkin (**nol marshrut** yoki **trivial marshrut**).

Marshrutning uzunligi deb undagi qirralar soniga aytiladi.

Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga **zanjir** deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo‘lsa, u holda uni **oddiy zanjir** deb ataydilar.

Berilgan $(v_1, v_2, ..., v_s)$ zanjir yoki oddiy zanjir uchun $v_1 = v_s$ bo‘lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Hech bo‘lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir **sikl** deb ataladi.

Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir.

Grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

1- misol. Ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- shaklda tasvirlangan graf uchun $(3, u_4, 2, u_1, 1, u_1, 2, u_6, 2, u_4, 3, u_5, 4)$ ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo‘nalgan marshrutdir, bunda 3 – boshlang‘ich uch, 4 – oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6 ga teng bo‘lib, u zanjir bo‘la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda.

Yana o‘sha graf uchun $(3,2,1,3)$ zanjirning oxirgi bo‘g‘ini sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysisi olinishiga bog‘liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir. ■

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo‘nalishini (oriyentatsiyasini) inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi **oriyentirlangan marshrut** deb ataladi.

Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o‘xshash **yo‘l** (yoki **oriyentirlangan zanjir**) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang‘ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir **kontur** deb ataladi.

2- misol. Ushbu bobning 2- paragrafidagi 2- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Uning uch va qirralaridan tuzilgan

$$(3,u_3,1,u_4,4,u_5,5,u_2,2,u_1,1)$$

ketma-ketlik oriyentirlanmagan marshrut va zanjirdir, lekin u oddiy zanjir bo‘la olmaydi. Bu ketma-ketlik oriyentirlangan marshrut ham bo‘la olmaydi, chunki unda marshrut yo‘nalishiga teskari yo‘nalishga ega yoylar bor (u_3,u_4,u_1).

Qaralayotgan graf uchun (u_6,u_5,u_2) ketma-ketlik oriyentirlangan marshrutni tashkil etadi. Bu marshrut yo‘ldir, lekin u kontur emas. Berilgan grafda faqat bitta kontur bo‘lib, bu konturni $(4,u_5,5,u_6,4)$ yoki $(5,u_6,4,u_5,5)$ ko‘rinishda ifodalash mumkin. ■

1- teorema. *Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo‘lmasa, u holda bu graf siklga ega.*

Isboti. Agar grafda sirtmoqlar yoki karrali qirralar bo‘lsa, teoremaning tasdig‘i to‘g‘riligi ravshandir. Shuning uchun teorema tasdig‘ini graf sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $v\in V$ berilgan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan $G=(V,U)$ grafning ixtiyoriy uchi bo‘lsin. Qaralayotgan v uchga qo‘shni v_1 uchni va bu uchga v dan farqli boshqa qo‘shni v_2 uchni, v_2 uchga esa v_1 dan farqli boshqa qo‘shni v_3 uchni, va hokaza, v_i uchga v_{i-1} dan farqli boshqa qo‘shni v_{i+1} uchni, va hokaza, tanlab,

$$((v,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),...,(v_{i-1},v_i),(v_i,v_{i+1}),...)$$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartlariga ko‘ra yuqoridagi jarayonni amalga oshirish va talab etilgan xossaga ega v_{i+1} uchni topish mumkinligini ta’kidlaymiz.

Grafning uchlari to‘plami V chekli to‘plam bo‘lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so‘ng albatta oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majbur bo‘lamiz. Agar v_k uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan dastlabki uch bo‘lsa, ketma-ketlikka qirralar qo‘shish jarayonini to‘xtatamiz, chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining v_k uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan sikldir. ■

10.4.2. Grafning bog'lamliligi tushunchasi. Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari a va b uchlardan iborat marshrut topilsa, bu a va b uchlar **bog'langan** deb, marshrutning o'zi esa a va b **uchlarni bog'lovchi marshrut** deb ataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog'lovchi marshrut biror a_i uchdan bir necha marta o'tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o'rniga marshrutda faqat a_i uch qoldiriladi) yana o'sha uchlarni bog'lovchi oddiy zanjir ko'rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog'langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo'glangan bo'ladi, degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog'langan graf **bog'lamli graf** deb ataladi.

Agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu ikkita uch **ekvivalent (bog'langan)** deyiladi. Bunday uchlar to'plami grafda **ekvivalentlik munosabati** bilan aniqlangan deb hisoblanadi. Uchlar to'plami bo'yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni **bog'lamlilik komponentlar** (qisqacha, **komponentlari**) deb ataluvchi bog'lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf bog'lamlilik komponentalariga bo'laklandi (ajratildi) deb aytish mumkin. Isbotlash mumkinki, har qanday graf o'zining bog'lamlilik komponentlarining diz'yunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi mumkin, bunda grafning bog'lamlilik komponentlariga bo'laklanishi bir qiymatli aniqlanadi.

Keyingi ma'lumotlarni bayon etish uchun **yoq** tushunchasi zarur bo'ladi. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi grafni qaraymiz. Bu grafga tegishli bo'lmagan (ya'ni grafning hech qaysi uchi bilan ustma-ust tushmaydigan va uning hech qaysi qirrasida yotmaydigan) biror A nuqtani hech qaysi nuqtasi grafga tegishli bo'lmagan uzluksiz chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lgan barcha nuqtalar to'plami grafning A nuqtani o'zida saqlovchi **yog'i** deb ataladi.

Yoq tushunchasiga berilgan ta'rifga ko'ra yoq grafning geometrik ifodalanishi yordamida tekislikning "qirqib" olinadigan qismidan iboratdir. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi ixtiyoriy grafning hech bo'lmaganda bitta yog'i bo'lishi va uning bitta yog'i chegaraga ega emasligi (cheksizligi) o'z-o'zidan ravshandir.

2- teorema (Eyler. 1752). *Tekis va bog'lamli* $G=(V,U)$ *graf uchun* $m+r=2+n$ *tenglik o'rinlidir, bu yerda* $m=|V|$, $n=|U|$, r *– yoqlar soni.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini grafdagi qirralar soni n bo‘yicha qo‘llaymiz. Induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig‘iga ko‘ra $m+r=2$ bo‘lishi kerak. Haqiqatdan ham, G tekis va bog‘lamli graf bo‘lgani uchun, u yagona uchdan tashkil topadi va bu uch yagona (cheksiz) yoqda yotadi, ya’ni $m=1$ va $r=1$. Demak, bu holda teoremaning tasdig‘i to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish: teoremaning tasdig‘i $n=k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilib, uning $n=k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. Farazimizga ko‘ra $m+r=2+k$ tenglik o‘rinlidir. $k$ta qirraga ega G tekis va bog‘lamli grafga $(k+1)$- qirrani (uni e bilan belgilaymiz) shunday qo‘shish kerakki, bunda e qirra G graf joylashgan tekislikda yotsin va hosil bo‘lgan graf ham bog‘lamli bo‘lsin. Bu amalni bajarganda quyidagi uchta holdan biri ro‘y beradi:

1) qo‘shilayotgan qirra sirtmoqdir – bu holda e qirra, albatta, G grafdagi uchlardan biriga insident bo‘lib, yoqlardan birida yotadi va bu yoqni ikkiga (sirtmoq yotgan yoqning sirtmoq chizig‘i bilan chegaralangan ichki va tashqi qismlariga) ajratadi, ya’ni uchlar soni o‘zgarmaydi, yoqlar soni esa birga oshadi: $m+r+1=2+k+1$;

2) qo‘shilayotgan qirra G grafda bor bo‘lgan ikkita uchlarni tutashtiradi – bu holda ham grafning biror (e qirra yotgan) yog‘i ikkiga ajraladi, uchlari soni esa o‘zgarmaydi: $m+r+1=2+k+1$;

3) qo‘shilayotgan qirra sirtmoq emas va u G grafdagi uchlardan faqat bittasiga insidentdir – bu holda grafning biror yog‘ida e qirraga insident bo‘lgan bitta boshqa uch yasaladi (grafning uchlari soni bittaga oshadi) va e qirra joylashgan yoq yaxlitlikni saqlagan holda e qirrani o‘z ichiga oladi (yoqlar soni o‘zgarmaydi): $m+1+r=2+k+1$. ■

2- teoremaning tasdig‘idagi $m+r=2+n$ tenglik **Eyler formulasi** deb ataladi.

Eyler formulasi stereometriyada ham qo‘llaniladi: uchlari m ta, yoqlari r ta va qirralari n ta ixtiyoriy ko‘pyoq uchun Eyler formulasi o‘rinlidir. Bu tasdiqning negizida isboti o‘quvchiga havola qilinayotgan quyidagi tasdiq yotadi: *stereometriyada berilgan ta’rifga ko‘ra aniqlangan ixtiyoriy ko‘pyoqliga mos tekis izomorf graf mavjuddir.*

Eyler teoremasidan bir qator natijalar kelib chiqadi. Masalan, bu teoremadan foydalanib uni osonlik bilan bog‘lamli bo‘lmagan graflar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin.

1- natija. *Tekis $G=(V,U)$ graf uchun $m+r=1+n+k$ tenglik o'rinlidir, bunda $m=|V|$, $n=|U|$, r – yoqlar soni, k – bog'lamlilik komponentlari soni.*

Isboti o'quvchiga havola qilinadi ■.

2- natija. *Karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz tekis (m,n)-graf uchun $n \leq 3m-6$ tengsizlik o'rinlidir.*

Isboti. Haqiqatdan ham, har bir yoq hech bo'lmaqanda uchta qirra bilan chegaralanganligi va yoqlarni chegaralovchi qirralarni sanaganda har bir qirra ikki marta hisobda qatnashganligi uchun $3r \leq 2n$ tengsizlik o'rinlidir (ta'kidlaymizki, agar grafda uchta uch va ikkita qirra bo'lsa, u holda $n \leq 3m-6$ tengsizlik bajariladi). $3r \leq 2n$ tengsizlikdan Eyler formulasini $r=2+n-m$ ko'rinishda qo'llab, $n \leq 3m-6$ tengsizlikni hosil qilamiz. ■

Ushbu bobning 2- paragrafida K_5 va $K_{3,3}$ graflarning planar emasligi ta'kidlangan (isbotsiz keltirilgan) edi. Endi bu tasdiqlarni qat'iy isbotlash mumkin.

3- teorema. *K_5 graf planar emas.*

Isboti. K_5 planar graf bo'lsin deb faraz qilamiz. Planar graf uchun $n \quad 3m-6$ tengsizlik o'rinlidir. K_5 graf uchun $m=5$ va $n=10$ bo'lganligidan bu tengsizlik $10 \leq 9$ ko'rinishdagi noto'g'ri munosabatga olib keladi. Demak, K_5 graf planar emas. ■

4- teorema. *$K_{3,3}$ graf planar emas.*

Isboti. $K_{3,3}$ planar graf bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu grafda 6 ta uch ($m=6$) va 9 ta qirra ($n=9$) bo'lgani uchun, Eyler teoremasiga ko'ra, unda 5 ta ($r=2+n-m=2+9-6=5$) yoq bo'lishi kerak. $K_{3,3}$ grafning har bir yog'i kamida to'rtta qirra bilan chegaralanganligi sababli bu graf uchun $4r \leq 2n$ tengsizlik o'rinlidir. Lekin bu tengsizlik $K_{3,3}$ graf uchun $20 \leq 18$ ko'rinishdagi noto'g'ri munosabatga olib keladi. Demak, $K_{3,3}$ graf planar emas. ■

Quyidagi tasdiq o'rinli ekanini isbotlash mumkin.

5- teorema. *Agar biror graf K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf bo'lgan qism grafga ega bo'lsa, u holda bu graf tekislikda yotuvchi bo'lmaydi.*

1930- yilda K. Kuratovskiy[1] bu tasdiqqa teskari tasdiqni isbot qildi: *agar graf tekislikda yotuvchi bo'lmasa, u holda u* K_5 *yoki* $K_{3,3}$ *grafga gomeomorf bo'lgan qism grafga ega bo'ladi.* Umuman olganda, graflarning planarligi haqidagi bu asosiy natija K. Kuratovskiydan oldin 1922- yilda L. S. Pontryagin[2] tomonidan isbotlangan, lekin bu natija o'sha vaqtda matbuotda e'lon qilinmagan edi.

6- teorema (Pontryagin-Kuratovskiy). *Graf planar bo'lishi uchun u* K_5 *yoki* $K_{3,3}$ *grafga gomeomorf qism graflarga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti topshiriq sifatida o'quvchiga havola qilinadi. ■

7- teorema. *Agar karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz grafda* m *ta uch,* n *ta qirra va* k *ta bog'lamlilik komponentlari bo'lsa, u holda quyidagi munosabat o'rinlidir:*

$$m-k \leq n \leq \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}.$$

Isboti. Avval qirralar soni n bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llab $m-k \leq n$ tengsizlikni isbotlaymiz. Agar grafda qirralar bo'lmasa (ya'ni, matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ deb olinsa), u holda grafdagi uchlar soni uning bog'lamlilik komponentlari soniga tengdir: $k=m$. Demak, $n=0$ bo'lganda $m-k \leq n$ munosabat to'g'ridir.

Induksion o'tish. Grafdagi qirralar sonini n_0 bilan belgilab, bu son minimal bo'lsin, ya'ni grafdan istalgan qirrani olib tashlash amali bog'lamlilik komponentlari soni o'zgargan graf hosil qilsin, deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, matematik induksiya usuli talabiga binoan $n=n_0$ uchun isbotlanishi kerak bo'lgan tengsizlik o'rinli bo'lsin, deb faraz qilamiz. Tabiiyki, bu holda grafdan istalgan qirrani olib tashlasak (bunda olib tashlangan qirraning chetlaridagi uchlar grafga tegishli bo'lib qolaveradi), hosil bo'lgan grafning uchlari soni m ga, qirralari soni (n_0-1) ga, bog'lamlilik komponentlari soni esa $(k+1)$ga teng bo'ladi.

Induksiya faraziga binoan $m-(k+1) \leq n_0-1$ tengsizlik o'rinlidir. Bu tengsizlikdan $m-k \leq n_0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $m-k \leq n$ tengsizlik isbotlandi.

---

[1] Kuratovskiy (Kuratowski Kazimej, 1896-1980) – Polsha matematigi.

[2] Pontryagin Lev Semyonovich (Понтрягин Лев Семенович, 1908-1988) – sovet (rus) matematigi, akademik.

Endi $n \le \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun grafning har bir bog'lamlilik komponenti to'la graf bo'lsin, deb faraz qilamiz. Berilgan grafning uchlari sonlari mos ravishda m_i va m_j bo'lgan ikkita bog'lamlilik komponentlari D_i va D_j graflardan iborat bo'lsin, bu yerda $m_i \ge m_j > 1$. D_i va D_j graflarning uchlari umumiy soni ($m_i + m_j$) ga teng bo'kishi tushunarli. Bu D_i va D_j graflarni uchlari soni mos ravishda ($m_i + 1$) va ($m_j - 1$) bo'lgan to'la graflar bilan almashtirsak, uchlar umumiy soni o'zgarmaydi, lekin qirralarning umumiy soni $(C^2_{m_i+1} + C^2_{m_j-1}) - (C^2_{m_i} + C^2_{m_j})$ miqdorga o'zgaradi. Oxirgi ifodaning ko'rinishini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$(C^2_{m_i+1} + C^2_{m_j-1}) - (C^2_{m_i} + C^2_{m_j}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m_i+1)m_i + (m_j-1)(m_j-2) - m_i(m_i-1) - m_j(m_j-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(m_i^2 + m_i + m_j^2 - m_j - 2m_j + 2 - m_i^2 + m_i - m_j^2 + m_j) =$$

$$= m_i - m_j + 1 > 0 .$$

Shunday qilib, uchlari soni m va bog'lamlilik komponentlari soni k bo'lgan grafda maksimal sondagi qirralar bo'lishi uchun u $(k-1)$ta yakkalangan uchlar va ($m-k+1$)ta uchga ega to'la graf birlashmasidan tashkil topishi kerak ekan. Bu yerdan isbotlanishi kerak bo'lgan tengsizlik kelib chiqadi. ■

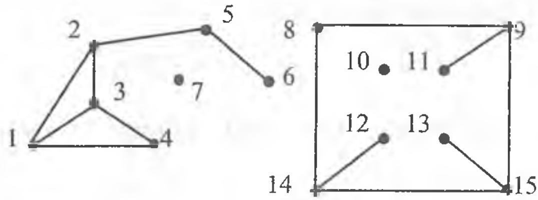
7- teoremaning tatbiqi sifatida quyidagi tasdiqni keltiramiz.

3- natija. *m ta uchga ega, qirralari soni* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *dan katta, karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz graf bog'lamlidir.*

Isboti. Birinchidan, agar sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan grafning bog'lamlilik komponentlari soni k ga teng bo'lsa ($k \in N$), u holda, 7- teoremaga binoan, bunday grafning qirralari soni $\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ dan katta emas. Ikkinchidan, $\frac{(m-1)(m-2)}{2} < \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ tengsizlik faqat $k=1$ bo'lsagina to'g'ridir. ■

Tabiiyki, bog'lamli grafdan qirrani yoki bir necha qirralarni olib tashlash natijasida hosil bo'lgan graf bog'lamli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Agar bog'lamli grafdan qirrani olib tashlash amali grafning bog'lamlilik xususiyatini buzsa, u holda bunday qirrani **ajratuvchi qirra** deb ataymiz.

Ravshanki, berilgan bog'lamli grafda ajratuvchi qirralar ko'p bo'lishi mumkin. Ajratuvchi qirralar to'plamining hech qaysi qism to'plami elementlari ajratuvchi qirralar bo'lmasa, bu qirralar to'plamini **kesim** deb ataymiz. Grafdan kesimga tegishli qirralar olib tashlansa, natijada ikki bog'lamli komponentlari bo'lgan graf hosil bo'lishi ravshandir. Agar kesim yagona qirradan iborat bo'lsa, u holda bu qirra **ko'prik** deb ataladi.



1- shakl

3- misol. 1- shaklda tasvirlangan (15,14)-grafni G bilan belgilaymiz.

Bu graf bog'lamli graf emas, uning to'rtta bog'lamli komponentalari bor: $G = G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3 \bigcup G_4$, bu yerda G_1 – uchlari to'plami $\{1,2,3,4,5,6\}$ bo'lgan oriyentirlanmagan (6,7)-graf, G_2 – bitta 7 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_3 ham bitta 10 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_4 esa uchlari to'plami $\{8,9,11,12,13,14,15\}$ bo'lgan oriyentirlanmagan (7,7)-grafdir. Agar G grafning G_4 bog'lamli komponentini alohida graf deb qarasak, bu grafda $\{(8,9),(14,15)\}$ ko'rinishdagi ajratuvchi qirralar to'plamini ko'rsatish mumkin. Bu qirralar kesim tashkil etadi. G grafning G_1 va G_4 bog'lamli komponentlari ko'priklarga egadir. Masalan, (2,5) va (5,6) qirralar G_1 graf uchun ko'priklardir. ■

Endi D. Kyonig tomonidan 1936- yilda isbotlangan ushbu teoremani grafning ikki bo'lakli bo'lishi yoki bo'lmasligini tekshirish alomati (mezoni) sifatida keltiramiz.

8- teorema (D. Kyonig). *Grafning ikki bo'lakli bo'lishi uchun uning tarkibida uzunligi toq son bilan ifodalanuvchi sikl bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. ■

Berilgan $G=(V,U)$ grafning ikki bo‘lakliligini aniqlashning sodda usuli bor. Bu usul **ko‘ndalangiga izlash** deb ataluvchi soddagina izlash g‘oyasiga asoslangan.

Ko‘ndalangiga izlash usuliga ko‘ra grafning uchlari $0,1,2,3,...$ raqamlar bilan quyidagi qoida bo‘yicha belgilanadi. Dastlab grafning ixtiyoriy uchi 0 raqami bilan belgilab olinadi. Shu 0 belgili uchga qo‘shni barcha uchlarga 1 belgisi qo‘yiladi. Endi 1 belgili har bir uchga qo‘shni uchlarni aniqlab, ular orasidagi belgisi yo‘q uchlarga 2 belgisini qo‘yamiz. Keyin 2 belgisiga ega barcha uchlarni aniqlab, ular uchun ham yuqoridagiga o‘xshash ish yuritamiz. Bu jarayonni mumkin bo‘lgan qadar davom ettiramiz. Tushunarliki, agar G graf bog‘lamli bo‘lsa, u holda ko‘ndalangiga izlash usuli grafning barcha uchlarini raqamlab chiqish imkonini beradi.

Bog‘lamli graf uchlarini belgilash jarayoni tugagandan so‘ng, uning uchlari to‘plami V ni ikkita V_j va V_q to‘plamga quyidagicha ajratamiz: juft raqamli uchlarni V_j to‘plamga, qolgan uchlarni esa V_q to‘plamga kiritamiz (0 raqamli uch V_j to‘plamga kiritiladi). G grafning ikkala uchi ham V_j to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini U_j bilan, uning ikkala uchi ham V_q to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini esa U_q bilan belgilaymiz. Agar U_j va U_q kortejlar bo‘sh bo‘lsa, u holda berilgan G graf ikki bo‘laklidir, aks holda u ikki bo‘lakli emas.

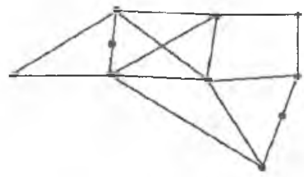
Hozirgacha $k>2$ bo‘lgan hol uchun grafning k bo‘lakliligini aniqlash bo‘yicha oddiy usul topilmagan.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Elementlari siz yashayotgan aholi punktidagi chorraha va yo‘llarga mos keluvchi grafni geometrik ifodalab, bu grafda marshrutlar, zanjirlar, oddiy zanjirlar va sikllarni aniqlang.

2. Ixtiyoriy graf uchun yo shu grafning o‘zi, yoki uning to‘ldiruvchi grafi bo‘g‘lamli bo‘lishini isbotlang.

3. Agar G bog‘lamli graf va uning qandaydir sikliga tegishli qirrasi u bo‘lsa, u holda G grafdan u qirrani olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli bo‘lishini isbotlang.



2- shakl

4. 2- shaklda tasvirlangan graf uchun uchlar, qirralar va yoqlar sonini aniqlang hamda Eyler formulasi va Eyler teoremasining 2- natijasidagi tengsizlik o‘rinli ekanini tekshiring.

5. Eyler teoremasining 1- natijasida ifodalangan tengsizlikni 1-shaklda tasvirlangan graf uchun tekshib ko‘ring.

6. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasining isbotini o‘rganing.

7. Agar 1- topshiriqni bajarish natijasida hosil bo‘lgan grafda ajratuvchi qirra(lar), kesim(lar) va ko‘prik(lar)

a) topilsa, u holda ularni aniqlang;

b) topilmasa, u holda bu grafga yangi elementlarni shunday qo‘shingki, natijada ajratuvchi qirrasi(lari), kesim(lar)i va ko‘prigi(klari) topiladigan graf hosil bo‘lsin.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Graflarda marshrut deganda nimani tushunasiz?

2. Marshrutdagi boshlang‘ich, oraliq va oxirgi uchlarning bir-biridan qanday farqi bor?

3. Qanday marshrutlar cheksiz marshrutlar deb ataladi?

4. Notrivial marshrut bilan nol marshrutning bir-biridan farqi nimada?

5. Marshrutning uzunligi deganda nimani tushunasiz?

6. Zanjir nima?

7. Oddiy va yopiq zanjirlarning bir-biridan farqi nimada?

8. Yo‘l, kontur deganda nimani tushunasiz?

9. Qanday zanjir sikl deb ataladi va qanday graf siklga ega?

10. Qanday uchlar bog‘langan deb ataladi?

11. Bog‘lamli graf deganda nimani tushunasiz?

12. Bog‘lamlilik komponenti grafning qanday xususiyat(lar)ini ifodalaydi?

13. Grafning yog‘i deganda nimani tushunasiz?

14. Eyler formulasi grafning qanday xossasini ifodalaydi?

15. Eyler formulasi bog‘lamli bo‘lmagan graflar uchun qanday umumlashtiriladi?

16. Nima uchun K_5 va $K_{3,3}$ graflar planar emas?

17. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasi nimani ifodalaydi?

18. Karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz grafda uchlar, qirralar va bog‘lamlilik komponentlari orasida tengsizliklar bilan ifodalanuvchi qanday munosabat o‘rinli?

19. Sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan grafning bog‘lamlilik sharti nimadan iborat?

20. Grafdagi qanday qirralar ajratuvchi qirralar deb ataladi?

21. Kesim va ko‘prik tushunchalarining farqi nimada?

22. Ko‘ndalangiga izlash usuli qanday amalga oshiriladi?

10.5. Eyler va Gamilton[1] graflari

Graf. Uch. Qirra. Sikl. Eyler zanjiri. Eyler sikli. Eyler grafi. Yarim Eyler grafi. Oriyentirlangan Eyler yo'li. Oriyentirlangan Eyler grafi. Flyori algoritmi. Gamilton zanjiri. Gamilton sikli. Gamilton grafi. Yarim Gamilton grafi. Kommivoyajer masalasi.

10.5.1. Eyler graflari. Graflar nazariyasining shakllanishi Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masala bilan bog'liq ekanligi yaxshi ma'lum. L. Eyler 1736- yilda bu masalaning yechimga ega emasligini isbotladi. U graflar nazariyasining ancha umumiy hisoblangan quyidagi savoliga ham javob topdi: qanday shartlar bajarilganda bog'lamli grafda barcha qirralardan faqat bir marta o'tadigan sikl mavjud bo'ladi?

Grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o'tadigan zanjir **Eyler zanjiri** deb ataladi. Yopiq Eyler zanjiriga (ja'ni **Eyler sikliga**) ega graf **Eyler grafi** deb ataladi. Agar grafda yopiq bo'lmagan Eyler zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Eyler grafi** deb ataladi.

1- teorema. *Bog'lamli graf Eyler grafi bo'lishi uchun undagi barcha uchlarning darajalari juft bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. G Eyler grafida C Eyler sikli bo'lsin. U holda C sikl bo'ylab harakatlanganda grafning har bir uchidan o'tish uchun bir juft qirradan foydalaniladi – bu qirralardan biri uchga kirish uchun, ikkinchisi esa uchdan chiqish uchun zarur bo'ladi. Bu yerda har bir uch darajasining juftligi C sikldagi har bir qirraning bir marta uchrashi mumkinligidan kelib chiqadi.

Yetarliligi. Endi G grafning har bir uchi darajasi juft bo'lsin deb faraz qilamiz. G graf bog'lamli bo'lgani uchun undagi har bir uchning darajasi ikkidan kichik emas. Ma'lumki, agar grafda har bir uchning darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bunday graf tarkibida sikl mavjud (ushbu bobning 4- paragrafidagi 1- teoremaga qarang).

Demak, G grafning qirralaridan tashkil etilgan qandaydir C_1 sikl bor. Bu siklni uning ixtiyoriy v_1 uchidan boshlab quramiz. Dastlab v_1 uchga insident bo'lgan ixtiyoriy bir qirrani tanlab, bu qirra bo'ylab harakatlanamiz va uning boshqa uchiga o'tamiz. Har safar, imkoniyati boricha, yangi qirra tanlab va bu qirradan o'tib uning boshqa uchiga boramiz. Shuni ta'kidlash zarurki, bunday o'tislar jarayonida faqat qirraning yangisini tanlashga harakat qilinadi, uchlar esa istalgancha takrorlanishi mumkin.

---

[1] Gamilton (William Rowan Hamilton, 1805-1865) – Irlandiya matematigi, fizigi va astronomi.

Har bir uchga insident qirralar soni juft bo‘lgani uchun C_1 siklni qurish jarayoni faqat v_1 uchga borgandagina tugaydi. Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o‘tadi, yoki

2) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o‘tmaydi. Birinchi holda teorema isbotlandi deyish mumkin. Ikkinchi holda G grafdan C_1 siklga tegishli barcha qirralarni olib tashlaymiz va natijada hosil bo‘lgan grafni G_1 deb belgilaymiz. Bu yerda yakkalanib qolgan uchlarni olib tashlash yoki olib tashlamaslik muhim emas. Agar yakkalanib qolgan uchlar olib tashlanmasa, natijada bog‘lamli bo‘lmagan G_1 grafni hosil qilishimiz ham mumkin. Grafdan qirralarni bunday olib tashlash amali, tabiiyki, grafning qirralari sonini kamaytiradi, lekin grafdagi uchlarning darajalari juftligi xossasini o‘zgartirmaydi.

G grafning bog‘lamliligiga ko‘ra C_1 sikl va G_1 graf hech bo‘lmasa bitta umumiy uchga ega bo‘lishlari kerak. Shu sababli, C_1 siklda G_1 grafning qirralariga ham insident bo‘lgan qandaydir v_2 uch bor. Bu v_2 uchdan boshlab faqat G_1 grafning qirralaridan tashkil topgan yangi C' siklni qurish mumkin. C' siklni qurish jarayoni faqat v_2 uchga kelib tugashi mumkin.

Oldin qurilgan C_1 siklni ikki qismga ajratamiz:

1) C_1 siklning v_1 uchidan boshlanib v_2 uchida tugovchi qismi (bu oddiy zanjirni $C_1(v_1, v_2)$ bilan belgilaymiz) va

2) C_1 siklning v_2 uchidan boshlanib v_1 uchida tugovchi qolgan qismi $(C_1(v_2, v_1))$.

U holda v_1 uchdan boshlab $C_1(v_1, v_2)$ zanjirning qirralari bo‘ylab v_2 uchga boruvchi, keyin C' siklning barcha qirralaridan o‘tuvchi va, nihoyat, $C_1(v_2, v_1)$ zanjirning qirralari bo‘ylab v_1 uchga qaytib keluvchi yangi $C_2 = C_1(v_1, v_2) \cup C' \cup C_1(v_2, v_1)$ siklni hosil qilish mumkin.

Agar C_2 sikl Eyler sikli bo‘lsa, teoremaning tasdig‘i isbotlandi desa bo‘ladi. Aks holda yuqorida bayon etilgan jarayonni takrorlaymiz.

Berilgan G grafdagi qirralar soni chekli bo‘lganligidan, bu jarayon chekli jarayondir. Bu jarayonni yetarlicha takrorlagandan so‘ng, albatta, u Eyler siklini qurish bilan yakunlanadi. ■

1- natija. *Bog‘lamli graf yarim Eyler grafi bo‘lishi uchun undagi ikkitadan ko‘p bo‘lmagan uchlarning darajalari toq bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti 1- teoremaning isbotidan ba'zi o'zgartirishlar natijasida hosil qilinishi mumkin. ■

1- teorema asosida Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaning (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang) yechimi mavjud emas degan xulosaga kelamiz, ya'ni Kyonigsberg shahrining ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib Pregel daryosi ustiga qurilgan yettita ko'priklardan faqat bir martadan o'tgan holda, yana o'sha uyga qaytib kelish mumkin emas.

Oriyentirlangan graflarda oriyentirlangan Eyler yo'lini izlash bilan shug'ullanish mumkin. Har bir yoydan faqat bir marta o'tadigan yo'l **oriyentirlangan Eyler yo'li** deb ataladi. Tarkibida oriyentirlangan Eyler yo'li bor bo'lgan oriyentirlangan graf **oriyentirlangan Eyler grafi** deb ataladi.

Endi qirralari soni n ga teng bo'lgan berilgan Eyler grafida Eyler zanjirini tuzishning **Flyori algoritmini**[1] keltiramiz. Bu algoritmga ko'ra grafning qirralari Eyler siklida uchrashi tartibi bo'yicha 1dan n gacha raqamlab chiqiladi.

Berilgan Eyler grafi uchun Flyori algoritmiga binoan quyidagi ikkita qoida asosida ishlar ketma-ket bajariladi:

1. Grafning ixtiyoriy v uchidan boshlab bu uchga insident bo'lgan istalgan qirraga (masalan, vv' qirraga) 1 raqami beriladi. Bu qirra grafdan olib tashlanadi va v uchdan v' uchga (ya'ni olib tashlangan qirraga insident uchga) o'tiladi.

2. Oxirgi o'tishdan oldingi o'tish natijasida hosil bo'lgan uch w bo'lsin va oxirgi o'tishda biror qirraga k raqami berilgan deylik. w uchga insident istalgan qirra imkoniyati boricha shunday tanlanadiki, bu qirrani olib tashlash grafdagi bog'lamlilikni buzmasin. Tanlangan qirraga navbatdagi ($k+1$) raqami beriladi va bu qirra grafdan olib tashlanadi. ■

Flyori algoritmiga ko'ra ish yuritish Eyler grafi uchun doimo chekli jarayon ekanligi va bu jarayon doimo grafdan barcha qirralarning olib tashlanishi, ya'ni Eyler zanjirini tuzish bilan tugashi isbotlangan. Shuni ham ta'kidlash kerakki, Flyori algoritmini qo'llash jarayonida qirralarni tanlash imkoniyatlari ko'p bo'lgani uchun, bunday vaziyatlarda, algoritmni qo'llash mavjud Eyler sikllaridan birini topish bilan cheklanadi. Tushunarliki, Flyori algoritmini takror qo'llab (bunda qirralarni tanlash

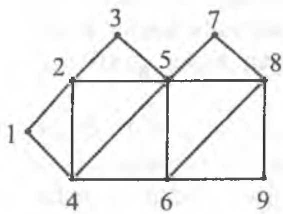
---

[1] Bu algoritm E. Lyuka tomonidan e'lon qilinran: Lucas, E. Récréations Mathématiqques. Paris: Gautheir-Villas, 1891.

jaroyoni algoritmini avvalgi qo'llashlardagidek aynan takrorlanmasligi kerak) grafda mavjud bo'lgan barcha Eyler sikllarini topish mumkin.

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Avvalo bu grafning Eyler grafi bo'lishi shartini, ya'ni 1- teorema shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

Berilgan grafda to'qqizta uch bo'lib, 1, 3, 7, 9 belgili uchlarning darajasi ikkiga, 2, 4, 6, 8 belgili uchlarning darajasi to'rtga, 5 belgili uchning darajasi esa oltiga teng. Xullas, bu grafdagi barcha uchlarning darajalari juftdir. Shuning uchun, 1- teoremaga ko'ra, 1- shaklda tasvirlangan graf Eyler grafidir va uning tarkibida Eyler sikli mavjud.



1- shakl

Berilgan grafga flyori algoritmini qo'llab mavjud Eyler sikllaridan birini aniqlaymiz. Dastlabki uch sifatida grafdagi 1 belgili uch olingan bo'lsin. Bu uchdan ikki yo'nalishda: (1;2) qirra bo'ylab yoki (1;4) qirra bo'ylab harakatlanish mumkin. Masalan, (1;2) qirra bo'ylab harakatlanib 2 belgili uchga o'tamiz. Endi harakatni 3 yo'nalishda: yo (2;3) qirra bo'ylab, yo (2;4) qirra bo'ylab, yoki (2;5) qirra bo'ylab davom ettirish mumkin. Aytaylik, (2;3) qirra bo'ylab harakatlanib 3 belgili uchga o'tgan bo'laylik. Shu usulda davom etib mumkin bo'lgan Eyler sikllaridan birini, masalan, quyidagi siklni hosil qilamiz:

$$((1,2),(2,3),(3,5),(5,4),(4,6),(6,9),(9,8),(8,6),$$
$$(6,5),(5,8),(8,7),(7,5),(5,2),(2,4),(4,1)).\ \blacksquare$$

10.5.2. Gamilton graflari. Graflar nazariyasining natijalari muayyan shartlarni qanoatlantiruvchi marshrutlarni topish masalasiga keltiriluvchi bir qator muammolarni hal etishda qo'llanilishi mumkin. Shunday muammolardan biri sifatida Uilyam Gamilton nomi bilan bog'liq masalani keltiramiz. U. Gamilton dodekaedrni tekshirib, uning har bir uchidan faqat bir marta o'tadigan siklni izlab topgan va shu asosda 1859 yilda "Olam bo'ylab sayohat" nomli o'yinni topgan.

Grafning har bir uchidan faqat bir marta o'tadigan zanjir **Gamilton zanjiri** deb ataladi. Yopiq Gamilton zanjiriga (ja'ni **Gamilton sikliga**) ega graf **Gamilton grafi** deb ataladi. Agar grafda yopiq bo'lmagan Gamilton zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Gamilton grafi** deb ataladi.

Oriyentirlangan graflarda ham grafning har bir uchidan faqat bir marta o'tuvchi oriyentirlangan sikllarni qarash mumkin

Eyler va Gamilton graflari bir-birlariga o'xshash ta'riflansada, grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlaydigan alomat (mezon) topish masalasi ancha murakkab muammo hisoblanadi. Hozirgi vaqtgacha graflar nazariyasida grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlovchi shartlarni o'rganish bo'yicha izlanishlar davom etib, bu sohadagi ishlar hanuzgacha dolzarbligini yo'qotmasdan kelmoqda.

Uilyam Gamilton

Qandaydir shartlarga bo'ysunuvchi graflarda Gamilton sikli mavjudligi haqida bir necha tasdiqlar mavjud. Qator hollarda bu tasdiqlarning isbotlari konstruktiv bo'lganligidan, Gamilton siklini tuzishga doir samarali algoritmlar ham yaratilgan. 1952 yilda G. E. Dirak[1] quyidagi teoremani isbotladi.

2- teorema (Dirak). *Uchlari soni uchtadan kam bo'lmagan grafdagi istalgan uchning darajasi uchlar sonining yarmidan kam bo'lmasa, bu graf Gamilton grafi bo'ladi.*

Isboti[2]**.** Uchlari soni $m \geq 3$ bo'lgan graf berilgan bo'lsin. Bu grafning istalgan v uchi uchun $\rho(v) \geq \frac{m}{2}$ shart bajarilsada, u Gamilton grafi bo'lmasin deb faraz qilamiz.

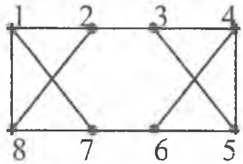
Tabiiyki, istalgan grafga yetarlicha sondagi yangi uchlarni qo'shib olib, bu uchlarning har birini grafdagi har bir uch bilan qirra orqali tutashtirsak, berilgan grafdan Gamilton grafini hosil qilish mumkin. Bu usul bilan berilgan grafdan Gamilton grafini hosil qilish uchun qo'shilayotgan zarur uchlarning minimal sonini $k > 0$ bilan belgilaymiz.

Yuqorida bayon qilingan usulni qo'llash natijasida hosil bo'lgan grafdagi uchlardan tashkil topgan $(v_1, w, v_2, ..., v_1)$ ketma-ketlik biror Gamilton sikli bo'lsin, bunda v_1, v_2 – berilgan grafning uchlari, w esa qo'shib olingan uchlardan biri. Tushunarliki, v_2 uch v_1 uchga qo'shni emas, aks holda siklni tuzishda w uchni ishlatmasligimiz mumkin bo'lar edi. Bu esa k sonining minimalligiga ziddir.

[1] Dirak (Dirac Gabriel Andrew, 1925-1984) – Daniya matematigi.

[2] Dirak teoremasining bu isboti D. J. Nyuman tomonidan keltirilgan.

Agar grafdagi v_1' uch v_1 uch bilan qo'shni, v_2' uch esa v_2 uch bilan qo'shni bo'lsa, v_2' uch siklda v_1' uchdan bevosita keyingi uch bo'la olmaydi, chunki bu holda $(v_1, w, v_2, ..., v_1', v_2', ..., v_1)$ siklni $(v_1, v_1', ..., v_2, v_2', ..., v_1)$ siklga almashtirish mumkin. Natijada hosil bo'lgan grafning v_2 uchga qo'shni bo'lmagan uchlari soni v_1 uchga qo'shni uchlari sonidan kichik emasligi (ya'ni bu son kamida $\left(\frac{m}{2}+k\right)$ga teng ekanligi) ravshan. Boshqa tomondan esa hosil bo'lgan grafning v_2 uchga qo'shni uchlari soni kamida $\left(\frac{m}{2}+k\right)$ga tengligi ko'rinib turibdi. Hosil bo'lgan grafning har bir uchi bir vaqtning o'zida v_2 uchga qo'shni ham, qo'shnimas ham bo'lishi mumkin emasligidan hosil bo'lgan graf uchlarining umumiy soni $(m+k)$ ushbu $2\left(\frac{m}{2}+k\right)=m+2k$ sondan kichik emas, ya'ni $m+k \geq m+2k$. Oxirgi tengsizlik faqat $k=0$ bo'lgandagina to'g'ridir. Bu esa $k>0$ shartiga ziddir. ■

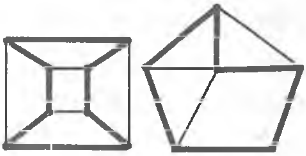


2- shakl

Dirak teoremasi shartlari berilgan grafning Gamilton grafi bo'lishi uchun yetarli, lekin ular zaruriy emas. Bu tasdiq to'g'ri ekanligini 2-shaklda tasvirlangan graf misolida ko'ramiz. Bu grafda sakkizta uch bo'lib ($m=8\geq 3$), har bir v ($v=\overline{1,8}$) uchning darajasi 3ga teng: $\rho(v)=3$. Dirak teoremasidagi $\rho(v)\geq\frac{m}{2}$ shart grafdagi hech qaysi uch uchun bajarilmasa ham, bu grafda (1,2,3,4,5,6,7,8,1) ko'rinishdagi Gamilton sikli bor bo'lgani uchun u Gamilton grafidir.

1960- yilda O. Ore[1] quyidagi teoremani isbotladi.

3- teorema (Ore). *Agar uchlari soni m ga ($m>2$) teng bo'lgan grafdagi qo'shni bo'lmagan ixtiyoriy uchlar darajalari yig'indisi m dan kam bo'lmasa, u holda bu graf Gamilton grafi bo'ladi.*


3- shakl

[1] Ore (Oysten Ore, 1899-1968) – Norvegiya matematigi.

I s b o t i o‘quvchiga topshiriq sifatida beriladi.

2- m i s o l. 3- shaklda tasvirlangan graflar Gamilton graflariga misol bo‘la oladi. Bir qarashdayoq sezish mumkinki, bu graflarning har birida bir nechtadan Gamilton sikllari mavjud. Mumkin bo‘lgan ba’zi Gamilton sikllari shaklda qalin chiziqlar bilan ifodalangan. ■

3- m i s o l. Shaxmat o‘yinidagi otning yurishi haqidagi Eyler masalasi deb ataluvchi quyidagi masalani qaraymiz. Shaxmat taxtasidagi istalgan katakda turgan shaxmat oti uchun yurishlarning shunday ketma-ketligini tuzingki, u barcha kataklardan faqat bir martadan o‘tsin va yurish boshlangan katakka qaytib kelsin. Bu masalani hal qilish maqsadida tuzilgan graf (shaxmat taxtasidagi kataklarga grafning uchlari, otning yurishlariga esa uning qirralari mos qo‘yilishi nazarda tutilmoqda) ham Gamilton grafiga misol bo‘la oladi. Bu masalaning yechimlaridan biri 4-shaklda keltirilgan. ■

4- m i s o l. 5- shaklda tasvirlangan grafda Gamilton zanjiri mavjud emas. ■

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	56	41	58	35	50	39	60	33
7	47	44	55	40	59	34	51	38
6	42	57	46	49	36	53	32	61
5	45	48	43	54	31	62	37	52
4	20	5	30	63	22	11	16	13
3	29	64	21	4	17	14	25	10
2	6	19	2	27	8	23	12	15
1	1	28	7	18	3	26	9	24

4- shakl

Berilgan grafda Gamilton zanjirining mavjudligi shartlarni o‘rganish bo‘yicha izlanishlar davom etayotganligi va bu sohadagi ishlar bugungi kunda ham dolzarbligini yo‘qotmaganligi yuqorida qayd etilgan edi. Grafdagi uchlar soni m ning qiymatiga nisbatan ko‘phad bilan chegaralangan sondagi qadam ishlatib istalgan grafda Gamilton zanjiri mavjudligini tekshiradigan algoritm hozirgacha topilmagan. Shuning uchun ham Gamilton zanjirini topish masalasi graflar nazariyasida markaziy masalalardan biri bo‘lib qolmoqda, Albatta, grafdagi m ta uchlarning $m!$ ta turli ketma-ketliklarini (aniqrog‘i, takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlarini) tuzib grafda Hamilton zanjiri mavjudligi masalasini hal qilish mumkin. Shunday bo‘lishiga qaramasdan, barcha $m!$ ta o‘rin almashtirishlarini bajarmasdan qadamlar sonini jiddiy qisqartiradigan umumiy algoritm bor.

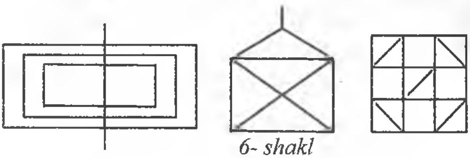
Grafda Gamilton zanjirini topish masalasi quyidagi **kommivoyajer[1] masalasi** deb ataluvchi masalada oshkora namoyon bo‘ladi. Bir-birlari bilan yo‘llar (graf qirralari) vositasida bog‘langan shaharlar (graf uchlari) tarmog‘i berilgan bo‘lib, shaharlarning har bir (a,b) jufti uchun masofa (uni $\mu(a,b)$ bilan belgilaymiz) mos qo‘yilgan hamda o‘zaro bog‘lanmagan shaharlar orasidagi masofa cheksiz katta deb hisoblaymiz. Kommivoyajer uchun shunday Gamilton sikli to-pish kerakki, $\sum_{i=0}^{n-1}\mu(a_i,a_{i+1})$ ifodaning qiymati minimal bo‘lsin, bu yerda a_i – tarmoqdagi i- shahar ($i=\overline{0,n}$). Boshqacha aytganda, kommivoyajerning biror shahardan chiqib va qolgan barcha shaharlardan faqat bir martadan o‘tib, yana dastlabki shaharga qaytishi imkonini beruvchi eng kichik umumiy uzunlikka ega bolgan yo‘lni topish kerak.

5- shakl

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Yarim Eyler grafi bo‘lib, Eyler grafi bo‘la olmaydigan grafga misol keltiring. Sababini tushuntiring.

2. 6- shaklda tasvirlangan uchta grafni (bu graflarda qirralarga kesmalar, kesmalarning kesishish nuqtalariga esa uchlar mos qo‘yilgan deb hisoblanadi) tekshirib, ularning Eyler grafi bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlang. Eyler grafi bo‘lganlarining har biridagi Eyler sikllaridan bir nechasini toping. Eyler grafi bo‘lmaganlarining yarim Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.



6- shakl

3. 3-, 5- va 6- shaklda tasvirlangan graflar orasida qalamni qog‘ozdan ko‘tarmasdan har bir kesmani faqat bir marta chizib (kesmalarning uchlari bundan mustasno) chiqish mumkin bo‘lganlarini aniqlang.

4. Lotin alifbosi bosma harflarning har biriga graf sifatida qarab (masalan A harfiga mos graf 7- shaklda tasvirlangan), ular orasidan Eyler grafi bo‘la olmaydiganlarini aniqlang.

---

[1] Kommivoyajer – sayohatchi reklamachi, gumashta.

5. K_n grafning Eyler grafi bo‘lishi shartlarini toping.

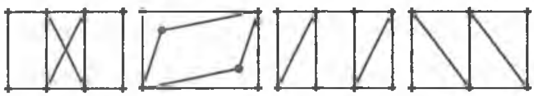
6. Berilgan n ta elementli to‘plam uchun tuzilgan barcha $n!$ ta o‘rin almashtirishlarning har biriga grafning uchi mos qo‘yilgan bo‘lsin. Agar biror o‘rin almashtirishdan undagi ikkita elementning o‘rinlarini almashtirib boshqa o‘rin almashtirishni hosil qilish mumkin bo‘lsa, u holda bu harakatga grafning qirrasini mos qo‘yamiz. Shunday usul bilan tuzilgan graf Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.

7. K_n grafning Gamilton grafi bo‘lishi shartlarini aniqlang.

8. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.

9. 8- shaklda tasvirlangan to‘rtta grafning har biri Gamilton grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.

7- shakl



8- shakl

10. Dirak teoremasini qo‘llab $K_{3,3}$ grafning Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.

11. Ore teoremasining isbotini o‘rganing (masalan, [9] kitobga qarang).

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Eyler zanjiri deb nimaga aytiladi?
2. Yarim Eyler grafi Eyler grafidan nimasi bilan farqi qiladi?
3. Berilgan graf Eyler grafi bo‘lishning zaruriy va yetarli sharti qanday ifodalanadi?
4. Berilgan graf yarim Eyler grafi bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti qanday ifodalanadi?
5. Oriyentirlangan Eyler grafi qanday aniqlanadi?
6. Berilgan Eyler grafi uchun Flyori algoritmiga ko‘ra qanday qoida bo‘yicha ishlar ketma-ket bajariladi?
7. Gamilton zanjiri deb nimaga aytiladi?
8. Qanday grafga Gamilton grafi deb aytiladi?
9. Eyler va Gamilton graflarining o‘xshashligi va farqi bormi?
10. Berilgan graf Gamilton grafi bo‘lishining yetarli shartlari haqidagi Dirak teoremasi qanday ifodalanadi?

11. Ore teoremasida berilgan graf Gamilton grafi bo‘lishining qanday yetarli shartlari keltirilgan?

12. Eyler va Gamilton graflari qo‘llanilib hal qilinadigan qanday amaliy masalalarga misol keltira olasiz?

13. Kubik graf Eyler grafi bo‘la oladimi?

10.6. Grafning metrik xarakteristikalari

Graf. Uch. Qirra. Uchlar orasidagi masofa. Zanjir. Oddiy zanjir. Metrika aksiomalari. Uchburchak tengsizligi. Uchning ekssentrisiteti. Grafning diametri. Diametral zanjir. Grafning radiusi, markazi. Markaziy uch. Radial oddiy zanjir. Qirraning, yoyning, zanjirning, yo‘lning uzunligi. Additivlik. Minimal uzunlikka ega yo‘l. Deykstra algoritmi.

10.6.1. Graflarda masofa tushunchasi. Bog‘lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo‘lsin. Bu grafda har qanday ikkita v_1 va v_2 uchlar bog‘langan bo‘lgani uchun chetlari v_1 va v_2 uchlardan iborat bo‘lgan hech bo‘lmasa bitta marshrut bor. v_1 va v_2 uchlarni bog‘lovchi eng qisqa (v_1,v_2) marshrutning uzunligi v_1 va v_2 **uchlar orasidagi masofa** deb ataladi va u $d(v_1,v_2)$ bilan belgilanadi. Ravshanki, eng qisqa marshrut oddiy zanjirdir. Tabiiy ravishda $d(v,v)=0$ deb qabul qilamiz.

Shuni ta’kidlash kerakki, graflarda masofa tushunchasini boshqa usul bilan ham aniqlash mumkin.

Yuqoridagi usul bilan aniqlangan masofa **metrika aksiomalari** deb ataluvchi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $d(v_1,v_2)\geq 0$;

2) $v_1=v_2$ bo‘lgandagina $d(v_1,v_2)=0$ bo‘ladi;

3) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_1)$;

4) $d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3)\geq d(v_1,v_3)$.

Oxirgi aksioma **uchburchak tengsizligi** deb ataladi.

Bog‘lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo‘lsin. G grafning ixtiyoriy $v\in V$ uchi uchun aniqlangan

$$e(v)=\max_{w\in V} d(v,w)$$

miqdor shu v **uchning ekssentrisiteti** deb ataladi.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kattasi (maksimali) shu **grafning diametri** deb ataladi.

G grafning diametri, odatda, $d(G)$ bilan belgilanadi: $d(G) = \max_{v \in V} e(v)$. Diametr bu grafning istalgan ikki uchi orasidagi mumkin bo'lgan eng katta masofadir, ya'ni $d(G) = \max_{v_1, v_2 \in V} d(v_1, v_2)$.

Uzunligi $d(G)$ga teng bo'lgan oddiy zanjir **diametral zanjir** deb ataladi.

Tabiiyki, grafda diametral zanjir yagona bo'lmasligi mumkin.

Bog'lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kichigi (minimali) shu **grafning radiusi** deb ataladi.

G grafning radiusi, odatda, $r(G)$ bilan belgilanadi: $r(G) = \min_{v \in V} e(v)$.

Ravshanki, $r(G) = \min_{v_1 \in V} \max_{v_2 \in V} d(v_1, v_2)$.

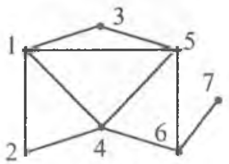
Bog'lamli G grafdagi ekssentrisiteti radiusga teng v_0 uch **grafning markazi** (**markaziy uchi**) deb ataladi.

Agar v_0 uch G grafning markazi bo'lsa, u holda $e(v_0) = \min_{v \in V} e(v)$ bo'ladi, ya'ni grafning markaziy uchi minimal ekssentrisitetga egadir.

Agar grafning markazidan boshqa biror uchigacha bo'lgan oddiy zanjir eng uzun masofaga ega bo'lsa, u holda bu zanjir **radial oddiy zanjir** deb ataladi.

Tabiiyki, grafning radiusi uning diametridan katta emas va graf bittadan ko'p markazga ega bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari, grafning barcha uchlari uning markaziy uchlari bo'lishi ham mumkin.

Grafning markaziy uchlarini topish bilan bog'liq masalalar aholiga xizmat ko'rsatadigan qandaydir ob'yektning (kasalxona, maktab va shu kabilarning) joylashish o'rnini aniqlash bilan bog'liq muammolarni hal qilishda qo'llanilishi mumkin. Ta'kidlash kerakki, muayyan vaziyatlarda, ko'pincha, boshqa holatlarni, jumladan, obyektgacha borish vaqti, punktlar orasidagi masofa va shu kabilarni hisobga olishga to'g'ri keladi. Bunday vaziyatlarda **joylashtirishning minimaks masalalari** deb ataluvchi masalalar vujudga keladi.



1- shakl

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu ghafda $d(1,6) = 2$, $d(2,7) = 3$, $d(G) = 3$; $(1,4,6,7)$ va $(1,5,6,7)$ zanjirlar diametral zanjirlardir, $(1,3)$ va $(1,3,5,6,7)$ zanjirlar esa diametral zanjirdirlar bo'la olmaydi. Berilgan grafda 4, 5 va 6 belgili uchlar markazlar bo 'lib, $r(G)=2$ hamda $(6,7)$ va $(6,4,1)$ radial oddiy zanjirlardir. ■

10.6.2. Minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala. Berilgan bog'lamli grafning har bir qirrasiga (agar berilgan graf oriyentirlangan bo'lsa – yoyiga) qandaydir haqiqiy sonni mos qo'yib, bu sonni **qirraning (yoyning) uzunligi** deb ataymiz. Qirraning (yoyning) uzunligi **additivlik** xossasiga ega deb faraz qilamiz, ya'ni qirralar (yoylar) yordamida tuzilgan **zanjirning (yo'lning) uzunligi** shu zanjirni (yo'lni) tashkil etuvchi qirralar (yoylar) uzunliklari yig'indisiga tengdir.

Tabiiyki, qirraning yoki yoyning uzunligi tushunchasi yechilayotgan masalaning mohiyatiga qarab muayyan bir ma'noga ega bo'lishi mumkin. Masalan, ikkita shahar orasidagi masofa, qandaydir operatsiyani bajarish uchun zarur mablag' (xarajatlar) yoki vaqt va boshqalar. Shu nuqtai nazardan, umuman olganda, bu yerda manfiy uzunlikka ega yoki uzunligi nolga teng qirra (yoy) ham ma'noga ega deb hisoblanadi.

Amaliyotda uchraydigan ko'plab masalalarda marshrut uzunligi maksimallashtirilishi yoki minimallashtirilishi talab etiladi. Shunday masalalardan biriga, aniqrog'i, kommivoyajer masalasiga Gamilton graflari bilan shug'ullanganda duch kelgan edik (ushbu bobning 5-paragrafiga qarang).

$G=(V,U)$ oriyentirlangan graf berilgan bo'lsin, bu yerda $V=\{1,2,...,m\}$. G grafning biror $s\in V$ uchidan boshqa $t\in V$ uchiga boruvchi yo'llar orasida uzunligi eng kichik bo'lganini topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Bu masalani **minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala** deb ataymiz. Quyida bu masalaning umumlashmasi hisoblangan masalani qarab, uni ham o'sha nom bilan ataymiz.

Grafdagi (i,j) yoyning uzunligini c_{ij} bilan belgilab, $C=(c_{ij})$, $i,j=\overline{1,m}$, matritsa berilgan deb hisoblaymiz. Yuqorida ta'kidlagan-larimizga ko'ra, C matritsaning c_{ij} elementlari orasida manfiylari yoki nolga tenglari ham bo'lishi mumkin. Agar grafda biror i uchdan chiqib j uchga kirruvchi yoy mavjud bo'lmasa, u holda bu yoyning uzunligini cheksiz katta deb qabul qilamiz ($c_{ij}=\infty$). Bundan tashqari, G grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud emas deb hisoblaymiz, chunki aks holda uzunligi eng kichik bo'lgan yo'l mavjud emas[1].

---

[1] Agar grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud bo'lsa, u holda grafning qandaydir s uchidan shu siklning biror i uchiga o'tib, keyin esa, sikl bo'ylab harakatlanib, i uchga istalgancha marta qaytish mumkin bo'lganligidan, istalgancha kichik uzunlikka ega yo'l tuzish mumkin.

Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra[1] tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi** keltirilgan.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo‘yib, bu uchni dastlab $R = \varnothing$ deb qabul qilingan R to‘plamga kiritamiz: $R = \{1\}$. $\overline{R} = V \setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R, \overline{R})$ bo‘lsin. Har bir $(i, j) \in (R, \overline{R})$ yoy uchun $h_{ij} = \varepsilon_i + c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda ε_i deb $i \in R$ uchga mos qo‘yilgan qiymat (grafning 1 belgili uchidan chiqib i belgili uchigacha eng qisqa yo‘l uzunligi) belgilangan.

$\varepsilon_j = \min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R, \overline{R})$ to‘plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni (i, j) yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j \in \overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo‘yamiz. ε_j qiymat mos qo‘yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib R to‘plamga kiritamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha (i, j) yoylar uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik o‘rinli bo‘lmagan (ja’ni $\varepsilon_{j_*} > \varepsilon_i + c_{ij_*}$ bo‘lgan) barcha j_* belgili uchlarning har biriga mos qo‘yilgan eski ε_{j_*} qiymat o‘rniga yangi $\varepsilon_i + c_{ij_*}$ qiymatni mos qo‘yamiz va (i, j_*) yoyni ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

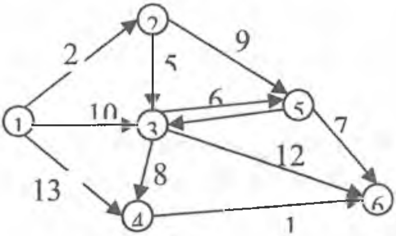
Uchlarga qiymat mos qo‘yish jarayonini oxirgi (k belgili) uchga qiymat mos qo‘yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgili uchidan (manbadan) chiqib uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo‘l uzunligi ε_k bo‘ladi.

---

[1] Deykstra Edsger Vayb (Dijkstra Edsger Wybe, 1930-2002) – Gollandiya matematigi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda uning 1 belgili uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1 belgili uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo'l(lar)ni topamiz. ■

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan orgrafda oltita uch ($V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) va o'n bitta yoy bo'lib, har bir yoy uzunligi uning yoniga yozilgan. Ko'rinib turibdiki, berilgan grafda manfiy uzunlikka ega (5,3) yoy ham bor. Isbotlash mumkinki, bu grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud emas.



2- shakl

Yuqorida bayon qilingan Deykstra algoritmini berilgan grafga qo'llab, eng qisqa uzunlikka ega yo'lni topish bilan shug'ullanamiz.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo'yamiz va $R=\{1\}$ to'plamga ega bo'lamiz. Shuning uchun, $\overline{R} = V \setminus R = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'ladi.

Umumiy qadam. 1- iteratsiya. $R=\{1\}$ va $\overline{R} = \{2,3,4,5,6\}$ bo'lgani uchun boshlang'ich uchi R to'plamga tegishli, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to'plam elementi bo'lgan barcha yoylar to'plami $(R,\overline{R}) = \{(1, 2),(1, 3),(1, 4)\}$ ga ega bo'lamiz. $(R,\overline{R})$ to'plamga tegishli bo'lgan har bir yoy uchun h_{ij} ning qiymatlarini topamiz:

(1, 2) yoy uchun $h_{12} = \varepsilon_1 + c_{12} = 0 + 2 = 2$;

(1, 3) yoy uchun $h_{13} = \varepsilon_1 + c_{13} = 0 + 10 = 10$;

(1, 4) yoy uchun $h_{14} = \varepsilon_1 + c_{14} = 0 + 13 = 13$.

Bu h_{12}, h_{13} va h_{14} miqdorlar orasida eng kichigi h_{12} bo'lgani uchun (1, 2) yoyni ajratamiz (3- shaklda bu yoy qalin chiziq bilan belgilangan) va 2 belgili uchga $\varepsilon_2 = 2$ qiymatni mos qo'yamiz. Algoritmga ko'ra 2 uchni $\overline{R}$ to'plamdan chiqarib, R to'plamga kiritamiz. Natijada[1] $R=\{1, 2\}$ va $\overline{R} = \{3, 4, 5, 6\}$ to'plamlarga ega bo'lamiz.

[1] Yozuvning ixchamligi nuqtai nazardan bu yerda va bundan keyin hosil bo'lgan to'plamlar uchun R va $\overline{R}$ belgilar qoldiriladi.

Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan bitta $(1, 2)$ yoy bo'lgani uchun faqat bitta $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Bu tengsizlik $0+2 \geq 2$ ko'rinishdagi to'g'ri munosabatdan iborat bo'lgani uchun 2- iteratsiyaga o'tamiz.

2- iteratsiya. $(R,\overline{R}) = \{(1, 3),(1, 4),(2, 3),(2, 5)\}$ bo'lgani sababli $h_{13} = 10$, $h_{14} = 13$, $h_{23} = 7$ va $h_{25} = 11$ qiymatlarni va $\min\{h_{13}, h_{14}, h_{23}, h_{25}\} = h_{23} = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu yerda eng kichik qiymat $(2, 3)$ yoyga mos keladi. Shuning uchun, $(2, 3)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_3 = 7$ qiymatni 3 belgili uchga mos qo'yamiz. 3 belgili uchni $\overline{R}$ to'plamdan chiqarib, R to'plamga kiritgandan so'ng $R = \{1, 2, 3\}$ va $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to'plamlar hosil bo'ladi.

Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan uchta $(1, 2)$, $(1, 3)$ va $(2, 3)$ yoylardan birinchisi uchun $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishi 1- iteratsiyada tekshirilganligi va ε_1, ε_2 qiymatlarning o'zgarmaganligi sababli faqat ikkinchi va uchinchi yoylarga mos $\varepsilon_1 + c_{13} \geq \varepsilon_3$ va $\varepsilon_2 + c_{23} \geq \varepsilon_3$ munosabatlarni tekshirish kifoya. Bu munosabatlar $0+10 \geq 7$ va $2+5 \geq 7$ ko'rinishda bajariladi. Shuning uchun 3- iteratsiyaga o'tamiz.

3- iteratsiya. Boshlang'ich uchi $R = \{1, 2, 3\}$ to'plamga tegishli, oxiri esa $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to'plamga tegishli bo'lgan yoylar to'rtta: $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$. Shu yoylarga mos h_{ij} ning qiymatlari $h_{14} = 13$, $h_{25} = 11$, $h_{34} = 15$, $h_{35} = 13$ va, shuning uchun, $\min\{h_{14}, h_{25}, h_{34}, h_{35}\} = h_{25} = 11$ bo'ladi. Demak, bu iteratsiyada $(2, 5)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_5 = 11$ deb olamiz. Endi, algoritmga ko'ra, $R = \{1, 2, 3, 5\}$ va $\overline{R} = \{4, 6\}$ to'plamlarni hosil qilamiz.

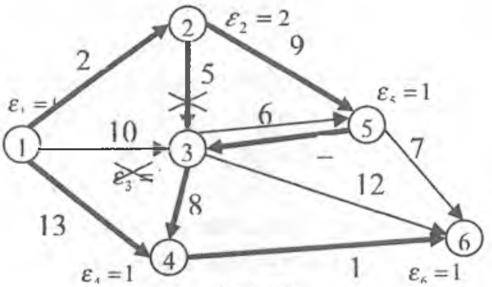
Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan yoylar oltita: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$. Bu yoylarning har biri uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshirishimiz kerak. Lekin, 1- va 2- iteratsiyalarda $(1, 2)$, $(2, 3)$ va $(1, 3)$ yoylar uchun bu ish bajarilganligi sababli tekshirishni tarkibida 5 belgili uch qatnashgan $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$ yoylar uchun amalga oshirib, quyidagilarga ega bo'lamiz: $(2, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_2 + c_{25} \geq \varepsilon_5$ munosabat to'g'ri ($2+9 \geq 11$), $(3, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_3 + c_{35} \geq \varepsilon_5$ munosabat to'g'ri ($7+6 \geq 11$), lekin $(5, 3)$ yoy uchun $\varepsilon_5 + c_{53} \geq \varepsilon_3$ munosabat noto'g'ri ($11+(-6) = 5 < 7$). Oxirgi munosabatni hisobga olib, algoritmga ko'ra $\varepsilon_3 = 7$ o'rniga $\varepsilon_3 = 5$ deb olamiz va $(5, 3)$ yoyni ajratilgan deb, ilgari ajratilgan $(2, 3)$ yoyni esa ajratilmagan deb hisoblaymiz (3- shaklda $\varepsilon_3 = 7$ yozuvning va $(2, 3)$ yoyning qalin chiziq'i ustiga ajratilganlikni inkor qiluvchi $\times$ belgisi qo'yilgan).

4-iteratsiya. $R=\{1, 2, 3, 5\}$, $\bar{R}=\{4, 6\}$ bo'lgani uchun $(R, \bar{R})=\{(1, 4), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$ va $h_{14}=13$, $h_{34}=13$, $h_{36}=17$, $h_{56}=18$ hamda $\min\{h_{14}, h_{34}, h_{36}, h_{56}\}=h_{14}=h_{34}=13$ bo'ladi. Demak, $(1, 4)$ va $(3, 4)$ yoylarni ajratamiz hamda 4 belgili uchga $\varepsilon_4 = 13$ qiymatni mos qo'yamiz. Natijada $R=\{1, 2, 3, 5, 4\}$, $\bar{R}=\{6\}$ to'plamlarga ega bo'lamiz.

$\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ munosabatning to'g'riligi $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ va $(3, 4)$ yoylar uchun tekshirilib ko'rilganda, uning barcha yoylar uchun bajarilishi ma'lum bo'ladi.

5- iteratsiya. Endi $(R, \bar{R})=\{(3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$ bo'lgani uchun $h_{36}=17$, $h_{46}=14$, $h_{56}=18$ va $\min\{h_{36}, h_{46}, h_{56}\}=h_{46}=14$ bo'ladi. Bu yerda minimum $(4, 6)$ yoyda erishilgani uchun uni ajratib, orgrafning oxirgi 6 belgili uchiga $\varepsilon_6 = 14$ qiymatni mos qo'yamiz.

Oxirgi qadam. Berilgan orgrafda 1 belgili uchdan 6 belgili uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo'l(lar)ni topish maqsadida, algoritmga asosan, grafning oxirgi 6 belgili uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda harakatlanib, uning 1 belgili uchiga kelishimiz kerak. 6 belgili uchga kiruvchi uchta yoydan faqat bittasi ($(4, 6)$ yoy) ajratilgan bo'lgani uchun $(4, 6)$ yoy yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda harakat qilib, 6 belgili uchdan 4 belgili uchga kelamiz. 4 belgili uchga kiruvchi ikkala ($(1, 4)$ va $(3, 4)$) yoylar ham ajratilgan bo'lgani uchun biz tuzmoqchi bo'lgan eng qisqa uzunlikka ega yo'l yagona emas.



3- shakl

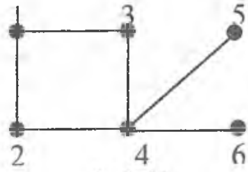
Agar harakatni $(1, 4)$ yoy yo'nalishiga teskari yo'nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 1 belgili uchga kelib, eng qisqa uzunlikka ega yo'llardan biri bo'lgan $\mu_1 = (1, 4, 6)$ marshrutni topamiz.

Agarda harakatni $(3, 4)$ yoy yo'nalishiga teskari yo'nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 3 belgili uchga kelamiz. 3 belgili uchga kiruvchi ikkita yoydan faqat bittasi ($(5, 3)$ yoy) ajratilgan bo'lgani uchun 3 belgili uchdan 5 belgili uchga kelamiz. Shu usulda davom etsak, oldin 2 belgili, keyin esa 1 belgili uchga o'tib mumkin bo'lgan eng qisqa uzunlikka ega bo‘lgan yo‘llardan ikkinchisini, ya’ni $\mu_2 = (1, 2, 5, 3, 4, 6)$ marshrutni aniqlaymiz.

Shunday qilib, 2- shaklda tasvirlangan grafda eng qisqa uzunlikka ega μ_1 va μ_2 yo‘llar borligini aniqladik. Bu yo‘llarning har biri minimal $\varepsilon_6 = 14$ uzunlikka ega. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 4- shaklda tasvirlangan grafning diametri, radiusi va markaz(lar)ini toping.



4- shakl

2. Petersen grafining markazini toping.

3. Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos grafning diametri va markazini toping.

4. Uchta uy va uchta quduq haqidagi masalaga mos grafning diametri va radiusini toping.

5. Insidentlik matritsasi quyida berilgan grafning diametri, radiusi va markaz(lar)ini aniqlang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

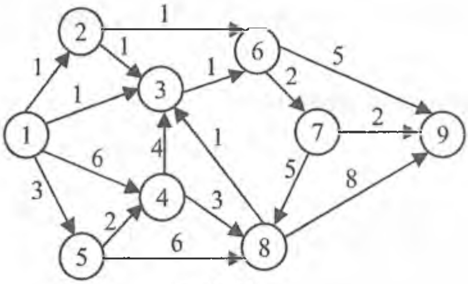
6. Uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_3 va O_4 graflarga birikma amalini qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan grafning diametri va radiusini aniqlang.

7. Qirralari qo‘shniligi matritsasi quyida berilgan graflarning radiuslarini aniqlang:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Deykstra algoritmini 5- shaklda tasvirlangan grafga qo‘llab, eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni toping.

9. Siz yashayotgan hududda har bir aholi punktidan boshqasiga bevosita borish mumkin bo’lgan yo’llarni va ularning uzunliklarini aniqlang. Bu ma’lumotlarga mos keluvchi graf tuzing va Deykstra algoritmini qo’llab, o’zingiz yashayotgan aholi punktidan boshqa aholi punktiga borish mumkin bo’lgan yo’llarning eng qisqa uzunlikka ega bo’lganlarini toping.



5- shakl

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Graf uchlari orasidagi masofa deb nimaga aytiladi?

2. Graf uchlari orasidagi masofa metrikaning qanday aksiomalarini qanoatlantiradi?

3. Metrika aksiomalarining qaysi biri uchburchak tengsizligi aksiomasi deb ataladi?

4. Graf uchining ekssentrisiteti deganda nimani tushunasiz?

5. Grafning diametri deb nimaga aytiladi?

6. Diametral zanjir nima?

7. Grafning radiusi qanday aniqlanadi?

8. Grafning markazi yagona uchdan iborat bo‘lmasligi mumkinmi?

9. Grafning radial oddiy zanjiri qanday topiladi?

10. Graf qirrasining (yoyining) uzunligi deganda nimani tushunasiz?

11. Additivlik xossasini qanday tushunasiz?

12. Grafdagi zanjirning (yo‘lning) uzunligi qanday aniqlanadi?

13. Qanday masalaga minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala deb aytiladi?

14. Agar grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl bor bo‘lsa, u holda Deykstra algoritmini qo‘llab minimal uzunlikka ega yo‘lni topish mumkinmi?

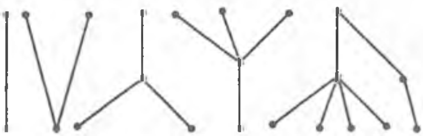
15. Deykstra algoritmining umumiy qadamida qanday ishlar amalga oshiriladi?

10.7. Daraxtlar

Graf. Uch. Qirra. Daraxt. O'rmon. Asiklik graf. Marshrut. Sikl. Zanjir. Oddiy zanjir. Ko'prik. Grafning sinch daraxti, sinch o'rmoni, siklomatik soni.

10.7.1. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar. Siklga ega bo'lmagan orientirlanmagan bog'lamli graf **daraxt** deb ataladi[1]. Ta'rifga ko'ra daraxt sirtmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega bo'lmagan orientirlanmagan graf **o'rmon** (**asiklik graf**) deb ataladi.

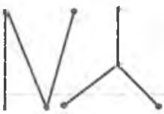
1- misol. 1- shaklda bog'lamli komponentli soni beshga teng bo'lgan graf tasvirlangan bo'lib, u o'rmondir. Bu grafdagi bog'lamli komponentlarning har biri daraxtdir. ■



1- shakl

2- misol. 2- shaklda to'rtta uchga ega bir-biriga izomorf bo'lmagan barcha (ular bor-yog'i ikkita) daraxtlarning geometrik ifodalanishi tasvirlangan. ■

Beshta uchga ega bir-biriga izomorf bo'lmagan barcha daraxtlar uchta, oltita uchga ega bunday barcha daraxtlar esa oltita ekanligini ko'rsatish qiyin emas.



2- shakl

Daraxt tushunchasiga boshqacha ham ta'rif berish mumkin. Umuman olganda, $G\ (m,n)$- graf uchun **daraxtlar haqidagi asosiy teorema** deb ataluvchi quyidagi teorema o'rinlidir.

1- teorema. *Uchlari soni m va qirralari soni n bo'lgan G graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:*

1) G daraxtdir;

2) G asiklikdir va $n = m - 1$;

3) G bog'lamlidir va $n = m - 1$;

4) G bog'lamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash amalini qo'llash natijasida bog'lamli bo'lmagan graf hosil bo'ladi, ya'ni G ning har bir qirrasi ko'prikdir;

5) G grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtiriladi;

---

[1] Orientirlangan daraxt tushunchasi ham bor.

6) G asiklik bo'lib, uning qo'shni bo'lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirish amalini qo'llash natijasida faqat bitta siklga ega bo'lgan graf hosil bo'ladi.

Isboti. Teoremaning 1) tasdig'idan uning 2) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf daraxt bo'lsin. Daraxtning ta'rifiga ko'ra, u asiklik bo'lishini ta'kidlab, m bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llaymiz.

Matematik induksiya usulining bazasi: agar $m=1$ bo'lsa, u holda G daraxt faqat bitta uchdan tashkil topgan bo'ladi. Tabiiyki, agar bitta uchga ega bo'lgan grafda sikl bo'lmasa, u holda unda birorta ham qirra yo'q, ya'ni $n=0$. Demak, bu holda tasdiq to'g'ridir.

Induksion o'tish: G daraxt uchun $k \geq 2$ va $m=k$ bo'lganda 2) tasdiq o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. Endi uchlari soni $m=k+1$ va qirralari soni n bo'lgan daraxtni qaraymiz. Bu daraxtning ixtiyoriy qirrasini (v_1, v_2) bilan belgilab, undan bu qirrani olib tashlasak, v_1 uchdan v_2 uchgacha marshruti (aniqrog'i, zanjiri) mavjud bo'lmagan grafni hosil qilamiz, chunki agar hosil bo'lgan grafda bunday zanjir bor bo'lsa edi, u holda G daraxtda sikl topilar edi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas.

Hosil bo'lgan graf ikkita G_1 va G_2 bog'lamli komponentlardan iborat bo'lib, bu komponentlarning har biri daraxtdir. Yana shuni ham e'tiborga olish kerakki, G_1 va G_2 daraxtlarning har biridagi uchlar soni k dan oshmaydi.

Matematik induksiya usuliga ko'ra, bu daraxtlarning har birida qirralar soni uning uchlari sonidan bitta kam bo'lishini ta'kidlaymiz, ya'ni G_i graf (m_i, n_i)-graf bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinlidir: $n=n_1+n_2+1$, $k+1=m_1+m_2$ va $n_i=m_i-1$ ($i=1, 2$). Bu tengliklardan

$$n=n_1+n_2+1=m_1-1+m_2-1+1=(m_1+m_2)-1=(k+1)-1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $m=k+1$ bo'lganda ham $n=m-1$ tenglik o'rinlidir. Bu esa, matematik induksiya usuliga ko'ra, kerakli tasdiqning isbotlanganligini anglatadi.

Endi daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 2) tasdig'idan uning 3) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf asiklik, ya'ni u siklga ega bo'lmagan graf va $n=m-1$ bo'lsin. G grafning bog'lamli bo'lishini isbotlash kerak.

Agar G graf bog'lamli bo'lmasa, u holda uni har bir bog'lamli komponenti siklsiz graf G_i (ya'ni, daraxt) bo'lgan qandaydir k ta (k>1) graflar diz'yunktiv birlashmasi sifatida $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ tenglik bilan ifodalash mumkin. Har bir $i = \overline{1,k}$ uchun G_i graf daraxt bo'lgani uchun, yuqorida isbotlagan tasdiqqa ko'ra, agar unda m_i ta uch va n_i ta qirra bo'lsa, u holda G_i asiklikdir va $n_i = m_i - 1$ tenglik o'rinlidir. Tushunarliki, $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ va $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Demak,

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} m_i - k = m - k,$$

ya'ni G graf uchlarining umumiy soni undagi qirralar umumiy sonidan k ta ortiqdir. Bu esa, $k > 1$ bo'lgani uchun, $n = m - 1$ tenglikka ziddir. Zarur tasdiq isbotlandi.

Teoremaning 3) tasdig'idan uning 4) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G – bog'lamli graf va $n = m - 1$ bo'lsin. Avvalo k ta bog'lamlilik komponentlariga ega karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz (m,n)-graf uchun

$$m - k \le n \le \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$$

munosabat o'rinli bo'lishini eslatamiz (ushbu bobning 4- paragrafidagi 7-teoremaga qarang).

$n = m - 1$ bo'lgani sababli G bog'lamli grafdan istalgan qirra olib tashlansa, natijada m ta uch va $(m-2)$ ta qirralari bo'lgan graf hosil bo'ladiki, bunday graf $m - k \le n$ shartga binoan bog'lamli bo'la olmaydi. Kerakli tasdiq isbotlandi.

Daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 4) tasdig'idan uning 5) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G bog'lamli graf va uning har bir qirrasi ko'prik bo'lsin deb faraz qilib, bu grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirilishi mumkinligini ko'rsatamiz. G bog'lamli graf bo'lgani uchun, uning istalgan ikkita uchi hech bo‘lmasa bitta oddiy zanjir vositasida tutashtiriladi.

Agar qandaydir ikkita uch bittadan ko‘p, masalan, ikkita turli oddiy zanjir vositasida tutashtirilishi imkoniyati bo‘lsa, u holda bu uchlarning biridan zanjirlarning birortasi bo‘ylab harakatlanib ikkinchi uchga, keyin bu uchdan ikkinchi zanjir bo‘ylab harakatlanib dastlabki uchga qaytish imkoniyati bor bo‘lar edi. Ya’ni qaralayotgan grafda sikl topilar edi.

Tabiiyki, tarkibida sikl mavjud bo‘lgan grafning siklga tegishli istalgan bitta qirrasini olib tashlash uning bog‘lamliligi xossasini o‘zgartirmaydi, ya’ni bu holda grafning siklga tegishli istalgan qirrasi ko‘prik bo‘lmaydi. Bu esa qilingan farazga ziddir. Teoremaning 4) tasdig‘idan uning 5) tasdig‘i kelib chiqishi isbotlandi.

Endi teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Berilgan G grafning o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi mumkin bo‘lsin. Teskarisini, yaini G graf asiklik emas deb faraz qilamiz. Bu holda, G da sikl topiladi va undagi ixtiyoriy siklga tegishli istalgan turli ikkita uchni kamida ikkita oddiy zanjir vositasida tutashtirish imkoniyati bor. Bu esa G grafning o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi shartiga ziddir.

G grafninng qo‘shni bo‘lmagan v_1 va v_2 uchlarini qirra bilan tutashtirish amalini qo‘llash natijasida faqat bitta siklga ega bo‘lgan graf hosil bo‘lishini ko‘rsatamiz. Shartga binoan qaralayotgan v_1 va v_2 uchlarni faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirish mumkin. Oddiy zanjir ta’rifiga ko‘ra esa bu zanjir tarkibida sikl yo‘q. Shuning uchun v_1 va v_2 uchlarni G grafning tarkibida bo‘lmagan (v_1, v_2) qirra bilan tutashtirish, albatta, tarkibida sikl topiladigan va bu sikl yagona bo‘lgan grafni hosil qiladi. Teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishi ham isbotlandi.

Nihoyat, 1- teoremaning 6) tasdig‘idagi shartlar bajarilsa, G grafning daraxt bo‘lishini, ya’ni teoremaning 1) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, asiklik G graf bog‘lamli bo‘lmasin. U holda, bu grafning ixtiyoriy bog‘lamli komponentidagi ixtiyoriy uchni uning boshqa bog‘lamli komponentidagi ixtiyoriy uch bilan qirra vositasida tutashtirish amalini qo‘llash natijasida tarkibida sikl bo‘lgan graf hosil bo‘lmaydi. Bu esa 6) tasdiqning ikkinchi qismiga ziddir. ■

1- natija. *Bittadan ko'p uchga ega bo'lgan istalgan daraxtda hech bo'lmasa ikkita darajasi birga teng uchlar mavjud.*

Isboti. Haqiqatdan ham, agar $v_1, v_2, ..., v_m$ berilgan daraxtning uchlari bo'lsa, "ko'rishishlar" haqidagi lemmaga binoan $\sum_{i=1}^{m} \rho(v_i) = 2(m-1)$ tenglik o'rinlidir. Daraxtning ta'rifiga ko'ra, u bog'lamlidir, shuning uchun $\rho(v_i) \geq 1$ $(i = \overline{1,m})$. Bundan yuqoridagi tenglik o'rinli bo'lishi uchun $\rho(v_1), \rho(v_2), ..., \rho(v_m)$ ketma-ketlikdagi hech bo'lmaganda ikkita son birga teng bo'lishi kelib chiqadi. ■

2- natija. *m ta uch va k ta bog'lamli komponentli o'rmondagi qirralar soni $(m-k)$ ga tengdir.*

Isboti. 1- teorema isbotining 2) tasdiqdan 3) tasdiq kelib chiqishiga bag'ishlangan qismiga qarang. ■

2- teorema. *Istalgan daraxtning markazi uning bitta uchidan yoki ikkita qo'shni uchlaridan iborat bo'ladi.*

Isboti. Agar daraxt bitta uch yoki ikkita qo'shni uch va ularni tuashtiruvchi qirradan tashkil topgan bo'lsa, teorema tasdig'i to'g'riligi oydindir.

G daraxt tarkibida ikkitadan ko'p uch bor deb faraz qilamiz. G daraxtdagi darajalari birga teng barcha uchlarni (ya'ni, daraxtning barcha chetki uchlarini) bu uchlarga insident barcha qirralar (ya'ni, daraxtning barcha chetki qirralari) bilan birgalikda G daraxtdan olib tashlaymiz. Natijada uchlari va qirralari soni berilgan G daraxtdagi uchlar va qirralar sonidan kam bo'lgan qandaydir G' daraxtni hosil qilamiz. G' daraxtdagi har bir uch ekssentrisiteti G daraxtdagi mos uch ekssentrisitetidan bitta kam bo'lishi va bu daraxtlarning markazlari ustma-ust tushishi ravshandir.

Berilgan graf chekli bo'lgani uchun, yuqoridagi bayon etilgan jarayonni yetarlicha marta takrorlash natijasida bitta uch yoki ikkita qo'shni uch va ularni turashtiruvchi qirradan tashkil topgan qandaydir daraxtni hosil qilamiz. ■

Uchlari soni ma'lum, o'zaro izomorf bo'lmagan va qandaydir shartlarni qanoatlantiruvchi daraxtlar sonini aniqlash masalasi daraxtlarni o'rganishda muhim masala hisoblanadi. Yuqorida 4, 5 va 6 ta uchlarga ega o'zaro izomorf bo'lmagan daraxtlar mos ravishda 2, 3 va 6 ta ekanligi ta'kidlangan edi. A. Keli uglerod atomlari soni berilgan va C_nH_{2n+2}

ko‘rinishdagi kimyoviy formula bilan ifodalanuvchi to‘yingan uglevodorodlar sonini topish masalasini har bir uchining darajasi bir yoki to‘rt bo‘lgan daraxtlar sonini topish masalasiga keltirib hal qilgan. Quyidagi teorema Keli nomi bilan yuritiladi.

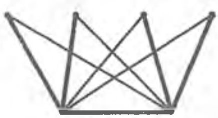
3- teorema (Keli). *Uchlari soni m bo‘lgan belgilangan daraxtlar soni m^{m-2} ga teng.*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi.

10.7.2. Grafning siklomatik soni. Faraz qilaylik, G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan qandaydir bog‘lamli graf bo‘lsin. Bu gfafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli graf bo‘lishi ravshandir. Grafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash amalini hosil bo‘lgan graflarga, imkoni boricha, ketma-ket qo‘llash natijasida G grafning barcha uchlarini bog‘lovchi graf – daraxtni hosil qilish mumkin. Bunday daraxt G **grafning sinch daraxti (sinchi, karkasi, qobirg‘asi)** deb ataladi.

Tabiiyki, bitta grafning bir necha sinch daraxtlari mavjud bo‘lishi mumkin.

2- misol. 3- shaklda tasvirlangan graf sinchlaridan birining qirralari berilgan grafning boshqa qirralariga qaraganda qalinroq chiziqlar vositasida ifodalangan. ■



3- shakl

Endi G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan m ta uch, n ta qirra va k ta bog‘lamli komponentlardan tashkil topgan graf bo‘lsin. Agar yuqorida tavsiflangan usul yordamida G grafdan qirralarni ketma-ket olib tashlash amalini qo‘llash natijasida uning har bir komponenti bog‘lamliligi buzilmasa, u holda berilgan G **grafning sinch o‘rmoni** deb ataluvchi grafni hosil qilish mumkin.

Berilgan G grafdan uning sinch o‘rmonini hosil qilish maqsadida olib tashlanishi kerak bo‘lgan qirralar soni $\lambda = \lambda(G)$ bu qirralarni olib tashlash tartibiga bog‘liq emasligi va $\lambda = n - m + k$ bo‘lishi ravshandir. Qaralayotgan G graf uchun $m - k \leq n$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligidan, $\lambda(G) \geq 0$ bo‘ladi. $\lambda(G)$ sonni G **grafning siklomatik soni (siklik rangi)** deb ataymiz.

Grafning siklomatik soni tushunchasi, qandaydir ma’noda, grafning bog‘lamlilik darajasini aniqlovchi vositadir. Ravshanki, daraxt uchun $\lambda = 0$ bo‘ladi (1- teoremaga qarang).

Grafning o'rmon bo'lishi uchun uning siklomatik soni nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (2- natijaga qarang).

Grafning yagona siklga ega bo'lishi uchun uning siklomatik soni birga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Qirralari soni uchlari sonidan kichik bo'lmagan graf siklga egadir. Bu tasdiqlar ham 1- teoremaning natijalaridir.

3- misol. 3- shaklda tasvirlangan graf $(6,9)$-graf bo'lib, uning bog'lamlilik komponentlari soni birga teng. Bu grafning siklomatik sonini aniqlasak, $\lambda = 9 - 6 + 1 = 4$ bo'ladi. Olib tashlangan qirralar 3- shaklda ingichka chiziqlar bilan ifodalangan. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Bir-biriga izomorf bo'lmagan
a) oltita, b) yettita,
d) sakkizta, e) to'qqizta
uchga ega barcha daraxtlarni geometrik ifodalang.

2. 1- shaklda tasvirlangan o'rmondagi daraxtlarning har biri uchun markaz(lar) bo'luvchi uchlarni toping.

3. Keli teoremasining isbotini o'rganing (masalan, [10] kitobga qarang).

4. Uchlari uchta va to'rtta bo'lgan barcha belgilangan daraxtlarni geometrik ifodalang.

5. Petersen grafining sinch daraxtlaridan birini aniqlang.

6. $K_{4,5}$ grafning sinch daraxtlaridan bir nechasini toping.

7. 12 ta uchi, 10ta qirrasi va 3 ta bog'lamli komponenti bo'lgan, sirtmoqsiz, karrali qirralari bo'lmagan grafning sinch o'rmonini hosil qilish uchun uning nechta qirrasini olib tashlash kerakligini aniqlang.

8. Insidentlik matritsalari quyida berilgan graflarning siklomatik sonlarini toping:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Uchlari qo‘shniligi matritsalari quyida berilgan graflarning sinch daraxtlaridan bir nechasini toping:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qanday grafga daraxt deyiladi?

2. O‘rmon deb nimaga aytiladi?

3. O‘rmon bilan daraxt bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?

4. Daraxtning uchlari va qirralari sonlari orasida qanday bog‘lanish bor?

5. Daraxtdan biror qirra olib tashlansa natijada qanday xossalarga ega bo‘lgan graf hosil bo‘ladi?

6. Daraxtning har bir qirrasi haqida nima deyish mumkin?

7. Daraxtdagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchini nechta oddiy zanjir bilan tutahtirish mumkin?

8. O‘rmondagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uch oddiy zanjir bilan tutahtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘lishi mumkin?

9. Daraxtning qo‘shni bo‘lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?

10. O‘rmondagi qo‘shni bo‘lmagan ikkita uchni qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?

11. Bittadan ko‘p uchga ega bo‘lgan istalgan daraxtda qancha darajasi birga teng uchlar bor?

12. m ta uch va k ta bog‘lamli komponenti bo‘lgan o‘rmonda qancha qirra bor?

13. Istalgan daraxtning markazi haqida nima deyish mumkin?

14. Grafning sinch daraxti deganda nimani tushunasiz?

15. Petersen grafidan bog‘lamlilikni buzmasdan nechta qirrani olib tashlash mumkin?

16. Oktaedrga mos grafdan bog‘lamlilikni buzmasdan nechta qirrani olib tashlash mumkin?

17. Grafning siklomatik soni qanday aniqlanadi?

18. Berilgan graf o‘rmon bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti siklomatik son orqali qanday ifodalanadi?

19. Graf yagona siklga ega bo‘lishining siklomatik son tushunchasi yordamida ifodalanuvchi qanday zaruriy va yetarli shartini bilasiz?

10.8. Tarmoqlar

Graf. Uch. Qirra. Orgraf. Yoy. Tarmoq. To‘plam. Blok-sxema. Gipergraf. Bog‘lamli tarmoq. Sirtmoq. Yoyning o‘tkazish qobiliyati. Uchning chiqish va kirish yarim darajalari. Manba. O‘pqon. Tarmoqdagi oqim. Yoy bo‘ylab oqim. Tarmoqdagi oqim miqdori. Maksimal oqim. To‘yingan, to‘yinmagan, to‘g‘ri va teskari yoylar. Zanjir. Tarmoqning "tor joyi". Kesim. Manbani o‘pqondan ajratuvchi kesim. Kesimning o‘tkazish qobiliyati. Minimal kesim.

10.8.1. Tarmoq tushunchasi. Graflar nazariyasida hozirgacha ba’zi iboralar bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmaganligini qayd qilgan edik. Bu fikr graflar nazariyasining **tarmoq** va tarmoqqa oid tushunchalari bilan ish ko‘rganda yaqqol namoyan bo‘ladi. Ba’zan, “tarmoq” iborasi o‘rniga “to‘r” iborasini ham qo‘llaydilar. Masalan, S.V. Yablonskiyning 1986-yilda bosilib chiqqan “Введение в дискретную математику” (Diskret matematikaga kirish) nomli o‘quv qo‘llanmasida ([1]da) graf tushunchasi umumlashtirilib, tarmoqning quyidagi ta’rifi berilgan va “tarmoq” tushunchasi xususida fikrlar ham bayon qilingan:

“Berilgan $M=\{a_1,a_2,...\}$ to‘plam va har bir E_i elementi Mdan olingan $R=\{E_0;E_1,E_2,...\}$ majmuani (to‘plamni) **tarmoq** deb ataymiz va $M(E_0;E_1,E_2,...)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $E_i=(a_{v_1(i)},a_{v_2(i)},...)$. M to‘plamning ob’yektlari tarmoqning **uchlari** deb, E_0 majmuadagi obyektlar esa – **tarmoqning qutblari** deb ataladi”.

Yuqorida eslatilgan kitobda ta’kidlanishicha: “Adabiyotda tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar ham uchraydi, masalan, “**blok-sxema**” tushunchasi, “**gipergraf**” tushunchasi. Blok-sxema tushunchasi tarmoq tushunchasidan oldin paydo bo‘lgan, gipergraf tushunchasi esa – keyinroq”.

Gipergraf tushunchasi – bu graf tushunchasining shunday umumlashmasiki, bunda qirralar na faqat ikki elementli bo‘lishlari, ular uchlar to‘plamining istalgan qism to‘plamlari bo‘lishi ham mumkin.

Graf tushunchasining turli umumlashmalarini ma’qullagan hamda bunday umumlashmalar turli masalarni hal etishda zarur qurol sifatida ishlatilishini ta'kidlagan holda [10] kitobdagi tarmoq tushunchasining bir-biriga ekvivalent bo'lgan quyidagi ikki ta'rifini keltiramiz:

1) har bir a yoyiga $\psi(a)$ manfiymas haqiqiy son mos qo'yilgan N orgraf **tarmoq** deb ataladi;

2) **tarmoq** deb shunday (D,ψ) juftlikka aytiladiki, bunda $D=(V,U)$ – orgraf, ψ esa D orgrafning yoylari to'plamini manfiymas haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya.

10.8.2. Tarmoqdagi oqimlar. Graflar (orgraflar) bilan bog'liq ko'plab tushunchalarni osonlik bilan tarmoqlar uchun ko'chirish mumkin.

$T=(G,b)$ tarmoq berilgan bo'lsin, bu yerda $G=(V,U)$ – bog'lamli graf (yoki orgraf, yo bo'lmasa, aralash graf), b esa G grafning yoylarini manfiymas b_{ij} $(v_i,v_j \in V)$ haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya. G grafda sirtmoq va karrali qirra va/yoki yoylar bo'lmasin deb faraz qilamiz. Ikkita v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi oriyentirlanmagan yoyni (qirrani) ikkita oriyentirlangan yoylarga almashtirish mumkin deb hisoblaymiz. Shuning uchun bundan buyon G grafni orgraf deb hisoblash mumkin.

Ta'kidlaymizki, "tarmoq" tushunchasi har bir yoyga bir necha sonlarni mos qo'yish imkoniyatini beradi, grafda (orgrafda) esa yoy faqatgina mos uchlarning tutashtirilgan yoki tutashtirilmaganligini aniqlaydi, xolos. Har bir (v_i,v_j) yoyga manfiymas b_{ij} sonni mos qo'yib, bu sonni **yoyning o'tkazish qobiliyati** deb ataymiz. Tarmoqning har bir $v\in V$ uchi uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz: v **uchning chiqish yarim darajasi** $\vec{\rho}(v)$ – bu v uchdan chiquvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi, v **uchning kirish yarim darajasi** $\overleftarrow{\rho}(v)$ – bu v uchga kiruvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi.

"Ko'rishishlar" haqidagi lemma bu yerda quyidagicha ifodalanadi: *tarmoqning barcha uchlari chiqish yarim darajalari yig'indisi ularning kirish yarim darajalari yig'indisiga tengdir.*

Grafning uchlari orasida kirish yarim darajalari nolga teng bo'lganlari guruhini ajratamiz. Bu guruhga tegishli uchlarning har biri **manba** deb ataladi. Shunga o'xshash, orgrafning chiqish yarim darajalari nolga teng bo'lgan uchlari guruhini ham ajratish mumkin. Bu guguhga tegishli har bir uch **o'pqon** deb ataladi.

Faraz qilaylik, G orgraf faqat bitta v_s manbaga va faqat bitta v_t o'pqonga ega bo'lsin. Bir necha manba va/yoki o'pqonga ega bo'lgan tarmoqning orgrafiga yangi elementlar qo‘shib olish yo‘li bilan yuqoridagi xususiy holga osonlik bilan keltiriladi[1].

G orgrafning har bir (v_i, v_j) yoyiga manfiymas x_{ij} sonlar mos qo‘yilgan bo‘lib, biror $p \geq 0$ uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

$$1)\quad \sum_{(v_i,v_k)\in U} x_{ik} - \sum_{(v_k,v_j)\in U} x_{kj} = \begin{cases} -p, \text{agar } k = s \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{agar } k \neq s \text{ va } k \neq t \text{ bo'lsa,} \\ p, \text{agar } k = t \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

2) G orgrafda mavjud barcha (v_i, v_j) yoylar uchun $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$.

Bu shartlar bajarilganda $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ to‘plamga T tarmoqdagi v_s manbadan v_t o‘pqonga yo‘nalgan **oqim** deb, p miqdorga esa, bu X **oqimning miqdori** deb ataladi. 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi har bir x_{ij} songa (v_i, v_j) **yoy bo‘ylab oqim** yoki **yoy oqimi** deyiladi.

Yuqoridagi 1) shartga ko‘ra manba va o‘pqondan farqli istalgan uchga “kiruvchi” oqim shu uchdan “chiquvchi” oqimga tengdir, 2) shartga ko‘ra esa, istalgan yoy bo‘ylab oqim miqdori shu yoyning o‘tkashish qobiliyatidan oshmaydi. 1) shartdan ko‘rinib turibdiki, manbaga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisi o‘pqonga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisiga tengdir: $\sum_{(v_s,v_j)\in U} x_{sj} = \sum_{(v_i,v_t)\in U} x_{it} = p$.

1- misol. 1- shaklda v_0 manba va v_5 o‘pqoni bo‘lgan $T = (G, b)$ tarmoq tasvirlangan bo‘lib, uning yoylari yoniga mos o‘tkazish qobiliyatlari yozilgan, bunda $G = (V, U)$,

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$$U = \{\overrightarrow{(v_0, v_1)}, \overrightarrow{(v_0, v_2)}, (v_1, v_2), (v_1, v_3), \overline{(v_2, v_3)},$$

$$\overline{(v_2, v_3)}, \overline{(v_2, v_4)}, (v_3, v_4), \overline{(v_3, v_5)}, \overline{(v_4, v_5)}\}$$

Bu tarmoq uchun $b_{01} = 7$, $b_{02} = 3$, $b_{12} = 2$, $b_{13} = 5$, $b_{21} = 2$, $b_{23} = 4$, $b_{24} = 1$, $b_{31} = 5$, $b_{32} = 3$, $b_{34} = 2$, $b_{35} = 2$, $b_{43} = 2$, $b_{45} = 4$ ekanligi shakldan ko‘rinib turibdi.

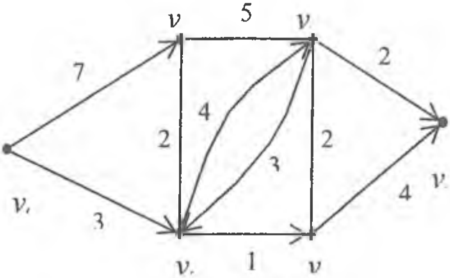
---

[1] Masalan, agar manbalar bittadan ko‘p bo‘lsa, u holda yangi (qalbaki) manba tarmoqqa kiritiladi va grafning qalbaki manbaga mos yangi uchi uning haqiqiy manbalariga mos uchlari bilan yoylar vositasida tutashtiriladi. O‘pqonlar ko‘p bo‘lganda ham shunga o‘xshash ish amalga oshiriladi.

Tarmoqning har bir uchi uchun chiqish yarim darajalari va kirish yarim darajalarini aniqlaymiz: $\vec{\rho}(v_0)=10$, $\vec{\rho}(v_1)=7$, $\vec{\rho}(v_2)=7$, $\vec{\rho}(v_3)=12$, $\vec{\rho}(v_4)=6$, $\vec{\rho}(v_5)=0$, $\overleftarrow{\rho}(v_0)=0$, $\overleftarrow{\rho}(v_1)=14$, $\overleftarrow{\rho}(v_2)=8$, $\overleftarrow{\rho}(v_3)=11$, $\overleftarrow{\rho}(v_4)=3$, $\overleftarrow{\rho}(v_5)=6$.

Berilgan T tarmoq orqali v_0 manbadan v_5 o‘pqonga 4 kattalikka ega bo‘lgan X^1 oqimni quyidagi sonlar to‘plami bilan ifodalash mumkin: $x_{01}=2$, $x_{02}=2$, $x_{12}=0$, $x_{13}=2$, $x_{21}=0$, $x_{23}=1$, $x_{24}=1$, $x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{34}=2$, $x_{35}=1$, $x_{43}=0$, $x_{45}=3$. Qaralayotgan X^1 oqimning miqdori $p_1=x_{01}+x_{02}=x_{35}+x_{45}=4$. ■

Tarmoq bo‘ylab o‘tkazish mumkin bo‘lgan oqimlar orasida miqdori eng katta (maksimal) oqimni topish amaliyot nuqtai nazaridan katta ahamiyatga egadir. Bunday oqimlar **maksimal oqimlar** deb ataladi. 1- misolda keltirilgan oqim maksimal oqim emas, chunki berilgan tarmoq uchun miqdori 5 bo‘lgan oqim bor (ushbu paragrafning oxiriga qarang).



1- shakl

Albatta, umumiy holda, tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo‘lishi mumkin.

Maksimal oqimni o‘rganishda quyidagi tushunchalarni kiritish maqsadga muvofiqdir. **To‘yingan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatiga teng, **to‘yinmagan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatidan kichik.

2- misol. 1- misolda qaralgan tarmoq uchun aniqlangan X^1 oqimda $x_{01}=2<b_{01}=7$ va $x_{24}=1=b_{24}$ bo‘lgani uchun (v_0,v_1) to‘yinmagan, (v_2,v_4) esa to‘yingan yoylardir. ■

Tarmoqdagi oqimlarni o‘rganishda **zanjir** tushunchasi muhim rol o‘ynaydi. Bu yerda zanjir deganda tarmoqdagi yo‘nalishi e’tiborga olinmasdan bir-biriga ulangan yoylar ketma-ketligini tushunamiz. Biror zanjirga tegishli yoyning yo‘nalishi zanjirdagi uchlar ketma-ketligini o‘tish yo‘nalishiga mos tushsa, bu yoyni **to‘g‘ri yoy** deb, aks holda esa, uni **teskari yoy** deb ataymiz.

Tarmoqdagi oqimlarni tadqiq qilganda **kesim** tushunchasi ham muhim hisoblanadi. T tarmoqning G orgrafi uchlari to'plami V ni o'zaro kesishmaydigan hamda har biri bo'sh bo'lmagan ikkita R va $\overline{R}$ qism to'plamlarga ajratamiz, ya'ni $V = R \bigcup \overline{R}$, $R \bigcap \overline{R} = \varnothing$, $R \neq \varnothing$ va $\overline{R} \neq \varnothing$.

Boshlang'ich uchi R to'plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to'plamga tegishli bo'lgan barcha yoylar to'plamini **kesim** deb ataymiz. Kesimni $(R, \overline{R})$ bilan belgilaymiz.

Agar $(R, \overline{R})$ kesim bo'lib, v_s manba R to'plamga, v_t o'pqon esa $\overline{R}$ to'plamga tegishli bo'lsa, u holda $(R, \overline{R})$ ga v_s **manbani** v_t **o'pqondan ajratuvchi** (yoki **ayiruvchi**) **kesim** deb ataladi.

Har bir kesimga qiymati kesimni tashkil etuvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisiga teng bo'lgan va **kesimning o'tkazish qobiliyati** (yoki **miqdori**) deb ataluvchi $b(R, \overline{R})$ son mos qo'yilishi mumkin:

$$b(R, \overline{R}) = \sum_{v_i \in R, v_j \in \overline{R}} b_{ij} .$$

Barcha mumkin bo'lgan kesimlar ichida o'tkazish qobiliyati eng kichik bo'lganini **minimal kesim** deb ataymiz.

Tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo'lishi mumkin ekanligini yuqorida ta'kidlagan edik. Xuddi shunga o'xshash, tarmoqda bir necha turli minimal kesimlar bo'lishi ham mumkin.

Ravshanki, agar tarmoq boshlang'ich uchi v_s manbada va oxirgi uchi v_t o'pqonda bo'lgan zanjirdangina iborat bo'lsa, bu tarmoq bo'ylab o'tkazish mumkin bo'lgan maksimal oqim qiymati shu zanjirni tashkil etuvchi yoylarning o'tkazish qobiliyatlarining minimal qiymati bilan chegaralangan bo'ladi. Shu tufayli, bu yerda, minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan yoy **tarmoqning (zanjirning) "tor joyi"** deb atalishi joizdir.

Tarmoqdagi v_s manbani v_t o'pqondan ajratuvchi $(R, \overline{R})$ kesim iborasi istalgan tarmoqda "tor joy" iborasining o'xshashi sifatida qaralishi mumkin.

Faraz qilaylik, $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ – T tarmoqdagi qandaydir oqim bo'lsin. Bu tarmoqdagi v_s uchdan v_t uchga yo'nalgan biror μ **yo'l**

bo‘ylab oqim shu yo‘l yoylaridagi oqimlarning eng kichik qiymati sifatida aniqlanadi:

$$p(\mu, X) = \min_{(v_i, v_j)\in\mu} x_{ij}.$$

Tabiiyki, tarmoqdagi X oqimning miqdori $p(X)$ uchun

$$p(X) = \sum_{\mu\in M} p(\mu, X)$$

tenglik o‘rinlidir, bu yerda M – G orgrafdagi v_s uchdan v_t uchga yo‘nalgan barcha yo‘llar to‘plamidan iborat.

Kesimning ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, v_s uchdan v_t uchga olib boruvchi ixtiyoriy μ yo‘l shu v_s va v_t uchlarni ajratuvchi har qanday $(R, \overline{R})$ kesimning hech bo‘lmaganda bitta yoyini o‘zida saqlaydi. Shuning uchun, agar ixtiyoriy $(R, \overline{R})$ kesimning barcha yoylarini tarmoqdan olib tashlasak, u holda G orgrafda v_s uchdan v_t uchga boradigan birorta ham yo‘l (va, demak, oqim ham) mavjud bo‘lmaydi.

Demak, yuqorida aytilganlarni hisobga olib tarmoqdagi oqim miqdori $p(X)$ bilan ixtiyoriy $(R, \overline{R})$ kesimning o‘tkazish qobiliyati $b(R, \overline{R})$ uzviy bog‘langan degan xulosaga kelish mumkin. Bu bog‘lanish quyidagi teoremada o‘zining aniq ifodasini topgan.

1- teorema. $T = (G, b)$ tarmoqdagi ixtiyoriy X oqim miqdori $p(X)$ shu tarmoqdagi v_s manba va v_t o‘pqonni ajratuvchi har qanday $(R, \overline{R})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatidan oshmaydi, ya’ni $p(X) \le b(R, \overline{R})$.

Isboti. $T = (G, b)$ tarmoqdagi X oqim ta’rifidan bevosita quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$p(X) = \sum_{(v_s, v_j)\in U} x_{sj}, \quad 0 = \sum_{(v_i, v_k)\in U} x_{ik} - \sum_{(v_k, v_j)\in U} x_{kj}, \quad v_k \in R.$$

Bu tengliklarning mos tomonlaridagi ifodalarni qo‘shib va o‘xshash hadlarini ixchamlab,

$$p(X) = \sum_{(v_i, v_j)\in(R, \overline{R})} x_{ij} - \sum_{v_j\in\overline{R}, v_i\in R} x_{ji}$$

tenglikni olamiz. 2) shartni va $\sum_{v_j\in\overline{R}, v_i\in R} x_{ji} \ge 0$ ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan $p(X) \le \sum_{(v_i, v_j)\in(R, \overline{R})} b_{ij} = b(R, \overline{R})$ munosabat kelib chiqadi. ■

1955- yilda L. R. Ford[1] va D. R. Falkerson[2] tomonidan **maksimal oqim va minimal kesim haqidagi teorema** deb ataluvchi quyidagi teorema isbotlangan.

2- teorema (Ford-Falkerson). Istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori manbani o‘pqondan ajratuvchi minimal kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng.

Isboti. $T=(G,b)$ tarmoq, $G=(V,U)$ orgraf, $v_s \in V$ manba, $v_t \in V$ o‘pqon va berilgan tarmoqdagi maksimal oqimning miqdori bo‘lsin. Agar tarmoqda shunday $X^*=\{x^*_{ij} \mid (v_i,v_j)\in U\}$ oqim topilsaki, uning $p^*=p(X^*)$ miqdori biror $(R^*,\overline{R^*})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng bo‘lsa, 1- teoremadan shu X^* maksimal oqim, $(R^*,\overline{R^*})$ esa minimal kesim bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, teorema isbotiga ega bo‘lish uchun $p^*=b(R^*,\overline{R^*})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan $(R^*,\overline{R^*})$ kesimni qurish mumkinligini ko‘rsatish yetarli.

Bunday kesimni qurish maqsadida tarkibida albatta v_s uch bor bo‘lgan, lekin v_t uchni saqlamaydigan R^* to‘plamni aniqlash zarur. Bu R^* to‘plam v_s uchdan chiquvchi zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lgan uchlar to‘plamidan iborat bo‘ladi. V to‘plamning qolgan uchlari $\overline{R^*}$ to‘plamni tashkil etadi.

$X^*=\{x^*_{ij} \mid (v_i,v_j)\in U\}$ maksimal oqim bo‘lsin deb faraz qilamiz. Shu oqimga mos R^* to‘plamning elementlarini ketma-ket ravishda quyidagi qoida bo‘yicha aniqlaymiz:

– $v_s \in R^*$;

– agar $v_i \in R^*$ va $x^*_{ij} < b_{ij}$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$;

– agar $v_i \in R^*$ va $x_{ji} > 0$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$.

Agar R^* to‘plamni aniqlash jarayonida v_t uchni R^* to‘plamga kiritish imkoniyati topilmasa, ya’ni $v_t \notin R^*$ bo‘lsa, u holda izlanayotgan $(R^*,\overline{R^*})$ kesimni qurish mumkin bo‘ladi.

---

[1] Bu yerda bir xil Lester Randolph Ford ism-sharifga ega AQSh matematiklari ota-bola L. R. Fordlarning kichigi (1927 yilda tug‘ilgan) nazarda tutilgan.

[2] D. R. Falkerson (Delbert Ray Fulkerson, 1924-1976) – matematik.

Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $v_t \in R^*$ bo'lsin. U holda, R^* to'plamning aniqlanish qoidasiga asoslanib, shunday $\mu = (v_s, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}, v_t)$ zanjirni qurish mumkinki, uning barcha to'g'ri yoylari oqimga to'yinmagan, teskari yoylarida esa oqim musbat bo'ladi. μ zanjirning barcha to'g'ri yoylari to'plamini $U_+(\mu)$, teskari yoylari to'plamini esa $U_-(\mu)$ deb belgilaymiz.

Quyidagi miqdorlarni qaraymiz: $\bar{\varepsilon} = \min\limits_{(v_i,v_j)\in U_+(\mu)} (b_{ij} - x^*_{ij})$, $\bar{\bar{\varepsilon}} = \min\limits_{(v_i,v_j)\in U_-(\mu)} x^*_{ij}$. Tushunarliki, $\varepsilon = \min(\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}}) > 0$ bo'ladi. Agar μ yo'lning barcha to'g'ri yoylarida oqim ε miqdorga oshirilib, uning barcha teskari yoylarida esa ε miqdorga kamaytirilsa, u holda tarmoqdagi oqim miqdori ε ga ortadi. Bu esa x^* oqimning maksimal oqim ekanligiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik $v_t \notin R^*$ ekanligini ko'rsatadi.

Endi yuqorida bayon qilingan qoidani ketma-ket qo'llab hosil qilingan R^* to'plam uchun $\overline{R^*} = V \setminus R^*$ deb olsak, G orgrafning R^* to'plamga tegishli uchlarning biridan chiqib $\overline{R^*}$ to'plamga tegishli uchlarning biriga kiruvchi barcha yoylari to'plami $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni tashkil etadi.

R^* to'plamning aniqlanishiga asosan barcha $(v_i, v_j) \in (R^*, \overline{R^*})$ yoylar oqimga to'yingan ($x^*_{ij} = b_{ij}$), $\overline{R^*}$ to'plamga tegishli uchlardan chiqib R^* to'plamga tegishli uchlarga kiruvchi barcha $(v_j, v_i) \in U$ yoylarda esa oqim nolga teng ($x^*_{ji} = 0$) bo'ladi. Shuning uvhun, 1- teoremaning isbotida hosil qilingan $p(X) = \sum\limits_{(v_i,v_j)\in(R,\bar{R})} x_{ij} - \sum\limits_{v_j\in\bar{R}, v_i\in R} x_{ji}$ formulaga ko'ra,

$$p^* = p^*(X) = \sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})} x^*_{ij} = \sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})} b_{ij} = b(R^*, \overline{R^*})$$

munosabatni olamiz. Demak, qurilgan $(R^*, \overline{R^*})$ kesim uchun $p^* = b(R^*, \overline{R^*})$ tenglik bajariladi. Bu yerdan, yuqoridagi eslatilgan mulohazalarga ko'ra, teorema isbotiga ega bo'lamiz. ■

10.8.3. Ford algoritmi. $T=(G,b)$ tarmoqni qaraymiz, bu yerda $G=(V,U)$ – orgraf, b esa G orgrafning yoylarini manfiymas b_{ij} $(v_i,v_j \in V)$ haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya.

G orgraf faqat bitta manbaga va faqat bitta o'pqonga ega bo'lsin deb faraz qilamiz. Maksimal oqim va minimal kesim haqidagi Ford-Falkerson teoremasining yuqorida keltirilgan isboti tarmoqdagi maksimal oqimni topish algoritmini tuzish nuqtai nazaridan konstruktivdir.

T tarmoqning uchlariga, ya'ni V to'plam elementlariga $0,1,2,...,m$ raqamlarni mos qo'yib, tarmoqning manbasi 0 uch, o'pqoni esa m uch bo'lsin deb hisoblaymiz. Bu tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishamiz. **Ford algoritmining** jadvallar bilan ish ko'riladigan jarayoni dastlabki, umumiy (takror-lanuvchi) va yakuniy qadamlardan iborat bo'lib, u quyida keltirilgan.

Dastlabki qadam. O'lchamlari $(m+1)\times(m+1)$ bo'lgan jadvalni quyidagicha tuzamiz. Agar (i,j) yoyning o'tkazish qobiliyati b_{ij} noldan katta va unga simmetrik (j,i) yoyining o'tkazish qobiliyati b_{ji} nolga teng bo'lsa, u holda jadvalning (i,j) katagiga b_{ij} sonni, uning asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik (j,i) katagiga esa, nolni yozamiz. Agar $b_{ij}=b_{ji}=0$ bo'lsa, u holda jadvalning (i,j) va (j,i) kataklari bo'sh qoldiriladi.

Umumiy qadam. 1. Tarmoqning manbasidan o'pqoniga o'tkazish qobiliyati noldan katta bo'lgan yo'l izlaymiz. Buning uchun jadvalning tarmoqdagi 0 uchga mos keluvchi ustuniga "$\underline{*}$" belgisini qo'yamiz. Jadvalning 0 uchga mos satridan $b_{0j}>0$ ($j=\overline{1,m}$) elementlarni topib, bu elementlar joylashgan ustunlarni 0 raqami bilan belgilaymiz.

Natijada tarmoqning musbat o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan barcha $(0,j)$ yoylari aniqlanadi. Bu yoylar manbadan o'pqonga boruvchi yo'lning dastlabki yoylaridir.

Belgiga ega ustunlar raqamlari bilan bir xil raqamli satrlarning har birini ketma-ket tekshirib chiqamiz. Tekshirish jarayonida har bir shunday satrda, masalan, jadvalning i uchga mos satrida belgiga ega bo'lmagan ustunlarda $b_{ij}>0$ elementlarni izlaymiz va shunday element(lar) topilsa bu element(lar) joylashgan ustun(lar)ni tekshirilayotgan satr raqami (ya'ni i) bilan belgilaymiz.

Shu tarzda davom ettirilsa, natijada manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatli izlangan yo'lning navbatdagi yoylari bo'lib xizmat qilishi mumkin bo'lgan yoylar topilgan bo'ladi. Jadvaldagi belgiga ega ustunlar raqamlariga mos raqamli tarmoqning uchlariga to'gri keluvchi satrlarni tekshirish jarayonini quyidagi mumkin bo'lgan hollardan biri amalga oshguncha davom ettiramiz:

a) jadvalning o'pqonga mos ustuni belgilandi;

b) jadvalning yangi ustunlarini (shu jumladan, o'pqonga mos ustunini ham) belgilash imkoniyati yo'q.

Agar a) hol ro'y bersa, u holda tarmoqda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan biror μ yo'l bor. Bu yo'l quyidagicha aniqlanadi.

Jadvalning o'pqonga mos m ustunining belgisi k bo'lsin deb faraz qilaylik. Demak, μ yo'lda m uchdan oldingi uch k uchdir. Jadvalning k uchga mos satri va m uchga mos ustuni kesishgan (k,m) katagidagi b_{km} elementiga "–" belgisi (b_{km}^{-}), shu katakka asosiy diagonalga nisbatan simmetrik hisoblangan (m,k) katakdagi b_{km} elementga esa "+" belgisi (b_{mk}^{+}) qo'yamiz.

Endi jadvalning k uchga mos ustuni belgisi r raqami bo'lsin deb faraz qilamiz. Jadvaldagi b_{mk}^{+} elementdan jadvalning k uchga mos ustuni bo'ylab harakatlanib, uning r uchga mos satriga o'tamiz va b_{rk} elementga "–" belgisi, asosiy diagonalga nisbatan simmetrik b_{kr} elementga esa "+" belgisi qo'yamiz. "+" va "–" belgilari qo'yish jarayonini manbaga mos 0 satrga kelib undagi mos elementga "–" belgisi, simmetrik elementga esa "+" belgisi qo'yguncha davom ettiramiz.

Umumiy qadamning 2- bandiga o'tamiz.

Agar b) hol bajarilsa, bu holda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan boshqa yo'l yo'q. Shuning uchun umumiy qadamni bajarish jarayoni tugaydi.

Jadvalning belgilangan ustunlariga mos orgrafning uchlari minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan $(R,\overline{R})$ kesim uchun R to'plamni tashkil etadi, orgrafning qolgan uchlari esa $\overline{R}$ to'plamga tegishlidir. $i \in R$

uchdan chiquvchi va $j \in \overline{R}$ uchga kiruvchi barcha (i, j) yoylar to‘plami berilgan tarmoq uchun minimal kesimdir. Yakuniy qadamga o‘tamiz.

2. Topilgan μ yo‘l o‘tkazish qobiliyatining θ qiymatini topamiz. Tabiiyki, θ son μ yo‘lni tashkil etuvchi yoylar o‘tkazish qobiliyatlarining eng kichigiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\theta = \min_{(i,j)\in\mu} b_{ij}^{-}.$$

Umumiy qadamning 3- bandiga o‘tamiz.

3. Topilgan μ yo‘lga tegishli yoylarning va ularga simmetrik yoylarning qolgan o‘tkazish qobiliyatlarini aniqlaymiz. Buning uchun jadvalning “–” belgisi bo‘lgan b_{ij}^{-} elementlaridan θ sonni ayirib, “+” belgili b_{ij}^{+} elementlariga esa θ sonni qo‘shib, natijalarni jadvaldagi mos o‘rinlariga yozamiz. Jadvalning “–” yoki “+” belgisi bo‘lmagan elementlari ozgarmaydi. Jadvaldagi barcha belgilarni olib tashlaymiz. Natijada o‘tkazish qobiliyatlari o‘zgargan tarmoqqa mos va dastlabki jadvalga o‘xshash bo‘lgan yangi jadvalni hosil qilamiz. Umumiy qadamning 1- bandiga o‘tamiz.

Yakuniy qadam. Dastlabki jadvalning elementlaridan oxirgi qadamda hosil bo‘lgan jadvalning mos elementlarini ayiramiz. Natijada musbat elementlari (i, j) yoyning mos x_{ij} oqim miqdorlariga teng bo‘lgan, elementlari esa asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik joylashgan oxirgi jadvalni hosil qilamiz. Tarmoqdagi maksimal oqim miqdori p oxirgi jadvalning manbaga mos satri yoki o‘pqonga mos ustuni elementlari yig‘indisiga teng, ya’ni

$$p = \sum_{j=1}^{m} x_{0j} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{im}.$$

Bu maksimal oqim qiymatini umumiy qadamni bajarish jarayonlarida aniqlangan barcha θ sonlarni qo‘shib ham hosil qilish mumkin. ■

3- misol. 1- misolda qaralgan tarmoq uchun v_0 manbadan v_5 o‘pqonga maksimal oqimni topish uchun Ford algoritmini qo‘llaymiz. Ford algoritmining dastlabki qadami va umumiy qadamining 1- bandini bajarib 1- jadvalni hosil qilamiz.

Umumiy qadamning 2- bandini bajarsak, $\theta_1 = \min\{7, 5, 2\} = 2$ qiymatni topamiz. Endi umumiy qadamning 3- bandini bajarib 2- jadvalni va algoritmni qo'llashda davom etib, 3- va 4- jadvallarni navbatma-navbat tuzamiz:

– 2- jadval uchun $\theta_2 = \min\{3, 1, 4\} = 1$;

–3- jadval uchun $\theta_3 = \min\{5, 3, 2, 3\} = 2$.

Demak, qaralayotgan tarmoqda quyida aniqlanuvchi 5 kattalikka ega oqim maksimal oqimdir: $x_{01} = 4$, $x_{02} = 1$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 4$, $x_{21} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{34} = 2$, $x_{35} = 2$, $x_{43} = 0$, $x_{45} = 3$.

1- jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(2)	(3)
	0	1	2	3	4	5
0		7^-	3			
1	0^+		2	5^-		
2	0	2		4	1	
3		5^+	3		2	2^-
4			0	2		4
5				0^+	0	

2- jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(2)	(4)
	0	1	2	3	4	5
0		5	3^-			
1	2		2	3		
2	0^+	2		4	1^-	
3		7	3		2	0
4			0^+	2		4^-
5				2	0^+	

3- jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(3)	(4)
	0	1	2	3	4	5
0		5^-	2			
1	2^+		2	3^-		
2	1	2		4	0	
3		7^+	3		2^-	0
4			1	2^+		3^-
5				2	1^+	

4- jadval

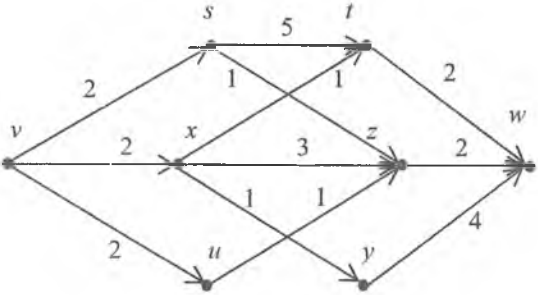
	(*)	(0)	(0)	(1)		
	0	1	2	3	4	5
0		3	2			
1	4		2	1		
2	1	2		4	0	
3		9	3		0	0
4			1	4		1
5				2	3	

5- jadval

	0	1	2	3	4	5
0		4	1			
1	–4		0	4		
2	–1	0		0	1	
3		–4	0		2	2
4			–1	–2		3
5				–2	–3	

Minimal kesim sifatida tarkibidagi R va $\overline{R}$ qism to'plamlari $R=\{0, 1, 2, 3\}$ va $\overline{R}=\{4, 5\}$ ko'rinishda aniqlangan $(R,\overline{R})$ kesimni ko'rsatish mumkin. Bu kesim $(2, 4)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$ yoylardan tashkil topishi ravshan. ■

Muammoli masala va topshiriqlar



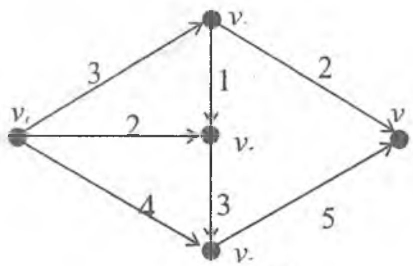
2- shakl

1. 2- shaklda tasvirlangan tarmoqda v uchni manba, w uchni esa o'pqon deb hisoblab, undagi bir necha oqimni aniqlang.

2. Ford algoritmni qo'llab 3- shaklda tasvirlangan tarmoq uchun v_0 dan v_4 ga maksimal oqimni aniqlang.

3. Ford algoritmni qo'llab 2- shaklda tasvirlangan tarmoq uchun v dan w ga maksimal oqimni anqlang.

4. $T=(G,b)$ tarmoqda $G=(V,U)$, $V=\{a_0,a_1,...,a_n\}$, U – yoylar korteji, b_{ij} – (a_i,a_j) yoyning o'tkazish qobiliyati, $X=\{x_{ij}:(a_i,a_j)\in U\}$ esa maksimal oqim bo'lsin. U vaqtda hech bo'lmaganda bitta $(a_i,a_j)\in U$ yoy topilib, shu yoy uchun $x_{ij}=b_{ij}$ tenglik bajarilishini ko'rsating.



3- shakl

5. $T=(G,b)$ tarmoqda $G=(V,U)$, $V=\{a_0,a_1,...,a_n\}$, a_0 – manba, a_n – o'pqon, U – yoylar korteji, b_{ij} – (a_i,a_j) yoyning o'tkazish qobiliyati va $X=\{x_{ij}:(a_i,a_j)\in U\}$ biror oqim bo'lsin. Agar a_0 va a_n ni bog'lovchi zanjirning barcha (a_i, a_j) to‘g‘ri yoylarida $x_{ij} < b_{ij}$ va barcha teskari yoylarda esa $x_{ij} > 0$ bo‘lsa, u holda bu zanjirga X oqimni **orttiruvchi yo‘l** deymiz. Berilgan X oqimning maksimal oqim bo‘lishi uchun uni orttiruvchi yo‘lning topilmasligi zarur va yetarli ekanligini ko‘rsating.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Graf tushunchasi qanday umumlashtirilishi mumkin?
2. Tarmoqdagi oqim deganda nimani tushunasiz?
3. Yoyning o‘tkazish qobiliyati nima?
4. Graf uchlarining chiqish va kirish yarim darajalari deb nimaga aytiladi?
5. Tarmoqda manba va o‘pqon deganda nimani tushunasiz?
6. Yoy bo‘ylab oqim nima?
7. Tarmoqdagi oqim miqdori qanday aniqlanadi?
8. Tarmoqdagi maksimal oqim deganda nimani tushunasiz?
9. To‘yingan yoy bilan to‘yinmagan yoy bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
10. To‘g‘ri yoy bilan teskari yoy orasida qanday farq bor?
11. Tarmoqdagi manbani o‘pqondan ajratuvchi kesim qanday aniqlanadi?
12. Tarmoqdagi minimal kesim deganda nimani tushunasiz?
13. Ford-Falkerson teoremasiga ko‘ra istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori nimaga teng?
14. Tarmoqdagi maksimal oqimni topishga mo‘ljallangan Ford algoritmning jadvallar bilan ish ko‘radigan jarayoni qanday qadamlardan iborat?

ADABIYOTLAR

1. **Codd E. F.** A relational model of data for large shared data banks. Communications of the ACM, 1970. Vol. 13, No. 6, June 1970, pp. 377-387.

2. **Euler L.** (Leonb Eulero) Solvtio problematis ad geometriam sitvs pertinentis. Comment Academiae Sci I. Petropolitanue, 8, 1736, p. 128-140.

3. **Lucas E.** Récréations Mathématiqques. Paris: Gautheir-Villas, 1891.

4. **Soleev A.** Ordering in Complicated Problems. In 14-th British Combinatorical Conference. Keele, GB, July, 1993. Abstracts. p. 96-98.

5. **To'rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S.** Kombinatorika va graflar nazariyasi: Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: SamDU nashri. 2006. – 263 bet.

6. **Алексеев В.Б., Кудрявцев В.Б., Сапоженко А.А., Яблонский С.В. и др.** Методическая разработка по курсу "Математическая логика и дискретная математика". 1980.

7. **Виленкин Н. Я.** Комбинаторика. М., «Наука», 1969.

8. **Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г.** Логика. М., «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 1998.

9. **Воробьев Н. Н.** Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1969.

10. **Гаврилов М.А., Девятков В.В., Пупырев Е.И.** Логическое проектирование дискретных автоматов. М., «Наука», 1977.

11. **Гаврилов П. П., Сапоженко А. А.** Сборник задач по дискретной математике. М., «Наука», 1977.

12. **Гиндикин С.Г.** Алгебра логики в задачах. М., «Наука», 1972.

13. **Гёдел К.** Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континиум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН, 3, №1, 1948.

14. **Гетманова А.Д.** Логика: Словарь и задачник. М., «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 1998.

15. **Гейтинг А.** Интуиционизм. М., «Мир», 1965.

16. **Гильберт Д., Бернайс П.** Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., «Наука», 1979.

17. **Горбатов В.А., Кафаров В.В., Павлов П.Г.** Логическое управление технологическими процессами. М., «Энергия», 1978.

18. **Горбатов В.А.**

а) Семантическая теория проектирования автоматов. М., «Энергия», 1979.

б) Основы дискретной математики. М., «Высшая школа», 1986.

19. **Горбатов В.А., Останков Б.Л., Фролов С.А.** Регулярные структуры автоматного управления / Под ред. В.А.Горбатова. М., «Машиностроение», 1980.

20. **Горбатов В.А., Павлов П.Г., Четвериков В.Н.** Логическое управление информационными процессами. М., «Энергоатомиздат», 1984.

21. **Гроссман И., Магнус В.** Группы и графы. М., «Мир», 1971.

22. **Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.** Пособие по математики для поступающих в вузы. М., «Наука», 1976.

23. **Евстигнеев В. А.** Применение теории графов в программировании. М., «Наука», 1985.

24. **Ерусалимский Я. М.** Дискретная математика: теория, задачи, приложения. М., «Вузовская книга», 2000.

25. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика. М., «Наука», 1979.

26. **Yokubov T.** Matematik mantik elementlari. Toshkent, «O‘qituvchi», 1983.

27. **Yokubov T., Kallibekov C.** Matematik mantik elementlari. Toshkent, «O‘qituvchi», 1996.

28. **Журавлёв Ю.И., Мазурик В.П., Столяров Л.Н.** Элементы математической логики. М., Изд-во МФТИ, 1975.

29. **Захарова Л. Е.** Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. М., Изд-во Московского государственного института электроники и математики, 2002.

30. **Зыков А.А.** Основы теории графов. М., «Наука», 1987.

31. **Ивин А.А., Никифорров А.Л.** Словарь по логике. М., «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 1997.

32. **Игошин В.И.** Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов, Изд-во Саратовского университета, 1991.

33. **Игошин В.И.** Задачник-практикум по математической логике. М., «Просвещение», 1986.

34. **Iskandarov R.I.** Matematik logika elementlari. Toshkent, Samarkand, SamDU nashriyoti, 1970.

35. **Калбертсон Т.** Математика и логика цифровых устройств. М., «Просвещение», 1965.

36. **Каменский М.И., Петрова Л.П., Садовский Б.Н.** Математическая логика. М., Изд-во МГУ, 1982.

37. **Карри Х.Б.** Основания математической логики. М., «Мир», 1969.

38. Квант. 1978, № 8.

39. **Клини С.** Математическая логика. М: «Мир», 1973.

40. **Кнут Д.** Искусство программирования для ЭВМ. М, «Мир», т. 1 1976, т. 2. 1977, т. 3. 1978.

41. **Кондаков Н.И.** Введение в логику. М., «Наука», 1967.

42. **Кофман А.** Введение в прикладную комбинаторику. М., «Наука», 1975.

43. **Колдуэлл С.** Логический синтез релейных устройств. М., 1961.

44. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1989.

45. **Кузин Л. Т.** Основы кибернетики. Том 2. М., «Энергия», 1979.

46. **Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.** Дискретная математика для инженера. 2-е изд. М., «Энергоатомиздат», 1988.

47. **Кук Д., Бейз Г.** Компьютерная математика. М., «Наука», 1990.

48. **Кудрявцев В.Б.**

а) Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. Проблемы кибернетики, Вып.8. М., «Физматгиз», 1962, стр. 91-116.

б) О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. Проблемы кибернетики, Вып.13. М., «Наука», 1965, стр. 45-74.

49. **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., «Наука», 1975.

50. **Лазарев В.Г, Пийль Е.И.** Синтез управляющих автоматов. М., «Энергия», 1978.

51. **Ландо С. К.** Лекции о производящих функциях. 2-е изд. М., МЦНМО, 2004.

52. Лекции по теории графов. / Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. М., «Наука», 1990.

53. **Липский В.** Комбинаторика для программистов. М., «Мир», 1988.

54. **Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.** Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Санкт-Петербург, «Лань», 1999.

55. **Лупанов О.Б.**

а) О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. “Проблемы кибернетики”, Вып.10. М.. «Физматгиз», 1963, стр. 88-96.

б) Об одном подходе к синтезу управляющих систем-принципы локального кодирования. // Проблемы кибернетики, Вып.14. М., «Наука», 1965, стр. 31-110.

в) О возможностях синтеза схем из произвольных элементов. // Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 158-183.

56. **Ляпунов А.А.** О логических схемах программ. // Проблемы кибернетики, Вып.1. М., «Физматгиз», 1958, стр. 46-74.

57. **Макаров И. П.** Дополнительные главы математического анализа. М.. «Просвещение», 1988.

58. **Мальцев А.И.** Алгоритмы и рекурсивные функции. М., «Наука», 1965.

59. **Мальцев А.И.** Алгебраические системы. М., «Наука», 1970.

60. **Марков А.А.** Теория алгорифмов. // Труды математического института АН СССР им. В.А.Стеклова, XLII, АН РФ, 1954.

61. **Марков А.А.** Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. // ДАН СССР, 55, 1947 587-590.

62. **Марков А.А.** Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. // ДАН СССР, 58, 1947, стр. 353-356.

63. **Матиясевич Ю.В.** Диофантовость перечислимых множеств. // ДАН СССР, 191, 1970, стр. 279-282.

64. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику. М., «Наука», 1971.

65. **Михайлов А.Б., Плоткин А.И.** Введение в алгебру и математический анализ. Сборник задач. 1. Высказывания. Предикаты. Множества. Санкт-Петербург, 1992.

66. **Морочник С. Б., Розенфельд Б. А.** Омар Хайям – поэт, мыслитель, учёный. Сталинабад, «Таджикгосиздат», 1957.

67. **Новиков П.С.** Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., «Наука», 1977.

68. **Новиков П.С.** Элементы математической логики. М., «Наука», 1973.

69. **Новиков Ф. А.** Дискретная математика для программистов. СПб., «Питер», 2000.

70. **Нотансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.. «Наука», 1974.

71. **Омар Хаййам.** Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда. М.. «Издательство восточной литературы», 1961.

72. **Оре О.** Теория графов. М., «Наука», 1980.

73. **Поспелов Д.А.** Логико-лингвистические модели в системах управления. М., «Энергия», 1981.

74. **Пушников А. Ю.** Введение в системы управления базами данных. Часть 1. Реляционная модель данных: Учебное пособие / Изд-е Башкирского ун-та. Уфа, 1999.

75. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., «Мир», 1980.

76. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., «Мир», 1972.

77. **Sarimsakov G.A.** Haqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalar nazariyasi. Toshkent, «O'qituvchi», 1968.

78. **Sobirov M. A.** Matemetik fanlardan ruscha-o'zbekchcha lug'at. Toshkent, «O'qituvchi», 1983.

79. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика. М., «Мир», 1990.

80. **Трахтенброт Б.А.** Алгоритмы и машинное решение задач. М., «Физматдиз», 1960.

81. **To'rayev H.T.**

а) Matematik mantik va diskret matematika, Toshkent, «O'qituvchi», 2003.

б) Matematik mantik va diskret matematika, I-qism. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2000.

в) Matematik mantik va diskret matematika, II-qism. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2001.

82. **Успенский В. А.** Треугольник Паскаля. М., «Наука», 1966.

83. **Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.** Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.

84. **Шестаков В.И.** Математическая логика и автоматика. // Математика в школе, 1958, № 6., 1959, № 1.

85. **Шеннон К.Э.** Работы по теории информации и кибернетики. М., «ИЛ», 1963.

86. **Шоломов Л.А.** Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. М., «Наука», 1960.

87. **Чёрч А.** Введение в математическую логику, том 1, М., «ИЛ», 1961.

88. **Чегис И.А., Яблонский С.В.** Логические способы контроля работы электрических схем. М., Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 270-360.

89. **Чудновский Г.В.** Диофантовы предикаты, УМН, 25, № 4, 1970, стр. 185-186.

90. **Угрюмов Е.П.** Проектирование элементов и узлов ЭВМ. М., «Высшая школа», 1987.

91. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов. М. «Наука», 1980.

92. **Харари Ф.** Теория графов. М., «Мир», 1973.

93. **Яблонский С. В.**

а) Введение в дискретную математику. М., «Наука», 1979.

б) Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М., «Наука», 1986.

в) Методические разработки по курсу "Элементы дискретной математики". М., Изд-во МГУ, 1971.

г) Основы алгебры логики и теории контактных схем. М., Тр. института математики им. Стеклова, 1958, т. 51.

д) Функциональные построения в k-значной логике. М., Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 5-142.

94. **Яблонский С. В., Лупанов О. Б. и др.** Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Том I. М., «Наука», 1974.

95. **Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М., «Наука», 1966.

96. **Qobulov V.Q.** Raqamli avtomatlar. T., 1980.

97. **To'rayev H.T.** Matematik mantik va diskret matematika,. Ma'ruzalar matni. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2001.

98. **To'rayev H.T.** Mulohazalar algebrasi. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

99. **To'rayev H.T.** Mulohazalar hisobi va predikatlar mantiqi. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

100. **To'rayev H.T.** Birinchi tartibli matematik nazariya va algoritmlar. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

101. **To'rayev H.T.** Diskret matematikaning ribernetikaga tatbiqi. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

102. **To'rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S.** Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent, «Ilm Ziyo». 2009.

ASOSIY BELGILASHLAR

Kitobda quyidagi asosiy belgilashlar qabul qilingan.

N – natural sonlar to'plami,

Z – butun sonlar to'plami,

R – haqiqiy sonlar to'plami,

$\varnothing$ – bo'sh to'plam,

U – universal to'plam,

$|A|$ – A to'plamning quvvati,

$\bigcup$ – birlashma belgisi,

$\bigcap$ – kesishma belgisi,

$A \setminus B$ – A to'plamdan B to'plamni ayirish natijasida hosil bo'lgan to'plam,

$\overline{A}_B$ – A to'plamni B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam,

$\overline{A}$ – A to'plamni U universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam,

2^A – A to'plam uchun bulean,

P_n – n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni,

A_n^m – n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni,

C_n^m – n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni,

$C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ – n ta komponentli kortej uchun takrorli o'rin almashtirishlar soni ($n_1 + n_2 + ... + n_k = n$),

$\overline{A}_n^m$ – n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni,

$\overline{C}_n^m$ – n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni,

$B(n,k)$ – qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni,

$B(n)$ – qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga barcha bo'laklanishlari soni,

$R(n,k)$ – qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni,

$R(n)$ – qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning barcha bo'laklanishlari soni,

■ – teorema, natija, lemma, xossaning isboti yoki misol, algoritm tugaganligi.

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI.. 3

V – BOB. PREDIKATLAR MANTIQI.. 5

5.1. Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida mantiqiy amallar 5

5.2. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari.. 9

5.3. Predikatlar mantiqining formulasi. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati. Predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari.. 13

5.4. Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar.. 20

5.5. Yechilish muammosi. Xususiy hollarda formulaning umumqiymatliligini topish algoritmlari... 27

5.6. Predikatlar mantiqining matematikaga tatbiqi. Aksiomatik predikatlar hisobi.. 31

VI – BOB. MATEMATIK NAZARIYALAR.. 40

6.1. Birinchi tartibli til. Term va formulalar.. 41

6.2. Mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar. Keltirib chiqarish qoidasi. 43

6.3. Algebra, geometriya va analizda mavjud bo‘lgan matematik nazariyalar.. 45

6.4. Nazariyada isbotlash tushunchasi. Tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi.. 46

6.5. Deduksiya teoremasi.. 47

6.6. Nazariya tilining interpretatsiyasi. Nazariyaning modeli.............. 51

6.7. Interpretasiyaning izomorfizmligi. Nazariyaning qat’iyligi........... 56

6.8. Nazariyaning zidsizlik, to‘liqlilik va yechilish muammolari......... 57

6.9. Natural sonlar nazariyasi. Gyodelning to‘liqsizlik haqidagi teoremasi.. 61

VII – BOB. ALGORITMLAR.. 67

7.1. Algoritm tushunchasi va uning xarakterli xususiyatlari................ 67

7.2. Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to‘plamlar........................ 70
7.3. Algoritm tushunchasiga aniqlik kiritish.................................... 72
7.4. Hisoblanuvchi funksiyalar. Qismiy rekursiv va umumrekursiv funksiyalar.. 77
7.5. Tyuring mashinalari.. 86
7.6. Tyuring mashinasida algoritmni realizasiya qilish......................... 91
7.7. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi.............................. 96
7.8. Markovning normal algoritmlari.. 99
7.9. Markov bo‘yicha qismiy hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar.. 104
7.10. Algoritmik yechilmovchi muammolar... 106

VIII – BOB. MATEMATIK MANTIQNING TEXNIKAGA TATBIQI... 115
8.1. Funksional elementlar va ulardan sxemalar yasash.................... 115
8.2. Ko‘p taktli sxemalar.. 122
8.3. Teskari bog‘lanishi bo‘lmagan avtomatlar.................................. 128
8.4. Teskari bog‘lanishi bo‘lgan funksional elementlardan sxemalar yasash. Chekli avtomat haqida umumiy tushunchalar...................... 130
8.5. Mili va Mur avtomatlari.. 133
8.6. Rele-kontaktli sxemalar.. 136
8.7. Kontaktli sxemalar va ularning sintezi.. 139
8.8. Kontakt sxemalarni minimallashtirish muammosi......................... 146

IX – BOB. MATEMATIK MANTIQ FUNKSIYALARINI MINIMALLASHTIRISH MUAMMOSI..................................... 152
9.1. Masalaning qo‘yilishi.. 152
9.2. Diz’yunktiv normal shaklni soddalashtirish va tupikli DNSh....... 156
9.3. Minimallashtirish masalasining geometrik tarzda qo‘yilishi......... 163
9.4. Joiz (ruxsat etilgan) kon’yunksiyalar... 166
9.5. Qisqartirilgan diz’yunktiv normal shakl....................................... 168
9.6. Qisqartirilgan diz’yunktiv normal shaklni yasash algoritmi.......... 170
9.7. Tupikli diz’yunktiv normal shakllarni geometrik asosda yasash usullari.. 172

9.8. Tupikli diz'yunktiv normal shakllarni yasash algoritmi................ 175

9.9. Ayrim yagona tarzda hosil qilinadigan diz'yunktiv normal shakllar............ 177

X – BOB. GRAFLAR NAZARIYASINING ELEMENTLARI...... 183

10.1. Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari....................... 183

10.2. Graflarning berilish usullari............ 192

10.3. Graflar ustida amallar............ 204

10.4. Marshrutlar va zanjirlar............ 210

10.5. Eyler va Gamilton graflari............ 221

10.6. Grafning metrik xarakteristikalari............ 230

10.7. Daraxtlar............ 239

10.8. Tarmoqlar............ 247

ADABIYOTLAR............ 262

ASOSIY BELGILASHLAR............ 268

H. T. To'rayev, I. Azizov

MATEMATIK MANTIQ VA DISKRET MATEMATIKA

II jild

Muharrir *M.Sa'dullayev*
Tehnik muharrir *H.Safaraliyev*

Litsenziya № AI 190. 10.05.2011 y.

Bosishga ruxsat etildi 17.07.2011. Bichimi 60x84/16. Ofset qo'ozi.
TimesUz garniturasi. Shartli bosma t. 17,0. Nashr t. 17.0. Adadi 500 nusxa
Buyurtma № 12/05.

"Tafakkur - Bo'stoni" nashriyoti.
Toshkent, Yunusobod, 9-mavze, 13-uy

«TAFAKKUR» nashriyoti bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, Chilonzor ko'chasi, 1-uy.

«TAFAKKUR-BO'STONI»
NASHRIYOTI

ISBN 978-9943-362-34-5

9 789943 362345