O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

A. GAZIYEV, I. ISRAILOV,
M.YAXSHIBOYEV

FUNKSIYALAR VA GRAFIKLAR

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'!im vazirligi tomonidan oliy ta'lim muassasalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

„VORIS-NASHRIYOT"
TOSHKENT — 2006

Taqrizchilar: **A. S. Soleyev** — Alisher Navoiy nomidagi SamDU algebra va geometriya kafedrasi mudiri, fizika - matematika fanlari doktori, professor;
T. S. Maqsudov — Samarqand shahar 1-son fizika-matematika litseyi direktori, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent;
O. L. Musurmonov — pedagogika fanlari nomzodi, dotsent.

Ma'lumotlar to'plamida matematik analizning asosiy bo'limlaridan biri bo'lgan funksiyalar va ularning grafiklarini chizish bo'yicha zarur materiallar to'liq keltirilgan va o'quvchi, amaliyotda uchraydigan tekshirishning qiyinlik darajasi har xil bo'lgan funksiyalarning grafiklarini elementar yo'l bilan va hosila yordamida chizish usullari to'g'risidagi ma'lumotlar haqida mavjud ko'p sonli kitoblarga murojaat qilmasdan, ushbu qo'llanmadan foydalanishi mumkin.

Ma'lumotlar to'plamidan «matematika», «mexanika», «amaliy matematika va informatika» hamda barcha texnik yo'nalishdagi bakalavriatura talabalari, akademik litseylar, kasb-hunar kollejlari talabalari, o'rta umumiy ta'lim maktablari o'quvchilari, shuningdek, matematika fani o'qituvchilari, muhandislar ham qo'llanma sifatida foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-304-13-0

SO'ZBOSHI

O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi qonuni va «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» uzluksiz ta'lim tizimini isloh qilishning yangi davrini ochganligi tabiiydir.

Uzluksiz ta'lim tizimi har bir bosqichining o'ziga xos xususiyatlarini hisobga olgan holda ular uchun o'quv adabiyotlarini yaratish zaruriyati kelib chiqdi. Ana shu maqsadda Respublikamizda «Uzluksiz ta'lim tizimi uchun o'quv adabiyotlarining yangi avlodini yaratish konsepsiyasi» ishlab chiqildi va hozirgi vaqtda u amalga oshirilmoqda. Konsepsiyada foydalanishga qulay bo'lgan, muayyan fanni o'zlashtirish uchun zarur bo'lgan ma'lumotlar, ilmiy ko'rsatkichlar va o'lchamlar, turli belgilar, qisqa ma'lumotlardan tashkil topgan davlat nashri — ma'lumotlar to'plami (ma'lumotnomalar) muhim ekanligi ko'rsatilgan.

Mualliflar «Funksiyalar va grafiklar» mavzusini tanlab, shu mavzuda ma'lumotlar to'plami tuzishni maqsad qilib qo'yar ekanlar, quyidagilarga alohida e'tibor qaratishdi: ma'lumki, funksiyaning berilish usullari har xil bo'ladi. Ular analitik usul, jadval usuli, so'z bilan ifodalash usuli hamda grafik usullardir. Ba'zan grafik usul funksiya berilishining yagona usuli bo'lishi ham mumkin. U fizika, texnika, tibbiyotda qo'llanilib, ko'pgina o'zi yozadigan asboblarning ishiga asos bo'ladi ham. Lekin funksiya berilishining grafik usuli keng tarqalganligiga qaramasdan, funksiyalarni tekshirishda matematik analiz tushunchalarini qo'llashga bag'ishlangan ma'lumotlar to'plamini o'z ichiga olgan adabiyotlarning yetarli darajada emasligi ko'zga yaqqol tashlanadi. Masalan, I.P Gurskiyning «Функции и построени графиков», I.X. Sivashinskiyning «Элементарные функции и графики» N.N. Shundaning «Функции и графики» (ukrain tilida) kitoblarida, asosan, funksiyalarning grafiklarini elementar matematika tushunchalari yordamida yasash usullari bayon qilingan bo'lsa, N.A. Virchenko, I.I. Lyashko, K.I. Shvesovlarning «Графики функций. Справочник.», R.B. Rayxmistning «Графики функций. Задачи и упражнения.», V.V. Vavilov va boshqalarning «Задачи по математике. Начала анализа» kitoblarida funksiyalarning grafiklari ham elementar matematika tushunchalari hamda matematik analiz tushunchalari yordamida chizilishi ko‘rsatilgan. Ammo o‘zbek tilida yuqorida keltirilgan adabiyotlarga o‘xshash adabiyotlar qariyb yo‘q bo‘lganligi mualliflarni ushbu ma’lumotlar to‘plami — o‘quv qo‘llanmani tayyorlashga undadi.

Ma’lumotlar to‘plami to‘rt bobdan iborat bo‘lib, uning **birinchi bobi** funksiyalar to‘g‘risidagi asosiy tushunchalar, funksiya grafigining asimptotalari, funksiya grafigining xarakterli nuqtalari hamda elementar funksiyalar va ularning xossalariga bag‘ishlangan.

Ikkinchi bobda elementar matematika tushunchalari yordamida funksiyalarning grafiklarini chizish usullari yoritilgan.

Kitobning **uchinchi bobida** hosila yordamida funksiyalarning grafiklarini chizish batafsil bayon qilingan bo‘lib, tenglamasi oshkor va oshkormas, parametrik, qutb koordinatalar sistemasida berilgan funksiyalarni to‘liq tekshirish va ularning grafiklarini chizish usullari berilgan.

Mazkur qo‘llanmaning so‘nggi **to‘rtinchi bobida** elementar bo‘lmagan sodda funksiyalarning asosiy xossalari va grafiklari, texnika, mexanika, matematika, fizika, amaliy matematikada ko‘p uchraydigan va qo‘llaniladigan muhim chiziqlarning grafiklari keltirilgan.

Qo‘llanmaning har bir paragrafida, avvalo, mavzuga tegishli ta‘riflar, tushunchalar va tasdiqlar berilgan bo‘lib, ularning har biriga misollar yechib ko‘rsatilgan va mustaqil ishlash uchun yetarli darajada misol va masalalar javoblari bilan berilgan, bu esa undan o‘quv qo‘llanma sifatida ham foydalanish mumkinligini anglatadi.

Mualliflar ushbu qo‘llanmaning kompyuter variantini tayyorlashda o‘z hissasini qo‘shgan magistrlar A. Otaboyeva va F. To‘rayevaga o‘z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

Mualliflar, o‘zlarining kitobni yozishdagi mehnatlari keng kitobxonlar ommasi uchun foydali bo‘ladi deb umid bildiradilar va ularning kitob sifatini yaxshilashga qaratilgan fikr-mulohazalarini mamnuniyat bilan qabul qiladilar.

Mualliflar

I bob. FUNKSIYALAR HAQIDA ASOSIY TUSHUNCHALAR

1- §. TO'PLAM TUSHUNCHASI. TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR

1. To'plam tushunchasi. «To'plam» tushunchasi matematikaning ta'rifsiz qabul qilingan asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, ba'zi belgilariga asosan birgalikda qaraladigan obyektlar yoki narsalar (predmetlar) majmuasidir. To'plamni tashkil qiluvchi har bir obyekt yoki narsa uning «elementi» deyiladi. To'plam tushunchasi misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, Samarqand shahridagi umum ta'lim maktablari, Quyosh sistemasidagi planetalar, barcha natural sonlar, barcha to'g'ri kasrlar va hokazolar to'plamni tashkil etadi.

To'plamlar lotin yoki grek alfavitining bosh harflari bilan, uning elementlari esa kichik harflari bilan belgilanadi. Masalan, $A, B, C, D, \ldots, X, Y, Z$ lar bilan to'plamni, $a, b, c, d, \ldots, x, y, z$ lar bilan esa to'plamning elementlari belgilanadi.

Agar A to'plamning elementi a bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Aks holda, ya'ni a element A to'plamga tegishli bo'lmasa, unda $a \notin A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi. Masalan, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ bo'lsa, u holda $3 \in A$, $2 \notin A$.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to'plam *chekli* to'plam, cheksiz sondagi elementlardan tashkil topgan to'plam esa *cheksiz to'plam* deb ataladi. Masalan, Samarqand shahridagi umumiy o'rta ta'lim maktablari to'plami chekli to'plamni, to'g'ri kasrlar to'plami esa cheksiz to'plamni tashkil etadi.

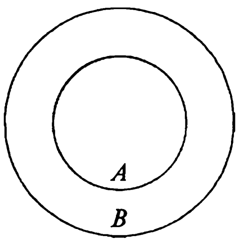
Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi. Bo'sh to'plamlarga quyidagilar misol bo'la oladi: a) $x^2 + 1 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami; *b*) o'zaro parallel ikkita turli to'g'ri chiziqning umumiy nuqtalari to'plami; *d*) $x^2 + 1 < 0$ tengsizlikning yechimlari to'plami va h.k.

Ko'pincha, to'plamlar, ularning elementlari chekli yoki cheksiz bo'lishidan qat'iy nazar, simvolik ravishda doirachalar bilan tasvirlanadi. Bu tasvirlash to'plamlar ustida bajariladigan amallarni tasavvur qilishda va ular orasidagi munosabatlarni o'rganishda ancha qulayliklar tug'diradi.

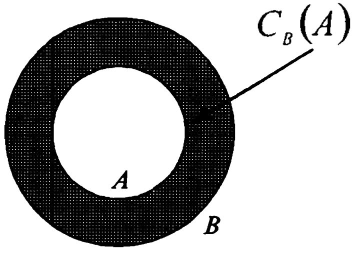
1- ta'rif. Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam to'plamning *qismi* yoki *qismiy to'plami* (*to'plamosti*) deb ataladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi (1.1-chizma). Bu quyidagicha o'qiladi: «B to'plam A to'plamni o'z ichiga oladi».

Eslatma. Bo'sh to'plam har qanday A to'plamning qism to'plami hisoblanadi: $\varnothing \subset A$. Har qanday A to'plam o'z-o'zining qism to'plami hisoblanadi: $A \subset A$.

Misollar: 1) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra $A \subset B$ bo'ladi;



1-chizma.



1.2.- chizma.

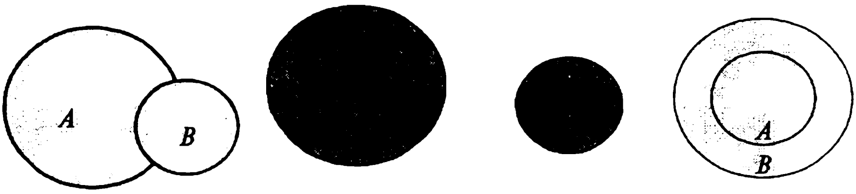
2) a, b, c uch elementdan iborat bo'lgan to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning hamma qism to'plamlari quyidagicha bo'ladi: $\varnothing$ bo'sh to'plam; bir elementli $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ to'plamlar; ikki elementli $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ to'plamlar va berilgan $\{a, b, c\}$ to'plamning o'zi.

2- ta'rif. Agar A to'plam B to'plamning qismi, B to'plam A to'plamning qismi bo'lsa, ya'ni $A \subset B$, $B \subset A$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlar *bir-biriga teng* deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi. Masalan: $A = \{1, -1\}$, B to'plam esa ushbu $(x-1)^2(x+1)^3 = 0$ tenglamaning barcha haqiqiy ildizlaridan tashkil topgan bo'lsa, ravshanki, A to'plam B to'plamga teng bo'ladi.

2. To'plamlar ustida amallar.

3- ta'rif. B ixtiyoriy to'plam bo'lib, A to'plam uning biror qismi bo'lsin. B to'plamning A ga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A ning B ga *qadar to'ldiruvchisi* deyiladi va u $C_B(A)$ kabi belgilanadi (1.2- chizma). Masalan, $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'lsa, u holda $C_B(A) = \{1, 3, 5, 6\}$.

4- ta'rif. A va B ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. Agar C to'plam A va B to'plamlarning barcha elementlaridan iborat bo'lib, boshqa elementlari bo'lmasa, u holda C to'plam A va B to'plamlarning *yig'indisi* (*birlashmasi*) deyiladi va $A \cup B = C$ kabi belgilanadi (1.3-chizma).



1.3.- chizma.

Eslatma. Shuni qayd qilib o'tish kerakki, agar biror element ham A to'plamga, ham B to'plamga qarashli bo'lsa, bu element C to'plamda bir marta hisoblanadi.

Yuqoridagi 4- ta'rifdan to'plamlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1°. $A \cup A = A$. 2°. $A \cup B = B \cup A$. 3°. $A \cup \varnothing = A$.

4°. Agar $A \subset B$ bo'lsa, $A \cup B = B$ bo'ladi.

Misollar: 1) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'lsa, $C = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ bo'ladi.

2) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, ..., 2n - 1, ...\}$, $B=\{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ bo'lsa, $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n, ...\}$ bo'ladi.

5- ta'rif. A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning *umumiy qismi* yoki *ko'paytmasi* (*kesishmasi*) deyiladi va $C = A \cap B$ kabi belgilanadi (1.4- chizma).

To'plamlarning quyidagi xossalari 5- ta'rifdan bevosita kelib chiqadi:

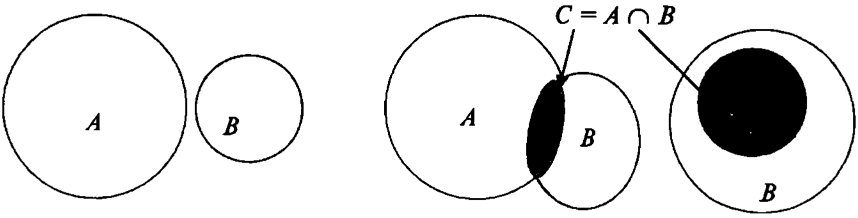
5°. $A \cap A = A$. 6°. $A \cap B = B \cap A$. 7°. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

8°. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \cap B = A$ bo'ladi.

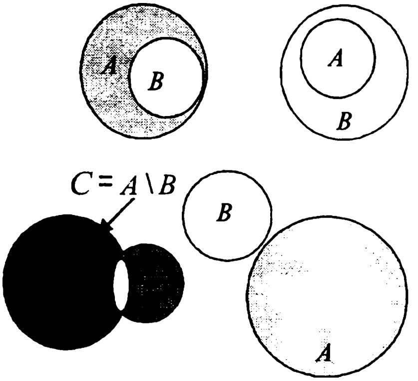
Misollar: 1) $A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, ...\}$, $B =\{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, ...\}$ bo'lsa, $C = A \cap B$ $\{\pm 6, \pm 12, ...\}$ bo'ladi;

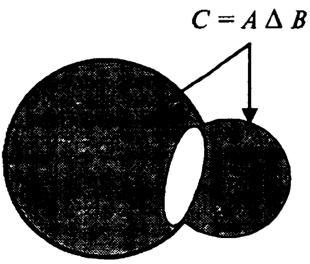
2) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ bo'lsa, $A \cap B = \varnothing$ bo'ladi.

Eslatma. Biz to'plamlarning yig'indisi hamda ko'paytmasi ta'riflarini ikkita to'plam uchun keltirdik. Agar A_1, A_2, ..., A_n to'plamlar berilgan bo'lsa, ularning yig'indisi $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$



1.4- chizma.





1.5- chizma. **1.6- chizma.**

hamda ko‘paytmasi $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ham yuqoridagiga o‘xshash ta‘riflanadi.

6- ta‘rif. A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tuzilgan C to‘plam A va B to‘plamlarning *ayirmasi* deyiladi va $C = A \setminus B$ kabi belgilanadi (1.5- chizma).

To‘plamlarning quyidagi xossalari 6- ta‘rifdan bevosita kelib chiqadi:

9°. $A \setminus \varnothing = A$. 10°. $\varnothing \setminus A = \varnothing$. 11°. $A \setminus A = \varnothing$.

Misollar: 1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ bo‘lsa, $C = A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$ bo‘ladi;

2) $A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots\}$, $B = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \ldots\}$ bo‘lsa, $C = A \setminus B = \{\pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \ldots\}$ bo‘ladi.

7- ta‘rif. A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan va B to‘plamning A to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan tuzilgan C to‘plam A va B to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* deb ataladi va $C = A \Delta B$ kabi belgilanadi, ya‘ni $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (1.6- chizma).

M i s o l l a r: 1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ bo'lsa, $A\Delta B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$ bo'ladi;

2) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$, $B = \{3, 5, 7, 9, 11, ...\}$ bo'lsa, $A\Delta B = \{2, 4, 8, ...\} \cup \{3, 5, 7, 9, ...\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$ bo'ladi.

8- ta'rif. Birinchi element X to'plamga va ikkinchi element Y to'plamga kirgan barcha (x, y) juftlardan iborat bo'lgan nuqtalar to'plami X va Y to'plamlarning *Dekart (to'g'ri) ko'paytmasi* deyiladi va u $[X, Y]$ yoki $X \times Y$ kabi belgidanadi, ya'ni $C = X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$.

Eslatma. A to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasi quyidagicha belgilanadi:

$A \times A = A^2 = \{(x, y): x \in A, y \in A\}$.

M i s o l l a r: 1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$ bo'lsa, u holda $A \times B = \{(a,\alpha), (a,\beta), (b,\alpha), (b,\beta), (c,\alpha), (c,\beta)\}$ bo'ladi;

2) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bo'lsa, A to'plamning $A = A = A^2$ Dekart ko'paytmasi 100 ta elementdan iborat bo'ladi.

$A \times A = A^2$ $\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), ..., (9,7), (9,8), (9,9)\}$.

3. Sonli to'plamlar. Sanoq uchun ishlatiladigan sonlar *natural sonlar* deb ataladi. Barcha natural sonlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yordamida hosil qilinadi. Natural sonlar to'plami

$$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

kabi belgilanadi.

Ishorasi natural sonlarning ishorasiga qarama-qarshi bo'lgan sonlar *manfiy natural sonlar* deyiladi. Barcha manfiy natural sonlar, nol soni va barcha natural sonlardan iborat to'plam *butun sonlar to'plami* deyiladi va u, odatda,

$$Z = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

kabi belgilanadi.

Ravshanki, natural sonlar to'plami butun sonlar to'plamining qism to'plamidir: $N \subset Z$.

Qisqarmaydigan kasr ko'rinishda tasvirlanadigan har bir son ratsional son deyiladi. Barcha ratsional sonlar to'plami

$$Q = \left\{x : x = \frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in N\right\}$$

kabi belgilanadi.

Ravshanki, $Z \subset Q$, demak, $N \subset Q$ chunki, $N \subset Z$. Jumladan, agar q=1 bo‘lsa, $N \subset Q$ bo‘ladi.

Matematikada faqat ratsional sonlar bilan emas, balki boshqacha tabiatli sonlar bilan ham ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Masalan: a) tomoni bir birlikka teng bo‘lgan kvadrat diagonalining uzunligini topish talab qilingan bo‘lsin. Pifagor teoremasiga asosan, $r^2=1^2+1^2=2$. r son butun son bo‘lishi mumkin emas, chunki $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$ va h.k. r soni kasr son ham bo‘lishi mumkin emas: agar $r=\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr bo‘lsa (bu yerda $q\neq1$), u holda $r^2=\frac{p^2}{q^2}$ ham qisqarmaydigan kasr bo‘ladi. Demak, $\frac{p^2}{q^2}$ butun son bo‘lmaydi, shuning uchun u 2 ga teng bo‘lishi mumkin emas. Shunday qilib, kvadrat diagonalinig uzunligi $\sqrt{2}$ ga teng;

b) aylana uzunligining diametrga nisbatini ifodalovchi π sonini oddiy kasr, ya’ni $\frac{p}{q}$ ko‘rinishida tasvirlash mumkin emas.

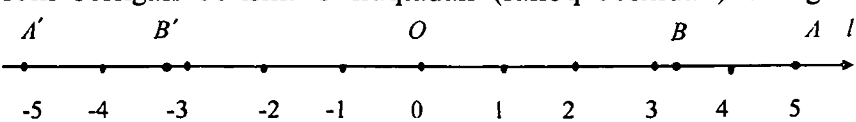
d) ushbu 0,1010010001... kasrda birinchi 1 raqamidan keyin bitta nol, ikkinchi 1 raqamidan keyin ikkita nol, uchinchi 1 raqamidan keyin uchta nol turibdi va h.k.

Yuqoridagi a), b) va d) hollardagi keltirilgan sonlar, ya‘ni cheksiz o‘nli nodavriy kasrlar, *irratsional sonlar* deyiladi va irratsional sonlar to‘plami I bilan belgilanadi.

Ratsional va irratsional sonlar to‘plamining birlashmasi *haqiqiy sonlar* deyiladi va R^1 bilan belgilanadi, ya‘ni $R^1 = Q \cup I$.

Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, $R^1 \backslash Q = I$, $R^1 \backslash I = Q$, $R^1 \cap Q = Q$, $Q \cap I = \varnothing$, $I \subset R^1$, $Q \subset R^1$ bo‘ladi.

4. Son o‘qi. Biror l to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy O nuqtani belgilab (O nuqta *sanoq boshi*), so‘ngra [0;1] *birlik kesmani* tanlaymiz va *yo‘nalishni* belgilaymiz. Bunday holda *koordinata to‘g‘ri chizig‘i*, ya‘ni *son o‘qi* berilgan deyiladi (1.7- chizma). Har bir natural yoki kasr songa to‘g‘ri chiziqda bitta nuqta mos keladi. Masalan, 5 soni berilgan bo‘lsin. O nuqtadan (sanoq boshidan) berilgan



1.7- chizma.

yo'nalishda birlik kesmani 5 marta qo'yamiz. Natijada, A nuqtani hosil qilamiz, bu nuqta 5 soniga mos keladi. $3\frac{1}{7}$ sonini olaylik, O nuqtadan berilgan yo'nalishda birlik kesmani 3 marta, so'ngra birlik kesmaning $\frac{1}{7}$ qismini qo'yamiz. Natijada B nuqtani hosil qilamiz. Bu nuqta $3\frac{1}{7}$ soniga mos keladi.

Agar l to'g'ri chiziqning M nuqtasi biror r songa mos kelsa, bu son M nuqtaning *koordinatasi* deyiladi va u $M(r)$ kabi belgilanadi. Masalan, A va B nuqtalarning koordinatalari mos ravishda 5 va $3\frac{1}{7}$ sonlaridan iborat bo'ladi, ya'ni $A(5)$, $B(3\frac{1}{7})$. Sanoq boshi O nuqtaning koordinatasi nol sonidan iborat bo'ladi: $O(0)$.

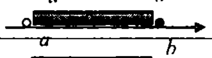
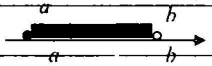
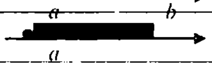
Endi birlik kesmani O nuqtadan boshlab berilgan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishda 5 marta qo'yamiz. Sanoq boshi O ga nisbatan A nuqtaga simmetrik A' nuqtani hosil qilamiz. A' nuqtaning koordinatasi -5 soni bo'ladi, ya'ni $A'(-5)$. Shunga o'xshash, B nuqtaga simmetrik B' nuqtaning koordinatasi $-3\frac{1}{7}$ soni topiladi. 5 va -5, $3\frac{1}{7}$ va $-3\frac{1}{7}$ sonlari, mos ravishda, *qarama-qarshi sonlar* deb ataladi. Koordinata to'g'ri chizig'ida berilgan yo'nalishda joylashgan nuqtalarga mos keluvchi sonlar *musbat sonlar* deyiladi. Koordinata to'g'ri chizig'ida berilgan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishda joylashgan nuqtalarga mos keluvchi sonlar *manfiy sonlar* deyiladi.

Eslatma. Koordinata boshi O nuqtaga mos kelgan „0" (nol) soni musbat ham, manfiy ham hisoblanmaydi, u koordinata to'g'ri chizig'idagi musbat koordinatali nuqtalarni manfiy koordinatali nuqtalardan ajratib turadi.

Koordinata to'g'ri chizig'idagi berilgan yo'nalishni (odatda u o'ng tomonga yo'nalgandir) *musbat*, berilgan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishni esa *manfiy yo'nalish* deyiladi.

5. Sonli oraliqlar. $a<b$ shartni qanoatlantiradigan a va b sonlarni olamiz va ularni koordinata to'g'ri chizig'ida nuqtalar bilan belgilaymiz.

Amalda „interval“, „kesma“, „yarim interval“, „nur“ atamalarini ko‘pincha bir nom bilan *„sonli oraliq“* deb ishlatiladi.

Oraliqlar turi	Geometrik tasviri	Belgilanishi	Tengsizliklar yordamida yozilishi
Interval		(a,b)	$a<x<b$
Kesma		$[a,b]$	$a\le x\le b$
Yarim interval		$(a,b]$	$a<x\le b$
Yarim interval		$[a,b)$	$a\le x<b$
Nur		$[a,+\infty)$	$x\ge a$
Nur		$(-\infty;b]$	$x\le b$
Ochiq nur		$(a,+\infty)$	$x>a$
Ochiq nur		$(-\infty;b)$	$x<b$
Son o’qi		$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty<x<+\infty)$

Mustaqil yechish uchun misollar. Berilgan A va B to‘plamlarga ko‘ra $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ to‘plamlarni toping:

1. $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{4, 8, 12, 16\}$.

2. $A=\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n-1, \ldots\}$, $B=\{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$.

3. $A=\{x:(x-2)(x-3)=0\}$, $B=\{x:(x-2)(x+4)=0\}$.

4. $A=\{x: x^2-4=0\}$, $B=\{x: x-2=0\}$.

Berilgan A va B to‘plamlarga ko‘ra $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$ to‘plamlarni toping.

5. $A=\{x:0<x<2\}=(0; 2)$, $B=\{x:1\le x\le 3\}=[1; 3]$.

6. $A=\{x:x(x-3)<0\}$, $B=\{x:(x-3)(x-1)\ge 0\}$.

7. $A=\{x:x\in R, x^2-8x+15\le 0\}$, $B=\{x:x\in N,\ x^2-6x<0\}$.

8. $A=\{x:x\in Z, -2<x<4\}$, $B=\{x:x\in N,\ 1\le x\le 7\}$.

Berilgan A, B va C to‘plamlarga ko‘ra $A\cup B$, $A\cap C$, $A\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cap C$ to‘plamlarni toping:

9. $A=\{x: -3\le x\le 2\}=[-3; 2]$, $B=[0; 4]$, $C=[3; 5]$.

10. $A=Q$, $B=Z$, $C=N$.

Berilgan A va B to‘plamlarga ko‘ra $A\times B$ Dekart ko‘paytmani toping:

11. $A=\{1,3\}$, $B=\{2,4\}$. **13.** $A=[1;2]$, $B=[1;2]$.

12. $A=R^1$, $B=R^1$. **14.** $A=[1;3]$ $B=[2;4]$.

Mustaqil yechish uchun berilgan masalalarning javoblari

1. $A\cup B$ $\{2,4,6,8,10,12,16\}$.
$A\setminus B$ $\{2,6,10\}$, $B\setminus A=\{12,16\}$,
$A\cap B$ $\{4;8\}$.
2. $A\cup B$ $\{1,3,5,6,7,9, ...\}$,
$A\cap B\{3,9,27,...\}$.
$A\setminus B=\{1,5,7,...\}$, $B\setminus A=\{6,12,..\}$.
3. $A\cup B=\{-4,2,3\}$, $A\cap B=\{2\}$, $A\setminus B=\{-4\}$.
4. $A\cup B=\{-2,2\}$, $A\cap B=\{2\}$, $A\setminus B=\{2\}$, $B\setminus A=\varnothing$.
5. $A\cup B=\{x: 0< x\leq 3\}$, $A\cap B=\{x: 1\leq x\leq 2\}$,
$A\setminus B=\{x: 0< x<1\}$, $B\setminus A=\{x: 2\leq x\leq 1\}$.
$A\Delta B=\{x: 0< x<1, 2\leq x\leq 3\}$.
6. $A\cup B=\{x: -\infty< x\leq +\infty\}$, $A\cap B=\{x: 0<x<1\}$,
$A\setminus B=\{x: 1< x<3\}$, $B\setminus A=\{x: -\infty<x<0,\ 3\leq x<+\infty\}$.
$A\Delta B=\{x: -\infty< x\leq 0,\ 1\leq x\leq +\infty\}$.
7. $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$, $A\cap B=\{3,4,5\}$, $A\setminus B=(3,4)\cup(4,5)$, $B\setminus A=\{1,2\}$, $A\Delta B=\{1,2\}\cup(3,4)\cup(4,5)$.
8. $A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $A\cap B=\{1,2,3\}$,
$A\setminus B=\{-1;0\}$, $B\setminus A=\{4,5,6,7\}$, $A\Delta B=\{-1,0,4,5,6,7\}$.
9. $A\cup B=[-3;4]$, $A\cap C=\varnothing$,
$A\cup(B\cap C)=[-3,2]\cup[3;4]$, $(A\cup B)\cap C=[0;2]\cap[3;5]=\varnothing$.
10. $A\cap B)=Q$, $A\cap C=N$, $(A\cup B)\cap C=Z\cap N=N$.
11. $A\times B=\{(1;2),(1;4),(3;2),(3;4)\}$.
12. $A\times B=R^1\times R^1=R^2=\{(x,y): -\infty<x<+\infty, +\infty<y<+\infty\}$.
13. $A\times B=\{(x,y): x\in[1;2], y\in[1;2]\}$.
14. $A\times B=\{\{(x,y): x\in[1;3], y\in[2;4]\}$.

2- §. FUNKSIYA TUSHUNCHASI

1. Funksiyaning ta'rifi. X va Y haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lib, ular R^1 ning bo'sh bo'lmagan qism to'plamlari ($X\subset R^1$, $Y\subset R^1$), x va y lar esa, mos ravishda, ularning elementlari ($x\in X$, $y\in Y$) bo'lsin.

1- ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilsa, X to'plamda y *funksiya berilgan* (*aniqlangan*) deb ataladi va u simvolik ravishda $f: x\to y$ yoki $y=f(x)$ kabi belgilanadi.

Bunda x — *argument* yoki *erkli o'zgaruvchi*, y — *funksiya* yoki *erksiz o'zgaruvchi*, f —xarakteristika (qonun yoki qoida); X to'plam *funksiyaning aniqlanish sohasi*, $Y=\{y: y=f(x),\ x\in X\}$ to'plam esa uning *qiymatlari to'plami (o'zgarish sohasi)* deyiladi.

Bundan keyin biz funksiyaning aniqlanish sohasini $D(f)$, qiymatlar to'plamini (o'zgarish sohasini) esa $E(f)$ bilan belgilaymiz.

2. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya umumiy holda analitik, jadval, grafik va so'z usullari bilan berilishi mumkin.

Analitik usul. Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x ning har bir qiymatiga mos keladigan funksiyaning y qiymati x ustida *analitik amallar* — qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildizdan chiqarish, logarifmlash va h.k. amallarni bajarish natijasida topiladi. Odatda, bunday usul *funksiyaning analitik usulda berilishi* deyiladi.

Funksiya analitik usulda quyidagi ko'rinishlarda berilishi mumkin.

1) $y=g(x)$ yoki $x=g(y)$ ko'rinishdagi formulalar bilan berilgan funksiyalar *oshkor ko'rinishda berilgan funksiyalar* deyiladi. Masalan, $y=6x-2$, $y=x^2+\ln x$ funksiyalar oshkor ko'rinishda berilgan. Analitik usulda berilgan funksiya bir nechta formulalar vositasida yozilishi ham mumkin, masalan:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi\le x\le 0 \text{ bo'lganda},\\ 1, & 0<x<1 \text{ bo'lganda},\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x\le 2 \text{ bo'lganda}.\end{cases}$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $[-\pi;2]$ bo'lib, u uchta formula yordamida berilgan.

2) Agar x va y o'zgaruvchilar qandaydir $F(x,y)=0$ tenglama bilan bog'langan, ya'ni tenglama y ga nisbatan yechilmagan bo'lsa, u holda funksiya *oshkormas ko'rinishda berilgan* deyiladi. Masalan, $x^2+y^2-R^2=0$ tenglama oshkormas shaklda berilgan funksiyani ifodalaydi, uni y ga nisbatan yechish natijasida ikkita funksiyani hosil qilamiz:

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}.$$

Ba'zi bir oshkormas ko'rinishdagi funksiyalarni $y=f(x)$ (oshkor) ko'rinishda ifodalash ham mumkin. Har qanday oshkor ko'rinishdagi $y=f(x)$ funksiyani oshkormas ko'rinishda yozish ham mumkin: $y-f(x)=0$.

3) *parametrik ko'rinishda*, ya'ni $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \alpha \le t \le \beta$ shaklda berilishi. $y=f(x)$ funksiyada x ning y ga mos qo'yilishi *parametr* deb ataladigan uchunchi bir t o'zgaruvchining yordamida ifodalanishi mumkin:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \alpha \le t \le \beta,$$

bu yerda φ(t) va ψ(t) lar ham analitik usulda berilgan funksiyalar bo'lib, $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \varnothing$ deb hisoblanadi.

Funksiyalar berilishining eng ko'p uchraydigan usuli analitik usuldir. Bu usul matematik analizda juda ko'p ishlatiladi.

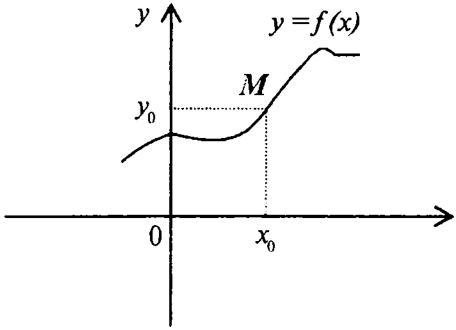
Jadval usuli. Ba'zi hollarda $x \in X$ va $y \in Y$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida berilmasdan, balki *jadval* orqali berilgan bo'lishi ham mumkin. Masalan, t — yanvar oyining birinchi dekadasi (10 kunligi) kunlari nomeri bo'lsa, T — shu nomerli kuni soat 16^{00} da Samarqand shahrida kuzatilgan havo haroratini bildirsin, natijada quyidagi jadvalga kelamiz:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	−3°	−5°	+2°	+5°	+1°	0°	−2°	−5°	−3°	−1°

bunda t — argument, T — funksiya bo'ladi. Bog'lanishning bunday berilishi funksiyaning *jadval usulda berilishi* deb ataladi. Bu usuldan ko'pincha miqdorlar orasida tajribalar o'tkazish jarayonida foydalaniladi.

Jadval usulining qulayligi shundan iboratki, argumentning u yoki bu aniq qiymatlarida, funksiyani hisoblamasdan, uning qiymatlarini aniqlash mumkin. Jadval usulining qulay bo'lmagan tomoni shundan iboratki, argumentning o'zgarishi bilan funksiyaning o'zgarish xarakterini to'liq aniqlab bo'lmaydi.

Grafik usuli. xOy koordinata tekisligida x ning X to'plam ($X=D(f)$) dan olingan har bir qiymati uchun $M(x,y)$ nuqta yasaladi, bunda nuqtaning abssissasi x, ordinatasi y esa funksiyaning x ga mos kelgan qiymatiga teng. Yasalgan nuqtalarni tutashtirsak, natijada biror chiziq hosil bo'ladi, hosil bo'lgan bu chiziqni berilgan funksiyaning grafigi deb qaraladi (2.1- chizma).



2.1- chizma.

2- ta'rif. Tekislikning $(x, f(x))$ kabi aniqlangan nuqtalaridan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\}=\{(x,f(x)):x \in X,\ y=f(x) \in Y\}$$

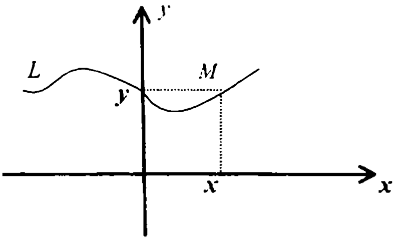
to'plam, *funksiyaning grafigi* deb ataladi.

xOy tekisligida shunday L chiziq berilgan bo'lsin, Ox o'qda joylashgan nuqtalardan shu o'qqa o'tkazilgan perpendikular L chiziqni faqat bitta nuqtada kesib o'tsin.

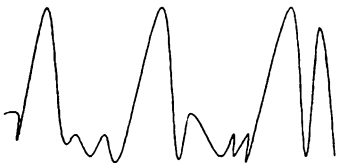
Ox o'qdagi bunday nuqtalardan iborat to'plamni X orqali belgilaymiz. X to'plamdan ixtiyoriy x ni olib, bu nuqtadan Ox o'qiga perpendikular o'tkazamiz. Bu perpendikularning L chiziq bilan kesishgan nuqtasini y bilan belgilaymiz. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga yuqorida ko'rsatilgan qoidaga ko'ra bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish L chiziq yordamida berilgan bo'ladi (2.2-chizma). Odatda funksiyaning bunday berilishi uning *grafik usulda berilishi* deb ataladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi ilmiy tadqiqotlarda va hozirgi zamon ishlab chiqarishi jarayonlarida keng qo'llaniladi. Masalan, tibbiyotda uchraydigan elektrokardiogramma grafigi—yurak muskullaridagi tok impulslarining vaqt bo'yicha o'zgarishini ko'rsatadi. Bu grafik analitik tarzda yozilishi shart bo'lmagan biror $y = f(x)$ funksiyaning grafigidir, bu funksiyaning formulasi shifokor uchun unchalik qiziqarli emas (2.3- chizma).

Funksiyaning grafik usulda berilishining kamchiligi shundan iboratki, argumentning sonli qiymatida berilgan funksiyaning aniq ko'rinishini har doim topib bo'lavermaydi, lekin bu usulning boshqa usullardan afzalligi uning ta'siri yaqqol ko'zga ko'rinib turishidadir.



2.2- chizma.



2.3- chizma.

So'zlar orqali ifodalanadigan usul. Bu usulda ($x \in X$, $y \in Y$) o'zgaruvchilar orasidagi funksional bog'lanish faqat so'zlar orqali ifodalanadi.

1- misol. Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida ham funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiya, odatda, *Dirixle funksiyasi* deyiladi va $D(x)$ kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{agar } x \quad \text{ratsional son} \quad \text{bo'lsa,} \\ 0, \text{agar } x \quad \text{irratsional son} \quad \text{bo'lsa.} \end{cases}$$

2- misol. f — har bir x haqiqiy songa uning butun qismi $[x]$ ni mos qo'yuvchi qoida bo'lsin. Demak, $f: x \to [x]$ yoki $y = [x]$ funksiyaga ega bo'lamiz.

3- misol. f — har bir haqiqiy x songa uning kasr qismi $\{x\}$ ni mos qo'yadigan qoida bo'lsin, ya'ni $f: x \to \{x\}$. Bu holda biz $y = \{x\}$ funksiyaga ega bo'lamiz.

3. Funksiyaning aniqlanish sohasi.

3- ta'rif. Argumentning funksiya ma'nosini yo'qotmaydigan (ya'ni cheksiz yoki mavhumlikka aylantirmaydigan) hamma qiymatlari to'plami shu funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi.

Agar funksiya jadval shaklida berilsa, uning aniqlanish sohasi x ning jadvalda ko'rsatilgan qiymatlaridan iborat bo'ladi.

Agar funksiya grafik shaklda berilsa, uning aniqlanish sohasi grafikdan ko'rinib turadi.

Funksiya analitik shaklda berilganda esa x ning funksiyani aniqlaydigan formula ma'noga ega bo'ladigan qiymatlari to'plami shu funksiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topish vaqtida formulani boshqa ko'rinishga keltirish tavsiya etilmaydi.

1- misol. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. $\frac{x}{x^2-4}$ funksiyaning maxraji nolga aylanadigan nuqtalarda funksiya ma'noga ega emas. Demak, bu funksiyaning aniqlanish sohasini topishda quyidagi $x^2-4\neq0$ yoki $x\neq\pm2$ shartlar bajarilishini talab qilish kerak.

Shunday qilib, funksiyaning aniqlanish sohasi uchta oraliqning birlashmasidan iborat, ya'ni

$$D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty).$$

Xulosa. Funksiya kasr ko'rinishida berilgan bo'lsa, uning aniqlanish sohasi argumentning kasr maxrajini noldan faqli qiladigan qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi.

2- misol. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Ildiz ostidagi ifodaning qiymati manfiy bo'lsa, funksiya mavjud emas (haqiqiy sonlar to'plamida hech qanday funksiyani aniqlamaydi). Demak, ildiz ostidagi ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun $1-x^2\geq0$ shart bajarilishi kerak, u holda bu tengsizlikning yechimlari to'plami $[-1;1]]$ kesma bo'ladi.

Shunday qilib, funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=[-1;1]$ kesmadan iborat.

3- misol. $f(x)=\sqrt{\frac{3}{10-5x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Birinchidan, $10-5x\neq0$ yoki $x\neq2$ bo'lishi; ikkinchidan $\frac{3}{10-5x}>0$ bo'lishi kerak. Bu tengsizlik $10-5x>0$ yoki $x<2$ bo'lganda o'rinli bo'ladi. Demak, $x\neq2$ va $x<2$ shartlar o'rinli bo'lganda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(-\infty, 2)$ bo'ladi.

4- misol. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-5}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Ildiz ostidagi ifodaning qiymati manfiy bo'lsa ham, funksiya ma'noga ega, chunki ildiz ko'rsatkichi toq sondir. Bu funksiya ma'noga ega bo'lishi uchun $x\neq5$ shart bajarilishi yetarli.

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=$ $=(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$ bo'ladi.

5- misol. $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. $2\sin x-1$ ifoda juft darajali ildiz ostida qatnashgani uchun $2\sin x-1\geq 0$ tengsizlikni yechamiz:

$$\sin x \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{6}+2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in Z.$$

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D(f)=\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], \quad n\in Z.$$

Xulosa. Keltirilgan misollarning yechilishidan ko'rinadiki, juft ko'rsatkichli ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmasligi, ya'ni $f(x)=\sqrt[2n]{\varphi(x)}$ (bunda n — natural son) funksiya uchun $\varphi(x)\geq 0$ bo'lishi kerak.

6- misol. $f(x)=\log_a(9-x^2)(a>0, a\neq 1)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Logarifmik funksiya argumentning musbat qiymatlarida ma'noga ega. Shuning uchun $9-x^2>0$, $x^2<9$ yoki $|x|<3$ bo'lishi kerak.

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(-3; 3)$ oraliqdan iborat.

7- misol. $f(x)=\frac{\sqrt{9-x}}{\lg(x-3)}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Birinchidan, $9-x\geq 0$ yoki $x\leq 9$; ikkinchidan, $x-3>0$ yoki $x>3$; uchinchidan, $\lg(x-3)\neq 0$ yoki $x\neq 4$ bo'lishi kerak $x\leq 9$, $x>3$ va $x\neq 4$ shartlarni hisobga olsak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(3; 4)\cup(4; 9)$ dan iborat bo'ladi.

8- misol. $f(x)=\log_{x^3}(x^2-5x+6)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Birinchidan, $x^2-5x+6>0$ va $(x-2)(x-3)>0$ yoki $-\infty<x<2, 3<x<+\infty$ bo'lishi; ikkinchidan, $x^3>0$, $x^3\neq 1$ yoki $x>0$, $x\neq 1$ bo'lishi kerak. x ning bu shartlarni bir vaqtda qanoatlantiradigan barcha qiymatlari to'plami $(0; 1)\cup(1; 2)\cup(3; +\infty)$ dan iborat.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(x)=$ $=(0; 1)\cup(1; 2)\cup(3; +\infty)$ bo'ladi.

9- misol. $f(x)=\log_{x^4}(8-x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Bu logarifmik funksiya ma'noga ega bo'lishi uchun $8-x>0$, $x\neq 0$, $x^4\neq 1$ yoki $x<8$, $x\neq 0$, $x\neq \pm 1$ bo'lishi kerak.

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=$ $=(-\infty; -1)\cup(-1; 0)\cup(0; 1)\cup(1; 8)$ bo'ladi.

Xulosa. $\log_{\varphi(x)} f(x)$ ifoda ma'noga ega bo'lish uchun $f(x)>0$, $\varphi(x)>0$ va $\varphi(x)\neq 1$ bo'lishi talab qilinadi.

10-misol. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Birinchidan, $x\geq 0$ bo'lishi; ikkinchidan, $x+1\geq 0$ yoki $x\geq -1$ bo'lishi; uchinchidan, $2x-2\geq 0$ yoki $x\geq 1$ bo'lishi; to'rtinchidan esa $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}\neq 0$ yoki $x\neq 3$ bo'lishi kerak. Demak, x ning yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradigan qiymatlari $x\geq 1$ va $x\neq 3$ dan iborat.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(1;3)\cup(3;+\infty)$ bo'ladi.

11- misol. $f(x)=\frac{\arccos(x-2)+\sqrt{9-x^2}}{\log_3(5-2x)}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Birinchidan, arkkosinus ma'noga ega bo'lishi uchun uning belgisi ostidagi ifodaning absolut qiymati 1 dan katta bo'lmasligi, ya'ni $|x-2|\leq 1$ yoki $1\leq x\leq 3$ bo'lishi ikkinchidan, $9-x^2\geq 0$ yoki $-3\leq x\leq 3$ bo'lishi; uchinchidan esa $5-2x>0$ va $\log_3(5x-2x)\neq 0$ yoki $x<2{,}5$ va $x\neq 2$ bo'lishi kerak. x ning bu uchta shartni bir vaqtda qanoatlantiradigan barcha qiymatlari to'plami $D(f)=(1;2)\cup(2;2{,}5)$ bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(1;2)\cup(2;2{,}5)$ bo'ladi.

Xulosa. $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar aniqlanish sohalarining umumiy qismidan iborat:

$$D(\varphi)\cap D(\psi)=D(f).$$

12- misol. $f(x)=(x-3)^{\sqrt{x-2}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Biriinchidan, $x\geq 2$; ikkinchidan, $x-3\geq 0$ bo'lishi kerak. x ning bu shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlari to'plami $x\geq 3$ dan iborat. Demak, $D(f)=[3;+\infty)$ bo'ladi.

Xulosa. $u(x)^{v(x)}$ $(u(x)\geq 0)$ shakldagi ifodalarda asos va daraja ko'rsatkichi argumentning bir xil qiymatlarida bir vaqtda nolga aylanmasligi kerak (0^0 ko'rinishdagi aniqmaslik).

13-misol. $|f|=4-x^2$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Shartga ko'ra $|f|$ — manfiy bo'lmagan son, u holda $4-x^2 \geq 0$ yoki bu yerdan $|x| \leq 2$ bo'lishi shart. Demak, $D(f)=[-2;2]$ bo'ladi.

14 -misol. $|f|=\lg(4-x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini topish uchun quyidagi

$$\begin{cases} \lg(4-x) \geq 0, \\ 4-x > 0 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Sistemaning birinchi tengsizligidan $4-x \geq 1$; $-x \geq -3$; $x \leq 3$ bo'lishi, ikkinchisidan esa, $4-x > 0, -x > -4$, $x < 4$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $x \leq 3$. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(-\infty;3]$ bo'ladi.

4. Funksiyaning o'zgarish sohasi. $y=f(x)$ funksiya $x \in X$ to'plamda berilgan bo'lsin.

4- ta'rif. Funksiyaning argumenti $X=D(f)$ dagi hamma qiymatlarini qabul qilganda funksiyaning unga mos kelgan qiymatlari to'plami $E(f)$ shu funksiyaning *o'zgarish sohasi (qiymatlari to'plami)* deyiladi.

Funksiyaning o'zgarish sohasi diskret nuqtalardan, nuqtadan, oraliq, segment, bir necha oraliqlardan va h.k. iborat bo'lishi mumkin. Jadval yoki garfik usulda berilgan funksiyalarning o'zgarish sohalari o'z-o'zidan ma'lum. Analitik usulda, ya'ni $y=f(x)$ shaklda berilganda funksiyaning o'zgarish sohasini topish uchun y ning $f(x)=y$ tenglama haqiqiy yechimga ega bo'ladigan barcha qiymatlarini topish talab qilinadi.

Quyidagi tasdiqlar o'rinli.

1^0. Agar berilgan funksiya (bu yerda uzluksiz funksiya nazarda tutiladi) eng kichik va eng katta qiymatga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi uning shu eng kichik va eng katta qiymatlari hamda ular orasidagi barcha sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

1- misol. $[0; 4]$ kesmada $f(x)=x^2+4$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

Yechilishi. $[0; 4]$ kesmada berilgan funksiyaning eng kichik qiymati $f(0)=4$, eng katta qiymati $f(4)=20$ bo'lgani uchun, uning o'zgarish sohasi $E(f)=[4; 20]$ dan iborat.

2^0. Agar funksiya eng kichik (katta) qiymatga ega bo'lsa-yu, ammo eng katta (kichik) qiymatga ega bo'lmasa (ya'ni u cheksiz orta (kamaya) borsa), u holda $f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi funksiyaning eng kichik (katta) qiymati va shu qiymatdan katta (kichik) barcha sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

2- misol. $f(x)=ax^2+bx+c$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyani

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

ko'rinishda ifodalaymiz.

Agar $a>0$ ($a<0$) bo'lsa, berilgan funksiya $x=-\frac{b}{2a}$ nuqtada eng kichik (eng katta) qiymatiga erishadi, ammo eng katta (kichik) qiymatiga ega bo'lmaydi.

Demak, $a>0$ ($a<0$) bo'lganda berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=\left[\frac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right)\left(E(f)=\left(-\infty;\frac{4ac-b^2}{4a}\right]\right)$ dan iborat bo'ladi.

3- misol. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

Yechilishi. $a=1>0$ va $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4}$ funksiya $x=1$ nuqtada eng kichik qiymatga ega bo'ladi: $y(1)=\sqrt{4}=2$.

Demak, berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=[2;+\infty)$ dan iborat bo'ladi.

3^0. Agar $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lib, uni x ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, ya'ni $x=\varphi(y)$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasini topish uchun $x=\varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasini topish yetarli. Demak, $x=\varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidan iborat bo'ladi: $D(\varphi)=E(f)$.

4-misol. $f(x)=x^2-6x+5$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

Yechilishi. $x^2-6x+5-y=0$ tenglamani x ga nisbatan yechamiz:

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{y+4}.$$

Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to'plamida bo'lishi uchun tenglamaning diskriminanti $y+4\geq 0$, ya'ni $y\geq -4$ bo'lishi kerak. Demak, berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=[-4;+\infty)$ bo'ladi.

4^0. Umumiy holda, $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi $a\leq y\leq b$ ($b>0$), $y=\varphi(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi esa $c\leq y\leq d$ ($d>0$) bo'lganda $f(x)+\varphi(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasini

$a+c \le y \le b+d$ kabi aniqlash, $f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasini esa $ac \le y \le bd$ kabi aniqlash mumkin emas.

Haqiqatan ham, $\sin x$ va $\cos x$ larning o'zgarish sohalari $-1 \le y \le 1$ bo'lgani holda $\sin x+\cos x$ ning o'zgarish sohasini $-1-1 \le y \le 1+1$ yoki $-2 \le y \le 2$ kabi aniqlab bo'lmaydi.

5- misol. $f(x)=\sin x+\cos x$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Ma'lumki, $-1 \le \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$, bu yerdan,

$$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \text{ yoki } -\sqrt{2} \le f \le \sqrt{2}$$

bo'lgani uchun, funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ bo'ladi.

6- misol. $f(x)=0{,}5 \sin x \cos x$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

Yechilishi. $f(x)=0{,}5\sin x\cos x=0{,}25\sin 2x$. Ma'lumki, $-1 \le \sin 2x \le 1$. Bundan $-0{,}25 \le 0{,}25\sin 2x \le 0{,}25$ yoki $-0{,}25 \le f \le 0{,}25$, demak, berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=[-0{,}25;\ 0{,}25]$ bo'ladi.

5^0. Agar $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi $a \le y \le b$ bo'lsa, $g(x)=mf(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi, $m>0$ bo'lganda $ma \le g \le mb$; $m<0$ bo'lganda esa $ma \ge g \ge mb$ bo'ladi.

Agar $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi $a \le y \le b$ bo'lsa, $g(x)=n+f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi $n+a \le g(x) \le n+b$ dan iborat bo'ladi.

7- misol. $f(x)=2(\cos x-1)$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$f(x)=2\cos x-2$, bunda $m=2>0$, $n=-2<0$. Ma'lumki, $-1 \le \cos x \le 1$ bo'lgani uchun $-2 \le 2\cos x \le 2$ va $-2-2 \le 2\cos x-2 \le 2-2$ bo'ladi. Oxirgi tengsizlikni quyidagi $-4 \le 2\cos x-2 \le 0$ ko'rinishda yozish mumkin. Demak, berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=[-4;\ 0]$ bo'ladi.

8- misol. $f(x)=3-4\cos x$ funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

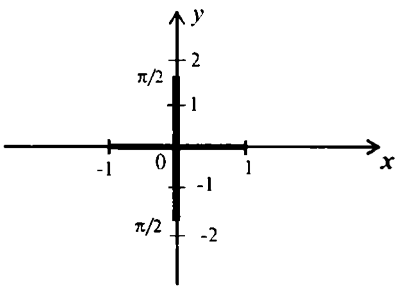
Yechilishi. Yuqoridagi tasdiqqa ko'ra, $f(x)=\cos x$, $m=-4$, $n=3$ bo'ladi. Ma'lumki, $-1 \le \cos x \le 1$ bo'lgani uchun $-4 \le -4\cos x \le 4$ va $3-4 \le 3-4\cos x \le 4+3$ bo'ladi. U holda $-1 \le 3-4\cos x \le 7$. Demak, berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=[-1; 7]$ bo'ladi.

6^0. Agar $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi $-a \le y \le a$ $(-\infty \le y \le +\infty)$ bo'lsa, u holda $y_1=|f(x)|$ yoki $y_2=f^2(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi $0 \le y_1 \le a$ yoki $0 \le y \le +\infty$ bo'ladi. Masalan, $y=\cos x$ ning o'zgarish sohasi $-1 \le y \le 1$ bo'lgani holda, $y_1=|\cos x|$ yoki $y_2=\cos^2 x$ funksiyaning o'zgarish sohasi bir xil, ya'ni $0 \le y_1 \le 1$ bo'ladi. $y=\mathrm{tg}x$ ning o'zgarish sohasi $-\infty < y < +\infty$ bo'lgani holda, $y_1=|\mathrm{tg}x|$ yoki $y_2(x)=\mathrm{tg}^2 x$ funksiyaning o'zgarish sohasi bir xil, ya'ni $0 \le y \le +\infty$ bo'ladi.

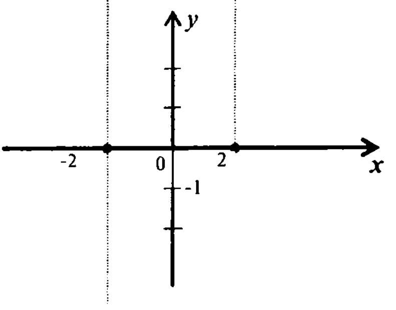
5. Funksiya grafigining koordinatalar tekisligida joylashishi. Funksiyaning aniqlanish sohasi bilan o'zgarish sohasi topilgandan so'ng, uning grafigi Dekart koordinatalar tekisligining qaysi qismida joylashishini aniqlash mumkin.

1- misol. $y=\arcsin x$ funksiyaning grafigi koordinatalar tekisligining qaysi qismida joylashishini aniqlang.

Yechilishi. Ma'lumki, funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari mos ravishda $-1 \le x \le 1$ va $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ dan iborat bo'ladi. Dekart koordinatalar tekisligida funksiyaning grafigi $D=\{(x,y)$: $-1 \le x \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$ sohada joylashadi (2.4- chizma).



2.4- chizma.



2.5- chizma.

2- misol. $y=\frac{4}{x^2-4}$ funksiya grafigining koordinatalar tekisligining qaysi qismida joylashishini aniqlang.

Yechilishi. *a*) funksiyaning aniqlanish sohasi ta'rifiga ko'ra: $x^2-4\neq 0$ yoki $x\neq\pm 2$ bo'ladi. Funksiyaning aniqlanish sohasi uchta intervallar yig'indisidan iborat $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

b) funksiyaning o'zgarish sohasini topish uchun $y=\frac{4}{x^2-4}$ tenglikni x ga nisbatan yechamiz: $x=+2\sqrt{\frac{y+1}{y}}$. $\sqrt{\frac{y+1}{y}}$ ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun, birinchidan, $y\neq 0$, ikkinchidan $\frac{y+1}{y}\geq 0$ yoki $(y+1)y\geq 0$ bo'ladi. Bu tengsizlikning yechimlari to'plami $y\leq -1$ va $y\geq 0$ bo'ladi. Ushbu shartlardan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, berilgan funksiyaning grafigi Dekart koordinatalar tekisligining $G=\{(x,y); -\infty<x<-2,\ -2<x<2,\ 2<x<+\infty;\ -\infty<y\leq -1,\ 0<y<+\infty\}$ qismida joylashadi (2.5- chizma).

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping:

1. $f(x)=\frac{4x}{x^2-9}$. **2.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$.

3. $f(x)=\lg(1-\lg(x^2-5x+16))$. **4.** $f(x)=\arcsin(5x-6)$.

5. $f=\lg x$. **6.** $f(x)=\sqrt{x-8}$. **7.** $f(x)=x^{\sqrt{x}}$.

8. $f(x)=\sqrt{\cos x}$. **9.** $f(x)=\sqrt{\sin x+\cos x}$.

10. $f(x)=(3x)!$ **11.** $f(x)=\log_2\log_{1/2}\sqrt{4x-x^2-2}$.

12. $f(x)=\log_2\log_3\sqrt{4x-4x^2}$. **13.** $f(x)=\frac{\arccos x}{\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)}$.

14. $f(x)=\log_{x-1}\left(x-\frac{1}{4}\right)$. **15.** $f(x)=\sqrt{|x|-3}+\frac{1}{\sqrt{10-x}}$.

16. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$.

17. $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x+1}$. **18.** $f(x)=\log_{x^2}(4-x)$.

19. $f(x)=\sqrt{1-\log_{0.5}\cos x}$, $x\in[0;2\pi]$.

20. k ning qanday qiymatlarida $f(x)=\frac{x^2+3x}{x^2+kx+4}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;\,2)\cup(2;+\infty)$ bo'ladi?

21. $[-10;\,10]$ oraliqdagi nechta butun son

$$f(x)=2^{\cos x}\sqrt{x^3\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)e^{-x}}$$

funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli?

Funksiyalarning o'zgarish sohalarini toping.

22. $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$. **23.** $f(x)=\frac{x+2}{2x-3}$. **24.** $f(x)=\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{tg}x$.

25. $f(x)=3\sin x+4\cos x$. **26.** $f(x)=x^2+x-2$.

27. $f(x)=2^{|x|}$. **28.** $f(x)=\arcsin\sqrt{4-x^2}$.

29. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2}{x}$. **30.** $f(x)=\lg\frac{x+1}{x}$. **31.** $f(x)=10^{\frac{1}{x+2}}$.

32. $f(x)=2^{x+\frac{1}{x}}$. **33.** $f(x)=\lg(\arcsin x)$.

34. $f(x)-x-1+x-3$. **35.** $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos x}$.

36. $f(x)=\arcsin x+\frac{\pi}{2}$. **37.** $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$.

38. $f(x)=2^{2+\cos x}$. **39.** $f(x)=\sqrt{x^2-6x+11}$.

40. $f(x)=x^2-8x+10$.

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1. $(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$. **2.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

3. $(2;3)$. **4.** $[1;\frac{7}{5}]$. **5.** $[1;+\infty]$. **6.** $(-\infty;-8]\cup[8;+\infty]$

7. $(0;+\infty)$. **8.** $[2\pi-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$.

9. $[2\pi - \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{3\pi}{4} 2\pi n]$, $n \in Z$. **10.** $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots\right\}$.

11. $(2-\sqrt{2};1) \cup (3;2+\sqrt{2})$. **12.** $\varnothing$. **13.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};1\right]$.

14. $(1;\ 2) \cup (2;+\infty)$. **15.** $(-\infty,-3] \cup [3;\ 10)$. **16.** $[5;\ 7) \cup (7;\ 9]$.

17. $[-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n]$, $x \in Z$.

18. $(-\infty;1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;4)$. **19.** $\left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$.

20. -4. **21.** 14. **22.** $[-1{,}5;1{,}5]$. **23.** $(-\infty;0{,}5) \cup (0{,}5;+\infty)$.

24. $\{1\}$. **25.** $[-5;5]$. **26.** $[-2;+\infty)$. **27.** $[1;+\infty)$. **28.** $[0;\frac{\pi}{2}]$.

29. $(0;\pi)$. **30.** $(\lg 2;+\infty)$. **31.** $(0;1) \cup (1;+\infty)$.

32. $(0;\ 0{,}25] \cup [4;+\infty)$. **33.** $\left(-\infty;\lg\frac{\pi}{2}\right]$. **34.** $[2;+\infty)$.

35. $(-2;\ 2)$. **36.** $[0;\pi]$. **37.** $[0{,}5;\ 1]$. **38.** $[2;\ 8]$. **39.** $[\sqrt{2};+\infty]$.
40. $[-6;\ +\infty)$.

3- §. FUNKSIYALAR SINFLARI

Odatda, funksiyalar quyidagi sinflarga ajratiladi: juft va toq, davriy, bir qiymatli va ko‘p qiymatli, chegaralangan va chegaralanmagan, monoton, teskari, murakkab va elementar funksiyalar.

1. Juft va toq funksiyalar.

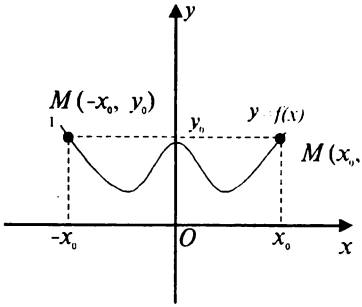
1- ta‘rif. Agar istalgan $x \in X$ uchun $-x \in X$ bo‘lsa, u holda X to‘plam O (koordinatalar boshi) nuqtaga nisbatan *simmetrik to‘plam* deyiladi.

Butun sonlar to‘plami Z, $[-a;\ a]$, $(-a;\ a)$, $(-\infty;\ +\infty)$ kabi to‘plamlar koordinata boshiga nisbatan simmetrik to‘plamlardir.

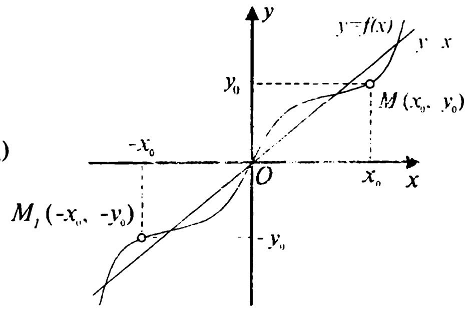
$y = f(x)$ funksiya O nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

2- ta‘rif. Agar istalgan $x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *juft funksiya* deyiladi.

$y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$, $y = f(|x|)$, funksiyalar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan to‘plamlarda aniqlangan bo‘lsa, ular



3.1- chizma.



3.2- chizma.

juft funksiyalar bo'ladi. Ta'rifda X to'plamning koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikligi muhimdir. Masalan, $y=x^2$ funksiya $x\in[-1;\,2]$ da berilgan bo'lsa, bu funksiya juft funksiya bo'lmaydi, chunki $[-1;\,2]$ to'plam koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik emas.

Juft funksiyalarning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (3.1- chizma).

3- ta'rif. Agar istalgan $x\in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *toq funksiya* deyiladi.

$y=x^3$, $y=\text{tg}x$, $y=\dfrac{x}{2x}$ funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida toq funksiyalar bo'ladi.

Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (3.2- chizma).

Agar istalgan $x\in X$, $-x\in X$ lar uchun $f(-x)\neq\pm f(x)$ shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya X to'plamda juft ham emas, toq ham emas deyiladi.

Ushbu $f(x)=x^2-x$, $\varphi(x)=\sin x-\cos x$ funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida juft ham, toq ham emas.

Juft funksiyaning grafigini chizishda argumentning musbat qiymatlari uchun grafikning o'ng shoxini chizib, keyin uni chap tomonga y o'qiga nisbatan simmetrik ravishda ko'chirish yetarli.

Toq funksiyaning grafigini chizishda esa argumentning musbat qiymatlari uchun grafikning o'ng shoxini chizib, keyin uni koordinata boshiga nisbatan simmetrik ko'chirish yetarli.

Juft va toq funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1°. Ikkita juft funksiyaning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi (maxraj noldan farqli bo'lganda) yana juft funksiya bo'ladi.

2^0. Ikkita toq funksiyaning yig'indisi va ayirmasi yana toq funksiya bo'ladi.

3^0. Ikkita toq funksiyaning ko'paytmasi va bo'linmasi (maxraj noldan farqli bo'lganda) juft funksiya bo'ladi.

4^0. Agar $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$ toq funksiyalar bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(t))$ murakkab funksiya (3-§, 7-band ga q.) ham toq funksiya bo'ladi.

5^0. Agar $y=f(x)$ juft funksiya, $x=\varphi(t)$ esa toq (juft) funksiya bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(t))$ murakkab funksiya ham juft funksiya bo'ladi.

Simmetrik bo'lmagan to'plamda aniqlangan funksiyalarning juft va toqligi to'g'risida so'z yuritish ma'noga ega emas.

Aniqlanish sohasining koordinata boshiga nisbatan simmetrikligi funksiyaning juft va toqligi uchun zaruriy shart bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x+3$ va $y=3^x$ funksiyalar $D(f)=(-\infty;+\infty)$ simmetrik to'plamda aniqlangan, lekin ular juft ham emas, toq ham emas.

Teorema. Koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda aniqlangan har qanday $f(x)$ funksiya juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishda ifodalanadi:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

bunda birinchi had — juft funksiya, ikkinchi had esa toq funksiyadir.

Misol. $$e^x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}. \qquad (1)$$

Bu yerda e^x funksiya $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan bo'lib, u juft ham emas, toq ham emas. (1) tenglikning o'ng tomonidagi yig'indilarning birinchisi juft funksiya, ikkinchi esa toq funksiya.

Misol. Quyidagi funksiyalar ichida juft, toq va juft ham emas, toq ham emas funksiyalarni toping:

1) $y=x^2-|x|+4$, 2) $y=10^{-x}-10^x$,

3) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$, 4) $y=\frac{x-4}{x^2-9}$.

Yechilishi. 1) $y=x^2-|x|+4$ bo'lganligidan, $y(-x)=(-x)^2-|-x|+4=x^2-|x|+4=y(x)$, ya'ni barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ lar uchun $f(-x)=f(x)$ bo'ladi.

Demak, 2- ta'rifga ko'ra, funksiya juft ekan.

2) $f(x)=10^{-x}-10^{x}$, $f(-x) = 10^{-(-x)}-10^{-x}= -(10^{-x}-10^{x}) = -f(x)$. Barcha $x \in (-\infty,+\infty)$lar uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik o'rinli. Demak, 3- ta'rifga asosan, berilgan funksiya toq ekan.

3) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$, $f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1-x}=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$.

Demak, barcha $x\in(-1;1)$ lar uchun $f(-x)=-f(x)$ o'rinli, ya'ni $f(x)$ toq funksiyadan iborat.

4) $f(x)=\frac{x-4}{x^2-9}$, $f(-x)=\frac{-x-4}{(-x)-9}=\frac{-x-4}{x^2-9}$.

Demak, barcha $x\in(-\infty,-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$ lar uchun $f(-x)\neq f(x)$ va $f(-x)\neq -f(x)$ bo'lgani sababli funksiya juft ham emas, toq ham emas.

2. Davriy funksiyalar. $f(x)$ funksiya X ($X\subset R^1$) to'plamda aniqlangan bo'lsin.

4- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas T ($T\neq 0$)son mavjud bo'lsaki, istalgan x, $x+T\in X$ lar uchun

$$f(x+T)=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ *davriy funksiya* deyiladi, bunda T — funksiyaning *davri* deb ataladi.

(1) shartni qanoatlantiruvchi musbat T larning eng kichigi (agar u mavjud bo'lsa) funksiyaning *asosiy davri* deb ataladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya T davrga ega bo'lsa, u holda nT ($n\in Z$) ham funksiyaning davri bo'ladi.

Agar davriy funksiya T_0 — asosiy davrga ega bo'lsa, u holda qolgan davrlarning hammasi T_0 ga karrali bo'ladi.

Funksiya eng kichik musbat davrga ega bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $f(x)=5$ funksiya uchun ixtiyoriy haqiqiy son davr bo'ladi, lekin u asosiy davrga ega emas. Haqiqatan ham, $f(x)$=const, ixtiyoriy $\alpha\neq 0$ haqiqiy son bo'lsin. $f(x+\alpha)=f(x)$=const. Bu yerdan kelib chiqadiki, α davr eng kichik musbat davr emas.

5- ta'rif. Agar

$$f(x+\omega)=-f(x), \quad (\omega\neq 0)$$

bajarilsa, u holda $f(x)$ *antidavriy funksiya* deyiladi.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega.

1^0. T davrga ega bo'lgan ikkita funksiyaning yig'indisi, ko'paytmasi yana davriy funksiya bo'ladi va uning davri Tga teng bo'ladi.

2^0. Agar T ($T\neq 0$) son $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning eng kichik musbat davri bo'lsa, u $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ uchun eng kichik musbat davr bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, 1) $f(x)=3\sin x+2$, $g(x)=2-3\sin x$ funksiyalar eng kichik musbat $T=2\pi$ davrga ega, lekin ularning yig‘indisi $f(x)+g(x)=4$ esa eng kichik asosiy davrga ega emas.

2) $f(x)=\sin x+1$, $g(x)=1-\sin x$ funksiyalarning eng kichik musbat davri $T=2\pi$, lekin $f(x)\cdot g(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ ko‘paytmasining eng kichik musbat davri $T=\pi$ bo‘ladi.

3^0. Agar $f(x)$ funksiya T davrga ega bo‘lsa, u holda $f(ax)$, $f(ax)+b$ funksiyalar $\tau=\frac{T}{a}$ davrga ega (bunda $a\neq 0$ ixtiyoriy haqiqiy son, $x,\ ax\in X$ bo‘ladi.

4^0. Agar $f(x)$ funksiya T davrga ega bo‘lsa, u holda $Af(ax+b)$ ($A=\text{const}$, $a>0$) ham davriy funksiya bo‘ladi va uning davri $\tau=\frac{T}{a}$ ga teng bo‘ladi.

Misol. $f(x)=\sin 4x$ funksiyaning davriy funksiya ekanligini ko‘rsating va eng kichik musbat davrini toping.

Yechilishi. Ma‘lumki, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi sonlar o‘qidan iboratdir. Faraz qilaylik, biror $T\neq 0$ uchun $\sin 4(x+T)=\sin 4x$ tenglik o‘rinli bo‘lsin. Bu yerdan

$$2\cos(4x+2T)\sin 2T=0$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglik $\sin 2T=0$ uchun ham o‘rinli bo‘ladi, u holda $2T=\pi n$, $n\in Z$. Demak, shunday T o‘zgarmas son mavjudki, berilgan funksiya uchun eng kichik musbat davr $T_0=\frac{\pi}{2}$ bo‘ladi.

Agar istalgan $x\in X$ va ba‘zi bir T lar uchun $f(x+T)=\frac{1}{f(x)}$ ($T\neq 0$) bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $2T$ davrga ega bo‘ladi.

5^0. $u=\varphi(x)$ davriy funksiya bo‘lsin. Agar $f(x)$ funksiya qat‘iy monoton bo‘lsa, u holda $y=f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham davriy bo‘ladi va ularning davrlari bir-biriga teng bo‘ladi.

6^0. Agar $y=f(u)$ funksiya qat‘iy monoton bo‘lmasa, u holda $y=f[\varphi(x)]$ funksiyaning davri $u=\varphi(x)$ funksiyaning davridan kichik bo‘lishi ham mumkin.

Misol. Quyidagi funksiyalarni davriylikka tekshiring:

1) $f(x)=x^2+x+1$; 2) $f(x)=x-[x]$;

3) $f(x)=\sin x^2$; 4) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Yechilishi. 1) Faraz qilaylik, $f(x)=x^2+x+1$ davriy funksiya bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra shunday o'zgarmas T son mavjud bo'lib, $(x+T)^2+(x+T)+1=x^2+x^2+1$ tenglik o'rinlidir. Oxirgi tenglikni Tga nisbatan yechib, Tni topamiz:

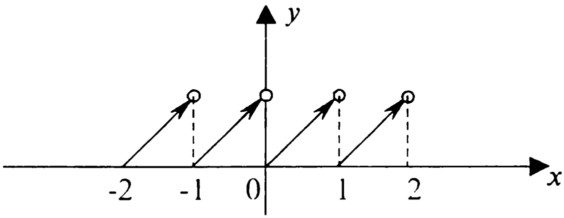
$$x^2+2xT+T^2+x+T+1=x^2+x+1,\quad T^2+(2x+1)T=0,\quad T_1=0\quad T_2=-2x-1.$$

Shartga ko'ra olingan T_1 va T_2 ning qiymatlari davriy funksiyaning ta'rifini qanoatlantirmaydi (T noldan farqli va o'zgarmas bo'lishi, ya'ni x ga bog'liq bo'lmasligi kerak edi). Demak, berilgan funksiya davriy funksiya emas.

2) Ma'lumki, $f(x)=[x]$ butun funksiya barcha $T\in Z$ lar uchun $[x+T]=[x]+T$ tenglikni qanoatlantiradi. Ta'rif bo'yicha tekshiramiz:

$$f(x+T)=x+T-[x+T]=x+T-[x]-T=x-[x]=f(x).$$

Demak, berilgan funksiya davriy funksiya bo'lib, uning kichik musbat davri $T=1$ ekan (3.3- chizma).



3.3- chizma.

3) Faraz qilaylik, $f(x)=\sin x^2$ davriy funksiya bo'lsin, u holda shunday o'zgarmas $T(T\neq 0)$ son mavjud bo'lib, $\sin x^2=\sin(x+T)^2$ tenglik o'rinli bo'ladi. $x=0$ bo'lsa, u holda $0=\sin T^2$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan $T^2=\pi n (n\in Z)$, yoki $T=\sqrt{n\pi}$. T ning qiymatini $\sin x^2=\sin(x+T)^2$ tenglikka qo'yamiz:

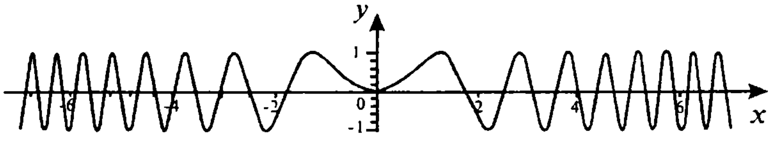
$$\sin x^2=\sin(x+\sqrt{\pi m})^2=\sin(x^2+2x\sqrt{\pi n}+\pi n).$$

$x\neq\dfrac{2k\pi-n\pi}{2\sqrt{\pi n}}$, $k\neq Z$ bo'lsin, u holda $2x\sqrt{n\pi}+\pi n\neq 2k\pi$. Demak,

$$\sin x^2\neq\sin(x^2+2x\sqrt{\pi n}+\pi n).$$

Qarama-qarshilikka keldik. Bu esa $f(x)=\sin x^2$ funksiyaning davriy emasligini isbotlaydi.

Bundan tashqari, bu funksiyaning davriy emasligini quyidagi mulohazadan ham ko'rish mumkin (3.4- chizma).



3.4- chizma.

Grafik bilan abssissalar o'qining kesishishidan hosil bo'lgan o'zaro qo'shni nuqtalar orasidagi masofalar ketma-ketligining limiti (chekli) nolga teng bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{\pi n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}=0.$$

4) Berilgan funksiyani quyidagicha shakl almashtiramiz:

$$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{1}{4}(3+\cos 4x).$$

y_1=cos4x funksiyaning davri 4^0- xossaga asosan $T_0=\frac{\pi}{2}$ bo'ladi.

Demak, berilgan funksiyaning asosiy davri ham $T_0=\frac{\pi}{2}$ ga tengdir.

3. Bir qiymatli va ko'p qiymatli funksiyalar. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilsa, u holda y funksiya *bir qiymatli* deyiladi, ya'ni $\forall\ x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

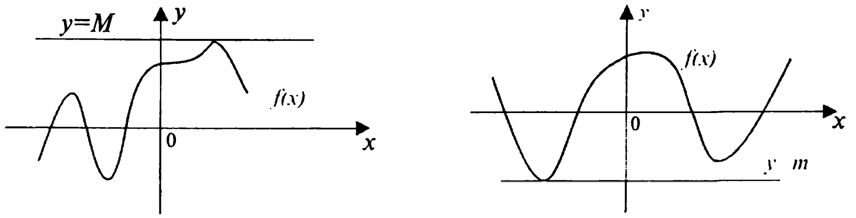
Agar X to'plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra Y to'plamdan bittadan ortiq yoki cheksiz ko'p y son mos qo'yilsa, u holda funksiya *ko'p qiymatli* deyiladi. Masalan:

1) $y=\pm\sqrt{x}$ — ikki qiymatli funksiya;
2) y=Arcsin$x$ — ko'p qiymatli funksiya;
3) y=3x+2 — bir qiymatli funksiya.

4. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar. $y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

6- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M(o'zgarmas m) son topilib, istalgan $x\in X$ uchun $f(x)\leq M$ $(f(x)\geq m)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *yuqoridan* (*quyidan*) *chegaralangan* deyiladi, aks holda esa funksiya *yuqoridan* (*quyidan*) *chegaralanmagan* deyiladi (3.5- chizma).

7- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday o'zgarmas M



a) yuqoridan chegaralangan funksiya. *b)* quyidan chegaralangan funksiya.

3.5- chizma.

va m sonlar mavjud bo‘lib, istalgan $x \in X$ uchun

$$m \leq f(x) \leq M \tag{1}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *chegaralangan* deyiladi (3.6- chizma).

Agar $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘lib, m va M sonlar uning aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo‘lsa, u holda

$$|f(x)| \leq C \tag{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bunda $C = \max\{|M|, |m|\}$. (1) bilan (2) tengsizliklar o‘zaro teng kuchlidir (3.7- chizma). Demak, (2) tengsizlik funksiyaning chegaralanganlik shartini ifodalaydi.

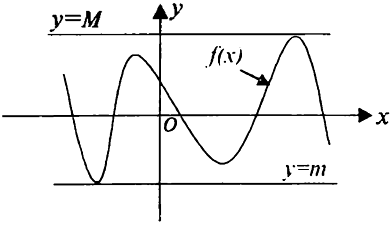
Chegaralangan funksiyalarning grafigi Ox o‘qiga parallel bo‘lgan $y=C$ va $y=-C$ to‘g‘ri chiziqlar orasida bo‘ladi (3.7-chizma).

Quyidan chegaralangan ($f(x) \geq m$) funksiyaning grafigi Ox o‘qiga parallel bo‘lgan $y=m$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida joylashgan bo‘ladi (3.5 *b*- chizma).

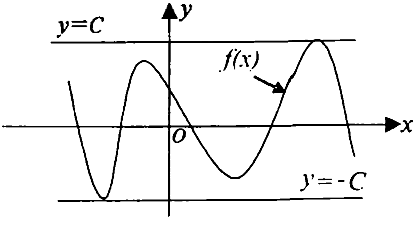
Yuqoridan chegaralangan funksiyaning grafigi ($f(x) \leq M$) Ox o‘qiga parallel bo‘lgan $y=M$ to‘g‘ri chiziqdan pastda joylashadi (3.5 *a*- chizma).

8- ta‘rif. Agar istalgan musbat $C > 0$ son uchun shunday $x_c \in X$ topilib, $|f(x_c)| > C$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda *chegaralanmagan* deyiladi.

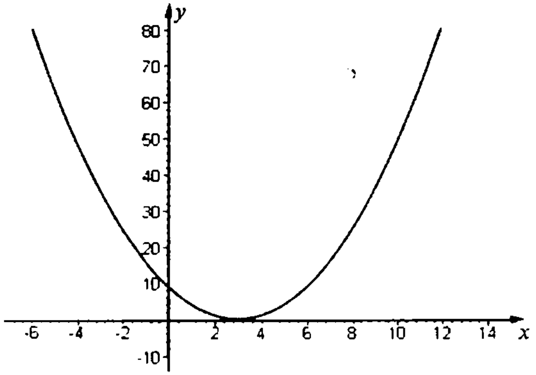
Quyidagi funksiyalarni o‘z aniqlanish sohalarida chegara-



3.6- chizma.



3.7- chizma.



3.8- chizma.

langanlikka tekshiring:

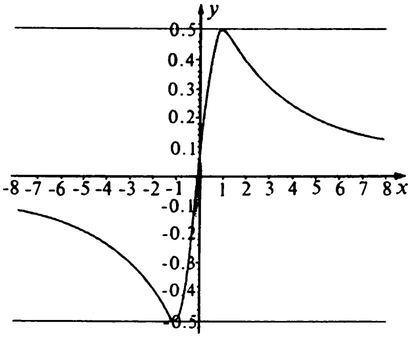
1) $f(x)$ $x^2—6x+9$; 2) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; 3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$;

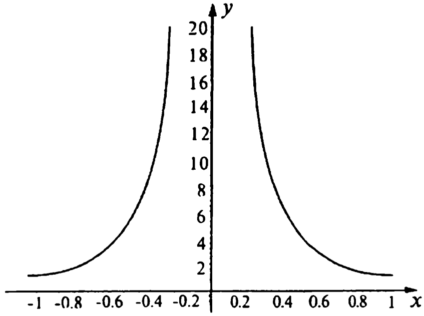
4) $f(x)=\text{tg}x+\text{ctg}x$ $(\text{tg}x>0)$; 5) $f(x)=2x$; 6) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

Yechilishi. 1) Kvadrat uchhadni to‘liq kvadratga keltiramiz: $f(x)=x^2—6x+9=(x—3)^2$. Kvadrat funksiya $x=3$ nuqtada eng kichik qiymatiga erishadi va u 0 ga teng bo‘ladi. Berilgan funksiyaning qiymatlari sohasi $E(f)=[0;+\infty)$. Demak, funksiya quyidan chegaralangan, ya‘ni $0\le f(x)<+\infty$ (3.8-chizma).

2) O‘rta arifmetik va o‘rta geometrik qiymatlar orasidagi munosabatlardan quyidagi $x\le\frac{x^2+1}{2}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerdan barcha $x\in R$ lar uchun $\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$ (bunda $C=\frac{1}{2}$) tengsizlikni olamiz. Demak, berilgan funksiya $(—\infty;+\infty)$ da chegaralangan va uning grafigi $y=C=\frac{1}{2}$ va $y=C=-\frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqlar orasida joylashadi (3.9- chizma).

3) Berilgan funksiya son o‘qining $x=0$ nuqtadan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan, ya‘ni $D(f)=(—\infty;0)\cup(0;+\infty)$. C istalgan musbat son bo‘lsin va shunday $x_c=\frac{1}{\sqrt{2C}}$ topiladiki, u holda $f(x_c)=\frac{1}{x_c^2}=2C>C$. Demak, $f(x_c)>C$ tengsizlik bajariladi (3.10- chizma).



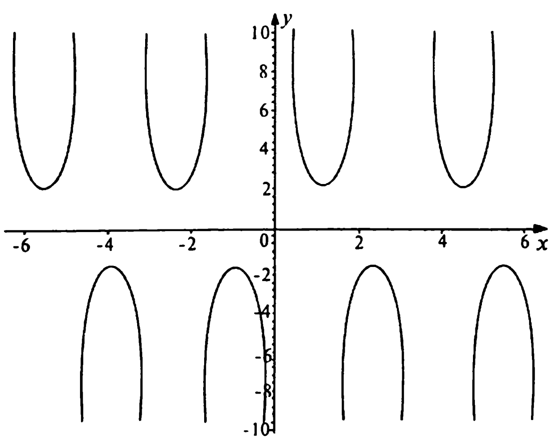


3.9- chizma. **3.10- chizma.**

4) $f(x)$=tg$x$+ctg$x$ ifodaning shaklini almashtiramiz: tg$x$+ctg$x$= $=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$. Shartga ko‘ra tg$x$ >0, u holda $\pi k < x < \dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Demak, bu yerdan quyidagi $1\geq \sin 2x > 0$ tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib, berilgan funksiya quyidan chegaralangan, lekin u yuqoridan chegaralanmagandir (3.11- chizma).

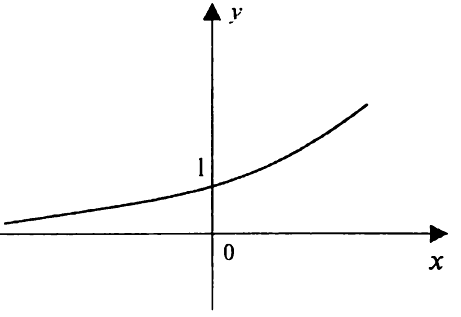
5) Berilgan funksiya butun son o‘qida aniqlangan $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Ma‘lumki, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ lar uchun $2^x>0$. Demak, funksiya quyidan 0 bilan chegaralangan, uning grafigi Ox o‘qidan yuqorida joylashgan bo‘ladi (3.12- chizma).

6) Berilgan funksiya son o‘qining $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan. Ma‘lumki, $|\cos x|\leq 1$, u holda



3.11- chizma.

berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ bo'ladi. Demak, funksiya quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan (3.13- chizma).



3.12- chizma.

5. Monoton funksiyalar. $y=f(x)$ funksiya $X=[a,b]$ $(X\subset R)$ to'plamda berilgan bo'lsin.

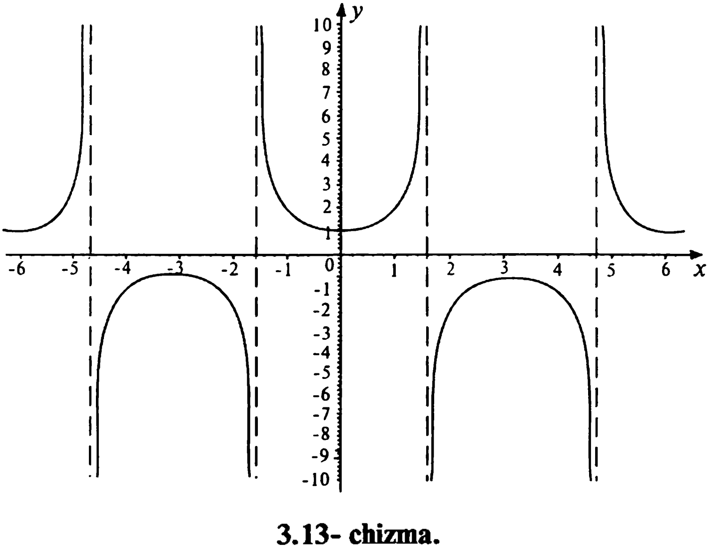
9- ta'rif. Agar istalgan x_1, $x_2 \in X$ lar uchun $x_1<x_2$ bo'lganda

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

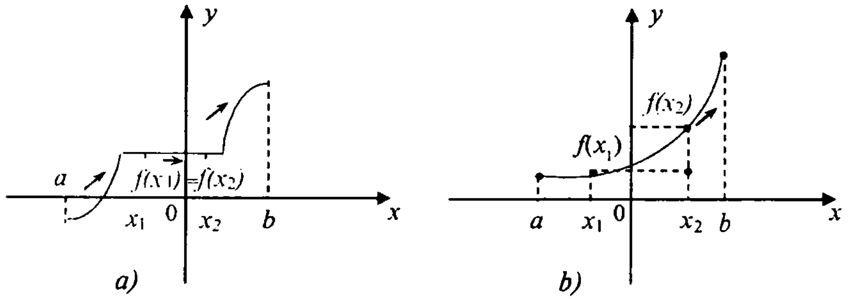
tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *o'suvchi* yoki *kamaymovchi* (*qat'iy o'suvchi*) deb ataladi (3.14- *a* chizma), (3.14- *b* chizma).

10-ta'rif. Agar istalgan x_1, $x_2 \in X$ lar uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *kamayuvchi* yoki *o'smovchi* (*qat'iy kamayuvchi*) deb ataladi (3.15-*a*) chizma, (3.15-*b*) chizma).

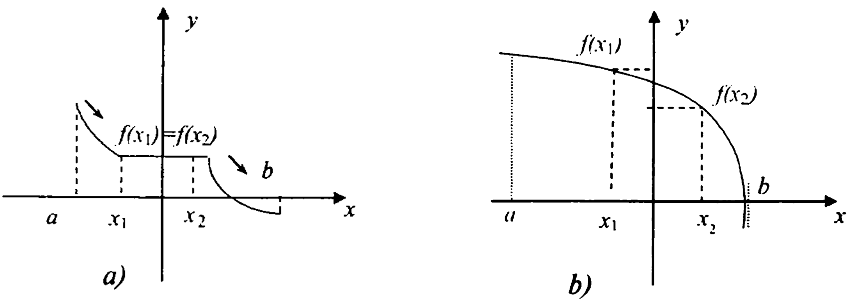
O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar *monoton funksiyalar* deb ataladi.



3.13- chizma.



3.14- chizma.



3.15- chizma.

Monoton funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1. Ikkita o‘suvchi (kamayuvchi) funksiyaning yig‘indisi yana o‘suvchi (kamayuvchi) funksiya bo‘ladi.

2. Ikkita musbat o‘suvchi (kamayuvchi) funksiyalarning ko‘paytmasi yana o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

3. Agar $f(x)$ funksiya o‘suvchi bo‘lsa, $-f(x)$ funksiya kamayuvchi bo‘ladi va aksincha.

4. Agar $f(x)$ funksiya o‘suvchi bo‘lib, istalgan $x \in X$ uchun $f(x) \neq 0$ bo‘lsa, $\frac{1}{f(x)}$ funksiya kamayuvchi bo‘ladi.

5. Agar $f(x)$ funksiya qat‘iy o‘suvchi bo‘lsa, $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya (3-§ ning 6- bandiga q.) ham bir qiymatli va qat‘iy o‘suvchi bo‘ladi.

6. Agar $x=f(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ da o‘suvchi, $y=F(x)$ funksiya esa $[f(\alpha); f(\beta)]$ da o‘suvchi bo‘lsa, $y=F(f(x))$ funksiya ham $[\alpha;\beta]$ da o‘suvchi bo‘ladi.

7. Agar $x=f(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ da kamayuvchi, $y=F(x)$ funksiya esa $[f(\alpha); f(\beta)]$ da kamayuvchi bo‘lsa, $y=F(f(x))$ funksiya ham $[\alpha;\beta]$ da o‘suvchi bo‘ladi.

8. Agar $x=f(t), t\in[\alpha;\beta]$ da o'suvchi, $y=f(x)$ funksiya esa $[f(\alpha); f(\beta)]$ da kamayuvchi bo'lsa, $y=F(f(x))$ funksiya ham $[\alpha;\beta]$ da kamayuvchi bo'ladi.

9. Agar $\varphi(x)$, $\psi(x)$ va $f(x)$ funksiyalar o'suvchi bo'lib, $\varphi(x)\le f(x)\le \psi(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\varphi(\varphi(x))\le f(f(x))\le \le\psi(\psi(x))$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

10. Agar $y=f(x)$ tenglama har bir belgilangan $y\in(-\infty;+\infty)$ uchun yagona yechimga ega bo'lsa, $(-\infty; +\infty)$ da $y=f(x)$ monoton bo'lmagan funksiya ham teskari funksiyaga ega bo'ladi.

Funksiyani tekshirishda uning monotonlik oraliqlarini topish muhim rol o'ynaydi. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini topish uchun quyidagi tasdiqlardan foydalanamiz:

1. Agar funksiya $[\alpha;\beta]$ da qat'iy monoton bo'lsa, x ning har bir belgilangan qiymatiga funksiyaning bitta qiymati mos keladi.

2. Agar $y=f(x)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada musbat va o'suvchi bo'lsa, x ning o'sishi bilan $y=f(x)$ funksiyaning grafigi Ox o'qidan uzoqlashadi.

3. Agar $y=f(x)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada musbat va kamayuvchi bo'lsa, x ning o'sishi bilan $y=f(x)$ funksiyaning grafigi Ox o'qiga yaqinlashadi.

4. Agar $y=f(x)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada manfiy va kamayuvchi bo'lsa, x ning o'sishi bilan $y=f(x)$ funksiyaning grafigi Ox o'qidan uzoqlashadi.

5. Agar $y=f(x)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada manfiy va o'suvchi bo'lsa, x ning o'sishi bilan $[\alpha;\beta]$ funksiyaning grafigi Ox o'qiga yaqinlashadi.

Misollar. Quyidagi funksiyalarni monotonlikka tekshiring:

1) $f(x)=x^3+x$; 2) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

3) $f(x)=(x^2+4x+6)\cdot\ln(x^2+4x+6)$; 4) $f(x)=\frac{4-x^2}{x}$.

Yechilishi. 1) $f(x)=x^3+x$ funksiya R da aniqlangan. Son o'qidan ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 nuqta olamiz. Aniqlik uchun $x_1<x_2$ bo'lsin. $f(x_2)-f(x_1)$ ayirmani qaraymiz:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\cdot(x_2^2+x_2x_1+x_1^2+1),$$

ikkinchi ko'paytuvchi x_1 va x_2 ning har qanday haqiqiy qiymatida musbat. Haqiqatan ham,

$$x_2^2+x_2x_1+x_1^2+1=(x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3}{4}x_2^2+1.$$

Shartga ko‘ra $x_2 - x_1 > 0$, u holda $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ya‘ni $f(x_2) > f(x_1)$. Bu oxirgi tengsizlik $f(x)$ funksiyaning R da qat‘iy o‘suvchi ekanligini bildiradi.

2) Aniqlik uchun $x_1 < x_2$ bo‘lsin. $f(x_2) - f(x_1)$ ayirmani tuzamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2 + x_1}{2}.$$

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmadan olingan $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \le \frac{\pi}{2}$ lar uchun $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ va $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ lar uchun $\cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$. Shunday qilib, $\sin x_2 > \sin x_1$. Demak, $f(x) = \sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ da qat‘iy o‘suvchidir.

3) $z = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2$ bo‘lsin. U holda $x < -2$ uchun z funksiya kamayuvchi, $x \ge -2$ uchun z funksiya o‘suvchi bo‘ladi. Bu qiymatlar uchun $z > 1$ bo‘ladi. Endi $y = z\ln z$ funksiyani qarasak, u $x \ge -2$ da o‘suvchi, $x < -2$ da esa kamayuvchi bo‘ladi, chunki agar $x_1 < x_2 < -2$ bo‘lsa, $z_1 > z_2 > 1$ va, demak, $y_1 = z_1\ln z_1 > z_2\ln z_2 = y_2$, ya‘ni berilgan $y = z\ln z$ funksiya kamayuvchidir.

4) $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$ funksiyani $f(x) = \frac{4}{x} - x$ ko‘rinishda tasvirlaymiz. Bu funksiya nolni o‘z ichiga olmagan har qanday intervalda kamayuvchi bo‘lgan $y_1 = \frac{4}{x}$ va $y_2 = -x$ funksiyalar yig‘indisidan iborat. 1^0-xossaga ko‘ra, berilgan funksiya kamayuvchidir.

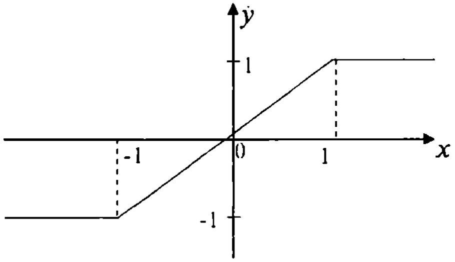
6. Teskari funksiyalar. $f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, funksiyaning o‘zgarish (qiymatlari) sohasi Y bo‘lsin.

11-ta‘rif. $y = f(x)$ funksiyaning har bir $y \in Y$ qiymatiga f munosabatga ko‘ra X dan faqat bitta x qiymat mos kelsa, Y to‘plamda qandaydir funksiya aniqlangan bo‘ladi va u $y = f(x)$ ga nisbatan *teskari funksiya* deyiladi hamda $x = f^{-1}(y)$ ko‘rinishda belgilanadi.

Odatdagidek, funksiyani y bilan, argumentni esa x bilan belgilashlarga muvofiq, $y = f^{-1}(x)$ ko‘rinishda yozishadi. $f^{-1}(x) = g(x)$ desak, $y = g(x)$ bo‘ladi.

1-teorema. $f(x)$ funksiya $D(f)$ to‘plamda teskari $g(x)$ funksiyaga ega bo‘lishi uchun o‘z aniqlanish sohasidagi argumentning har xil qiymatiga funksiyaning ham har xil qiymati mos kelishi zarur va yetarli, ya‘ni $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ lar uchun $x_1 \ne x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$.

2- teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya Xda aniqlangan qat'iy monoton o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, Yda $y=f(x)$ ga teskari funksiya mavjud, bu funksiya ham qat'iy monoton o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.



3.16- chizma.

1- eslatma. Agar funksiya monoton bo'lib, lekin qat'iy monoton bo'lmasa, bu funksiyaning teskarisi mavjud bo'lmaydi. Buni, masalan, 3.16-chizmada ko'rsatilgan

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{agar} \quad x<-1, \\ x, & \text{agar} \quad -1\le x\le 1, \\ 1, & \text{agar} \quad x>1\end{cases}$$

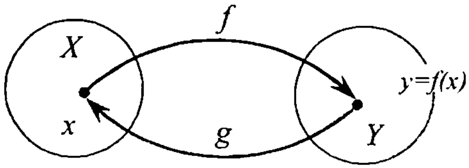
funksiya misolida ko'rish mumkn.

2- eslatma. Juft funksiyaning teskarisi mavjud emas. Xususiy holda, aniqlanish sohasining funksiya qat'iy monoton bo'lgan qismlarida teskari funksiya mavjud bo'ladi. Masalan, $y=x^2$ funksiya uchun $[0;+\infty)$ da $y=\sqrt{x}$ teskari funksiya bo'ladi.

3- eslatma. Davriy funksiyaning teskarisi mavjud emas. Xususiy holda, aniqlanish sohasining funksiya qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lgan qismlarda teskari funksiyalar mavjud bo'ladi. Masalan, $f_1(x)=\sin x$ $\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $f_2(x)=\cos x$ $(x\in[0;\pi])$; $f_3(x)=\operatorname{tg} x$ $\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $f_4(x)=\operatorname{ctg} x (x\in(0;\pi))$ lar uchun ko'rsatilgan oraliqlarda teskari funksiyalar mavjud, chunki bu oraliqlarda ular qat'iy monotondir: $g_1(y)=\arcsin y$ $(y\in[-1;1])$, $g_2(y)=\arccos y$ $(y\in[-1;1])$; $g_3(y)=\operatorname{arctg} y$ $(y\in(-\infty;+\infty))$; $g_4(y)=\operatorname{arcctg} y$ $(y\in(-\infty;+\infty))$.

4- eslatma. $y=f(x)$ funksiya va bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=f^{-1}(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi va o'zgarish sohasi o'z rollarini almashtiradi, ya'ni $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi teskari funksiyaning o'zgarish sohasi bo'ladi, $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi esa teskari funksiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya biror X to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari to'plami Y bo'lsin. $g(y)$ funksiya Y to'plamda aniqlangan bo'lib, X to'plam esa uning qiymatlari to'plami bo'lsin.



3.17- chizma.

3- teorema. $g(y)$ funksiya $y=f(x)$ ga teskari funksiya bo'lishi uchun

$$g(f(x))=x \ (x\in X) \ (f(g(y))=y \ (y\in Y)) \qquad (1)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir (3.17- chizma).

Misollar: 1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ funksiyalar (1) shartni qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, $f(g(x))=\frac{1}{1/x}=x$. Demak, ular bir-biriga teskari funksiyalar bo'ladi.

2) $f(x)=-x$, $g(x)=-x$, $x\in(-\infty;+\infty)$ funksiyalar (1) shartni qanoatlantiradi, ya'ni $f(g(x))=-(-x)=x$. Demak, ular bir-biriga teskari funksiyalar bo'ladi.

$y=f(x)$ to'g'ri funksiyadan $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiyaga o'tish va uning grafigini chizish uchun quyidagi amallarni bajarish maqsadga muvofiq:

1. $y=f(x)$ tenglama x o'zgaruvchiga nisbatan (agar tenglamani x ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa) yechiladi:

$$x=f^{-1}(y)=g(y).$$

2. x ni y bilan va y ni x bilan almashtiriladi:

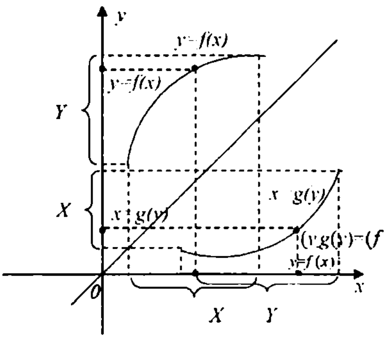
$$y=f^{-1}(x)=g(x).$$

3. $y=f(x)$ to'g'ri funksiyaning grafigi chiziladi.

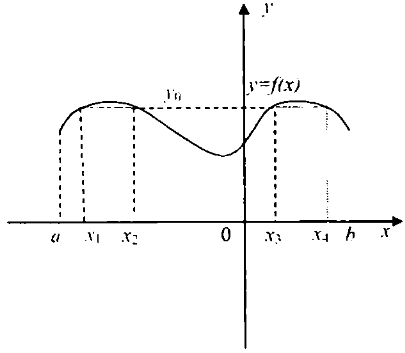
4. Hosil qilingan $y=f(x)$ funksiyaning grafigini I va III choraklar koordinata burchaklaridan o'tuvchi bissektrisaga nisbatan simmetrik almashtirish natijasida teskari funksiya grafigi hosil qilinadi.

$f(x)$ funksiyaning grafigi $\{(x,y):x\in X,\ y\in Y\}$ nuqtalar to'plamidan, $g(x)$ funksiyaning grafigi esa $\{(y,g(y))\}=(f(x),x)\}$ nuqtalar to'plamidan tuziladi (3.18-chizma).

3.19- chizmadagi $y=f(x)$ funksiya uchun teskari funksiya mavjud emas, chunki $x_1<x_2<x_3<x_4$ da $y_0=f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$ bo'ladi, bu esa teskari funksiya shartiga ziddir.



3.18- chizma.

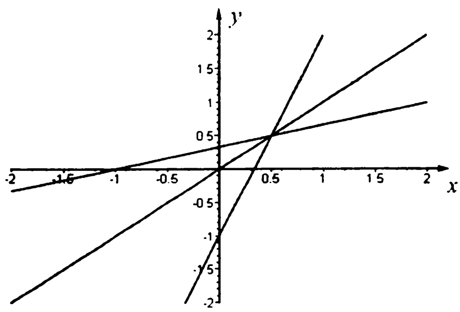


3.19- chizma.

1- misol. $y=3x-1$ funksiyaga teskari funksiyani toping va uning grafigini chizing.

Yechilishi. Avvalo yuqoridagi qoidaga muvofiq: 1) $y=3x-1$ tenglamani x ga nisbatan yechamiz: $x=\frac{y+1}{3}$.

2) x ni y ga va y ni x ga almashtiramiz, natijada izlanayotgan teskari funksiyaga ega bo'lamiz:



3.20- chizma.

$$y=\frac{1}{3}(x+1).$$

3) $y=3x-1$ funksiyaning grafigini chizamiz (3.20-chizma).

4) $y=\frac{1}{3}(x+1)$ funksiyaning grafigi (3.20-chizma) $y=3x-1$ funksiyaning grafigini $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish natijasida hosil qilinadi (3.20-chizma).

2- misol. Ushbu

$$y=\begin{cases}1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa,}\end{cases}$$

funksiyaga teskari funksiya mavjudmi?

Yechilishi. Berilgan funksiya Dirixle funksiyasi deyiladi. Bu funksiyaning teskarisi mavjud emas, chunki y monoton funksiya emas, ya'ni har bir x ratsional son bu funksiya orqali 1 ga akslantiriladi. Demak, $y=1$ ga mos keladigan ratsional sonlar cheksiz ko'pdir.

3- misol. $y=x^2$ $(x\in(-\infty;+\infty))$ funksiyaga teskari funksiya mavjudmi?

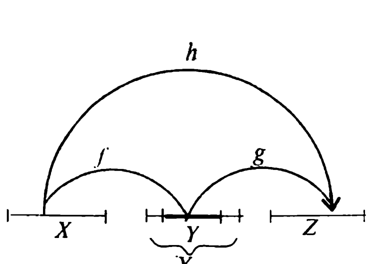
Yechilishi. Berilgan funksiya juft funksiya bo'lib, x ning barcha haqiqiy qiymatlarida qaralsa, u teskari funksiyaga ega bo'lmaydi, chunki y ning har bir y_0 qiymatiga x ning ikkita x_0 va x_1 qiymatlari mos keladi. Demak, 1-teoremaga asosan, berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ da teskari funksiyaga ega emas.

4-misol. $y=3^x$ funksiyaga teskari funksiya mavjudmi?

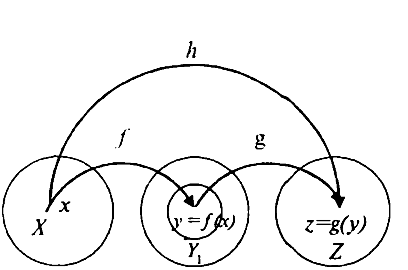
Yechilishi. Berilgan $y=3^x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $R=(-\infty;+\infty)$, o'zgarish sohasi esa $(0;+\infty)$ bo'lib, u $(-\infty;+\infty)$ da qat'iy o'suvchi, ya'ni $\forall x_1, x_2\in R$ uchun $x_1<x_2 \Rightarrow 3^{x_1}<3^{x_2}$ (3- §, 5-bandga. q).

Demak, 2-teoremaga ko'ra berilgan funksiyaga teskari funksiya mavjud: $f^{-1}(f(x))=\log_3 3^x=x\log_3 3=x$.

7. Murakkab funksiyalar. f va g funksiyalar mos ravishda X va Y_1 to'plamlarda berilgan bo'lib, f funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)=Y$, g funksiyaning qiymatlar to'plami $E(g)=Z$ va $Y\subseteq Y_1$ (f funksiyaning qiymatlar to'plami g funksiyaning aniqlanish sohasida yotsin) shart bajarilganda X to'plamda $F=g(f(x))=h(x)$ $(F=g(y)$, $y=f(x))$ *murakkab funksiya* yoki g va f funksiyalar *kompozitsiyasi* aniqlangan deyiladi va u $z=g\cdot f$ kabi belgilanadi (3.21, 3.22-chizmalar). Demak, $\forall x\in X_1$ uchun f funksiya yordamida bitta $y\in Y$ mos qo'yiladi, so'ngra $\forall y\in Y$ uchun g funksiya yordamida bitta $z\in Z$ mos qo'yiladi. Shunday qilib, $z=g(f(x))$ funksiyaning aniqlanish sohasi $f(x)$ning aniqlanish sohasiga ustma-ust tushadi



3.21- chizma.



3.22- chizma.

yoki uning qismi bo'ladi. Bunda f funksiyaning qiymatlar sohasi g funksiyaning aniqlanish sohasida yotishi muhim, aks holda g va f funksiyalarning kompozitsiyasi aniqlanmaydi.

1- misol. $z=\cos y$ va $y=x^3$ funksiyalardan murakkab funksiya tuzish mumkinmi?

Yechilishi. $z=\cos y$ va $y=x^3$ funksiyalarning mos ravishda $D(z)$, $E(y)$ sohalarini topamiz: $D(z)=R$, $E(y)=R$; $E(y)=D(z)$ bo'lgani uchun yuqoridagi murakkab funksiya hosil bo'lishlik shartiga ko'ra bu funksiyalardan murakkab funksiya tuzish mumkin: $z=\cos x^3$. Bu murakkab funksiyaning aniqlanish sohasi ham R dan iborat.

2-misol. $y=u^2$ va $u=\sin x$ funksiyalardan murakkab funksiya tuzish mumkinmi?

Yechilishi. Funksiya ta'rifiga ko'ra

$$F: u \to y=u^2, \quad \varphi: x \to u=\sin x \text{ ni yozsak, u holda}$$

$$D(\varphi)=R, \quad E(\varphi)=[-1;1], \quad D(F)=R, \quad E(F)=[0;+\infty)$$

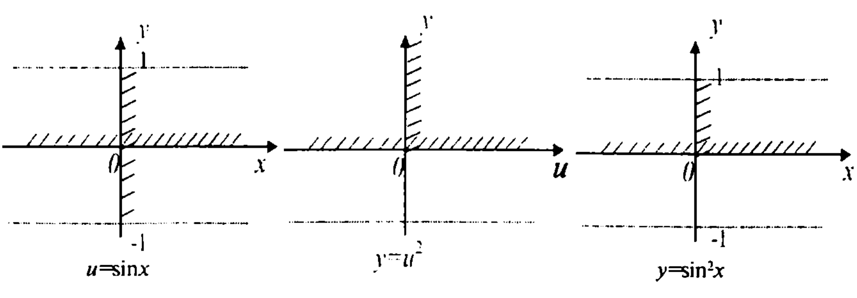
bo'ladi. Shunday qilib, $E(\varphi)\subset D(F)$. Demak, berilgan funksiyalardan $y=\sin^2 x$ murakkab funksiyani tuzish mumkin (3.23- chizma).

3-misol. $y=\sqrt{u}$ va $u=\cos x-2$ funksiyalardan murakkab funksiya tuzish mumkinmi?

Yechilishi. Berilgan funksiyalarning aniqlanish va qiymatlar sohalarini topamiz:

$$D(u)=R, \quad E(u)=[-3;-1],$$

$$D(y)=[0;+\infty), \quad E(y)=[0;+\infty).$$



3.23- chizma.

$E(u) \not\subset D(y)$ bo'lgani uchun $y=\sqrt{u}$ va $u=\cos x-2$ funksiyalardan murakkab funksiya tuzish mumkin emas, ya'ni $y=\sqrt{\cos x-2}$ formula biror funksiyani aniqlamaydi.

4- misol. $z=\sqrt{y+1}$ va $y=2^x$ funksiyalardan murakkab funksiya tuzish mumkinmi?

Yechilishi. Berilgan funksiyalarning aniqlanish va qiymatlar sohalarini topamiz:

$$D(y)=R,\ E(y)=(0;+\infty),$$
$$D(z)=[-1;+\infty),\ E(z)=[0;+\infty).$$

Murakkab funksiya shartiga ko'ra $E(y) \subset D(z)$. Demak, berilgan funksiyalardan $z=\sqrt{2^x+1}$ murakkab funksiyani tuzish mumkin.

5- misol. $f(x)=x^4$ va $g(x)=5^x$ funksiyalar berilgan. $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ funksiyalarni toping.

Yechilishi. Funksiyalarning berilishiga ko'ra:

$$f(f(x))=f(x^4)=(x^4)^4=x^{16};$$
$$f(g(x))=f(5x)=5^{4x};$$
$$g(f(x))=g(x^4)=5^{x^4};$$
$$g(g(x))=g(5^x)=5^{5^x}$$

bo'ladi va ular o'z navbatida murakkab funksiyalar bo'ladi, chunki

$E(f) \subset D(f)$, $E(g) \subset D(f)$, $E(f) \subset D(g)$, $E(g) \subset D(g)$.

6- misol. $f(x)=2^x$ va $f^{-1}(x)=\log_2 x$ funksiyalarning $f\left(f^{-1}(x)\right)$, $f^{-1}\left(f(x)\right)$ kompozitsiyalarini toping.

Yechilishi. Teskari funksiyaning ta'rifiga ko'ra:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=2^{f(x)}=2^{\log_2 x}=x;$$
$$f^{-1}\left(f(x)\right)=\log_2 f(x)=\log_2 2^x=x\log_2 2=x.$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

Funksiyalarning qaysi biri juft, qaysi biri toq va qaysilari juft ham, yoki toq ham emasligini aniqlang:

1. $y=2x^2-3x$. **2.** $y=3x^2+4$. **3.** $y=\frac{4x}{x+4}$.

4. $y=\mathrm{tg}(x-\frac{\pi}{3})$. **5.** $y=\sqrt[3]{x}$ **6.** $y=x^2-x^4$.

7. $y=x|x|$. **8.** $y=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ **9.** $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$

10. $y=\frac{\mathrm{tg}x}{\cos x}-x^3$. **11.** $y=\sin x+\frac{x^3+1}{x^3-1}$ **12.** $y=x^3+\cos x$.

13. $y=\sin x\cdot\mathrm{tg}\,x$. **14.** $y=\left(1-x^4\right)\cdot\cos x$.

15. $y=\sin 7x+\cos 5x$. **16.** $y=\arccos|x|$.

17. $y=\arcsin x+\arccos x$. **18.** $y=\frac{1+\sin x}{\sin x}$.

Funksiyalarni davriylikka tekshiring. Agar davriy bo'lsa, u holda uning eng kichik musbat davrini toping:

19. $f(x)=x^2-3x+4$. **20.** $f(x)=\sin 2x-2\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

21. $f(x)=\sin x$. **22.** $f(x)=\cos 2x\cdot\cos 6x$.

23. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$

24. $f(x)=6\sin(0{,}25\pi x)$. **25.** $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-18^\circ\right)$.

26. $f(x)=7\sin\frac{x}{2}-2\cos\left(\frac{2}{5}x+\frac{\pi}{2}\right)$. **27.** $f(x)=\sin\frac{\pi x}{6}+\mathrm{tg}\frac{\pi x}{30}$.

28. $f(x)=\cos\pi x+\sin 2x$. **29.** $f(x)=\mathrm{tg}2x+\mathrm{ctg}3x+\cos 5x$.

30. $f(x)=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})+5\mathrm{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$.

31. $f(x)=\mathrm{tg}\frac{x}{3}+\sin 2\pi x$.

32. $f(x)=13\sin^2 3x$. **33.** $f(x)=\cos x\cdot\cos\sqrt{3}x$.

Funksiyalarni o'z aniqlanish sohalarida chegaralanganlikka tekshiring:

34. $y = \frac{1}{x-10}$, $x \in [0;5]$. **35.** $y = x^2 - 10x + 25$.

36. $y = \frac{1}{\sin 5x}$. **37.** $y = \lg\left(x^2 - 4x + 3\right)$. **38.** $y = \frac{x^3}{x^4+1}$.

39. $y = \frac{1}{1+x^2}$. **40.** $y = \frac{\sin x}{x}$. **41.** $y = \frac{\sin x}{x^4+1}$ **42.** $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

43. $y = x \cdot \cos^2 x$. **44.** $y = \frac{1+x}{1+x^2}$. **45.** $y = \frac{1}{x-x^2}$.

46. $y = \frac{e^x}{e^x-1}$ **47.** $y = \arcsin\frac{4x}{4+x^2}$. **48.** $y = \sqrt[3]{2-x-x^2}$.

49. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ **50.** $y = 2^{x^2-2x+2}$.

Funksiyalarni o'zlarining aniqlanish sohalarida monotonlikka tekshiring:

51. $y = \frac{1}{x^3-1}$, $x \neq 1$. **52.** $y = \lg\left(x^2 - 6x + 10\right)$.

53. $y = \frac{2x-3}{x-1}$. **54.** $y = 2^{x^2+1}$. **55.** $y = \log_{0.5}\frac{x}{x+1}$.

56. $y = x - x$. **57.** $y = \frac{1}{e^x-1}$ **58.** $y = e^{\frac{1}{x}}$.

59. $y = \sqrt[3]{(1-x)^2}$.

60. $y = \begin{cases} 2x, & x \leq -2 \text{ bo'lganda,} \\ 4, & -2 < x < 2 \text{ bo'lganda,} \\ 2x, & x \geq 2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$

61. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, $x \in [0;\pi]$.

62. $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$. **63.** $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x-2}}$ **64.** $y = 2 \cdot 3^{1-x} - 9^{-x}$.

65. $y = 5^{|x|}$.

Funksiyalar uchun o'z aniqlanish sohasida (agar teskari funksiya mavjud bo'lsa) teskari funksiyalarni toping:

66. $y = (x+1)^2$, $x \in [-1;+\infty)$. **67.** $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in (0;+\infty)$.

68. $y = 5x - 2$. **69.** $y = x^3 + 5$, $x \in R$.

70. $y=\sqrt{1-x^3}, \quad x\in[-1;0]$. **71.** $y=\sqrt{1-x^2}, \quad x\in[0;1]$.

72. $y = x - x, \quad x\in\left(-\infty;+\infty\right)$. **73.** $y=\mathrm{arctg}3x$.

74. $y=\begin{cases}1, & x\le 0 \text{ bo‘lganda,}\\ 0, & x>0 \text{ bo‘lganda,}\end{cases}$ **75.** $y=2^x-1$.

76. $y=\arccos x^3$.

77. $y=\begin{cases}1, & x\le -1 \quad \text{bo‘lganda,}\\ -x, & -1\le x\le 1 \quad \text{bo‘lganda,}\\ -1, & x>1 \quad \text{bo‘lganda,}\end{cases}$

78. $y=\frac{1-x}{1+x}, \quad x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;+\infty\right)$.

79. $y=\lg\frac{x}{2}$.

80. $y=\begin{cases}x, & x<1 \quad \text{bo‘lganda,}\\ x^2, & 1\le x\le 4 \quad \text{bo‘lganda,}\\ 2^x, & x>4 \quad \text{bo‘lganda,}\end{cases}$

81. $f(x)=x^2$ va $g(x)=2^x$ funksiyalar berilgan bo‘lsa, u holda $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ murakkab funksiyalarni toping.

82. Agar $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ bo‘lsa, $f_3\left(x\right)=f\left(f\left(f\right)\right)$ funksiyani toping.

83. $f\left(x\right)=\frac{5x^2+1}{2-x}$ funksiya uchun $f\left(3x\right)$, $f\left(x^3\right)$, $\left(f\left(x\right)\right)^2$ funksiyani toping.

84. Agar $f\left(x+1\right)=x^3-3x+2$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiyani toping.

Funksiyalarning kompozitsiyalarini yozing:

85. $g(y)=y^2$ va $y=f(x)=\lg x$.

86. $g\left(y\right)=\sin y$ va $y=f\left(x\right)=1-x^2$.

87. $g\left(y\right)=y^2$ va $y=\sin x$.

88. $g(y)=\begin{cases}2y, & y\le 0 \text{ bo‘lganda},\\ 0, & y>0 \text{ bo‘lganda}.\end{cases}$ va $y=x^2-1$.

89. $g(y)=9^y$ va $y=x$.

90. $g(y)=\sqrt{y}$ $(y\ge 0)$, $y=1+x^2$.

91. $f(x)=5^x$ va $f^{-1}(x)=\log_5 x$ funksiyalar berilgan. $f\left(f^{-1}(x)\right)$, $f^{-1}\left(f(x)\right)$ larni toping.

92. $z=\arccos y$ va $y=3+x^4$ funksiyalar uchun murakkab funksiya mavjudmi?

93. $z=\sqrt{y}$ va $y=9-x^2$ funksiyalar uchun murakkab funksiya mavjudmi?

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1. Toq. **2.** Juft. **3.** Toq ham emas, juft ham emas. **4.** Toq ham emas, juft ham emas. **5.** Toq. **6.** Juft. **7.** Toq. **8.** Juft. **9.** Juft. **10.** Toq. **11.** Toq ham emas, juft ham emas. **12.** Toq ham emas, juft ham emas. **13.** Juft. **14.** Juft. **15.** Toq ham emas, juft ham emas. **16.** Juft. **17.** Juft. **18.** Toq ham emas, juft ham emas. **19.** Davriy emas. **20.** Davriy, $T_0=2\pi$, **21.** Davriy emas. **22.** Davriy, $T_0=\frac{\pi}{2}$. **23.** Davriy, eng kichik musbat davri yo‘q. **24.** Davriy, $T_0=8$. **25.** Davriy, $T_0=\frac{4}{3}\pi$. **26.** Davriy, $T_0=20\pi$. **27.** Davriy, $T_0=60$. **28.** Davriy emas. **29.** Davriy, $T_0=2\pi$. **30.** Davriy, $T_0=4\pi$. **31.** Davriy emas. **32.** Davriy, $T_0=\frac{\pi}{3}$. **33.** Davriy emas. **34.** Chegaralangan. **35.** Quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan. **36.** Chegaralanmagan. **37.** Chegaralanmagan. **38.** Chegaralangan. **39.** Chegaralangan. **40.** Chegaralangan. **41.** Chegaralangan. **42.** Quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan. **43.** Chegaralanmagan. **44.** Chegaralangan. **45.** Chegaralanmagan. **46.** Chegaralanmagan. **47.** Chegaralangan. **48.** Yuqoridan chegaralangan, quyidan chegaralanmagan. **49.** Quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan. **50.** Quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan.

51. $x > 1$ da qat'iy kamayuvchi, $x < 1$ da qat'iy o'suvchi.

52. $(-\infty;3]$ da qat'iy kamayuvchi, $[3;+\infty)$ da qat'iy o'suvchi.

53. $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ da qat'iy o'suvchi. **54.** $(-\infty;+\infty)$ da qat'iy o'suvchi. **55.** $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$ da qat'iy kamayuvchi. **56.** $(-\infty;+\infty)$ da kamayuvchi. **57.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ da qat'iy kamayuvchi. **58.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ da qat'iy kamayuvchi. **59.** $(-\infty;1]$ da kamayuvchi, $[1;+\infty)$ da o'suvchi. **60.** $(-\infty;+\infty)$ da o'suvchi. **61.** $[0;\frac{\pi}{4}]$ va $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}]$ da kamayuvchi, $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$ va $[\frac{3\pi}{4};\pi]$ da o'suvchi. **62.** $[2;+\infty)$ da o'suvchi.

63. $(-\infty;-3)$ va $(-3;\sqrt{5}]$ da o'suvchi, $[\sqrt{5};3)$ va $(3;+\infty)$ da kamayuvchi. **64.** $(-\infty;-1]$ da o'suvchi, $[1;+\infty)$ da kamayuvchi.

65. $(-\infty;0]$ da qat'iy kamayuvchi, $[0;+\infty)$ da qat'iy o'suvchi.

66. $g(y)=\sqrt{y}+1$. **67.** $g(y)=\ln\frac{e^y+1}{e^y-1}$. **68.** $g(y)=\frac{y+2}{5}$.

69. $g(y)=\sqrt[3]{y-5}$. **70.** $g(y)=-\sqrt{1-y^2}$, $y\in[0;1]$.

71. $g(y)=\sqrt{1-y^2}$, $y\in[0;1]$. **72.** Teskari funksiya mavjud emas. **73.** $g(y)=\frac{1}{3}\operatorname{tg}y$, $y\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

74. $$g(y)=\begin{cases} y, & y\le 0 \text{ bo'lganda,}\\ \sqrt{y}, & y>0 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$$

75. $g(y)=\log_2(y+1)$, $y\in(-1;+\infty)$. **76.** $g(y)=\sqrt[3]{\cos y}$.

77. Teskari funksiya mavjud emas. **78.** $g(y)=\frac{1-y}{1+y}$, $y\neq -1$.

79. $g(y)=2\cdot 10^y$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

80. $$g(y)=\begin{cases} y, & y<1 \text{ bo'lganda,}\\ \sqrt{y}, & 1\le y\le 4 \text{ bo'lganda,}\\ \log_2 y, & y>4 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$$

81. $f(f)=x^4$, $f(g)=4^x$, $g(f)=2^{x^2}$, $g(g)=2^{2^x}$.

82. $f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$. **83.** $f(3x)=\frac{45x^2+1}{2-3x}$, $f(x^3)=\frac{5x^6+1}{2-x^3}$, $\left(f(x)\right)^2=\frac{25x^4+10x^2+1}{4-4x+x^2}$. **84.** x^2-5x+6 **85.** $\lg^2 x$ **86.** $\sin(1-x^2)$.

87. $\sin^2 x$. **88.** $g(f)=\begin{cases}2\cdot(x^2-1), & x\in[-1;1] \text{ bo‘lganda,}\\ 0, & x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$

89. 9^x. **90.** $\sqrt{1+x^2}$. **91.** $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$.

92. Murakkab funksiya mavjud emas. **93.** Murakkab funksiya mavjud emas.

4- §. FUNKSIYANING LIMITI

1. Nuqtaning atrofi. Bizga $a\in R^1$ hamda ixtiyoriy musbat yetarli kichik $\varepsilon>0$ va c sonlar berilgan bo‘lsin.

1- ta‘rif. Quyidagi

$$U_\varepsilon(a)=\{x:\ x\in R^1,\ a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$$

to‘plam a- nuqtaning ε- *atrofi* deyiladi, ε son esa atrofning *radiusi* deyiladi (4.1- chizma).

Ushbu

$$U_\varepsilon^+(a)=\{x:\ x\in R^1,\ a<x<a+\varepsilon\}$$

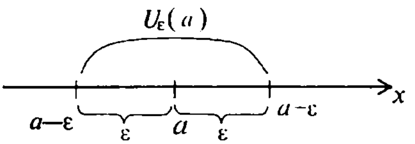
to‘plam a nuqtaning *o‘ng atrofi*,

$$U_\varepsilon^-(a)=\{x:\ x\in R^1,\ a-\varepsilon<x<a\}$$

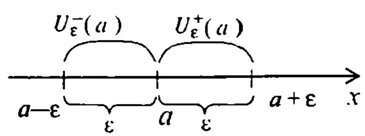
to‘plam esa a nuqtaning *chap atrofi* deyiladi (4.2- chizma).

Ushbu $0<|x-a|<\varepsilon$ tengsizlik $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$, $x\neq a$ tengsizliklarga teng kuchli bo‘lib, ularning har ikkalasini a nuqtaning $\dot{U}_\varepsilon(a)$ atrofi shaklida ifodalash mumkin:

$$\dot{U}_\varepsilon(a)=\{x:\ x\in R^1,\ a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,\ x\neq a\}.$$



4.1- chizma.



4.2- chizma.

Ba'zi hollarda $\dot{U}_\varepsilon(a)$ atrof a nuqtaning *teshik atrofi* deb ham yuritiladi.

Haqiqiy sonlar to'plami R^1 tarkibiga $-\infty$ va $+\infty$ simvollarni $\forall x \in R^1$ uchun $x > -\infty$ va $x < +\infty$ xususiyat bilan qo'shib, $\bar{R}^1$ to'plamni hosil qilamiz:

$$\bar{R}^1 = R^1 \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

$\bar{R}^1$ da $+\infty$ va $-\infty$ «nuqta» larning atrofi tushunchalari quyidagicha kiritiladi (4.3- chizma):

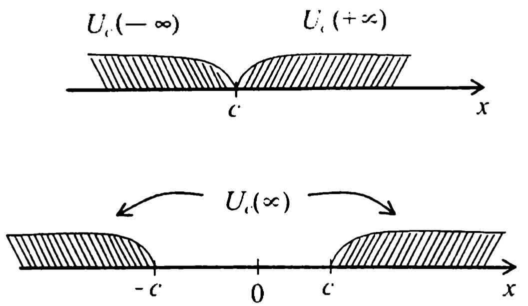
$$U_c(+\infty) = \{x : x \in R^1, \quad c \in R^1, \ c < x < +\infty\},$$
$$U_c(-\infty) = \{x : x \in R^1, \ c \in R^1, \ -\infty < x < c\},$$
$$U_c(\infty) = \{x : x \in R^1, \quad c \in R^1, \ |x| > c\}.$$

2. Natural argumentli funksiya va uning limiti. N va R^1 to'plamlar berilgan bo'lib, f — har bir natural $n (n \in N)$ songa biror haqiqiy $x_n (x_n \in R^1)$ sonni mos qo'yuvchi qoida yoki usul bo'lsin: $f : n \to x_n$. Bu holda N to'plamda *natural argumentli funksiya* aniqlangan deyiladi va $x_n = f(n)$ kabi belgilanadi.

Agar $x_n = f(n)$ funksiya berilgan bo'lsa, u holda uning argumenti yoki n indeksini x_n o'zgaruvchi mos qiymatining nomeri deb qarash mumkin. Shunday qilib, $x_1 = f(1)$ — funksiyaning birinchi qiymati, $x_2 = f(2)$ — ikkinchi qiymati, $x_3 = f(3)$ — uchinchi qiymati va h.k. Biz har doim qiymatlar to'plami $E(x_n) = \{x_n\}$ ni natural 1, 2, 3, ..., n, ... ketma-ketlikka o'xshash nomerlarning ortishi bo'yicha tartiblangan, ya'ni

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots \tag{1}$$

sonlar ketma-ketligi shaklida tasavvur qilamiz.



4.3- chizma.

Biz bundan keyin, qulaylik uchun, natural argumentli $x_n=f(n)$ funksiyani ketma-ketlik deb qaraymiz. Masalan, agar $x_n=f(n)$ funksiya

$$x_n=1,\ x_n=\frac{1}{n},\ x_n=(-1)^{n+1},\ x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$$

formulalardan birortasi bilan berilgan bo'lsa, ularga mos ketma-ketliklar quyidagi shaklda bo'ladi:

$$1,\ 1,\ 1,\ ...,\ 1,\ ...;\qquad 1,\ -1,\ 1,\ ...,\ (-1)^n,\ ...;$$

$$1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\ \frac{1}{n},...;\qquad 0,\ 1,\ 0,\ ...,\ \frac{1+(1-)^n}{2},\ ... .$$

Endi $\{x_n\}$, $n=1,\ 2,...$ ketma-ketlikning chegaralanganligi tushunchalari bilan tanishamiz.

2- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall n\in N$ uchun $x_n\le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yuqoridan chegaralangan* deb ataladi.

Masalan, $x_n=\sin n°$, $x_n=-n$:

$\sin 1°$, $\sin 2°$, $\sin 3°$, ..., $\sin n°$, ...; -1, -2, -3, ..., $-n$, ...

sonlar ketma-ketliklari yuqoridan chegaralangan, chunki birinchi ketma-ketlikning har bir hadi 1 dan, ikkinchi ketma-ketlikning har bir hadi esa -1 dan katta emas.

3- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo'lmasa, ya'ni $\forall n\in N$ uchun $x_n\ge m$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *quyidan chegaralangan* deyiladi. Aks holda, $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralanmagan deyiladi. Masalan, $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, $x_n=2n$:

$$1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...,\ \frac{1}{2^{n-1}},...;$$

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...,\ 2n,\ ...$$

sonlar ketma-ketliklari quyidan chegaralangan, chunki $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ o'zgaruvchining har bir hadi 0 dan, $x_n=2n$ o'zgaruvchining har bir hadi esa 2 dan kichik bo'lmaydi.

4-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday M, m o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib, barcha $n\in N$ lar uchun $m\le x_n\le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *chegaralangan* deyiladi.

Masalan, $x_n=\sin n°$, $x_n=\frac{1}{n}$ ketma-ketliklar chegaralangandir.

5-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday natural $n_0=n_0(\varepsilon)$ son topilsaki, barcha $n\geq n_0$ natural sonlar uchun

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yaqinlashuvchi* deyiladi, a son esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deb ataladi va

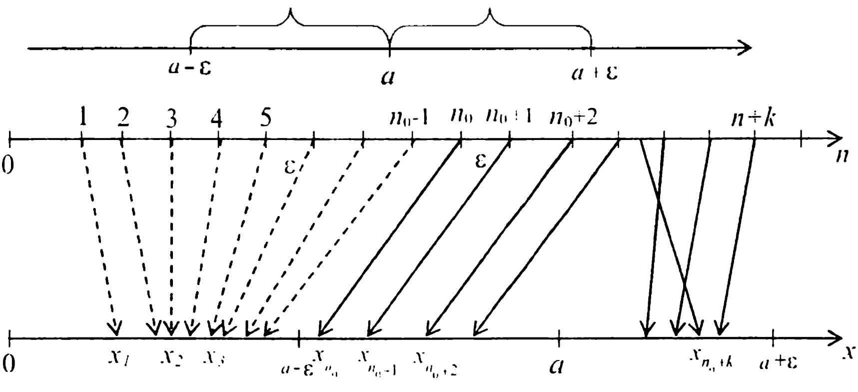
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{yoki} \quad n\to\infty \text{ da } \quad x_n\to a$$

kabi belgilanadi.

Bu ta'rifni qisqacha

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in N : \forall n\geq n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon)$$

kabi ifodalash ham mumkin.



4.4- chizma.

6-ta'rif. Chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deb ataladi. Agar ketma-ketlikning limiti cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, u *uzoqlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

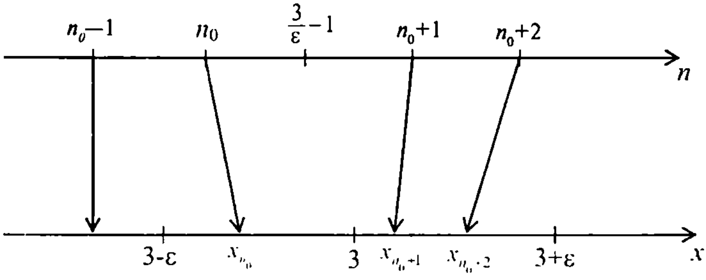
Ketma-ketlikning limiti quyidagi geometrik ma'noga ega: agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, a nuqtaning ε - atrofida $n_0=n_0$ (ε) nomerdan boshlab, ketma-ketlikning hamma hadlari yotadi (4.4- chizma).

1-misol. Ushbu

$$\{x_n\}=\left\{\frac{3n}{n+1}\right\}: \ \frac{3}{2};\ \frac{2}{1};\ \frac{9}{4};\ldots,\ \frac{3n}{n+1},\ldots$$

ketma-ketlikning limiti $a=3$ bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi. Ixtiyoriy musbat ε sonni olamiz. Bu $\varepsilon>0$ songa ko'ra $n_0=\left[\frac{3}{\varepsilon}-1\right]$ deyilsa, u holda $\forall n\geq n_0$ uchun



4.5- chizma.

$$x_n - a = \left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \left|-\frac{3}{n+1}\right| < \varepsilon, \frac{3}{n+1} < \varepsilon,\ n+1 > \frac{3}{\varepsilon},\ n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 3$ (4.5- chizma).

7-ta'rif. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz kichik miqdor* deb ataladi.

Masalan, ushbu ketma-ketliklar cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$; 2) $\{x_n\} = \left\{\frac{n+1}{n^2+1}\right\}$;

2-misol. Ushbu ketma-ketlikning limiti nol bo'lishini ta'rifga asosan isbot qiling:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}; \quad -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots,\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Yechilishi. Ixtiyoriy musbat ε sonni olaylik. Unda bu ε>0 songa ko'ra shunday natural $n_0(n_0=n_0(\varepsilon)\in N)$ son topilishini ko'rsatish kerakki, $n \geq n_0$ bo'lgan barcha natural n sonlar uchun

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsin. Yuqorida aytilgan n_0 sonni topish, bu holda $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ tengsizlikni yechish orqali amalga oshiriladi.

Ravshanki,

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Demak, n_0 natural son sifatida $\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1=n_0$ olinsa, unda $\forall n \geq n_0$ uchun

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

bo‘ladi. U holda ketma-ketlik limitining ta‘rifiga ko‘ra, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$ bo‘ladi.

8-ta‘rif. Agar $\forall E>0$ son olinganda ham shunday $n_0(\varepsilon)\in N$ topilsaki, $\forall n \geq n_0$ uchun $|x_n|>E$ bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz katta miqdor* deb ataladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ kabi belgilanadi.

Masalan,

1) $\{x_n\}=\{2^n\}$; 2) $\{x_n\}=\{-n\}$; 3) $\{x_n\}=\{\log_3 n\}$

ketma-ketliklar cheksiz katta miqdorlar bo‘ladi.

3-misol. $\{x_n\}=\{3^n\}$, $3;\ 3^2,\ 3^3, \ldots, 3^n, \ldots$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ekanligini ko‘rsating.

Yechilishi. Ixtiyoriy $E>0$ sonni olaylik. Unda bu songa ko‘ra shunday $n_0\in N$ $(n_0=n_0(E))$ son topilishini ko‘rsatish kerakki, barcha $n>n_0$ uchun

$$x_n=3^n>E$$

tengsizlik bajarilsin.

Ravshanki,

$$3^n>E \Leftrightarrow \log_3 3^n>\log_3 E \Leftrightarrow n>\log_3 E.$$

$0<E\leq 1$ bo‘lganda, $n_0=n_0(E)=1$ deyilsa, unda $\forall n>n_0$ uchun har doim $3^n>E$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} 3^n=+\infty$ ekanligini bildiradi.

Chekli limitga ega bo‘lgan ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo‘lib, ular mos ravishda chekli a va b limitlarga ega bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=a\pm b;\quad \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

2^0. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo'ladi.

3^0. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi, aks holda, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz limitga ega bo'lganda esa ketma-ketlik chegaralanmagan bo'ladi.

4^0. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \le y_n$ $(x_n \ge y_n)$ bo'lsa, u holda $a \le b$ $(a \ge b)$ bo'ladi.

5^0. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \le z_n \le y_n$ bo'lsa, u holda $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo'ladi.

4-misol. $\{x_n\} = \left\{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}\right\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

Yechilishi. Berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti 1^0 xossaga asosan quyidagicha topiladi:

$$\lim_{n\to\infty}=(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}.$$

5-misol. $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

Yechilishi. Ravshanki, barcha $n \in N$ lar uchun

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n$$

tengsizlik bajariladi va $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ ketma-ketliklar bir xil limitga ega.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

U holda 5^0- xossaga asosan, $\{y_n\}$ ketma-ketlik ham limitga ega bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

bo'ladi.

6-misol. $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

Yechilishi. Faraz qilaylik, a son, $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lsin, ya'ni $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham $\exists\ n_0(\varepsilon)$ $(n_0 \in N)$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ lar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

bajarilsin. Agar $\varepsilon = \frac{1}{2}$ deb olsak, (1) tengsizlik n ning juft qiymatlarida

$$1 - a < \frac{1}{2} \tag{2}$$

ko'rinishga, n ning toq qiymatlarida esa

$$-1 - a < \frac{1}{2} \tag{3}$$

ko'rinishga keladi. a ning hech bir qiymatida (2) bilan (3) tengsizliklar bir vaqtda bajarilmaydi. Demak, farazimiz noto'g'ri, ya'ni yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ta'rifini qanoatlantiruvchi a son va $n_0(\varepsilon)$ nomer mavjud emas. Shunday qilib, berilgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi emas ekan.

9-ta'rif. Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ *o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik* deyiladi.

10- ta'rif. Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_n \geq x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ *kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik* deyiladi.

11- ta'rif. O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar *monoton ketma-ketliklar* deyiladi.

Masalan, $1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots n, n, \ldots n, \ldots$ o'suvchi,

$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ qat'iy o'suvchi,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \quad \text{qat‘iy kamayuvchi,}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots \quad \text{kamayuvchi.}$$

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda u chekli limitga ega; agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ $(-\infty)$ bo‘ladi.

7-misol. Ushbu ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang va limitini toping:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\} \qquad (a > 0).$$

Isboti. Shartga ko‘ra,

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} x_n \qquad (1)$$

deb yozish mumkin, u holda $\forall n \geq n_0$, $n_0 = [a]$ lar uchun $x_{n+1} \leq x_n$ tengsizlik bajariladi. 9- ta‘rifga ko‘ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $n_0 = [a[$ nomerdan boshlab kamayuvchi.

Bundan tashqari, barcha $n \in N$ lar uchun $x_n \geq 0$, ya‘ni $\{x_n\}$ quyidan chegaralangan. 1- teoremaga asosan $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi. Uning limiti b bo‘lsin: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. U holda (1) tenglikda limitga o‘tamiz:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} \cdot x_n$$

Quyidagiga ega bo‘lamiz: $b = 0 \cdot b$ yoki $b = 0$.

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

2-teorema. (Koshi kriteriysi). $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son mavjud bo‘lib, $\forall n > n_0$ va $\forall p \in N$ lar uchun

$$x_n - x_{n+p} < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

8-misol. $\{x_n\} = \left\{\frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}\right\}$, $n \in N$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

Isboti. Berilgan ketma-ketlik uchun $x_{n+p}-x_n$ ayirmani baholaymiz:

$$x_{n+p}-x_n=\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}}+\ldots+\frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\le\frac{1}{3^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{3^{n+p}}=$$

$$=\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2\cdot3^n}<\frac{1}{3^n}.$$

Agar $\forall\varepsilon>0$ songa ko'ra $n_0=[\log_3\frac{1}{\varepsilon}]$ deb olinsa, $\forall n>n_0$ va $\forall r\in N$ lar uchun

$$x_{n+p}-x_n<\frac{1}{3^n}<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Demak, Koshi kriteriysiga ko'ra, berilgan ketma-ketlik chekli limitga ega ekan.

3. Ixtiyoriy argumentli funksiyaning limiti. X — biror haqiqiy sonlar to'plami ($X\subset R^1$), a — biror nuqta bo'lsin. Shu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

12- ta'rif. Agar $U_\varepsilon(a)$ ($\varepsilon>0$) da X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* (*quyuqlanish nuqtasi*) deb ataladi.

Misollar: 1) Ushbu $[0;2]=\{x: x\in R^1, 0\le x\le 2\}$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2) $N=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

3) $(0, 1)=\{x: x\in R^1, 0<x<1\}$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi va yana $x=0$, $x=1$ nuqtalar ham $(0; 1)$ to'plam uchun limit nuqtalardir.

Limit nuqta quyidagi xossalarga ega:

1^0. X to'plamning limit nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, tegishli bo'lmasligi ham mumkin.

2^0. Agar a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, a nuqtaning har bir atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'ladi.

3^0. Agar a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, X to'plam nuqtalaridan a ga intiluvchi $\{x_n\}$, ($x_n\in X$, $x_n\ne a$, $n=1, 2, \ldots$) ketma-ketlik tuzish mumkin.

13- ta'rif. (Geyne ta'rifi). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ($x_n\ne a$, $n=1, 2, \ldots$) ketma-ketlik olganda ham unga mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu b ga $f(x)$

funksiyaning a nuqtadagi (yoki $x \to a$ dagi) *limiti* deb ataladi va uni $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=b$ yoki $x \to a$ da $f(x) \to b$ kabi belgilanadi.

14-ta'rif. (Koshi ta'rifi). Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, argument x ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x \to a$ dagi) *limiti* deb ataladi.

Eslatma. 13 va 14- ta'riflar o'zaro teng kuchlidir.

$X (X \subset R^1)$ to'plam berilgan bo'lib, a nuqta uning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin. Shu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

15- ta'rif. (Geyne ta'rifi). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (kichik) bo'lib, a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham, unga mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng* (*chap*) *limiti* deb ataladi.

16-ta'rif. (Koshi ta'rifi). Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, argument x ning $U_\varepsilon^+(a)$ ($U_\varepsilon^-(a)$) atrofdagi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng* (*chap*) limiti deb ataladi va u, mos ravishda, quyidagicha belgilanadi:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$ yoki $f(a+0)=b$, ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$ yoki $f(a-0)=b$).

Chekli yoki cheksiz $(a;b)$ oraliqda $f(x)$ funksiya berilgan bo'lib, uning grafiklari 4.6-4.18- chizmalardagi kabi tasvirlangan bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ va $x \to b$ dagi limitlarini analitik ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

1. 4.6-chizma uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$.
2. 4.7-chizma uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.
3. 4.8-chizma uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$.
4. Mos ravishda, 4.9-, 4.10- chizmalar uchun

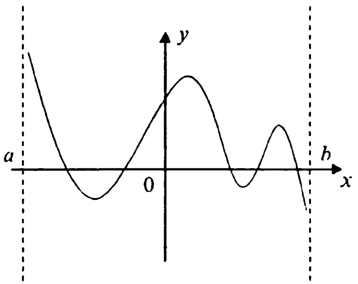
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c \quad (c \in R^1)$;

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \quad (c \in R^1)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

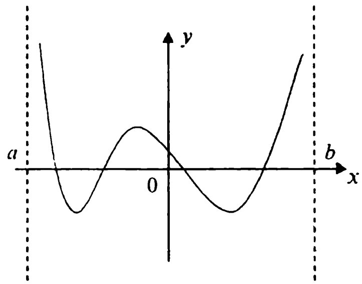
5. Mos ravishda, 4.11-, 4.12- chizmalar uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c \quad (c \in R^1)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \quad (c \in R^1)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$.

6. 4.13-, 4.14- chizmalar uchun $\lim_{x\to a} f(x) = c$, $\lim_{x\to b} f(x) = c \quad (c \in R^1)$.

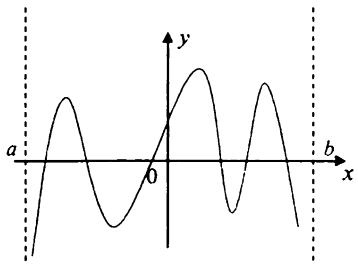
7. 4.15-, 4.16-, 4.17-, 4.18- chizmalar uchun $\lim_{x\to a} f(x)=c$, $\lim_{x\to b} f(x)=d \quad (c, d \in R^1)$.



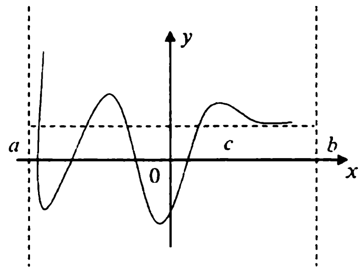
4.6- chizma.



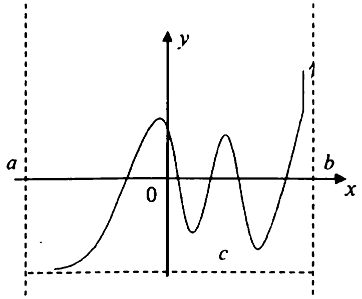
4.7- chizma.



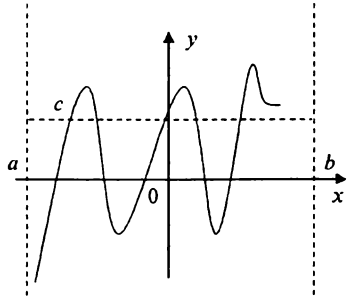
4.8- chizma.



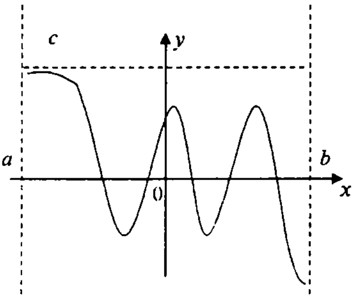
4.9- chizma.



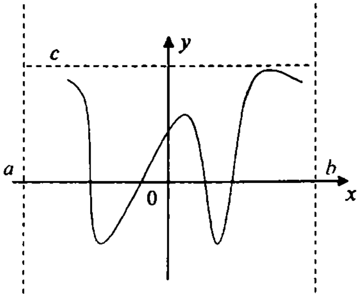
4.10- chizma.



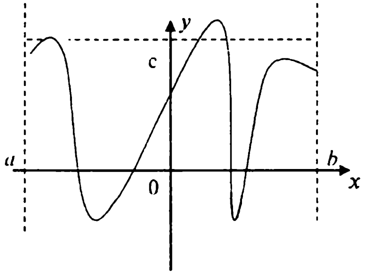
4.11- chizma.



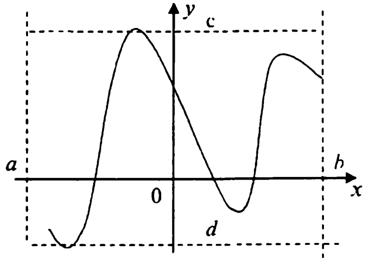
4.12- chizma.



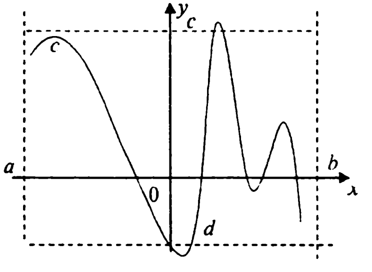
4.13- chizma.



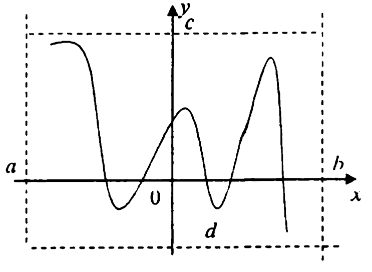
4.14- chizma.



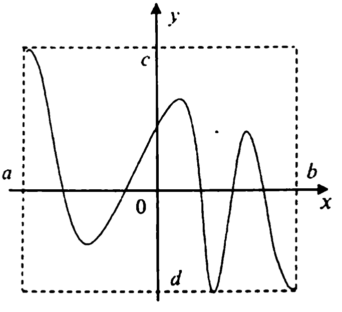
4.15- chizma.



4.16- chizma.



4.17- chizma.



4.18- chizma.

1-misol. $f(x)=x^4$ funksiyaning $x\to 3$ dagi limiti 81 ga teng ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. 3 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ $(x_n\neq 3,\ n=1, 2, \ldots)$ ketma-ketlik olamiz. Unga mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik quyidagi $\{f(x_n)\}=\{x_n^4\}$ ko'rinishda bo'ladi. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustidagi arifmetik amallarga binoan (3-§, 2-band, 1^0- ga qarang):

$$\lim_{x_n\to 3} f(x_n)=\lim_{x_n\to 3} x_n^4=\lim_{x_n\to 3}(x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot x_n)=81.$$

Demak, 13-ta'rifga ko'ra, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=81$.

12-misol. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ funksiyaning $x\to 0$ da limitga ega emasligini ko'rsating.

Yechilishi. Nol nuqtaning atrofida nolga intiluvchi ikkita har xil

$$\{x_n'\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\},\qquad \{x_n''\}=\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$$

ketma-ketliklarni olaylik. U holda

$$f(x_n')=\sin\frac{1}{x_n'}=\sin n\pi=0,$$

$$f(x_n'')=\sin\frac{1}{x_n''}=\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=0,\qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n'')=1$$

bo'ladi.

Bu esa 3-§, 2-band, 2^0- xossaga ko'ra, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada limiti mavjud emasligini ko'rsatadi.

3-misol. $f(x)=2x+3$ funksiyaning $x=1$ nuqtadagi limiti 5 ga teng bo'lishini ko'rsating va $\varepsilon=0{,}01$ uchun δ ni toping.

Yechilishi. $\forall\varepsilon>0$ songa ko'ra δ ni $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ deb olsak, u holda $|x-1|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$|(2x+3)-5|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon$$

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$$

munosabat bajariladi.

Demak, 14- ta'rifga ko'ra, $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $\varepsilon=0{,}01$ desak, $\delta = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$ bo'ladi. $0<|x-1|<0{,}005$ bo'lganda $|(2x+3)-5|<0{,}01$ bo'lar ekan.

14- misol. $\lim\limits_{x\to 1-0} a^{\frac{1}{x}}, \ (a>1)=0$ tenglikni isbotlang.

Isboti. $\forall\varepsilon>0$ va $x<0$ uchun $a^{\frac{1}{x}}<\varepsilon$ tengsizlikni yechamiz. Agar $\varepsilon\ge 1$ bo'lsa, u holda $\forall x<0$ lar uchun $a^{1/x}<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Shuning uchun $\forall\varepsilon\ge 1$ bo'lganda δ o'rnida ixtiyoriy musbat sonni olish mumkin, masalan, $\delta=1$. Agar $\varepsilon<1$ bo'lsa, u holda tengsizlikning ikkala tomonini logarifmlab,

$$\frac{1}{x}\ln a<\ln\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{\ln a}{\ln\varepsilon}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $\forall 0<\varepsilon<1$ bo'lganda ham $-\delta<x<0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi δ mavjud bo'ladi. Masalan, $\delta=-\frac{\ln a}{\ln\varepsilon}>0$ deb olish yetarli.

Demak, $a^{\frac{1}{x}}$ $(a>1)$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi chap limiti nolga teng ekan.

$X\,(X\subset R^1)$ to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi hamda bu to'plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lsin.

Quyidagi xossalar o'rinli.

1^0. Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x)\pm g(x)$ funksiya ham $x\to a$ da limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o'rinli.

2^0. Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham $x\to a$ da limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o'rinli.

3^0. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo'lsa, $k\cdot f(x)$ (k=const) funksiya ham $x\to a$ da limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)]=k\cdot\lim_{x\to a}f(x)$$

tenglik o'rinli.

4^0. Agar $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lib, $g(x) \neq 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham $x \to a$ da limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

tenglik o'rinli.

Eslatma. 1°, 2° va 4° xossalarda $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi va bo'linmasidan iborat bo'lgan funksiyalarning limitga ega bo'lishidan, bu funksiyalarning har birining limitga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Masalan, $f(x) = 1 - \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiyalar yig'indisi $f(x) + g(x) = 1$ bo'lib, $x \to 0$ da $f(x)+g(x) \to 1$. Ammo $x \to 0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri limitga ega emas.

5-misol. $\lim\limits_{x \to 0,5}(15\cos^2 \pi x + 3\sin^3 \pi x + \frac{x+2,5}{x+0,5})$ funksiyaning limitini toping.

Yechilishi. $15\cos^2\pi x$, $3\sin^3\pi x$ va $\frac{x+2,5}{x+0,5}$ funksiyalarning $x \to 0,5$ dagi limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \to 0,5} 15\cos^2 \pi x = 15 \lim_{x \to 0,5} \cos \pi x \cdot \lim_{x \to 0,5} \cos \pi x = 0.$$

$$\lim_{x \to 0,5} 3\sin^3 \pi x = 3 \lim_{x \to 0,5} \sin \pi x \cdot \lim_{x \to 0,5} \sin \pi x \cdot \lim_{x \to 0,5} \sin \pi x = 3,$$

$$\lim_{x \to 0,5} \frac{x+2,5}{x+0,5} = \frac{\lim\limits_{x \to 0,5} x+2,5}{\lim\limits_{x \to 0,5} x+0,5} = 3.$$

Demak, 1°—4°- xossalarga asosan, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x \to 0,5}(15\cos^2 \pi x + 3\sin^3 \pi x + \frac{x+2,5}{x+0,5}) =$$

$$= \lim_{x \to 0,5} 15\cos^2 \pi x + \lim_{x \to 0,5} 3\sin^3 \pi x + \lim_{x \to 0,5} \frac{x+2,5}{x+0,5} = 0 + 3 + 3 = 6.$$

17- ta'rif. Agar $x \to a$ (a — chekli yoki $\pm\infty$) da $f(x)$ funksiyaning limiti nolga teng, ya'ni $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ bo'lsa, $f(x)$ *cheksiz kichik funksiya* deyiladi.

Masalan, $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to -0} \ln(1+x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$,

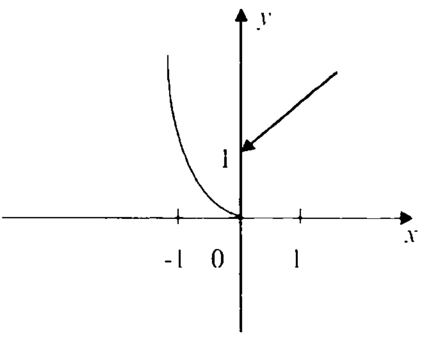
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\ln|x|}=0$ bo‘lganligidan, ta‘rifga ko‘ra, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $\ln x$, $\cos x$, $\frac{2}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\ln|x|}$ funksiyalar cheksiz kichik funksiyalardir.

18- ta‘rif. Agar $x\to a$ (a — chekli yoki $\pm\infty$) da $f(x)$ funksiyaning limiti cheksiz ($\pm\infty$) bo‘lsa, $f(x)$ *cheksiz katta funksiya* deyiladi.

Masalan: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2 x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x}{(x-2)^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2)=-\infty$ bo‘lganligidan, $\operatorname{tg}^2 x$, $\frac{4x}{(x-2)^2}$, x^2+x+1, x^3+2 funksiyalar cheksiz katta funksiyalarga misol bo‘ladi.

X to‘plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya $x\to a$ da (bu yerda a shu X to‘plamning limit nuqtasi) chekli b limitga ega bo‘lsa (ya‘ni $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$), u holda $\alpha(x)=f(x)-b$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya bo‘ladi. Agar $f(x)$ funksiya $f(x)=b+\alpha(x)$ (bu yerda $\alpha(x)$, ifoda $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya) ko‘rinishda tasvirlansa, b— funksiyaning $x\to a$ dagi limiti bo‘ladi.



4.19- chizma.

Eslatma. Funksiyaning biror nuqtada bir tomonli limitlari mavjud bo‘lishidan uning shu nuqtada limitga ega bo‘lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

3- teorema. $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo‘lishi uchun uning shu nuqtada o‘ng va chap limitlari mavjud bo‘lib,

$$f(a+0)=f(a-0)=b$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

6- misol. $f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada limitga ega emasligini ko‘rsating (4.19-chizma):

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo‘lsa,}\\ x+1, & \text{agar } x>0 \text{ bo‘lsa.}\end{cases}$$

Yechilishi. Berilgan funksiya son o‘qida aniqlangan. $x\le0$ uchun funksiya $f(x)=x^2$ formula bilan beriladi. $x=0$ nuqtada x^2 funksiyaning limiti nolga teng bo‘ladi, u holda 3-teoremaga asosan $x=0$ nuqtada berilgan funksiyaning chap limiti ham nolga teng bo‘ladi:

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} x^2=\lim_{x\to 0} x^2=0.$$

$x=0$ nuqtada berilgan funksiyaning o‘ng limiti 1 ga teng bo‘ladi:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x+1)=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada chap va o‘ng limitlarga ega bo‘lib, lekin ular teng emas: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$. Shunday qilib, 3-teoremaga asosan, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada limitga ega emas.

7-misol. Ushbu funksiyaning $x=0$ nuqtada limitga egaligini ko‘rsating:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{agar } x<0 \text{ bo‘lsa,} \\ \sin x, & \text{agar } x>0 \text{ bo‘lsa,} \end{cases}$$

Yechilishi. Berilgan funksiya son o‘qining $x=0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarida aniqlangan. $f(x)$ funksiyaning $x=0$ nuqtada chap va o‘ng limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} x=0, \text{ chunki } \lim_{x\to 0} x=0,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} \sin x=0, \text{ chunki } \lim_{x\to 0} \sin x=0.$$

Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada chap va o‘ng limitlarga ega bo‘lib, ular o‘zaro tengdir: $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$. 3-teoremaga asosan, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada chekli limitga ega.

Funksiya limitining mavjudligi haqidagi teoremalarni qaraymiz.

4- teorema. Agar nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofidan olingan x ning barcha qiymatlarida

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$$

tengsizlik o‘rinli hamda $x\to a$ da $g(x)$ va $h(x)$ funksiyalar limitga ega bo‘lib,

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=b$$

bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

bo'ladi.

5- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'ladi va, agar $f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $+\infty$ $(-\infty)$ bo'ladi.

6- teorema (Koshi kriteriysi). $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilib, argument x ning $0<|x_1-a|<\delta$, $0<|x_2-a|<\delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 $(x_1, x_2 \in X)$ qiymatlarida

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

8- misol. $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ funksiyaning $x\to\infty$ da limitini toping.

Yechilishi. Barcha $x\neq0$ lar uchun quyidagi

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} < 1 + \frac{1}{x^2}$$

tengsizlik bajariladi. $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x^2}) = 1$, chunki $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Demak, 4- teoremaga asosan,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

bo'ladi.

9-misol. $x\to0$ da $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ funksiyaning limiti chekli ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtada chekli limitga ega ekanligini isbotlashda Koshi kriteriysidan foydalanamiz. $\forall\varepsilon > 0$ son olib, δ ni $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ deb qarasak, x ning $0 <| x_1 |< \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, $0 <| x_2 |< \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1, x_2 qiymatlari uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^2 \sin\frac{1}{x_1} - x_2^2 \sin\frac{1}{x_2}\right| \le$$

$$\le x_1^2 \sin\frac{1}{x_1} + x_2^2 \sin\frac{1}{x_2} \le |x_1|^2 + |x_2|^2 < \varepsilon$$

Bu esa qaralayotgan funksiya $x=0$ nuqtada Koshi kriteriysini qanoatlantirishini ko'rsatadi. Demak, berilgan funksiya $x\to 0$ da chekli limitga ega ekan.

Funksiyaning limitini topishda quyidagi ajoyib limitlar muhim rol o'ynaydi:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1;$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e \quad (e \approx 2,71828\ldots);$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e (a>0, \; a\ne 1);$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a>0).$

Ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $X\subset R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu holda yuqorida keltirilgan ajoyib limitlardan quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

6) Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$ (A, B — chekli sonlar) bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)} = e^{B\ln A} = A^B$$

bo'ladi.

7) Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)[f(x)-1]}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

10-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ hisoblang.

Yechilishi. 1) formulaga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2.$$

11-misol. $\lim\limits_{x\to\infty} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{9x}$ ni hisoblang.

Yechilishi. 2) formulaga asosan,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{9x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{9}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{9}=e^{9}$$

natijani olamiz.

12-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$ ni hisoblang.

Yechilishi. $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}$; $\varphi(x)=8x^2+3$

belgilarni kiritib, har bir funksiya uchun limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}}=1;\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}(8x^2+3)=+\infty.$$

So'ngra 7) formuladan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)[f(x)-1]};$$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1=-\frac{2}{2x^2+5};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)[f(x)-1]=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2(8x^2+3)}{2x^2+5}=-8.$$

Shundan keyin, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x+5}\right)^{8x^2+3}=e^{-8}.$$

13-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(5^{\frac{1}{x}}-1\right)$ ni hisoblang.

Yechilishi. $\dfrac{1}{x}=y$ deb belgilaymiz. U holda $x\to+\infty$ da $y\to0$.
Demak, 5) formulaga asosan

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(5^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{y}-1}{y}=\ln 5 \text{ bo'ladi.}$$

14-misol. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin x}-1}{\sin x}$ ni hisoblang.

Yechilishi. $\sin x=t$ deb belgilaymiz. U holda $x\to 0$ da $t\to 0$. Demak, 3) formulaga asosan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-1}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1/3}-1}{t}=\frac{1}{3}.$$

bo'ladi.

15-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_3(x+1)}{3^x-1}$ ni hisoblang.

Yechilishi. 4)—5) formulalarga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(x+1)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(x+1)}{x}\frac{x}{3x-1}=\frac{\log_3 e}{\ln 3}=\frac{1}{\ln^2 3}.$$

16-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$ ni hisoblang.

Yechilishi. 6) formulaga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. Funksiyalarni taqqoslash. $X(X\subset R^1)$ to'plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lsin.

19-ta'rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun shunday o'zgarmas $\delta>0$ va C sonlar topilsaki, barcha $x\in U_\delta(a)$ lar uchun

$$|f(x)|\le C\cdot|g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan *chegaralangan* deyiladi $f(x)=O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'lsa, uni $x\to a$ da va $f(x)=O(1)$ kabi yoziladi. Masalan, $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x=0$ nuqta atrofida chegaralangan (chunki $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Shuning uchun $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=O(1)$ deb yozish mumkin.

20-ta'rif. Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x\ne a$ da $f(x)\ne 0$, $g(x)\ne 0$) uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \quad \text{yoki} \quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$$

bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ lar *ekvivalent funksiyalar* deb ataladi va $f(x)\sim g(x)$ kabi belgilanadi.

Masalan: 1) $x\to 0$ da $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$ funksiyalar ekvivalent funksiyalardir: $x\sim\sin x$; 2) $x\to 0$ da $e^x-1\sim x$; 3) $x\to 0$ da $\ln(1+x)\sim x$; 4) $x\to\infty$ da $x^4+x^3+5\sim x^4$ ga ekvivalentdir.

21-ta‘rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $f(x)=\alpha(x)\,g(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lib, bunda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo‘lsa, u holda $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ ga nisbatan *yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya* deb ataladi va $f(x)=o(g(x))$ kabi belgilanadi.

Masalan, ushbu munosabatlar o‘rinlidir:

1) $x\to 0$ da $\sin^2 x=x^2+o(x^2)=x^2+o(x)$;
2) $x\to 0$ da $\arcsin 3x=3x+o(3x)=3x+o(x)$;
3) $x\to 0$ da $\ln(1+5x)=5x+o(x)$.

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida cheksiz kichik funksiya (ya‘ni $x\to a$ da $f(x)\to 0$) bo‘lsa, uni $f(x)=o(1)$ kabi yoziladi.

Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $f(x)=o(g(x))$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu funksiyalar uchun $f(x)=O(g(x))$ tenglik ham o‘rinli bo‘ladi. (Bu tasdiqning teskarisi o‘rinli emas.)

Teorema. $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x\neq a$ da $f(x)\neq 0$; $g(x)\neq 0$) ekvivalent ($f(x)\sim g(x)$) bo‘lishi uchun

$$g(x)-f(x)=o(g(x))$$

yoki

$$g(x)-f(x)=o(f(x))$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

Mustaqil yechish uchun misollar

Ketma-ketlik limiti ta‘rifidan foydalanib, quyidagi tengliklarni isbotlang:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-4}{n+4}=1.$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n+1}=2.$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n-1}=\frac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{5n+1}=\frac{4}{5}$. **5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}=0$.

Sonlar ketma-ketliklarining limitini toping:

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{n}}$. **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{14}+(n+2)^{14}}{(n+3)^{14}+1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$. **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2^n+5^n}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. **12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$. **14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}+1}{n}$.

Koshi kriteriysidan foydalanib, quyidagi ketma-ketliklarning chekli limitga ega bo‘lishini ko‘rsating:

15. $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}$. **16.** $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

17. $x_n=1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

Funksiya limiti ta‘riflaridan foydalanib, quyidagi munosabatlarni isbotlang:

21. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)=4$. **22.** $\lim\limits_{x\to 1}(6x-2)=4$. **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

24. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2$. **25.** $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$. **26.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+2}=\frac{1}{2}$.

Funksiyalar nuqtada limitga ega emasligini isbotlang:

27. $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $a=0$. **28.** $f(x)=x-[x]$, $a=3$.

29. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $a=0$.

Limitlarni toping:

30. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-27}{x-3}$. **31.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. **32.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x^2}-1}{4x^2}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{16+x^2}-4}$. 34. $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$.

35. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})$.

36. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}\ (m,n\in N)$. 37. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^3+1}{5x^4-2x^2+1}$. 39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+4}-x\right)$.

40. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$. 41. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$, $n\in N$.

Limitlarni hisoblashda $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ va $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ tengliklardan foydalaning.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$. 43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. 44. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 8x}{4x}$. 45. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$. 47. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$. 48. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$.

49. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$. 50. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. 51. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^x$.

52. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{-x}$. 54. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{kx}$. 56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$. 57. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{2x}}$.

58. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$. 59. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

7. 2. **12.** $\frac{4}{3}$. **32.** $\frac{5}{8}$. **37.** 3. **42.** $\frac{5}{4}$

8. 2. **13.** 0. **33.** 2. **38.** $\frac{4}{5}$ **43.** $\frac{\alpha}{\beta}$

9. 1. **14.** 0. **34.** 0. **39.** 0. **44.** 2.

10. 5. **30.** 27. **35.** 0. **40.** 0. **45.** -1

11. $\frac{1}{2}$. **31.** $\frac{1}{2}$. **36.** $\frac{n}{m}$. **41.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **46.** 1.

47. $\frac{1}{2\pi}$. **50.** $\frac{1}{e}$ **53.** $e^{-3/2}$. **56.** 1. **59.** 1.

48. -1. **51.** $e^{-3,5}$. **54.** e. **57.** $\sqrt{e}$.

49. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **52.** ∞. **55.** e^{km}. **58.** e.

5-§. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

1. Uzluksiz funksiyaning ta'riflari. $f(x)$ funksiya $X \subset R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a shu X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin, $a \in X$.

1- ta'rif. Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va u $f(a)$ ga teng, ya'ni

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1}$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya *a nuqtada uzluksiz* deyiladi.

2- ta'rif (G e y n e). Agar X to'plamning elementlaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham funksiyaning unga mos qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, $f(x)$ *funksiya a nuqtada uzluksiz* deyiladi.

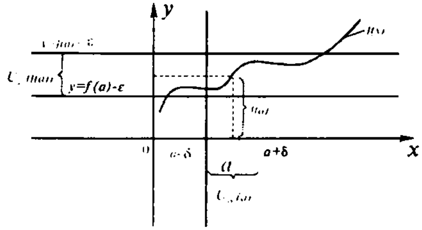
3- ta'rif (**K** o s h i). Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ son topilsaki, funksiya argumenti x ning $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

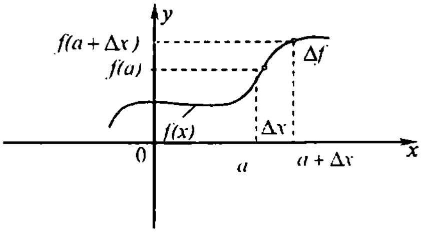
tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya a nuqtada uzluksiz* deyiladi.

4- ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, funksiya argumenti x ning barcha $x \in U_\delta(a)$ qiymatlarida $f(x)$ funksiyaning mos qiymatlari $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ bo'lsa, $f(x)$ *funksiya a nuqtada uzluksiz* deyiladi (5.1- chizma).

Matematik belgilardan foydalanib, 2-, 3-, 4- ta'riflarni, mos ravishda, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:



5.1- chizma.



5.2- chizma.

$$\forall\{x_n\}: \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(a),$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0: \quad \forall x: |x-a| < \delta \to |f(x)-f(a)| < \varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0: \quad \forall x: U_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

Bunda $x—a$ ayirma *argument orttirmasi*, $f(x)—f(a)$ ayirma esa *funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi* deyiladi. Ular, mos ravishda Δx va Δy yoki $\Delta f(a)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - a, \qquad \Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a).$$

Argument va funksiya orttirmasini quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$x = a + \Delta x, \quad \Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a). \qquad (2)$$

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, (1) va (2) munosabatlardan

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$$

kelib chiqadi. Bu esa funksiya uzluksizligini quyidagicha ta‘riflash ham mumkinligini ko‘rsatadi.

5- ta‘rif. Agar argumentning a nuqtadagi orttirmasi Δx nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning unga mos orttirmasi Δf ham nolga intilsa, ya‘ni

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$$

bo‘lsa, $f(x)$ *funksiya a nuqtada uzluksiz* deyiladi (5.2- chizma).

Eslatma. X to‘plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo‘lib, a shu X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lmasa, ya‘ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ma‘noga ega bo‘lmasa, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksizligi haqida gapirishning ma‘nosi yo‘q.

$X \subset R^1$ to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

6- ta'rif. Agar $x \to a+0$ ($x \to a-0$) da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va u $f(a)$ ga teng, ya'ni

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0), \qquad f(a+0) = f(a)$$

$$\left(\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0), \qquad f(a-0) = f(a)\right)$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz* deyiladi.

7- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R^1$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ *funksiya X to'plamda uzluksiz* deyiladi.

8- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $x = a$ nuqtada o'ngdan, $x=b$ nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* $[a;\ b]$ *kesmada uzluksiz* deyiladi.

1- teorema. $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $f(a+0)= f(a-0)=f(a)$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

1-misol. $f(x)=(x^2-6)^3$ funksiyaning $a=3$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. Birinchidan, $x \to 3$ da $f(x) =(x^2-6)^3$ funksiyaning limiti mavjud:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x^2 - 6)^3 = 27,$$

ikkinchidan, bu limit berilgan funksiyaning $a=3$ nuqtadagi qiymatiga teng: $27=f(3)$. Demak, $f(x)=(x^2-6)^3$ funksiya 1-ta'rifga asosan $a=3$ nuqtada uzluksizdir, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 27$.

2- misol. $f(x)=x^2 \cdot D(x)$ funksiyaning $x=0$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsating, bu yerda $D(x)$ — Dirixle funksiyasi.

Yechilishi. Ixtiyoriy nolga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik olamiz. U holda unga mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik $f(x_n)=x_n^2\ D(x_n)$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Ma'lumki, Dirixle funksiyasi chegaralangan. $\{x_n\}$ ketma-ketlik esa cheksiz kichik bo'lgani uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik bo'ladi. Demak, $n \to \infty$ da $f(x_n)=x_n^2\ D(x_n) \to 0$ bo'ladi. Bu esa qaralayotgan funksiyaning, 2- ta'rifga asosan, $a=0$ nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi.

3- misol. $f(x)=\sqrt{x+6}$ funksiyaning $a=3$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. Berilgan funksiya $a=3$ nuqtada aniqlangan. $\forall\varepsilon>0$ son olib, bu ε songa ko'ra $\delta>0$ sonni $\delta=3\varepsilon$ bo'lsin deb qaralsa, u holda $|x-3|<\delta$ bo'lganda

$$|f(x)-f(3)|=|\sqrt{x+6}-3|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+6}+3}<\frac{|x-3|}{3}<\frac{\delta}{3}=\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa, 3-ta'rifga asosan, qaralayotgan funksiyaning $a=3$ nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi.

4- misol. $f(x)=\sin x$ funksiyaning $\forall a\in R^1$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi. $\forall a\in R^1$ nuqtani olib, unga $\Delta x=x-a$ orttirma beramiz. Natijada $f(x)=\sin x$ funksiya ham $\Delta y=\sin(a+\Delta x)-\sin a$ orttirmaga ega bo'ladi. $|\cos t|\le 1$, $\sin t\le t$ va $0<\Delta x<\pi$ tengsizliklarni e'tiborga olgan holda,

$$|\Delta y|=|f(a+\Delta x)-f(a)|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{a+\Delta x+a}{2}\right|\le 2\frac{\Delta x}{2}=\Delta x$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan esa $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $f(x)=\sin x$ funksiya, 4-ta'rifga asosan, $\forall a\in R^1$ nuqtada uzluksizdir.

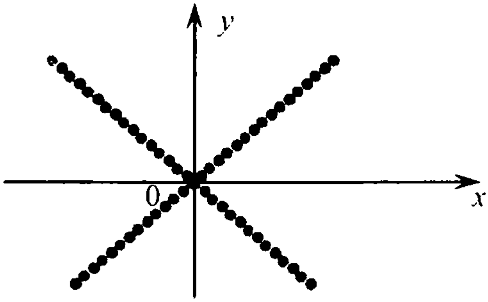
5- misol. Ushbu funksiyani ixtiyoriy $x=a$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\text{ — ratsional son bo'lganda,}\\ -x, & x\text{ — irratsional son bo'lganda.}\end{cases}$$

Yechilishi. Ma'lumki, $f(x)$ funksiya a nuqtaning atrofida ham musbat, ham manfiy qiymatlar qabul qiladi. Agar $x\in U_\varepsilon(0)$ bo'lsa, $f(x)\in U_\varepsilon(0)$ bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$. Demak, 4- ta'rifga asosan $f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Agar $a\neq 0$ bo'lsa, $f(a)\neq 0$. x—ratsional son bo'lganda: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$, x — irriatsional son bo'lganda esa $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-a$ bo'ladi. Bu yerdan $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lmasligi kelib chiqadi (5.3- chizma).

6-misol. Ushbu funksiyaning $x=0$ nuqtada o'ngdan va chapdan uzluksizlikka tekshiring:



5.3- chizma.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+8^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0 \text{ bo‘lganda;}\\ 0, & x=0 \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$$

Yechilishi. Berilgan funksiyaning $x \to 0$ da o‘ng va chap limitlarini topamiz:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1+8^{\frac{1}{x}}}=0=f(0+0)=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1+8^{\frac{1}{x}}}=1=f(0-0)\neq f(0).$$

Demak, 6- ta‘rifga ko‘ra, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘lib, chapdan uzluksiz emas.

1. Funksiya uzilish nuqtalarining turlari. $f(x)$ funksiya $X \subset R^1$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin, $a \subset X$.

9- ta‘rif. Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning:

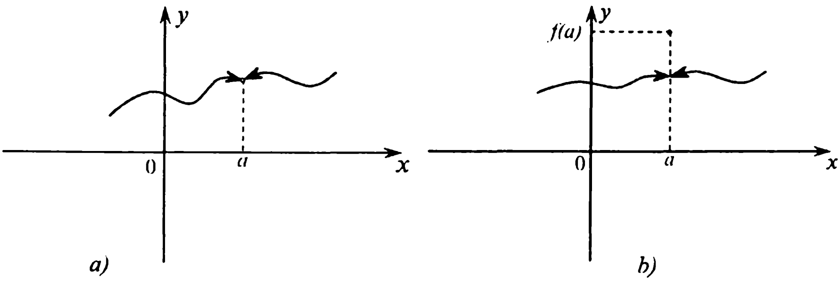
1) limiti mavjud va chekli bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq f(a)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \; (\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty)$;

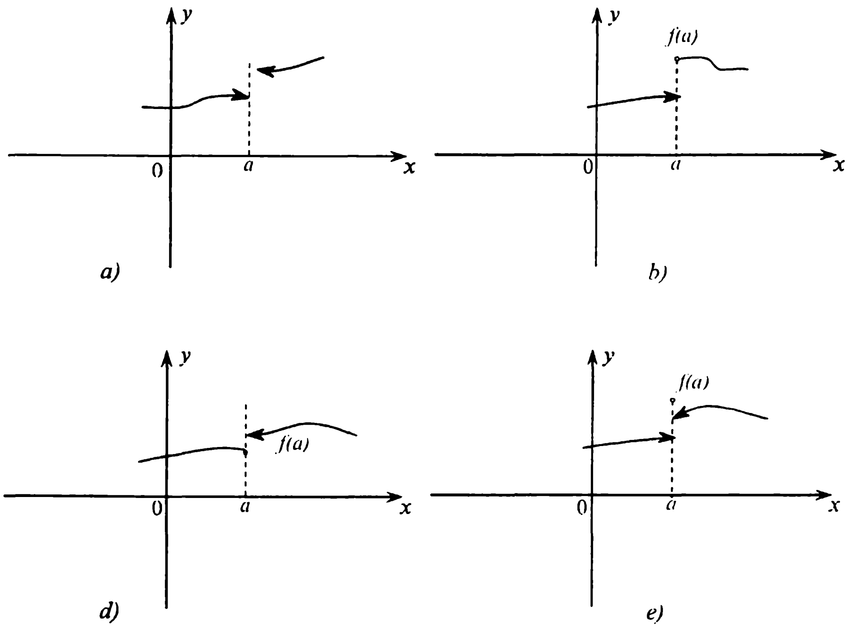
3) limiti mavjud bo‘lmasa, $f(x)$ funksiya *a nuqtada uzilishga ega* deyiladi.

Funksiyaning berilgan nuqtada uzilishga ega bo‘lish hollarini alohida qarab o‘tamiz:

1-hol. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o‘ng $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ va chap $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}$ limitlari mavjud bo‘lib, $f(a+0)=f(a-0)\neq f(a)$



5.4-*a*, *b* chizmalar.

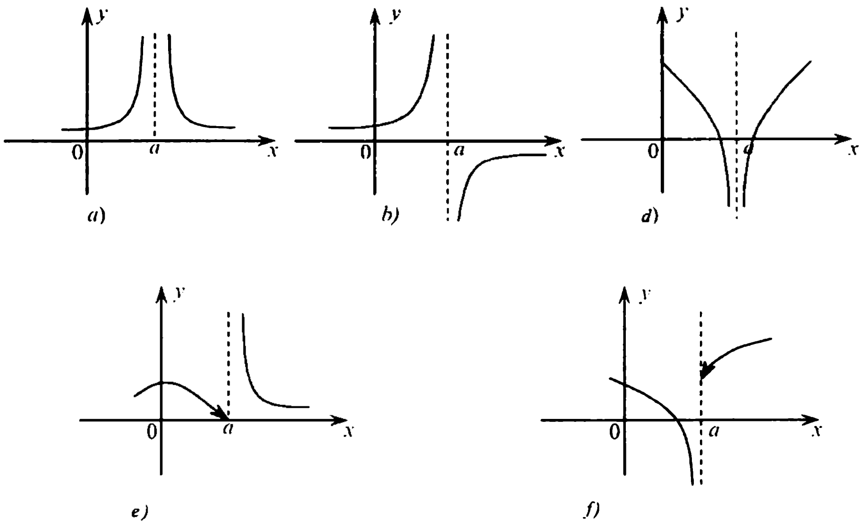


5.5- *a*, *b*, *d*, *e* chizmalar.

munosabat o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada *yo‘qotilishi mumkin bo‘lgan uzilishga ega* deyiladi (5.4-*a*, *b* chizmalar).

2-hol. Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning o‘ng va chap limitlari mavjud va chekli bo‘lib, ular bir-biriga teng bo‘lmasa ($f(a-0) \neq$ $\neq f(a+0)$), $f(x)$ funksiya a nuqtada *birinchi tur uzilishga ega* deyiladi (5.5- *a*, *b*, ***d***, *e*- chizmalar).

Ushbu $|f(a+0)-f(a-0)|=h$ ayirma $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *sakrashi* deyiladi.



5.6-*a*, *b*, *d*, *e*, *f* chizmalar.

3-hol. Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning:

1) o‘ng va chap limitlaridan hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmasa;

2) o‘ng va chap limitlaridan biri cheksiz yoki o‘ng va chap limitlari turli ishorali cheksizdan iborat bo‘lsa;

3) limiti cheksiz (funksiyaning o‘ng va chap limitlari cheksiz) bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada *ikkinchi tur uzilishga ega* deyiladi (5.6-*a*, *b*, *d*, *e*, *f* chizmalar).

Agar chap $f(a-0)$ yoki o‘ng $f(a+0)$ limitlardan hech bo‘lmaganda biri ∞ ga teng bo‘lsa, $x=a$ nuqta *cheksiz uzilish nuqtasi* deyiladi (5.6-*a*, *b*, *d*, *e*, *f*) chizmalar).

1-misol. Ushbu funksiyani uzluksizlikka tekshiring:

$$f(x)=\begin{cases} x^4, \; x \neq 0 \text{ bo‘lganda}, \\ 2, \; x = 0 \text{ bo‘lganda}. \end{cases}$$

Yechilishi. Ravshanki, berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtadagi chap limiti $\lim\limits_{x\to 0-0} x^4 = 0 = f(0-0)$ va o‘ng limiti $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} x^4 = 0 = f(0+0)$ mavjud bo‘lib, lekin

$$f(0-0)=f(0+0)\neq 2=f(0)$$

teng emas. Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada yo'qotilishi mumkin bo'lgan uzilishga ega (5.7- chizma).

2-misol. $f(x)=[x]$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. $x=n$ $(n\in Z)$ nuqtada berilgan funksiyaning xos qiymatini va o'ng hamda chap limitlarini topamiz:

$$f(n)=[n]=n, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=n=f(n+0),$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=n-1=f(n-0).$$

Demak, berilgan funksiya $x=n$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'ladi (5.8- chizma).

3-misol. Ushbu funksiyani uzluksizlikka tekshiring:

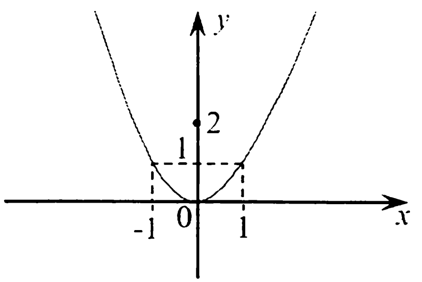
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{7}(2x^2+5), -\infty < x \le 1 & \text{bo'lganda;} \\ 5-4x, \ 1 < x < 3 & \text{bo'lganda;} \\ x-5, \ 3 \le x+\infty & \text{bo'lganda.} \end{cases}$$

Yechilishi. Berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan va $(-\infty;1)$, $(1;3)$, $(3;+\infty)$ larda uzluksiz bo'lib, u faqat $x=1$ va $x=3$ nuqtalarda uzilishga ega bo'lishi mumkin. Berilgan funksiyaning $x=1$ nuqtadagi bir tomonli limitlarini hisoblaymiz:

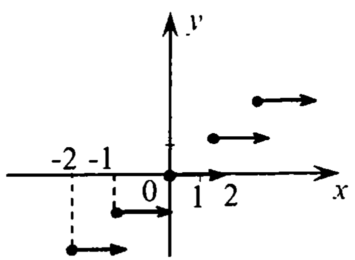
$$f(1-0) \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{7}(2x^2+5)=1,$$

$$f(1+0)= \lim_{x\to 1+0}(5-4x)=1.$$

Ma'lumki, $x=1$ nuqtada berilgan funksiyaning qiymati birinchi analitik ifoda bilan aniqlanadi:



5.7- chizma.



5.8- chizma.

$$f(1) = \frac{1}{7}(2x^2 + 5) = 1.$$

Demak, $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=1$ bo'lgani uchun, 1- teoremaga asosan, berilgan $f(x)$ funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Endi $f(x)$ funksiyaning $x=3$ nuqtada chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}(5-4x)=-7,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(x-5)=-2.$$

Bu yerdan

$$f(3-0)\neq f(3+0)=f(3).$$

Demak, $f(x)$ funksiya $x=3$ nuqtada 1-tur uzilishga ega bo'lib, uning $x=3$ nuqtadagi sakrash kattaligi

$$\omega = f(3+0) - f(3-0) = -2+7 = 5$$

bo'ladi.

4-misol. Funksiyani $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring:

$$f(x)=\text{arctg}\ (\text{tg}\, x)\ \ (x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+\pi k),\ k\in Z).$$

Yechilishi. $f(x)$ funksiyani $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \text{arctg}(\text{tg}\, x) = \text{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \text{arctg}(\text{tg}\, x) = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

bu yerdan $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)$, demak, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ mavjud emas.

Shunday qilib, $x = \frac{\pi}{2}$ nuqta berilgan funksiya uchun birinchi tur uzilish nuqtasi bo'lar ekan.

5-misol. $f(x) = 4^{\frac{1}{x-3}} + 2$ funksiyani $x_1=3$ va $x_2=4$ nuqtalarda uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. $f(x)$ funksiyani $x_1=3$ nuqtada chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2) = 2,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2) = +\infty.$$

Demak, funksiyaning nuqtada uzilishga ega bo'lishning 3-holiga asosan, berilgan funksiya $x_1=3$ nuqtada 2-tur uzilishga ega bo'ladi. Endi $f(x)$ funksiyaning $x_2=4$ nuqtada chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2) = 6,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2) = 6,$$

$$f(4) = 4^{\frac{1}{4-3}}+2 = 4+2 = 6.$$

Demak, 1-teoremaga asosan, $f(4-0)=f(4+0)=f(4)$, ya'ni berilgan $f(x)$ funksiya $x_2=4$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

6-misol. $f(x) = \cos^2\frac{1}{x}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. Berilgan $f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, shuning uchun $x=0$ nuqtaning atrofidan ikkita nolga intiluvchi ixtiyoriy ketma-ketlik olamiz:

$$x'_n = \frac{1}{n\pi}\ (n\in N), \qquad x''_n = \frac{2}{\pi(1+2n)}\ (n\in N).$$

Bu ketma-ketliklarning har biri $n\to\infty$ da $x'_n\to 0$, $x''_n\to 0$. Bu ketma-ketliklarga mos kelgan funksiya qiymatlari ketma-ketliklari $n\to\infty$ da har xil limitlarga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{1}{x'_n}=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{1}{x''_n}=0.$$

Demak, 2-ta'rifga asosan, $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$ funksiyaning $n\to\infty$ da limiti mavjud emas. Shuning uchun berilgan funksiya $x=0$ nuqtada 2- tur uzilishga ega bo'ladi.

7-misol. a ning qanday qiymatlarida

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0 \text{ bo‘lganda},\\ a\,(x-1)^2, & x>0 \text{ bo‘lganda}\end{cases}$$

funksiya $x_0=0$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi?

Yechilishi. Berilgan funksiya $x_0=0$ nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun, quyidagi $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$ tenglik bajarilishi kerak. U holda chap va o‘ng limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} a(x-1)^2=a,\quad f(0)=1.$$

Demak, $a=1$ bo‘lganda berilgan funksiya $x_0=1$ nuqtada uzluksiz bo‘lar ekan. $a\ne 1$ qiymatlarda funksiya uzilishga ega.

8-misol. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ funksiyaning $x_0=1$ nuqtadagi qiymatini shunday tanlangki, natijada berilgan funksiya uzluksiz bo‘lsin.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning $x\to 1\pm 0$ da limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1\pm 0}(x+1)=2.$$

Agar $f(1)=2$ deb olsak, $x=1$ da funksiya uzluksiz bo‘ladi, ya‘ni

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\ne 1 \text{ bo‘lganda},\\ 2, \; x=1 \text{ bo‘lganda}.\end{cases}$$

2. Uzluksiz funksiyalarning xossalari. 1) Nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning lokal xossalari. $f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. X to‘plamdan biror $a\in X$ nuqta olib, bu nuqtaning shu to‘plamga tegishli bo‘lgan yetarli kichik $U_\delta(a)$ atrofini qaraylik.

1^0. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda a nuqtaning yetarlicha kichik atrofida funksiya chegaralangan bo‘ladi, ya‘ni

$$\exists\delta>0\,\exists C>0:\ \forall x\in U_\delta(a)\to |f(x)|\le C.$$

2^0. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a)\neq 0$ bo'lsa, $f(a)$ son bilan a nuqtaning yetarlicha kichik atrofida $f(x)$ funksiyaning ishorasi bir xil bo'ladi, ya'ni

$$\exists\delta>0 : \forall x\in U_\delta(a) \to \operatorname{sign} f(x)=\operatorname{sign} f(a).$$

Natija. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lib, bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidan olingan x nuqtalarda ham musbat, ham manfiy ishorali qiymatlarni qabul qilaversa, funksiyaning a nuqtadagi qiymati nolga teng bo'ladi.

3^0. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lsa, a nuqtaning yetarlicha kichik atrofidan olingan x' va x'' nuqtalar uchun $f(x')-f(x'')<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bunda $\forall\varepsilon>0$ son.

Funksiyaning nuqta atrofidagi xususiyatlariga uning lokal xususiyatlari deyiladi.

2) Uzluksiz funksiyalar ustida amallar. Uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli.

2- teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X\subset R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, ularning har biri $a\in X$ nuqtada uzluksiz, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

bo'lsa, $\varphi(x)=f(x)\pm g(x)$, $\psi(x)=f(x)\cdot g(x)$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\forall x\in X$ lar uchun $g(x)\neq 0$) funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz va

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=f(a)\pm g(a),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=f(a)\cdot g(a),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}\quad (g(a)\neq 0)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Eslatma. Ikkita funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi uzluksiz bo'lishidan, bu funksiyalardan har birining uzluksiz bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Masalan: 1) $f(x)=x\cdot\cos\frac{1}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, lekin bu funksiyani hosil qiluvchi

$$f_1(x)=x,$$

$$f_2(x)=\cos\frac{1}{x}$$

funksiyalardan birinchisi $x=0$ nuqtada uzluksiz, ikkinchisi esa bu nuqtada uzilishga ega.

2) $f(x)=[x]+\{x\}=x$. Berilgan funksiya R^1 da uzluksiz, lekin bu funksiyani hosil qiluvchi $f_1(x)=[x]$, $f_2(x)=\{x\}$ ($[x]$ berilgan x ning butun qismi, $\{x\}$ esa x ning kasr qismi) funksiyalarning har biri $x=n$ ($n\in Z$) nuqtada uzilishga ega.

1-misol. $f(x)=5x^2-\sin^3x+3^x$ funksiyaning $\forall x_0\in R^1$ nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechilishi. $\varphi(x)=x$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=3^x$ funksiyalar R^1 da uzluksiz. $f(x)$ funksiyani

$$f(x)=5x\cdot x-\sin x\cdot\sin x\cdot\sin x+3^x$$

ko'rinishda yozamiz. U holda, uzluksiz funksiyalar ustidagi arifmetik amallarga ko'ra, $f(x)$ funksiyaning R^1 da uzluksizligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}(5x^2-\sin^3x+3^x)=5x_0^2-\sin^3x_0+3^{x_0}.$$

2-misol. $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$ funksiyaning $\forall x_0\in R^1$ da uzluksizligini ko'rsating.

Yechilishi. $\forall x\in R^1$ lar uchun $4+x^2\neq0$. 2- teoremaga asosan berilgan funksiya $\forall x\in R^1$ da uzluksizdir, chunki $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(4+x^2)=4+x_0^2$, ya'ni bo'linma hosil qiluvchi funksiyalarning har biri ham uzluksizdir.

Demak, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x}{4+x^2}=\frac{x_0}{4+x_0^2}=f(x_0)$.

3) **Murakkab funksiyaning uzluksizligi.** $y=f(x)$ funksiya X to'plamda, $z=\varphi(y)$ funksiya esa Y to'plamda aniqlangan va $E(\varphi)\subseteq X$ bo'lsin, u holda ular yordamida $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzish mumkin bo'ladi.

3-teorema. $y=f(x)$ funksiya $a\in X$ nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya esa a nuqtaga mos kelgan $y_a=f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-misol. $z=\cos x^2$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. Berilgan funksiya R^1 da murakkab funksiya sifatida uzluksiz. Bunda $y=x^2$, $z=\cos y$ deb belgilaymiz. Bu funksiyalarning har biri R^1 da uzluksiz.

Eslatma. Murakkab funksiya $z=\varphi(f(x))$ ning uzluksiz bo'lishidan bu funksiyalarning har biri: $z=\varphi(y)$ va $y=f(x)$ ning uzluksiz bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, Dirixle funksiyasi vositasida hosil qilingan $D(D(x))=1=\text{const}$ murakkab funksiya R^1 da uzluksiz, lekin $D(x)$ funksiyaning o'zi R^1 ning har bir nuqtasida uzilishga ega.

2- misol. $f(x)=\sin(\log_3 4x)$ $(0<x<+\infty)$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. $y=\log_3 4x$ deb belgilaymiz. Bizga ma'lumki, $y=\log_3 4x$ funksiya $(0,+\infty)$ da uzluksiz, $\sin y$ funksiya ham R^1 da uzluksiz. U holda, murakkab funksiyalarning uzluksizligi haqidagi 3-teoremaga ko'ra, $f(x)=\sin(\log_3 4x)$ funksiya ham $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksizdir.

4) Monoton funksiyalarning uzluksizligi.

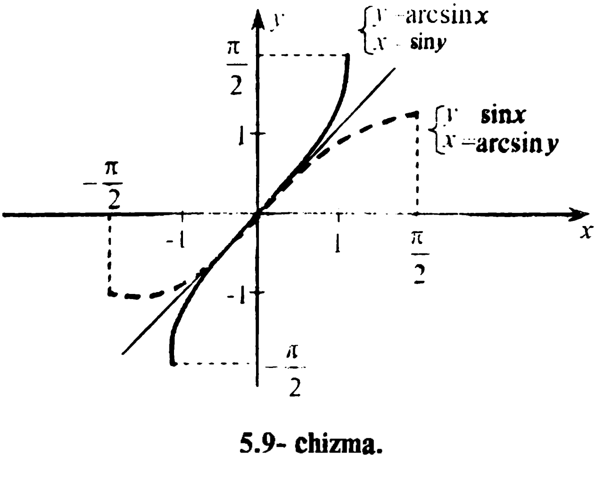
4- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, uzilishga ega bo'lsa, uning uzilishi faqat birinchi tur uzilish bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, uning qiymatlari Y oraliqni tutash to'ldirsa (ya'ni funksiya har bir $y\in Y$ qiymatni hech bo'lmaganda bir marta qabul qilsa) bu funksiya X da uzluksiz bo'ladi.

5) Teskari funksiyaning uzluksizligi.

5- teorema. Uzluksiz $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ da teskari $x=g(y)$ funksiyaga ega bo'lishi uchun uning qat'iy monoton bo'lishi zarur va yetarlidir.

Misol. Ushbu $y=\sin x$ funksiya uchun $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ kesmada teskari funksiya mavjudmi?



5.9- chizma.

Yechilishi. Berilgan funksiya $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ kesmada uzluksiz va qat'iy o'suvchi. $y=\sin x$ funksiyaning qiymatlari to'plami $E(\sin x)=[-1;1]$ kesmadan iborat. 5-teoremaga asosan, $[-1;1]$ kesmada uzluksiz va o'suvchi teskari funksiya mavjud. Uning qiymatlari to'plami $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ kesmadan iborat. Berilgan funksiyaga teskari funksiya $x=\arcsin y$ ko'rinishda belgilanadi. $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ va $[-1;1]$ kesmalarda mos ravishda to'g'ri va teskari funksiyalarning grafiklarini chizamiz (5.9-chizma).

6) Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar). $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan funksiyalarni qaraymiz, bunda a va b nuqtalardagi uzluksizliklar, mos ravishda, o'ngdan va chapdan uzluksizlik deb qaraladi.

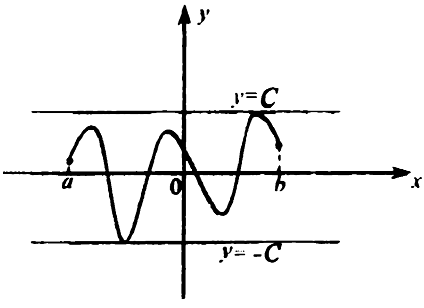
1°. Veyershtrassning birinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangan bo'ladi, ya'ni $\exists C>0 : \forall x\in[a;b] \to |f(x)|\le C$ (5.10-chizma).

2°. Veyershtrassning ikkinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu kesmada o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni $[a; b]$ kesmada shunday x_1 va x_2 nuqtalar topiladiki,

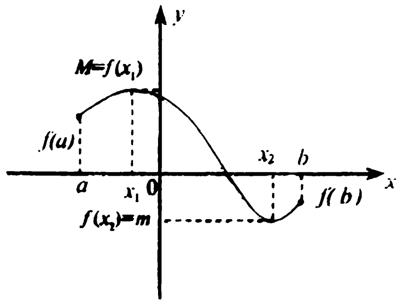
$$f(x_1)=\sup_{x\in[a;b]}\{f(x)\},\qquad f(x_2)=\inf_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi (5.11-chizma).

3°. Bolsano-Koshining birinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, shunday x_0 ($a<x_0<$



5.10- chizma.



5.11- chizma.

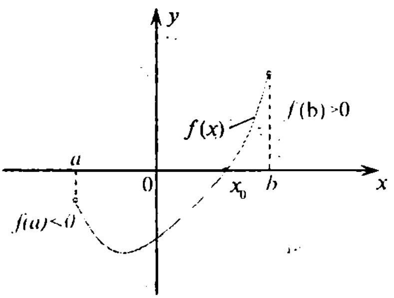
$<b$) nuqta topiladiki, unda $f(x)$ funksiya nolga aylanadi: $f(x_0)=0$(5.12-chizma).

4⁰. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida $f(a)=A$, $f(b)=B$ qiymatlar qabul qilsa hamda $A\neq B$ bo'lsa, A va B sonlar orasida har qanday C son olinganda ham a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki, $f(c)=C$ bo'ladi (5.13-chizma).

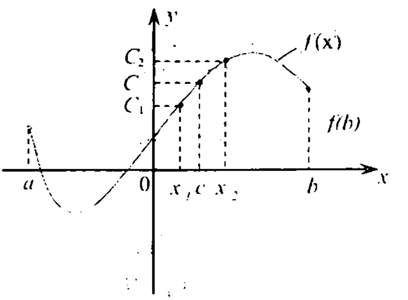
4- misol. Ushbu $f(x)=\cos x+2^x-x^4$ funksiyani $[1;5]$ kesmada chegaralanganlikka tekshiring.

Yechilishi. Berilgan funksiya $[1;5]$ kesmada uchta $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=2^x$, $f_3(x)=-x^4$ funksiyaning yig'indisi shaklida berilgan. Ravshanki, ularning har biri $[1;5]$ kesmada uzluksizdir. 2-teoremaga asosan, berilgan funksiya ham $[1;5]$ kesmada uzluksiz. U holda, Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra, berilgan funksiya $[1;5]$ kesmada chegaralangan.

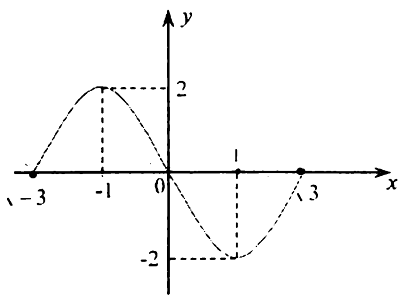
Eslatma. Veyershtrassning birinchi teoremasi $(a;b)$ oraliq uchun har doim ham o'rinli emas. Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $x\in(0;1)$ da uzluksiz, lekin bu oraliqda chegaralanmagan. Bu funksiya



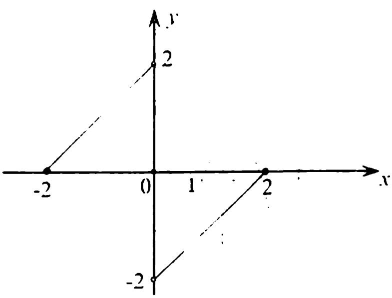
5.12-chizma.



5.13-chizma.



5.14-chizma.



5.15-chizma.

(0,1) oraliqning har bir ichki nuqtasining kichik atrofida chegaralangan, lekin oraliqqa tegishli bo'lmagan nol nuqtaning atrofida chegaralanmagan.

Eslatma. Uzilishga ega bo'lgan funksiya $[a;b]$ kesmaning har bir nuqtasida aniqlangan, lekin bu kesmada chegaralanmagan. Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},\ 0<x\le 1 \text{ bo'lganda,}\\ 0,\ x=0 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$$

Shunday qilib, teoremadagi $f(x)$ funksiyaga qo'yilgan shartlarning har ikkalasi ham muhimdir.

5-misol. $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari mavjudmi? (5.14-chizma).

Yechilishi. Ravshanki, x^3 va $3x$ funksiyalarning har biri $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada uzluksiz. 2-teoremaga asosan berilgan $f(x)$ funksiya ham $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada uzluksiz. U holda Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra berilgan funksiya $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada aniq yuqori va aniq quyi chegaralariga erishadi:

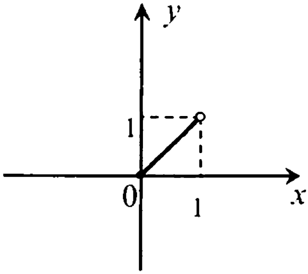
$$\sup_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}\{f(x)\}=f(-1)=2,\qquad \inf_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}\{f(x)\}=f(1)=-2.$$

Eslatma. $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lmagan funksiya uchun Veyershtrassning ikkinchi teoremasi o'rinli emas. Masalan,

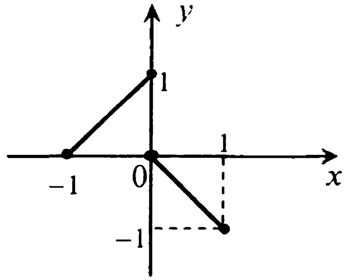
$$f(x)=\begin{cases}x+2,\ -2\le x<0 \text{ bo'lganda,}\\ 0,\ x=0 \text{ bo'lganda,}\\ x-2,\ 0<x\le 2 \text{ bo'lganda (5.15 - chizma),}\end{cases}$$

ko'rinishda berilib, uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $[-2;2]$ kesmada eng katta qiymati 2 bo'ladi, lekin x ning hech qanday qiymatida $f(x)=2$ bo'lmaydi. Shunga o'xshash, $f(x)$ funksiyaning $[-2;2]$ kesmadagi eng kichik qiymati -2 bo'ladi, lekin $f(x)\neq-2$.

Eslatma. $(a;b)$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun Veyershtrassning ikkinchi teoremasi o'rinli bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $f(x)=x$ funksiya $(0;1)$ da eng katta va eng kichik qiymatiga erishmaydi. $(0;1)$ oraliqda $f(x)=x$ funksiyaning eng kichik va eng katta qiymati mos ravishda 0 va 1 bo'ladi, lekin $x\in(0;1)$ ning har qanday qiymatida $f(x)\neq0$ va $f(x)\neq1$ bo'lmaydi (5.16-chizma).



5.16-chizma.



5.17-chizma.

Eslatma. Xususiy hollarda, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda uzluksiz (uzilishga ega) bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu oraliqda eng kichik va eng katta qiymatiga erishishi mumkin. Masalan, 1) $(0;\ 2\pi)$ oraliqda berilgan $f(x)=\sin x$ funksiya uchun

$$\sup_{x\in(0;2\pi]}\{f(x)\}=f(\tfrac{\pi}{2})=1,\qquad \inf_{x\in(0;2\pi]}\{f(x)\}=f(\tfrac{3\pi}{2})=-1$$

bo'ladi.

2) $[-1;\ 1]$ kesmada berilgan

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x\le 0 \text{ bo'lganda,}\\ -x, & 0<x\le 1 \text{ bo'lganda}\end{cases}$$

funksiya $x=0$ uzilishga ega. Bu funksiya $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda mos ravishda eng katta va kichik qiymatiga erishadi:

$$\sup_{x\in(-1;1]}\{f(x)\}=f(0)=1,\qquad \inf_{x\in(-1;1]}\{f(x)\}=f(1)=-1$$

(5.17- chizma).

6-misol. [-3;2] kesmada $f(x)=x^3-3x+2$ funksiyaning nollari mavjudmi?

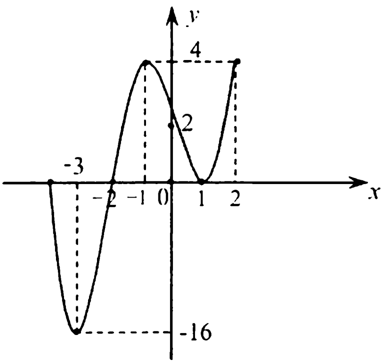
Yechilishi. Berilgan funksiyaning $x=-3$ va $x=2$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $f(-3)=-16<0$, $f(2)=4>0$. $f(x)$ funksiya $[-3;2]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetlarida har xil qiymatlar qabul qiladi. U holda, Bolsano—Koshining birinchi teoremasiga ko'ra, $[-3;2]$ da hech bo'lmaganda bitta nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi:

$f(x_0)=0,\ (x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow x_0=1,\ x_0=-2 \in[-3;2]$.

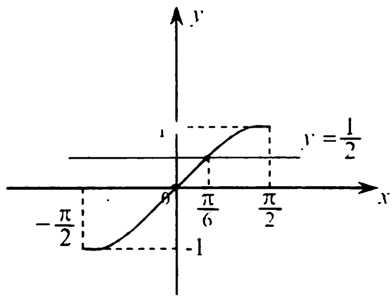
Demak, berilgan $f(x)=x^3-3x+2$ funksiyaning $[-3;\ 2]$ da $x_1=1$, $x_2=-2$ nollari mavjud (5.18- chizma).

7-misol. Ushbu $f(x)=\sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmadagi biror nuqtada $\frac{1}{2}$ qiymatni qabul qiladimi?

Yechilishi. Berilgan funksiya $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetlarida har xil ishorali qiymatlar qabul qiladi: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ va $-1\neq1$. Shartga ko'ra, $-1<\frac{1}{2}<1$. U holda, Bolsano—Koshining ikkinchi teoremasining shartlari bajarilayapti. Demak, shunday x_0 nuqta topiladiki, $f(x_0)=\frac{1}{2}$ bo'ladi, bunda $x_0=\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (5.19-chizma).



5.18-chizma.



5.19-chizma.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarning uzluksizligini ta'rifdan foydalanib ko'rsating.

1. $f(x)=x^2$. **2.** $f(x)=\sqrt{x}$. **3.** $f(x)=|x|$.

4. $f(x)=\sqrt[3]{x}$. **5.** $f(x)=2x-1$. **6.** $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq0$.

7. $f(x)=x^2+2\sin x$. **8.** $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2}$. **9.** $f(x)=\cos x$.

10. $f(x)=4x^2-3x+5$.

Funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turlarini aniqlang.

11. $f(x)=\frac{|x+3|}{x+3}$. **12.** $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-x^3}$. **13.** $f(x)=x-[x]$.

14. $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\le 0 \text{ bo‘lganda,} \\ x-1, & x>0 \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & x<0 \text{ bo‘lganda,} \\ 5x-x^2, & x\ge 0 \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$

16. $f(x)=(\operatorname{sign} x)^2$. **17.** $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$. **18.** $f(x)=\frac{|x|-x}{x^2}$.

19. $f(x)=\operatorname{sign}(\cos x)$. **20.** $f(x)=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

21. $f(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty<x\le 0 \text{ bo‘lganda,} \\ (x-1)2, & 0<x\le 2 \text{ bo‘lganda,} \\ 5-x, & 2<x<+\infty \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \text{ bo‘lganda,} \\ x^2+2, & -1\le x<1 \text{ bo‘lganda,} \\ 2x, & x\ge 1 \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \text{ bo‘lganda,} \\ \cos x, & 0\le x\le \pi \text{ bo‘lganda,} \\ 1-x, & x>\pi \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$

Funksiyani ko‘rsatilgan nuqtalarda uzluksizlikka tekshiring:

24. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1;\ x_1=5,\ x_2=6.$

25. $f(x)=6^{\frac{1}{x-1}}-3;\ x_1=1,\ x_2=2.$

26. $f(x)=\frac{x+4}{x-3};\ x_1=3,\ x_2=4.$

27. $f(x)=\frac{2x}{x^2-1};\ x_1=-1,\ x_2=2.$

28. $f(x)=\frac{x+3}{x-5};\ x_1=-5,\ x_2=-4.$

Funksiyalar *a* va *b* ning qanday qiymatlarida uzluksiz bo‘ladi?

29. $f(x)=\begin{cases} (x-2)^3, & x\le 0 \text{ bo‘lganda,} \\ ax^2+b, & 0<x<1 \text{ bo‘lganda,} \\ \sqrt{x}, & x\ge 1 \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, x>0 \text{ bo‘lganda}, \\ -x,\ x\le 0 \text{ bo‘lganda}. \end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, |x|\ne 1 \text{ bo‘lganda}, \\ a, x=-1 \text{ bo‘lganda}, \\ b, x=1 \text{ bo‘lganda}. \end{cases}$

$f[\varphi(x)]$ va $\varphi[f(x)]$ funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring:

32. $f(x)=\operatorname{sign} x$, $\varphi(x)=4+x^2$. **33.** $f(x)=\operatorname{sign}(x-1)$, $\varphi(x)==\operatorname{sign}(x+1)$. **34.** $f(x)=\operatorname{sign} x$, $\varphi(x)=x^3-x$.. **35.** $f(x)=x(1-x^2)$, $\varphi(x)=\operatorname{sign} x$.

Funksiyalarning x_0 dagi qiymatini shunday tanlash kerakki, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo‘lsin.

36. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x_0=0$. **37.** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_0=-1$.

38. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, $x_0=0$. **39.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x_0=0$.

40. $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2-x}$, $x_0=0$. **41.** $f(x)=\dfrac{4x^2-x}{3x}$, $x_0=0$.

42. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$. **43.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sin x}$, $x_0=0$.

Funksiyalarning berilgan kesmada chegaralanganligini ko‘rsating:

44. $f(x)=\sin x\cos^2 x-\sqrt{x+6}$, $x\in[0;10]$.

45. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+1}{2x}+2^{\sin x}-x^2$, $x\in[1;4]$.

46. $f(x)=x(x-2)^2\ln(4-x)$, $x\in[0;3]$.

47. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$, $x\in[-4;4]$.

Funksiyalarning berilgan kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud bo‘ladimi?

48. $f(x)=\sin x+3^x$, $x\in[-1;2]$. **49.** $f(x)=x^2-2$, $x\in[-1;2]$.

50. $f(x)=3$, $x\in[-4;4]$.

51. $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & -1\le x\le 0 \text{ bo‘lganda,}\\ 0, & x=0 \text{ bo‘lganda,}\\ x^2-1, & 0<x<1 \text{ bo‘lganda}\end{cases}$ funksiya berilgan sohada eng katta va eng kichik qiymatlarni qabul qiladimi?

Tenglamalarning ko‘rsatilgan kesmada yechimga ega ekanligini ko‘rsating:

52. $x^3+2x+1=0$, $x\in[-1;0]$. **53.** $x^3-x^5-x+2=0$, $x\in[0,5;2]$.

54. $\sin^3 x-5\sin x+1=0$, $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

55. $\sin x-x+1=0$, $x\in[0;\pi]$.

56. $2^x=1$, $x\in[0,2;3]$. **57.** $2^x=4x$, $x\in[2;5]$.

Funksiyalarga teskari bo‘lgan funksiyalar mavjudmi?

58. $y=5x+4$, $x\in R^1$. **59.** $y=2^x$, $x\in R^1$. **60.** $y=x^4$, $x\in(-\infty;0]$.

61. $y=\cos 2x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. **62.** $y=\operatorname{tg}x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

63. $y=4x^2$, $x\in[-2;1]$. **64.** $y=\lg^2x$, $x\in(0;+\infty)$.

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

11. $x=-3$, 1- tur uzilish nuqtasi. **12.** $x=0$, 2-tur uzilish nuqtasi, $x=1$, 1- tur uzilish nuqtasi. **13.** $x=0, \pm1, \pm2, \ldots$, 1- tur uzilish nuqtalari. **14.** $x=0$, 1- tur uzilish nuqtasi. **15.** $x=0$, 2-tur uzilish nuqtasi. **16.** $x=0$, yo‘qotilishi mumkin bo‘lgan nuqta. **17.** $x-3$, $x=-3$, 2- tur uzilish nuqtalari. **18.** $x=0$, 2- tur uzilish nuqtasi. **19.** $x_n=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, 1-tur uzilish nuqtalari. **20.** $x=1$, 1- tur uzilish nuqtasi. **21.** $x=0$, $x=2$, 1- tur uzilish nuqtalari. **22.** $x=1$, 1- tur uzilish nuqtasi. **23.** $x=0$, $x=\pi$, 1- tur uzilish nuqtasi. **24.** $x_1=5$, 2- tur uzilish nuqtasi, $x_2=6$ nuqtada uzluksiz. **25.** $x_1=1$, 2- tur uzilish nuqtasi, $x_2=2$ nuqtada uzluksiz. **26.** $x_1=3$, 2- tur uzilish nuqtasi, $x_2=4$ nuqtada uzluksiz. **27.** $x_1=-1$, 2- tur uzilish nuqtasi, $x=2$ nuqtada uzluksiz. **28.** $x_1=-5$, 2- tur uzilish nuqtasi, $x_2=-4$ nuqtada uzluksiz. **29.** $a=12$, $b=8$. **30.** Shunday a son mavjud emas. **31.** Shunday a va b sonlar mavjud emas. **32.** $f(\varphi(x))$ uzluksiz, $\varphi(f(x))$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. **33.** $f(\varphi(x))$ funksiya $x=-1$ nuqtada uzluksiz, $\varphi(f(x))$

funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz. **34.** $f(\varphi(x))$ funksiya $x=0$, $x=\pm1$ nuqtalarda uzluksiz, $\varphi(f(x))$ uzluksiz. **35.** $f(\varphi(x))$ uzluksiz, $\varphi(f(x))$ funksiya $x=0$, $x=\pm1$ nuqtalarda uzluksiz. **36.** Ha, $f(0)=1$. **37.** Ha, $f(-1)=-\frac{3}{2}$. **38.** Ha, $f(0)=2$. **39.** Ha, $f(0)=\frac{1}{2}$. **40.** Mumkin emas. **41.** Ha, $f(0)=-\frac{1}{3}$. **42.** Mumkin emas. **43.** Ha, $f(0)=1$. **48.** Mavjud. **49.** Mavjud. **50.** Mavjud emas. **51.** Mavjud emas. **58.** Mavjud. **59.** Mavjud. **60.** Mavjud. **61.** Mavjud. **62.** Mavjud. **63.** Mavjud emas. **64.** Mavjud emas.

6- §. FUNKSIYA GRAFIGINING ASIMPTOTALARI

Funksiyani tekshirayotganda uning grafigi koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda, yoki boshqacha aytganda, uning o'zgaruvchan nuqtasi cheksizlikka intilganda grafikning ko'rinishini bilib olish muhim.

1- ta'rif. Agar o'zgaruvchi $M(x;y)$ nuqta funksiya grafigi bo'yicha koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda $y=f(x)$ funksiya grafigidagi o'zgaruvchi $M(x;y)$ nuqtadan to'g'ri chiziqdagi $N(x_1;y_1)$ nuqtagacha bo'lgan $d=MN$ masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining *asimptotasi* deyiladi (6.1- chizma).

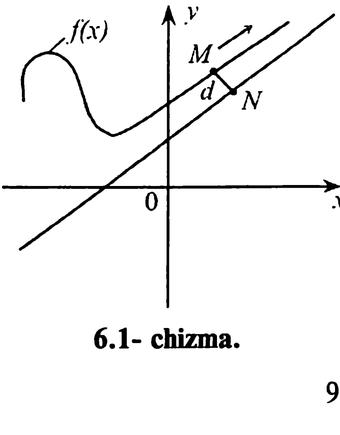
Oy va *Ox* o'qlarga parallel hamda koordinata o'qlariga parallel bo'lmagan asimptotalarni qaraymiz.

1. Vertikal asimptotalar. $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $\varepsilon>0$ atrofida aniqlangan, ya'ni $x\in \dot{U}_\varepsilon(a)$ bo'lsin.

2- ta'rif. Agar

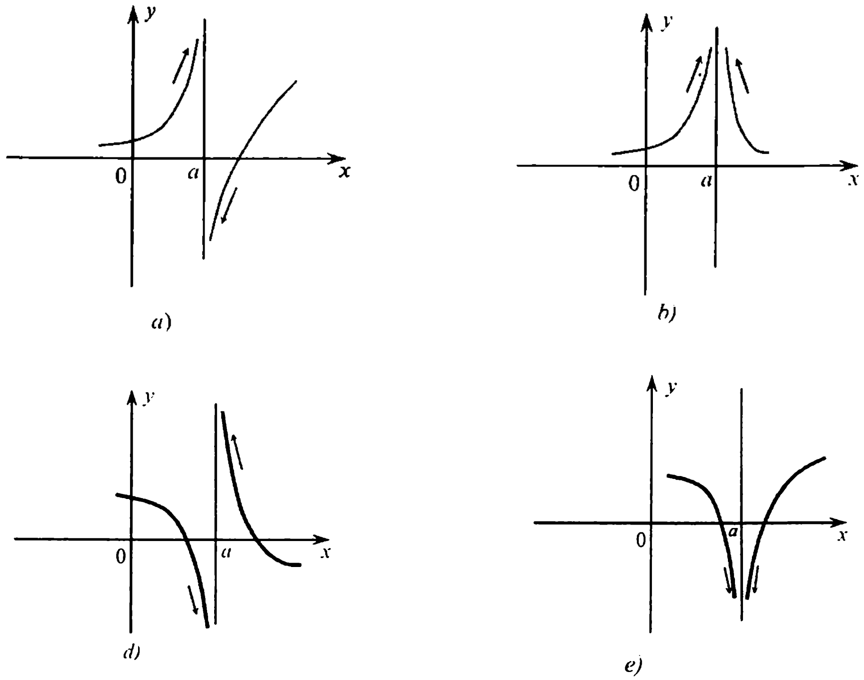
$$\lim_{x\to a-0} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

lardan biri yoki ularning ikkalasi ham cheksiz bo'lsa, $x=a$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining *vertikal* yoki *Oy o'qqa parallel asimptotasi* deyiladi (6.2- a, b, d, e chizmalar).



6.1- chizma.

Demak, $y=f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotalarini izlash uchun funksiyaning qiymatini cheksizlikka aylantiradigan (cheksiz uzilishga ega bo'lgan) $x=a$ nuqtani topish kerak ekan. Bunda $x=a$ to'g'ri



6.2- chizma.

chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

Eslatma. Umuman aytganda, $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bir nechta vertikal asimptotalarga ega bo‘lishi ham mumkin.

1- misol. $f(x)=\frac{1}{x-2}$, $x\in[-2;3]$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

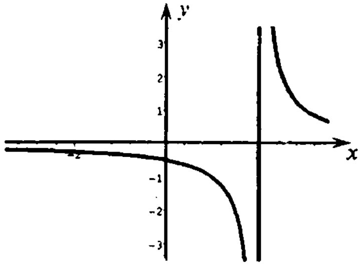
Yechilishi. Berilgan funksiyaning maxraji $x=2$ nuqtada nolga aylanadi. $x\to2\pm0$ da berilgan funksiyaning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to2-0} f(x)=\lim_{x\to2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty,\quad \lim_{x\to2+0} f(x)=\lim_{x\to2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty.$$

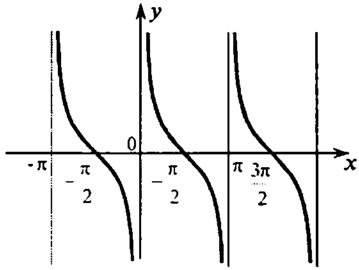
Demak, 2- ta‘rifga ko‘ra berilgan funksiyaning grafigi uchun $x=2$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi (6.3- chizma).

2- misol. $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiya $x=\pi n$ $(n\in Z)$ nuqtalarda 2- tur uzilishga ega. $x\to\pi n\pm0$ $(n\in Z)$ da berilgan funksiyaning limiti $\pm\infty$ ga aylanadi. Shuning uchun, 2- ta‘rifga asosan, funksiyaning grafigi cheksiz ko‘p vertikal asimptotalarga ega (6.4- chizma): $x=0$, $x=\pm2\pi$, ... $x=\pm\pi n$.



6.3- chizma.



6.4- chizma.

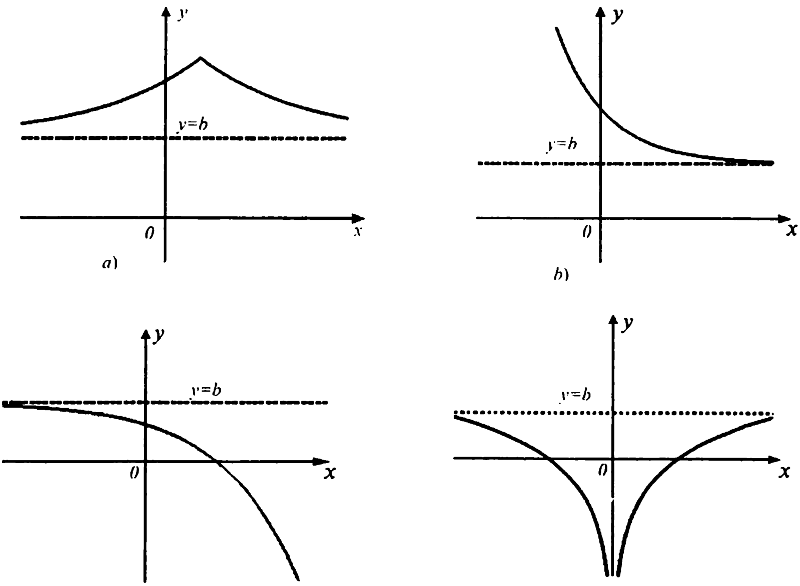
2. Gorizontal asimptotalar.

3- ta'rif. Agar

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = b \qquad (b\in R^1)$$

bo'lsa, $y=b$ to'g'ri chiziq $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ da $y=f(x)$ funksiya grafigining gorizontal yoki *Ox o'qqa parallel asimptotasi* deyiladi. (6.5- *a*, *b*, *d*, *e* chizmalar).

1-misol. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2}$ funksiya grafigining gorizontal asimptotasini toping.



6.5- chizma.

Yechilishi. Berilgan funksiya R^1 da aniqlangan. $x\to\pm\infty$ da berilgan funksiyaning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2} = \lim \frac{1}{1+\frac{2}{x^2}} = 1.$$

Demak, 3- ta'rifga ko'ra, berilgan funksiyaning grafigi uchun $y=1$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota bo'ladi (6.6- chizma).

2- misol. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya grafigining vertikal va gorizontal asimptotalarini toping.

Yechilishi. Ravshanki, $\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi uchun $x=0$ va $y=0$ to'g'ri chiziqlar, mos ravishda, vertikal va gorizontal asimptotalar bo'ladi: $\lim\limits_{x\to0\pm0} f(x) = \lim\limits_{x\to0\pm0} \frac{1}{x} = \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ (6.7- chizma).}$$

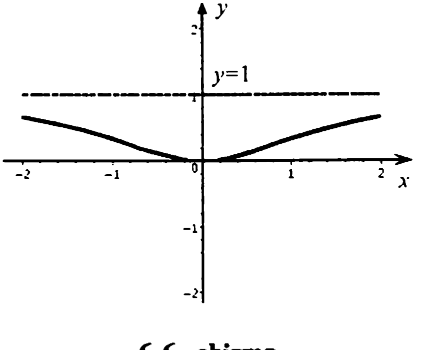
3. Og'ma asimptotalar.

4- ta'rif. Shunday k va b chekli sonlar mavjud bo'lib, $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ da $f(x)$ funksiya quyidagi

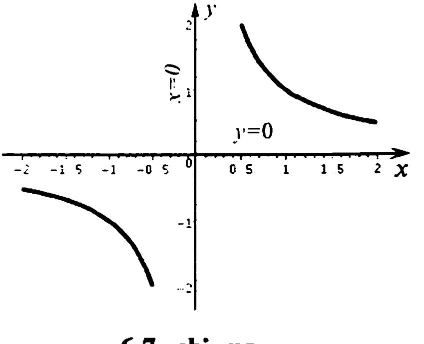
$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

ko'rinishda ifodalansa (bunda $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = 0$), $Y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining *og'ma asimptotasi* deyiladi. Xususiy holda, $k=0$ bo'lsa, $Y=b$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota bo'ladi.

1- teorema. $y=f(x)$ funksiya grafigi $x\to\pm\infty$ da $Y=kx+$b og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun



6.6- chizma.



6.7- chizma.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b \qquad (1)$$

munosabatlar o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

(1) limitlarni hisoblashda quyidagi xususiy hollar bo'ladi:

1- hol. Argumentning ishorasiga bog'liq bo'lmagan holda, ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$$

ikkala limit ham mavjud va chekli. Bu holda Y=kx+b to'g'ri chiziq funksiya grafigining ikki tomonlama og'ma asimptotasi bo'ladi (quyidagi 1- misolga qarang).

2- hol. Argument x ham musbat, ham manfiy ishorali cheksizlikka intilganda, ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b_1,\quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b_2$$

limitlar mavjud, lekin ular o'zaro har xil (hech bo'lmaganda $k_1 \neq k_2$ yoki $b_1 \neq b_2$ teng emas). Bu holda $Y_1=k_1x+b_1$ va $Y_2=k_2x+b_2$ to'g'ri chiziqlar funksiya grafigining mos ravishda ikkita bir tomonli (o'ng va chap) og'ma asimptotalari bo'ladi (2-misolga qarang).

3- hol. Faqat $x\to+\infty$ da

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$$

ikkala limit ham mavjud. Bu holda $Y=kx+b$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining faqat o'ng og'ma asimptotasi bo'ladi (3- misolga qarang).

4- hol. Faqat $x\to-\infty$ da

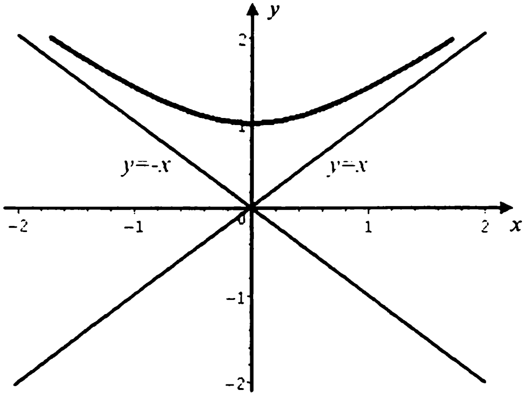
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$$

ikkala limit ham mavjud. Bu holda $Y=kx+b$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining faqat chap og'ma asimptotasi bo'ladi.

Agar yuqoridagi hollarning barchasida $k=0$ bo'lsa, $Y=b$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota bo'ladi.

1- misol. $y=\sqrt[3]{x^3+1}$ funksiya grafigining og‘ma asimptotalarini toping.

Yechilishi. Og‘ma asimptotalarni topamiz:



6.8- chizma.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+1}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}}=0.$$

Demak, 1- teoremaga asosan, $y=x$ to‘g‘ri chiziq berilgan funksiyaning ikki tomonlama og‘ma asimptotasi bo‘ladi.

2-misol. $y=\sqrt{x^2+1}$ funksiya grafigining og‘ma asimptotalarini toping.

Yechilishi. Og‘ma asimptotalarni topamiz:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}=0.$$

Demak, 1- teoremaga asosan, $Y_1=x$ va $Y_2=-x$ to‘g‘ri chiziqlar, mos ravishda, berilgan funksiyaning bir tomonli (o‘ng va chap) og‘ma asimptotalari bo‘ladi (6.8- chizma). Berilgan funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin: $y^2-x^2=1$.

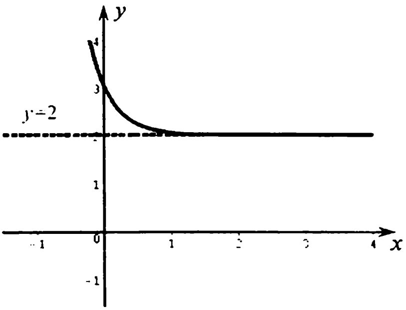
3- misol. $y=e^{-3x}+2$ funksiya grafigining og‘ma asimptotalarini toping.

Yechilishi. Og‘ma asimptotalarni topamiz:

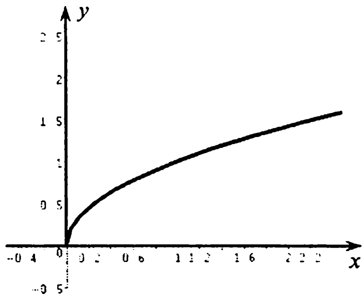
$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-3x}+2}{x}=0,\quad k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-3x}+2}{x}=\infty,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-3x}+2)=2.$$

Demak, 1- teoremaga ko‘ra, $y=2$ to‘g‘ri chiziq berilgan funksiyaning faqat o‘ng og‘ma asimptotasi bo‘ladi (6.9-chizma).



6.9- chizma.



6.10- chizma.

Eslatma. Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun faqat $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ mavjud bo‘lmasa (yoki cheksiz) bo‘lsa, berilgan funksiya grafigi asimptotaga ega bo‘lmaydi, lekin asimptotik yo‘nalishga ega bo‘ladi. Masalan, $y=\sqrt{x}$ parabola Ox o‘qiga parallel bo‘lgan asimptotik yo‘nalishga ega, lekin gorizontal asimptotaga ega emas (6.10- chizma):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0,\quad b=\mathop{\mathrm{hm}}_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

4- misol. $f(x)=\frac{x^2-10}{x-3}$ funksiya grafigi uchun $y=x+3$ to‘g‘ri chiziq og‘ma asimptota bo‘lishini ko‘rsating.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning ko‘rinishini quyidagicha o‘zgartirib, $f(x)=x+3-\frac{1}{x-3}$ ni hosil qilamiz. Bunda $x\to\pm\infty$ da $\alpha(x)=-\frac{1}{x-3}\to 0$ bo‘lgani uchun, $f(x)$ funksiyani $f(x)=x+3+\alpha(x)$ ko‘rinishda ifodalash mumkin. Demak, 4- ta‘rifga ko‘ra, $y=x+3$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi.

5- misol. $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechilishi. (1) formuladan foydalanib, k va b larni topamiz:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1,\ k=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{1-\frac{1}{x}}=-1,\ b=-1.$$

Demak, 1- teoremaga ko‘ra, $y=x-1$ to‘g‘ri chiziq berilgan funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi. $k\neq0$ bo‘lganligi uchun funksiya grafigi gorizontal asimptotaga ega emas.

Endi berilgan funksiyaning vertikal asimptotasini topamiz. Funksiya $x=1$ nuqtada 2-tur uzilishga ega. $x\to1\pm0$ da berilgan funksiyaning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to1\pm0}f(x)=\lim_{x\to1\pm0}\frac{x^2-2x}{x-1}=\pm\infty.$$

Demak, 2- ta‘rifga ko‘ra, berilgan funksiyaning grafigi uchun $x=1$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

Eslatma. $Y=kx+b$ asimptotalar bilan bir qatorda murakkab ko‘rinishdagi asimptotalar ham qaraladi. Agar $f(x)$ funksiyani ushbu

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0+\alpha(x)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lib, unda $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ bo‘lsa, u holda

$$Y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \qquad (2)$$

ko'phad bilan aniqlangan n- tartibli parabola $x \to +\infty$ da $y=f(x)$ funksiya grafigining *asimptotasi* deyiladi.

2- teorema. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x \to +\infty$ da (2) asimptotaga ega bo'lishi uchun quyidagi $n+1$ ta limit qiymatlarning mavjud bo'lishi zarur va yetarli:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=a_n,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-a_nx^n}{x^{n-1}}=a_{n-1},\ \ldots,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2)}{x}=a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x)]=a_0.$$

6- misol. $f(x)=\frac{x^3+2x-3}{x-3}$ funksiya grafigining asimptotasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyani

$$f(x)=x^2+3x+11+\frac{30}{x-3}$$

ko'rinishda tasvirlaymiz, bunda $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30}{x-3}=0.$

Demak, $Y=x^2+3x+11$ chiziq, ta'rifga ko'ra, berilgan funksiya grafigining asimptotasi bo'ladi. Ravshanki, $x=3$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Funksiya grafiklarining asimptotalarini toping:

1. $y=x+\frac{1}{x}$. **2.** $y=10+\frac{3}{x}$. **3.** $y=e^{\frac{1}{x}}$.

4. $y=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$. **5.** $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$. **6.** $y=|x+2|e^{-\frac{1}{x}}$.

7. $y=x^x$. **8.** $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. **9.** $y=\frac{x-1}{\sqrt{x(3-x)}}$. **10.** $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.

11. $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$. **12.** $y=\frac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$. **13.** $y=\operatorname{tg}x$. **14.** $y=4x+\frac{1}{x+3}$.

15. $y=\frac{x^3-28}{x-3}$.

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1. $y=x$ — og'ma asimptota. **2.** $y=10$ — gorizontal asimptota, $x=0$ — vertikal asimptota. **3.** $y=1$ — gorizontal asimptota, $x=0$ — vertikal asimptota. **4.** Asimptota yo'q. **5.** $x=-1$— vertikal asimptota. **6.** $y=-x-1$ va $y=x+1$ — og'ma asimptotalar. **7.** Asimptota yo'q. **8.** $x=1$, $x=-1$ — vertikal asimptota. **9.** $x=0$, $x=3$ — vertikal asimptota. **10.** $x=2$ — vertikal asimptota $y=x+4$ — og'ma asimptota **11.** $x=1$ — vertikal asimptota, $y=x-1$ — og'ma asimptota **12.** $y=2$ — og'ma asimptota. **13.** $y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ vertikal asimptotalar. **14.** $y=4x$ — og'ma asimptota, $x=-3$ — vertikal asimptota. **15.** $Y=x^2+x+1$ chiziq asimptotasi, $x=3$ — vertikal asimptota.

7- §. FUNKSIYA GRAFIGINING XARAKTERLI NUQTALARI VA SIMMETRIYA O'QLARI

Funksiya grafigining xarakterli nuqtalariga quyidagi nuqtalar kiradi: funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari; funksiya aniqlanish sohasining chegaralaridagi limitik qiymati; funksiyaga ekstremum beruvchi nuqtalar; funksiyaning nollari; egilish (bukilish) nuqtalari.

1. Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari. Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlashda quyidagi hollar qaraladi:

1) $f(x)$ funksiya grafigining Oy o'qi bilan kesishish nuqtasini topish uchun $x=0$ deb, $y=f(0)$ ni topish kerak;

2) $f(x)$ funksiya grafigining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasini topish uchun $y=0$ deb, $f(x)=0$ tenglamadan x ni topish kerak.

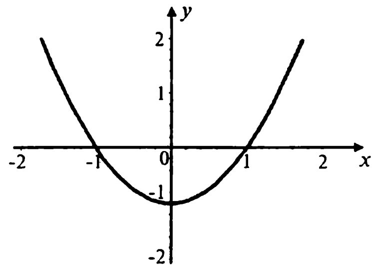
1- misol. $f(x)=x^2-1$ funksiya grafigining koordinatalar o'qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

Yechilishi. $f(x)=x^2-1$ funksiya grafigining Oy o'qi bilan kesishish nuqtasini topish uchun $x=0$ deb, $f(0)=-1$ ga ega bo'lamiz. Ox o'qi bilan kesishish nuqtalarini topish uchun esa $f(x)=0$ deb, $x^2-1=0$ tenglamaning yechimlarini topamiz: $x=\pm 1$.

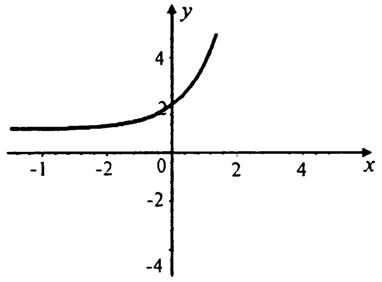
Shunday qilib, $(0;-1)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ nuqtalar funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari bo'ladi (7.1-chizma).

2- misol. $f(x)=e^x+1$ funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning grafigi Oy o'qini kesib o'tadi, ya'ni $x=0$ da $f(0)=e^0+1=2$ bo'ladi, lekin Ox o'qni kesib o'tmaydi, ya'ni $f(x)\neq 0$, chunki $e^x\neq -1$ (7.2- chizma).



7.1- chizma.



7.2- chizma.

2. Funksiya aniqlanish sohasining chegaralaridagi limitik qiymati. Funksiya aniqlanish sohasining chegaralari yaqinida uning limitini aniqlashda quyidagi hollar qaraladi:

1) agar funksiyaning aniqlanish sohasi $[a;b]$ kesmadan iborat bo'lsa, x ning $x=a$ va $x=b$ nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari, ya'ni $y=f(a)$, $y=f(b)$ ni hisoblash kerak;

2) agar funksiyaning aniqlanish sohasi $(a;b)$ oraliqdan iborat bo'lsa,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{va} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

(limitlar mavjud bo'lsa) larni hisoblash kerak.

1-misol. Ushbu funksiya aniqlanish sohasining chegaralari yaqinida uning limitini aniqlang:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\leq x\leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ x-1, & 1< x\leq 4 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Yechilishi. Ravshanki, berilgan funksiya $[0;1)\cup(1;4]$ oraliqda aniqlangan. Berilgan funksiyaning $x=1$ nuqtada chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz.

$$f(1)=1^2+1=2,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=2,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0.$$

Demak, $f(1-0)=f(1)=2$, $f(1+0)=0$.

2- misol. $f(x)=\frac{4+x}{x-2}$ funksiya aniqlanish sohasining chegaralari yaqinida uning limitini aniqlang.

Yechilishi. Berilgan funksiya $(-\infty;2)$ va $(2;+\infty)$ oraliqlarda aniqlangan. Endi funksiya aniqlanish sohasining chegaralari yaqinida uning limitini aniqlaymiz:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1,$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{4+x}{x-2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{4+x}{x-2}=+\infty,$$

Demak, $f(\pm\infty)=1$, $f(2-0)=-\infty$, $f(2+0)=+\infty$ bo'ladi.

3. Funksiyaga ekstremum beruvchi nuqtalar. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, $x_0\in(a;b)$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $x_0\in(a;b)$ nuqtaning shunday

$$U_\delta(x_0)=\{x:\ x\in R^1,\ x_0-\delta<x<x_0+\delta;\ \delta>0\}\subset(a;b)$$

atrofi mavjud bo'lib, $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x)\le f(x_0)\quad (f(x)\ge f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *lokal maksimumga* (*lokal minimumga*) ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ to'plamdagi *lokal maksimumi* (*lokal minimumi*) deyiladi.

2- ta'rif. Agar $x_0\in(a;b)$ nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)\in(a;b)$ atrofi mavjud bo'lib, $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x)<f(x_0)\qquad (f(x)>f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *qat'iy lokal maksimumga* (*qat'iy lokal minimum*)ga ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi *qat'iy lokal maksimumi* (*qat'iy lokal minimumi*) deyiladi.

Bu holda x_0 son funksiyaga, mos ravishda, lokal maksimum (lokal minimum), *qa'tiy lokal maksimum* (*qat'iy lokal minimum*) qiymat beradigan nuqta deb ataladi.

Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi lokal maksimum (lokal minimum) qiymatlari

$$f(x_0)=\max_{x\in U_\delta(x_0)}\{f(x)\}\qquad \left(f(x_0)=\min_{x\in U_\delta(x_0)}\{f(x)\}\right)$$

kabi belgilanadi. Bunda max (min) lotincha maximum (minimum) so'zidan olingan bo'lib, eng katta (eng kichik) degan ma'noni anglatadi.

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan *ekstremum qiymatlar* deyiladi (ekstremum - extremum — lotincha chetki qiymat, demakdir).

Funksiyaning ekstremum nuqtalarini topishda quyidagi hollarga alohida e'tibor berish zarur.

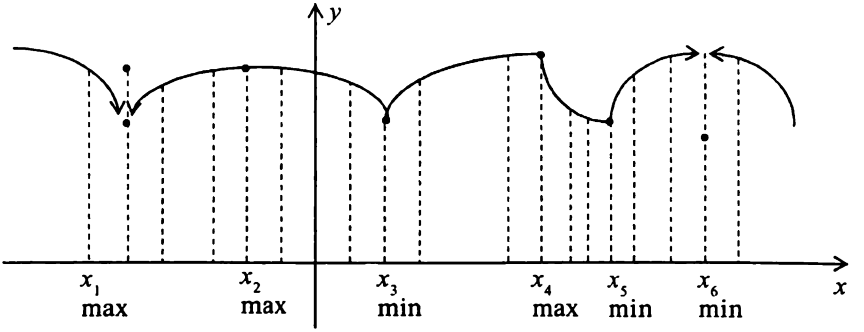
1- hol. Agar funksiya $[a;b]$ kesmada berilgan bo'lsa, funksiyaning ekstremum nuqtasi kesmaning chegara nuqtasi ham, ichki nuqtasi ham bo'lishi mumkin.

2- hol. Ekstremumga ega bo'lgan funksiya monoton bo'lmaydi. Monoton o'zgaruvchi funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi. Masalan, $y=kx+b$ funksiya $k>0$ bo'lganda monoton o'suvchi, $k<0$ bo'lganda esa monoton kamayuvchi bo'lgani uchun ekstremumga ega emas.

3- hol. Funksiyaning ekstremum nuqtasi (ekstremum qiymatlari) bir nechta va hatto cheksiz ko'p ham bo'lishi mumkin. Funksiya uzluksiz bo'lganda, uning maksimum va minimum qiymatlari o'zaro almashinib keladi (7.3- chizma).

Eslatma. Agar funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo'lsa, funksiyaning $x=a$ yoki $x=b$ nuqtalardagi lokal maksimumi yoki lokal minimumi haqida so'z yuritib bo'lmaydi, chunki $x=a$ nuqtadan chapda va $x=b$ nuqtadan o'ngda funksiya aniqlanmagan.

1- misol. $f(x)=x^2-10x+6$ funksiyaning ekstremum nuqtasi va ekstremum qiymatini toping.



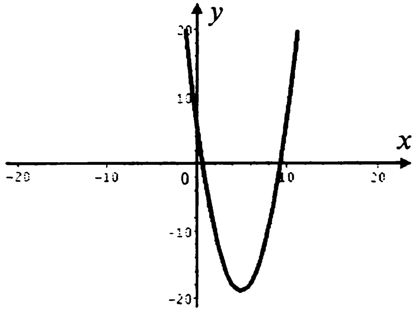
7.3- chizma.

Yechilishi. Berilgan kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz: $f(x)=(x-5)^2-19$. $x_0=5$ bo'lganda $f(x_0)=-19$, $x_0\neq 5$ bo'lganda esa $(x-5)^2>0$ va $f(x)=(x-5)^2-19>-19=f(x_0)$ bo'ladi.

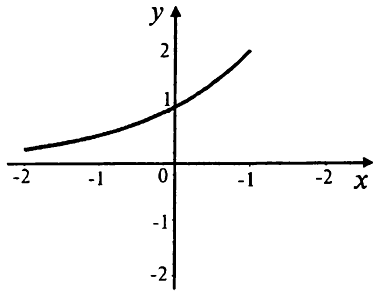
Demak, $x_0=5$ nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi, $f(x_0)=-19$ esa uning ekstremum qiymati bo'ladi (7.4- chizma).

2- misol. $f(x)=2^x$ funksiyaning ekstremum nuqtasi va ekstremum qiymatini toping.

Yechilishi. $f(x)=2^x$ qat'iy monoton o'suvchi funksiya va $2^x\neq 0$ bo'lganligi uchun ekstremumga ega bo'lmaydi (7.5- chizma).



7.4- chizma.

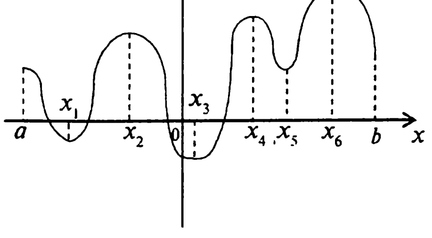


7.5- chizma.

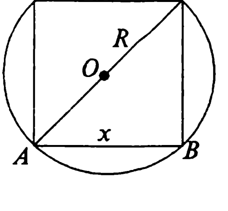
Biz yuqorida funksiyaning ekstremumlari va funksiya biror oraliqda bir nechta maksimum va minimumlarga ega bo'lishi mumkinligi to'g'risida aytib o'tdik. Endi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish masalasini qaraymiz.

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiyaning $[a;b]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi va bu qiymatlarga funksiya $[a;b]$ kesmaning nuqtalarida erishadi.

$f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun (7.6- chizma):



7.6- chizma.



7.7- chizma.

1) $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ dagi barcha maksimum va minimumlari topiladi;

2) $f(x)$ funksiyaning $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari topiladi;

3) maksimumlarning eng kattasi bilan $f(a)$, $f(b)$ lar taqqoslanadi, ularning kattasi funksiyaning $[a;b]$ dagi eng katta qiymati bo'ladi;

4) minimumlarning eng kichigi bilan $f(a)$, $f(b)$ lar taqqoslanadi, ularning kichigi funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada birgina maksimum (minimum) ga ega bo'lsa, bu maksimum (minimum) funksiyaning $[a;b]$ dagi eng katta (kichik) qiymati bo'ladi.

4-misol. R radiusli doiraga eng katta yuzli ichki to'g'ri to'rtburchak chizilsin.

Yechilishi. To'g'ri to'rtburchak tomonlaridan birini x orqali belgilaymiz: $AB = x$; $BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$. U holda to'g'ri to'rtburchak yuzi $y = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ bo'ladi, bunda $0<x<2R$ (7.7- chizma). $y = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ ning eng katta qiymatini izlaymiz. Buning uchun y o'rniga y^2 ning eng katta qiymatini topamiz:

$$y^2=x^2(4R^2-x^2).$$

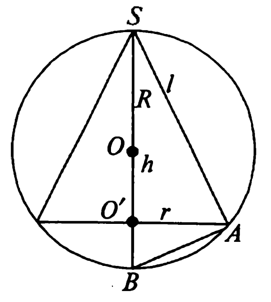
O'ng tomondagi ko'paytma ikki ko'paytuvchi x^2 va $4R^2-x^2$ dan iborat bo'lib, ularning yig'indisi $x^2+(4R^2-x^2)=4R^2$ o'zgarmas bo'ladi.

Eng katta ko'paytma haqidagi teoremaga asosan y^2 ko'paytmaning eng katta qiymatiga $x^2=4R^2-x^2$ bo'lganda erishiladi. U holda $2x^2=4R^2$ yoki $x_1>0$ bo'lgani uchun $x = R\sqrt{2}$.

Demak, R radiusli doiraga ichki chizilgan barcha to'g'ri to'rtburchaklardan faqat kvadrat eng katta yuzga ega bo'ladi.

5- misol. Berilgan sharga eng katta hajmli ichki konus chizing.

Yechilishi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $OS=R$, $O'A=r$, $O'S=h$ (7.8- chizma). U holda konusning hajmi $y = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ bo'ladi. To'g'ri burchakli uchburchakdagi metrik muno-



7.8- chizma.

sabatlardan foydalanib, *SAB* uchburchakdan $(2R—h)$: $h=r:h$ ga erishamiz, bundan $r^2=h(2R—h)$ $(0<h<2R)$.

$y = \frac{\pi}{3}h^2(2R-h)$ ning eng katta qiymatini hisoblash uchun $h^2(2R—h)$ ko'paytmaning eng katta qiymatini izlaymiz:

$$h^2(2R—h) = (h)^2(2R—h).$$

Bu ko'paytmada $h+(2R—h)=2R$ — o'zgarmas bo'lgani uchun eng katta qiymatga $h = \frac{4}{3}R$ da erishiladi. $y_{\max} = \frac{32\pi R^3}{81}$ bo'ladi.

Demak, berilgan sharga ichki chizilgan konuslardan balandligi shar diametrining $\frac{2}{3}$ qismini tashkil qiladigani eng katta hajmga ega bo'lar ekan.

4. Funksiyaning nollari. $y=f(x)$ funksiya $x\in X$ $(x\subset R^1)$ to'plamda berilgan bo'lsin.

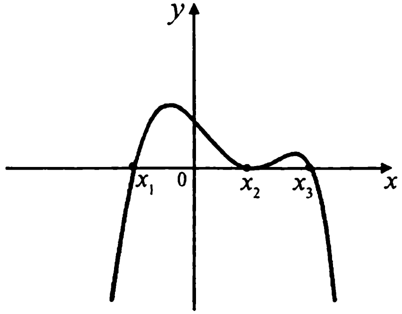
1- ta'rif. Argument x ning funksiyani nolga aylantiradigan qiymatlari, ya'ni $x\in X$ ning $f(x)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan qiymatlari *funksiyaning nollari* deyiladi.

Funksiyaning grafigi uning nollarida yoki Ox o'qini kesib o'tishi, yoki Ox o'qiga urinib o'tishi mumkin (7.9- chizma). 7.9- chizmadagi x_1, x_2, x_3 nuqtalar funksiya grafigining nollari bo'ladi.

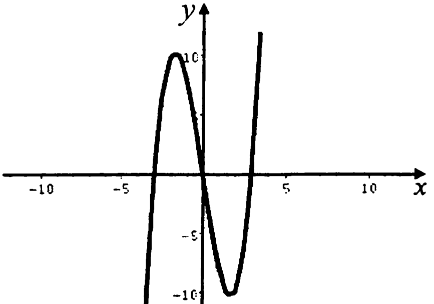
1-misol. $f(x)=x^3—9x$ funksiyaning nollarini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning nollarini topish uchun $x^3—9x=0$ tenglamani yechamiz: $x_1=0$, $x_2=—3$, $x_3=3$ nuqtalar berilgan funksiyaning nollari bo'ladi (7.10- chizma).

Ba'zi funksiyalar o'zining aniqlanish sohasida nollarga ega bo'lmasligi ham mumkin, masalan, $y=3^x$, $y=x^2+1$ va h.k.



7.9- chizma.



7.10- chizma.

Funksiyaning nollaridan o'tishda uning ishorasi o'zgaradi. Bundan tashqari, uzilish nuqtalaridan o'tishda ham ishora o'zgarishi mumkin.

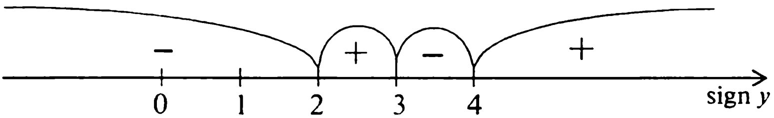
Berilgan funksiyaning ishorasini tekshirish uchun $f(x)>0$ va $f(x)<0$ tengsizliklarni yechish natijasida x ning bu tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlari topiladi.

Agar funksiyaning grafigi Ox o'qiga urinsa, urinish nuqtasida funksiyaning ishorasi o'zgarmaydi.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar $f(x)=0$ tenglamaning yechimlari bo'lsin, u holda funksiyaning aniqlanish sohasi bir necha bo'laklarga bo'linadi. Bu ketma-ket bo'laklarning har biridan bittadan qiymat olib, funksiya ishorasining o'zgarishini tekshirish kerak.

2-misol. $y = \frac{x^2-5x+6}{x-4}$ funksiyaning ishorasini aniqlang.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$ dan iborat. Funksiyani nolga aylantiradigan nuqtalarni topish uchun

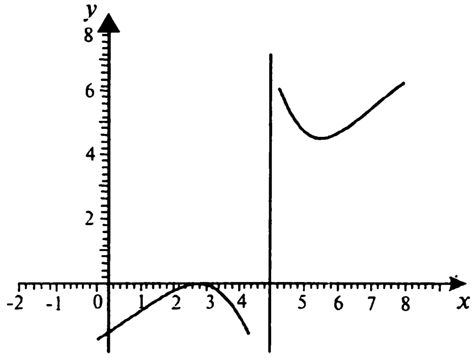


kasrning suratini nolga tenglashtirib, $x^2-5x+6=0$ tenglamaning yechimini topamiz: $x_1=2$, $x_2=3$. Funksiyaning ishorasini aniqlash uchun quyidagi oraliqlarga bo'lamiz: $(-\infty;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$, $(4;+\infty)$ va bu bo'laklardan ketma-ket $1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 5$ nuqtalarni olib, funksiyaning ishorasini tekshiramiz: $f(1)<0$, $f(\frac{5}{2})>0$, $f(\frac{7}{2})<0$, $f(5)>0$.

$x_1=2$, $x_2=3$ nuqtalar berilgan funksiyaning nollari bo'ladi (7.11- chizma).

5. Funksiya grafigining egilish (bukilish) nuqtalari. Funksiya grafigining egilish (bukilish) nuqtalarini topishda qavariq to'plam va qavariq funksiya tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Shuning uchun biz avvalo qavariq to'plam va qavariq funksiya tushunchalarini beramiz:

a) **qavariq to'plam tushunchasi.** Bo'sh bo'lmagan $E\subset R^2$ to'plam berilgan bo'lsin.



7.11-rasm.

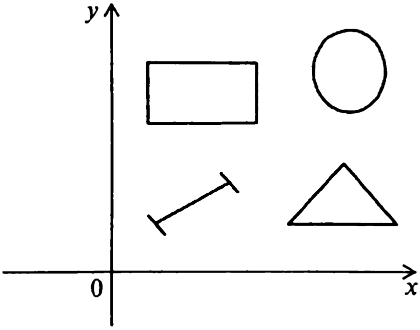
1- ta'rif. Agar E to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasi bilan birga ularni tutashtiruvchi kesma ham shu to'plamga qarashli bo'lsa, E *qavariq to'plam* deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar $\forall x, y \in E$ va barcha $\lambda \in [0;1]$ uchun $\lambda x+(1-\lambda)\, y \in E$ bo'lsa, E *qavariq to'plam* deyiladi.

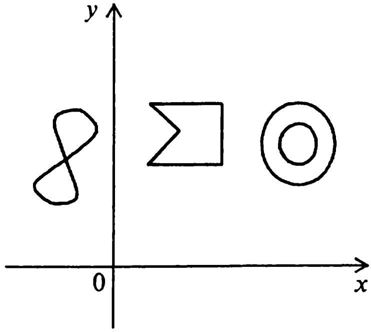
7.12- chizmadagi to'g'ri to'rtburchak, doira, uchburchaklar qavariq to'plamlarga misol bo'la oladi, 7.13-chizmadagi shakllar esa, qavariq bo'lmagan to'plamlardir. Yagona elementli to'plamlarni va bo'sh to'plamlarni ham qavariq to'plam deb qarash mumkin.

2- ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in E$, $x \neq y$ nuqtalar va barcha $\lambda \in (0;1)$ sonlar uchun $\lambda x+(1-\lambda)y$ ham E to'plamning ichki nuqtasi bo'lsa, E *qat'iy qavariq to'plam* deyiladi. Masalan, doira qat'iy qavariq to'plam bo'ladi, parallepiped esa qat'iy qavariq to'plam emas.

b) **qavariq funksiya tushunchasi.** $f(x)$ funksiya E qavariq to'plamda berilgan bo'lsin.



7.12- chizma.



7.13- chizma.

3- ta'rif. Agar $\forall x, y \in E$ va $\forall \lambda \in [0;1]$ uchun

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, qavariq E to'plamda aniqlangan va chekli $f(x)$ funksiya *qavariq* deyiladi (7.14-chizma).

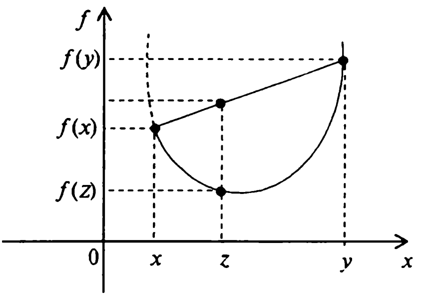
4- ta'rif. Agar $\forall x, y \in E$, $x \neq y$ nuqtalar va $\forall \lambda \in [0;1]$ uchun

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)$$

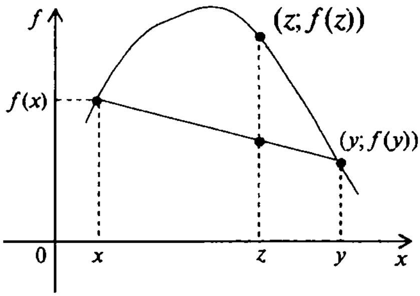
qat'iy tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda *qat'iy qavariq* deyiladi.

5- ta'rif. Agar $g(x)=-f(x)$ funksiya qavariq $E \subset R^1$ to'plamda qavariq bo'lsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda *botiq* deyiladi (7.15-chizma).

Misollar. 1) $f(x)=|x|$, $x \in R^1$ funksiya qavariqdir, chunki



7.14- chizma.



7.15- chizma.

$\forall x_1, x_2 \in R^1$, $x_1 \neq x_2$ nuqtalar va $\forall \lambda[0;1]$ uchun $|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2| \leq \leq \lambda |x_1| +(1-\lambda) |x_2|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2) $f(x)=e^x$ funksiya R^1 da qat'iy qavariq funksiyadir, chunki $\forall x_1, x_2 \in R^1$, $x_1 \neq x_2$ nuqtalar va $\forall \lambda \in (0;1)$ uchun

$$e^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2} < \lambda e^{x_1} + (1-\lambda)e^{x_2}$$

tengsizlik bajariladi.

3) $f(x)=-e^x$ funksiya R^1 da botiq funksiya bo'ladi.

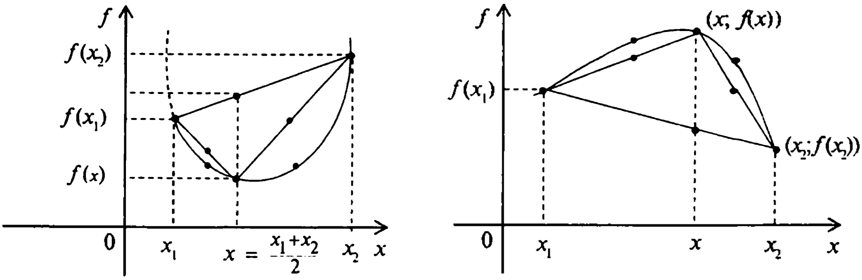
Amaliyotda, ko'pincha, funksiya grafigi qavariqligi (botiqligi)ni tekshirishda yuqoridagi keltirilgan ta'riflarga ekvivaliyent bo'lgan quyidagi ta'riflardan foydalaniladi.

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ da berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya grafigi istalgan vatarining o'rtasi funksiya grafigining mos nuqtasidan pastda (yuqorida) yotsa, bu funksiyaning grafigi berilgan oraliqda *botiq* (*qavariq*) deyiladi (7.16-

chizma).

7- ta'rif. Agar istalgan x_1, $x_2 \in [a;b]$ uchun $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



7.16- chizma.

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning grafigi $[a;b]$ kesmada botiq (qavariqligi yuqoriga yo'nalgan) deyiladi.

8- ta'rif. Agar istalgan x_1, $x_2 \in [a;b]$ uchun

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning grafigi $[a;b]$ kesmada *qavariq* (qavariqligi pastga yo'nalgan) deyiladi.

1- misol. $f(x)=3^x$ funksiya grafigining R^1 da qavariqligi yoki botiqligini aniqlang.

Yechilishi. Funksiya grafigining botiqligi yoki qavariqligini ta'rif bo'yicha tekshiramiz:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 3^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{3x_1 + x_2}$$

va

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{3^{x_1}+3^{x_2}}{2}.$$

$\forall x_1, x_2 \in R^1$ $(x_1 < x_2)$ uchun 3^{x_1} va 3^{x_2} sonlar bir-biriga teng emas va musbat sonlar. O'rta arifmetik va o'rta geometrik miqdorlar orasidagi munosabatlardan

$$\sqrt{3^{x_1+x_2}} < \frac{3^{x_1}+3^{x_2}}{2}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak, 4- ta'rifga asosan, funksiyaning grafigi qat'iy qavariqdir (7.17- chizma).

2- misol. $f(x)=\sin x$ funksiya grafigining $[0;\pi]$ kesmada botiqligini ko'rsating.

Yechilishi. Shartga ko'ra

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\sin\frac{x_1+x_2}{2}$$

va

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}$$

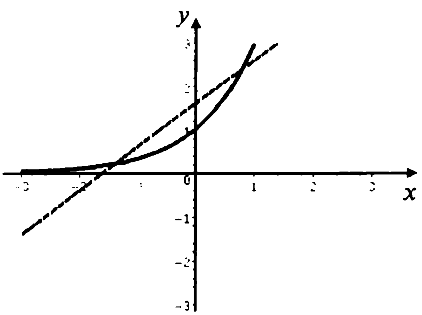
larga ega bo'lamiz. Istalgan x_1, $x_2\in(0;\pi)$, $x_1<x_2$ larda $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$ bo'lgani uchun

$$0<\cos\frac{x_1+x_2}{2}<1,\ \sin\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}$$

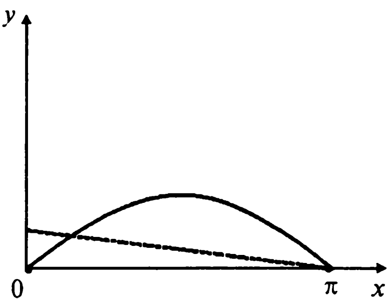
tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak, 6- ta'rifga asosan, $f(x)=\sin x$ funksiyaning grafigi $[0;\pi]$ kesmada botiqdir (7.18- chizma).

3- misol. Ushbu $f(x)=x^2$ funksiya grafigining R^1 da qavariqligini ko'rsating.



7.17- chizma.



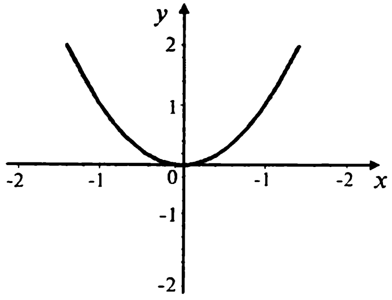
7.18- chizma.

Yechilishi. Istalgan $\forall x_1,\ x_2\in R^1$ va $x_1\neq x_2$ bo'lganda

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4}\le\frac{x_1^2+x_2^2+(x_1^2+x_2^2)}{4}=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz, chunki $x_1^2+x_2^2\ge 2x_1x_2$.

Demak, 8- ta'rifga ko'ra, berilgan funksiyaning grafigi R^1 da qavariqdir (7.19- chizma).



7.19- chizma.

g) qavariq funksiyalarning xossalari.

1°. Qavariq (botiq) funksiyaning o'zgarmas musbat songa ko'paytmasi yana qavariq (botiq) funksiya bo'ladi.

2°. Qavariq (botiq) funksiyaning o'zgarmas manfiy songa ko'paytmasi botiq (qavariq) funksiya bo'ladi.

3°. Qavariq funksiyalarning yig'indisi qavariq funksiya bo'ladi.

4°. Agar $f(x)$ — qavariq va o'suvchi bo'lib, $x=\varphi(t)$ esa botiq funksiya bo'lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya botiq bo'ladi.

5°. Agar $f(x)$ — botiq va o'suvchi bo'lib, $x=\varphi(t)$ esa qavariq funksiya bo'lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya botiq bo'ladi.

6°. Agar $f(x)$ — qavariq va o'suvchi funksiya bo'lib, $x=\varphi(t)$ esa qavariq funksiya bo'lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya qavariq bo'ladi.

7°. Agar $f(x)$ — qavariq va kamayuvchi funksiya bo'lib, $x=\varphi(t)$ esa botiq funksiya bo'lsa, u holda murakkab $f(\varphi(t))$ funksiya qavariq bo'ladi.

8°. Agar $y=f(x)$ va $y=g(x)$ o'zaro teskari (mos oraliqlarda) funksiyalar bo'lsa, u holda:

a) agar $f(x)$ — botiq va o'suvchi funksiya bo'lsa, $g(x)$ funksiya qavariq va o'suvchi bo'ladi;

b) agar $f(x)$ — qavariq va kamayuvchi funksiya bo'lsa, $g(x)$ funksiya botiq va kamayuvchi bo'ladi;

d) agar $f(x)$ — qavariq va kamayuvchi funksiya bo'lsa, $g(x)$ funksiya qavariq va kamayuvchi bo'ladi.

9°. $[a;b]$ oraliqda botiq bo'lgan $f(x)$ (o'zgarmas sondan farqli) funksiya shu oraliqning ichida o'zining eng katta qiymatini qabul qilmaydi.

10°. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar musbat va qavariq bo'lsa, u holda $y=\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ funksiya qavariq bo'lishi uchun bu funksiyalarning biri o'suvchi, ikkinchisi esa kamayuvchi bo'lishi yetarli.

11⁰. Agar $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiya qavariq bo'lib, $f(x)$ manfiy, qavariq va o'suvchi bo'lsa, u holda $\varphi(x)$ funksiya musbat, botiq va o'suvchi bo'ladi.

12⁰. Agar $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ botiq bo'lib, $f(x)$ va $\varphi(x)$) funksiyalar qavariq va manfiy bo'lsa, u holda qaralayotgan funksiyaning biri o'suvchi, ikkinchisi kamayuvchi bo'ladi.

13⁰. Agar $f(x)$ funksiya qavariq bo'lsa, $\frac{1}{f(x)}$ ($f(x) \neq 0$) funksiya botiq bo'ladi.

14⁰. Agar $f(x)$ funksiya musbat va qavariq bo'lsa, u holda $y = \sqrt[n]{f(x)}$ funksiya qavariq bo'ladi (n — natural son).

15⁰. Agar $[f(x)]^n$ funksiya qavariq bo'lsa (n — natural son), u holda $f(x)$ funksiya musbat va botiq bo'ladi.

16⁰. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar musbat, o'suvchi, botiq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya musbat, o'suvchi, botiq bo'ladi.

17⁰. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar musbat, kamayuvchi, botiq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya musbat, botiq bo'ladi.

18⁰. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar manfiy, o'suvchi, qavariq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya musbat, botiq bo'ladi.

19⁰. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar manfiy, kamayuvchi, qavariq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya musbat, botiq bo'ladi.

20⁰. Agar $f(x)$ funksiya musbat, kamayuvchi, qavariq bo'lsa, $\varphi(x)$ funksiya esa musbat, o'suvchi, qavariq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya musbat, qavariq bo'ladi.

21⁰. Agar $f(x)$ funksiya manfiy, o'suvchi, botiq bo'lsa, $\varphi(x)$ funksiya esa manfiy, kamayuvchi, botiq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya musbat, qavariq bo'ladi.

22⁰. Agar $f(x)$ musbat, o'suvchi, qavariq bo'lsa, $\varphi(x)$ funksiya esa manfiy, o'suvchi, botiq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya manfiy, botiq bo'ladi.

23⁰. Agar $f(x)$ funksiya musbat, kamayuvchi, qavariq bo'lsa, $\varphi(x)$ funksiya esa manfiy, kamayuvchi, botiq bo'lsa, u holda $y=f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiya manfiy, botiq bo'ladi.

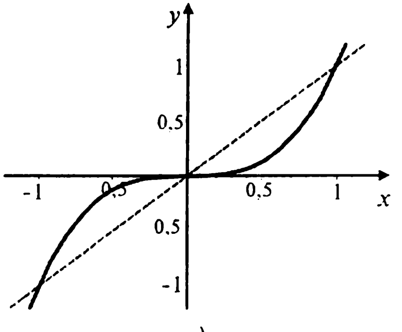
24^0. Agar $f(x)$ musbat, o'suvchi, botiq bo'lsa, $\varphi(x)$ funksiya esa manfiy, o'suvchi, qavariq bo'lsa, u holda $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiya manfiy, qavariq bo'ladi.

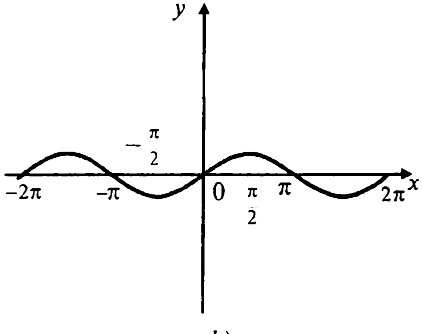
25^0. Agar $f(x)$ musbat, kamayuvchi, botiq bo'lsa, $\varphi(x)$ funksiya esa manfiy, o'suvchi, qavariq bo'lsa, u holda $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiya manfiy, qavariq bo'ladi.

$f(x)$ funksiya E— qavariq to'plamda berilgan bo'lib, $x_0\in E$ bo'lsin.

6- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $U_\delta^-(x_0)$ atrofda qavariq (botiq) bo'lib, $U_\delta^+(x_0)$ atrofda esa botiq (qavariq) bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning (funksiya grafigining) *egilish nuqtasi* deb ataladi.

Masalan, 1) $y=x^3$ funksiya grafigi uchun $x=0$ nuqta egilish nuqtasi bo'ladi; 2) $y=\sin x$ funksiyaning grafigi uchun $x=\pi n$, $n\in Z$ nuqtalar egilish nuqtalari bo'ladi (7.20- *a*, *b*- chizmalar).





7.20- chizma.

6. Funksiya grafigining simmetriya o'qlari. Agar shunday o'zgarmas x_0 son mavjud bo'lsaki, istalgan $x\in X$ uchun $x_0-x\in X$, $x_0+x\in X$ bo'lganda

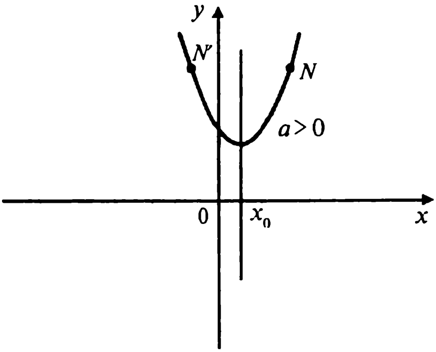
$$f(x_0-x)=f(x_0+x) \qquad (*)$$

tenglik bajarilsa, $x=x_0$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya uchun *vertikal simmetriya o'qi* deyiladi. Xususiy hollarda $x_0=0$ bo'lganda juft funksiya uchun Oy o'qi simmetriya o'qi bo'ladi.

1- misol. $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ funksiya grafigining qanday vertikal o'qqa nisbatan simmetrikligini aniqlang.

Yechilishi. Simmetriklik (*) shartiga ko'ra tekshiramiz:

$$a(x_0-x)^2+b(x_0-x)+c=a(x_0+x)^2+b(x_0+x)+c,$$
$$-2a\,x\,x_0-bx=2a\,x_0\,x+bx.$$



7.21- chizma.

Bu tenglikni x_0 ga nisbatan yechamiz:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, ya'ni $x = -\frac{b}{2a}$ — simmetriya o'qi (7.21- chizma).

Agar istalgan $x \in D(f)$ uchun $y_0 = \frac{1}{2}[f(x_0 - x) + f(x_0 + x)]$ ayniyat o'rinli bo'lsa, $(x_0;y_0)$ nuqta $f(x)$ funksiya grafigi uchun simmetriya markazi bo'ladi.

Xususiy holda $O(0;0)$ nuqta toq funksiyaning simmetriya markazidir.

2- misol. $y=ax+b$ funksiya grafigining simmetriya markazini toping.

Yechilishi. Simmetriya markazini topish shartini yozamiz:

$$2y_0=a(x_0-x)+b+a(x_0+x)+b,$$

$$2y_0=2ax_0+2b.$$

Bu yerdan $y_0=ax_0+b$ bo'ladi, bunda x_0 — ixtiyoriy nuqta. Demak, $y=ax+$b funksiya grafigining simmetriya markazi $M(x_0;\ ax_0+b)$ nuqtada ekan.

Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1. Agar $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyaning grafigi $x=a$ va $x=b$ $(b>a)$ parallel vertikal o'qlarga nisbatan simmetrik bo'lsa, $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri $2b-2a$ ga teng.

2. Agar $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyaning grafigi $A(a;y_0)$ va $B(b;y_1)$ $(b>a)$ nuqtalarga nisbatan simmetrik bo'lsa, $y=f(x)$ funksiyani ikkita chiziqli funksiya va biror davriy funksiya $(T=2b-2a)$ ning yig'indisi shaklida tasvirlash mumkin. Xususiy holda, $y_0=y_1$ bo'lsa, $y=f(x)$ — davriy funksiya bo'ladi.

3. Agar $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyaning grafigi $A(a;y_0)$ nuqta va $x=b$ $(b\neq a)$ to‘g‘ri chiziqga nisbatan simmetrik bo‘lsa, $f(x)$ davriy funksiya bo‘lib, uning davri $4b-4a$ ga teng bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari koordinatalarini toping:

1. $f(x)=2{,}5x-5$. **2.** $f(x)=5x+1$.

3. $f(x)=x^2-4x+5$. **4.** $f(x)=3^{-x}-1$.

5. $f(x)=\cos x$. **6.** $f(x)=(x-2)(x+5)$.

7. $f(x)=\log_3(2-x)$. **8.** $f(x)=2$.

Funksiya aniqlanish sohasining chegarasi yaqinida uning limitini toping:

9. $f(x)=\frac{5+x}{x+3}$.

10. $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & 0\le x\le 1 \text{ bo'lganda}, \\ 2x^2+1, & 1<x\le 2 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$

11. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$. **12.** $f(x)=x^2-3x$, $x\in[1;2]$.

13. $f(x)=\operatorname{sign} x$. **14.** $f(x)=\sqrt{x-2}$.

15. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}+2}$. **16.** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Funksiyalarning ekstremum nuqtalari va ekstremum qiymatlarini toping:

17. $f(x)=x^2-4$. **18.** $f(x)=4x-3$.

19. $f(x)=3^x-1$. **20.** $f(x)=x^2-5x+6$.

21. $f(x)=\cos x$, $x\in[0;2\pi]$. **22.** $f(x)=5$.

23. $f(x)=x^2-4x$. **24.** $f(x)=x^3-3x^2$.

25. Berilgan konusga eng katta yon sirtli ichki silindr chizing.

26. Berilgan konusga eng katta hajmli ichki silindr chizing.

27. Berilgan sharga eng katta yon sirtli ichki konus chizing.

28. Tomoni 40 sm bo‘lgan kvadrat shaklidagi tunukadan imkoniyati boricha katta hajmli usti ochiq quti yasang.

Funksiyalarning nollarini toping:

29. $f(x)=x^2-3$. **30.** $f(x)=e^{3x}-1$. **31.** $f(x)=2^{x^2}+1$.

32. $f(x)=x^2+4$. **33.** $f(x)=x^2-9$. **34.** $f(x)=\cos x$.

35. $f(x)=\ln(x-2)$. **36.** $f(x)=\sqrt{x-4}$.

37. $f(x)=\frac{1}{x}$. **38.** $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$.

39. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. **40.** $(x)=2^x-4$.

Funksiya grafigining berilgan kesmada (oraliqda) qavariq yoki botiqligini aniqlang:

41. $f(x)=x^3,\ x\in R^1$. **42.** $f(x)=6^{-x},\ x\in(-\infty,+\infty)$.

43. $f(x)=\cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **44.** $f(x)=\lg x,\ x\in(0;+\infty)$.

45. $f(x)=x^4,\ x\in R$. **46.** $f(x)=x\,|x|,\ x\in[-4;4]$.

Ox o'qida shunday nuqtani topingki, undan parabolaning simmetriya o'qi o'tsin:

47. $y=x^2+3$. **48.** $y=(x+2)^2$. **49.** $y=-3(x+2)^2+2$.

50. $y=(x-2)^2+2$. **51.** $y=x^2+x+1$. **52.** $y=2x^2-3+5$.

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1. (2; 0), (0; —5). **2.** (0; 1), (—0,2; 0). **3.** (0; 5). **4.** (0; 0).

5. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right),\quad n\in Z$. **6.** (2; 0), (5; 0), (0; —10).

7. (1; 0), $(0;\log_3 2)$. **8.** (0; 2).

9. $f(\pm\infty)=1,\quad f(-3-0)=+\infty,\quad f(-3+0)=+\infty$.

10. $f(1+0)=f(1-0)=f(1)=3$. **11.** $f(0-0)=(0+0)=1$.

12. $f(1)=-2,\ f(2)=-2$. **13.** $f(0-0)=-1,\ f(0+0)=1$.

14. $f(2+0)=f(2)=0$. **15.** $f(2+0)=f(2)=1$.

16. $f(3-0)=f(3+0)=1$. **17.** $x=0,\ f_{\min}(0)=-4$.

18. Yo'q. **19.** Yo'q. **20.** $x=2{,}5,\ f_{\min}(2{,}5)=-1/4$.

21. $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, $f_{max}(0)=f_{max}(2\pi)=1$, $f_{min}(\pi)=-1$.

22. Yo‘q. **23.** $x=2$, $f_{min}(2)=-4$.

24. $x=0$, $x=2$, $f_{max}(0)=0$, $f_{min}(2)=-4$. **25.** $\frac{H}{2}$. **26.** $\frac{H}{3}$.

27. $\frac{R}{\sqrt{2}}$. **28.** $\frac{20}{3}$ (sm). **29.** $x=0, x=3$. **30.** $x=0$. **31.** Yo‘q.

32. Yo‘q. **33.** $x=\pm 3$. **34.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **35.** $x=3$.

36. $x=4$. **37.** Yo‘q. **38.** $x=\pm 2$. **39.** $x=2$. **40.** $x=2$.

41. $(-\infty;0)$ da botiq, $(0;+\infty)$ da qavariq. **42.** $(-\infty;+\infty)$ da qavariq.

43. $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ da botiq. **44.** $(0;+\infty)$ da botiq. **45.** $(-\infty;+\infty)$ da qavariq.

46. $[-4;0)$ da botiq, $(0;4]$ da qavariq. **47.** $x=0$.

48. $x=-2$. **49.** $x=-2$. **50.** $x=2$. **51.** $x=-1/2$. **52.** $x=3/4$.

8-§. ELEMENTAR FUNKSIYALAR VA ULARNING GRAFIKLARI

Matematikaning ko‘p masalalarida qo‘llaniladigan quyidagi funksiyalar *asosiy elementar funksiyalar* deyiladi:

1. $y=b$ — o‘zgarmas funksiya (b=const), $b\in R^1$.
2. $y=x^{\alpha}$ darajali funksiya, α — haqiqiy son.
3. $y=a^x$ ko‘rsatkichli funksiya, bunda $a>0$, $a\neq 1$.
4. $y=\log_a x$ logarifmik funksiya, bunda $a>0$, $a\neq 1$.
5. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg}\, x$, $y=\text{ctg}\, x$, $y=\frac{1}{\cos x}=\sec x$,

$y=\frac{1}{\sin x}=\text{cosec}\, x$ — trigonometrik funksiyalar.

6. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\text{arctg}\, x$, $y=\text{arcctg} x$ — teskari trigonometrik funksiyalar.

Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, natural darajaga ko‘tarish, ildiz chiqarish amallarini bajarish va murakkab funksiya hosil qilish natijasida yuzaga keladigan (analitik usulda berilgan) funksiyalar ham *elementar funksiyalar* deyiladi. Masalan,

$$y=3^{x+\text{tg}\frac{1}{x}},\quad y=\arcsin x^2,\quad y=\log_3(x^2-4x+3)$$

funksiyalar elementar funksiyalardir.

Elementar bo'lmagan funksiyalarga misollar:

1. $y = \sin x + 3^{4x} + \mathrm{arctg} 2x^2 + \dots$.

2. $y = x + 2x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \dots$.

3. Dirixle funksiyasi:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irratsional son bo'lganda}, \\ 1, & x \text{ ratsional son bo'lganda}. \end{cases}$$

Bu 1—2- misollarda amallar chekli marta bajarilmagan, 3-misolda elementar funksiyalar qatnashayotgani yo'q.

Elementar funksiyalar quyidagi asosiy sinflarga bo'linadi:

1) butun-ratsional funksiya (ko'phad). Bunday funksiyaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

bunda a_0, $a_1 \dots$, a_n — haqiqiy sonlar, $a_0 \neq 0$ (ko'phadning koeffitsiyentlari), n - manfiy bo'lmagan butun son (ko'phadning darajasi). a_0, $a_1 \dots$, a_n sonlar va x ustida chekli sondagi qo'shish, ko'paytirish va darajaga ko'paytirish amallari bajarilgan. Butun-ratsional funksiyaning aniqlanish sohasi R^1 dan iborat. Xususiy holda, $y=ax+b$ — chiziqli funksiya va $y=ax^2+bx+c$ — kvadrat uchhad butun-ratsional funksiyalardir.

2) Qasr-ratsional funksiya. Ikkita qisqarmas butun-ratsional funksiyaning (ko'phadning) nisbatidan tuzilgan

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

funksiya *kasr - ratsional funksiya* deb ataladi. Kasr-ratsional funksiya

$$X = R^1 \setminus \left\{ x : x \in R^1,\ Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \neq 0 \right\}$$

to'plamda, ya'ni maxrajni nolga aylantiruvchi nuqtalardan farqli bo'lgan barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plamda aniqlangan. Xususiy holda,

$$y = \frac{x^5 + 2}{x^2 + 3x} \quad \text{va} \quad y = \frac{x}{x^4 - 1}$$

lar kasr-ratsional funksiyalar bo'ladi.

Butun - ratsional va kasr - ratsional funksiyalar birgalikda *ratsional funksiyalar* sinfini tashkil qiladi.

3) irratsional funksiya. Harfiy o'zgaruvchilarni o'z ichiga olgan ifodalarda ildiz chiqarish amali qatnashgan algebraik ifodalar berilgan o'zgaruvchilarga nisbatan *irratsional ifodalar* deyiladi.

Tarkibida irratsional ifodalar qatnashgan algebraik ifodalarning moslik qonunini ratsional ifodalar yordamida ko'rsatish mumkin bo'lmasa, bunday ifodalar *irratsional funksiyalar* deyiladi. Masalan,

$$y = \frac{4x^3 + \sqrt{4x^3 - 4}}{\sqrt[3]{1 + 6x} - 4}, \quad y = \sqrt[3]{x + 2}, \quad y = \sqrt{x}$$

funksiyalar irratsional funksiyalardir.

4) algebraik funksiya. Ratsional va irratsional funksiyalar sinflari birgalikda algebraik funksiyalar sinfini tashkil qiladi. Ushbu tenglamani qanoatlantiradigan har qanday funksiya *algebraik funksiya* deyiladi;

$$A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)y + A_n(x) = 0,$$

bunda $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$ berilgan butun-ratsional funksiyalar, $A_0(x) \neq 0$ va n — butun musbat son.

Misollar. 1. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ — algebraik funksiyadir, chunki u $y^3 - x^2 - 1 = 0$ tenglamani qanoatlantiradi.

2. $xy^2 - 2(x^2 - 1)y - 4x = 0$ tenglama bilan aniqlangan funksiya ikkita algebraik funksiyadan iborat bo'ladi, ya'ni

$$y = \frac{x^2 - 1 + \sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4x^2}}{x} = 2x,$$

$$y = \frac{x^2 - 1 + \sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4x^2}}{x} = -\frac{2}{x}.$$

3. $x^4y^5 + xy - x^3 + 4 = 0$ tenglama bilan aniqlangan funksiya ham algebraik funksiya bo'ladi, lekin bu funksiyani oshkor ko'rinishda yozish mumkin emas, chunki uni radikalga nisbatan yechib bo'lmaydi. Bu holda biz oshkormas algebraik funksiyaga ega bo'lamiz.

5) transsendent funksiyalar. Barcha algebraik bo'lmagan funksiyalar *transsendent funksiyalar* deb ataladi (ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik funksiyalar va teskari trigonometrik funksiyalar transsendent funksiyalardir), masalan: $y = \sin 3x$, $y = 2^{x+3}$, $y = \operatorname{arctg} 5x$ funksiyalar transsendent funksiyalardir.

Shunday qilib, barcha elementar funksiyalar algebraik va transsendent funksiyalar sinflariga bo'linadi.

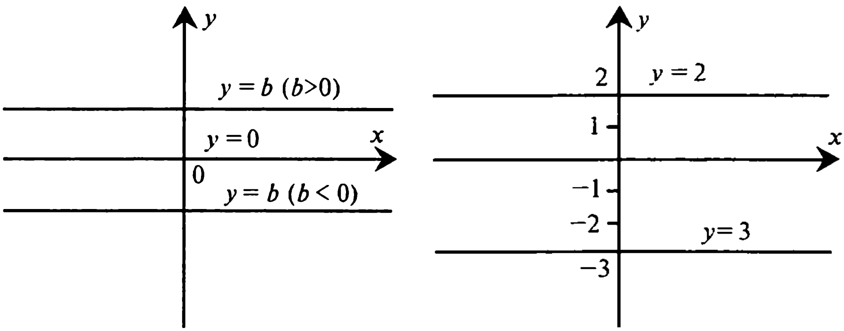
Endi asosiy elementlar funksiyalarning har biri haqida batafsil to'xtalib o'tamiz.

1. O'zgarmas funksiya. $y=b$ (bu yerda b — biror haqiqiy son) formula bilan berilgan funksiya *o'zgarmas funksiya* deyiladi.

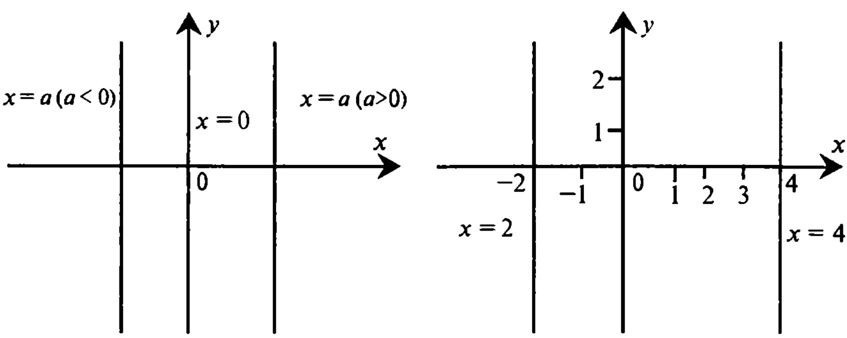
$y=b$ o'zgarmas funksiyaning grafigi abssissalar o'qiga parallel va ordinatalar o'qidagi $(0;b)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iboratdir. 8.1- chizmada bir necha o'zgarmas funksiyalarning grafiklari tasvirlangan. Xususiy holda, $y=0$ funksiyaning grafigi abssissalar o'qidan iboratdir.

$x=a$ (bu yerda a — biror haqiqiy son) formula bilan berilgan funksiya ham *o'zgarmas funksiya* deyiladi.

$x=a$ o'zgarmas funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga parallel va abssissalar o'qidagi $(a;0)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iboratdir (8.2- chizma). Xususiy holda, $x=0$ funksiyaning grafigi ordinatalar o'qidan iboratdir.



8.1- chizma.



8.2- chizma.

2. Darajali funksiya. $y=x^{\alpha}$ ko'rinishdagi funksiya *darajali funksiya* deyiladi, bunda α — ixtiyoriy haqiqiy son.

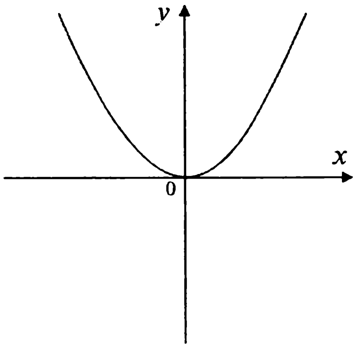
Bu funksiya uchun α ning qanday qiymatlar qabul qilishiga qarab, quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $\alpha=n$ ($n \geq 2$ — butun musbat son). Bu holda funksiyaning grafigi (1;1) nuqtadan o'tadi va koordinatalar boshida abssissalar o'qiga urinadi.

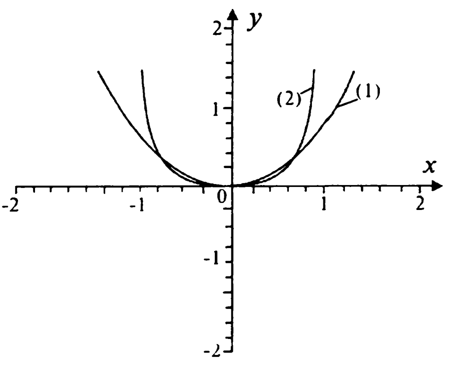
Agar $n(n=2m, m\in N)$ juft bo'lsa, u holda funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'ladi va uning grafigi ordinatalar o'qiga simmetrik joylashadi (8.3-, 8.4- chizmalar).

Agar $n(n=2m+1, m\in N)$ toq bo'lsa, funksiyaning grafigi $x=0$ nuqtada buriladi va uning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashadi (8.5-, 8.6- chizmalar).

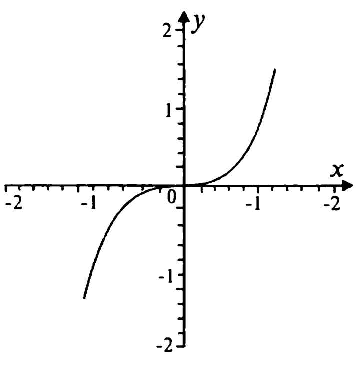
b) $\alpha=-n$ ($n\in N$). Bu holda funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi, uning grafigi (1; 1) nuqtadan o'tadi.



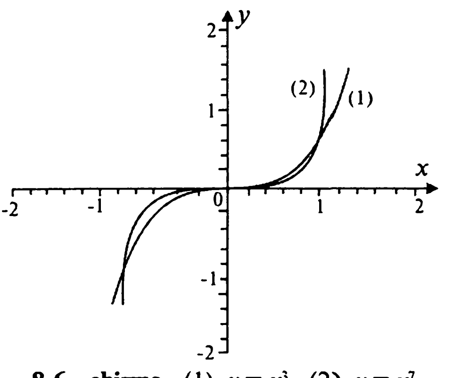
8.3- chizma. $y=x^{2m}$, $m\in N$.



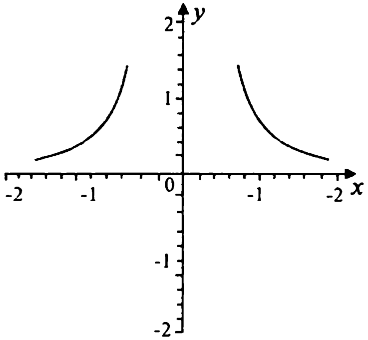
8.4- chizma. (1) $y=x^2$, (2) $y=x^4$.



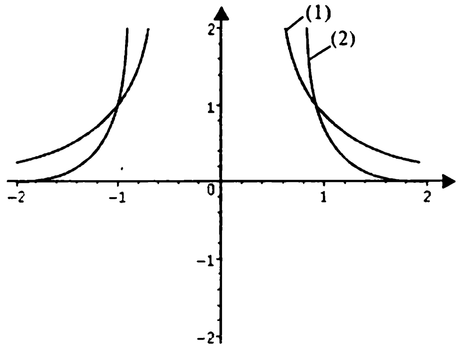
8.5- chizma. $y=x^{2m+1}$, $m\in N$.



8.6- chizma. (1) $y=x^3$, (2) $y=x^7$.



8.7- chizma. $y = \frac{1}{x^{2m}}, m \in N$.



8.8- chizma. (1) $y = \frac{1}{x^4}$, (2) $y = \frac{1}{x^8}$.

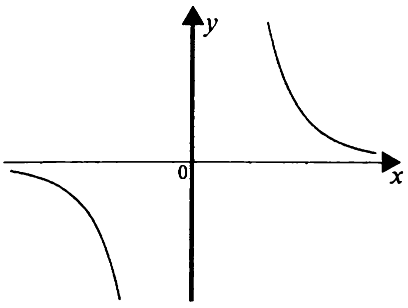
Agar $n(n=-2m,\ m\in N)$ juft bo'lsa, funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (8.7-, 8.8- chizmalar).

Agar $n(n=2m+1,\ m\in N)$ toq bo'lsa, funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi (8.9-, 8.10- chizmalar).

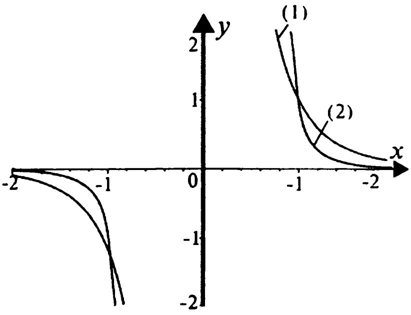
d) $\alpha = r$ $(r = \frac{p}{q}$, p, q — natural va o'zaro tub sonlar). Bu holda hamma funksiyalar koordinata boshida nolga aylanadi va ularning grafiklari (1; 1) nuqtadan o'tadi.

$y = \sqrt[q]{x^p}$ funksiyaning grafigi p va q larga bog'liq bo'ladi. Bu funksiya uchun quyidagi hollarni qaraymiz:

1⁰- hol. p — juft $(p = 2n,\ n \in N)$, q — toq $(q = 2n+1,\ n \in N)$ bo'lsin. U holda $y = \sqrt[q]{x^p}$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'ladi.



8.9- chizma. $y = \frac{1}{x^{2m+1}}$, $m \in N$.

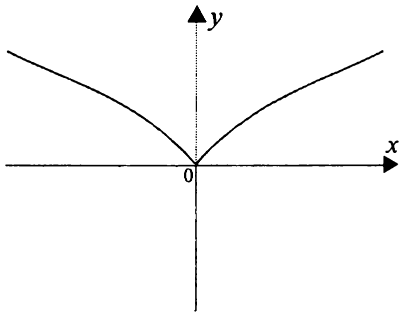


8.10- chizma. (1) $y = \frac{1}{x^3}$, (2) $y = \frac{1}{x^7}$.

Bu funksiya juft bo‘ladi: $y = \sqrt[q]{(-x)^p} = \sqrt[q]{x^p}$, uning grafigi Oy o‘qiga nisbatan simmetrik joylashadi, u $[0;+\infty)$ da monoton o‘suvchi va $[0;+\infty)$ oraliqdagi ixtiyoriy x lar uchun $y = \sqrt[q]{x^p} \geq 0$ bo‘ladi.

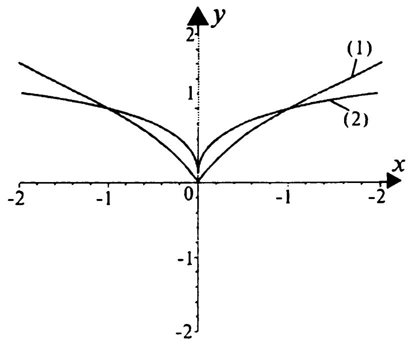
Demak, $y = \sqrt[q]{x^p}$ funksiyaning grafigi abssissalar o‘qining yuqorisida joylashib, $O(0; 0)$ va $(1; 1)$ nuqtalardan o‘tadi.

$y = \sqrt[q]{x^p}$ funksiyaning grafigi $0 < \frac{p}{q} < 1$ bo‘lganda $[0;+\infty)$ oraliqda botiq, $\frac{p}{q} > 1$ bo‘lganda esa qavariq bo‘ladi. $0 < \frac{p}{q} < 1$ shartda funksiyaning grafigi $(0;1)$ oraliqda $y=x$ bissektrisadan yuqorida joylashadi, $(1;+\infty)$ oraliqda esa bissektrisadan pastda joylashadi (8.11-, 8.12- chizmalar).



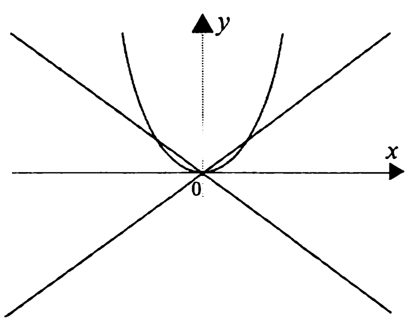
8.11- chizma.

$y = \sqrt[q]{x^q}$, $p=2m$, $q=2m+1$, $m \in N$, $0< \frac{p}{q} < 1$.



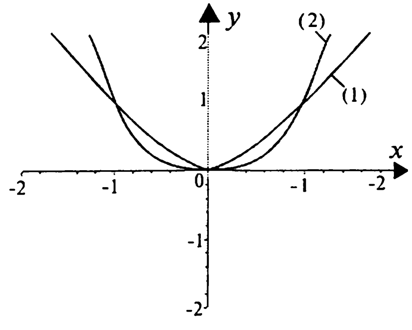
8.12- chizma.

(1) $y = \sqrt[3]{x^2}$, (2) $y=\sqrt[5]{x^2}$.



8.13- chizma.

$y = \sqrt[q]{x^p}$, $p = 2m$, $q=2m+1$, $m \in N$.

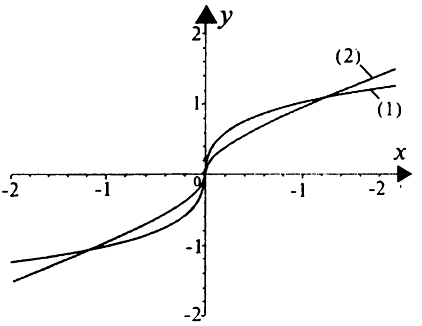


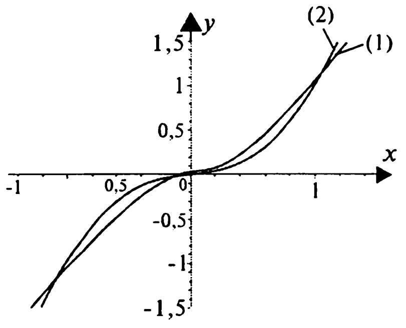
8.14- chizma.

(1) $y = \sqrt[3]{x^4}$, (2) $y=\sqrt[3]{x^8}$.

Agar $\frac{p}{q} > 1$ bo'lsa (0;1) oraliqda funksiyaning grafigi $y=x$ bissektrisadan pastda; $(1;+\infty)$ oraliqda esa yuqorida joylashgan bo'ladi (8.13-, 8.14 - chizmalar).

2- hol. p va q — toq bo'lsin ($p=2m+1$, $q=2n+1$, $m,n \in N$). U holda $y=\sqrt[q]{x^p}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,+\infty)$ dan iborat va toq funksiya bo'ladi. Haqiqatan ham, $y=\sqrt[q]{(-x)^p}=-\sqrt[q]{x^p}$. Bu holda funksiya simmetrik joylashgan bo'lib, (0;0) va (1;1) nuqtalardan o'tadi. Bu funksiya$(-\infty,+\infty)$ da monoton o'sadi. $0<\frac{p}{q}<1$ bo'lganda funksiyaning grafigi $(0;+\infty)$ oraliqda botiq, $\frac{p}{q}>1$ bo'lganda esa funksiya grafigi qavariq bo'ladi (8.15-, 8.16 - chizmalar).

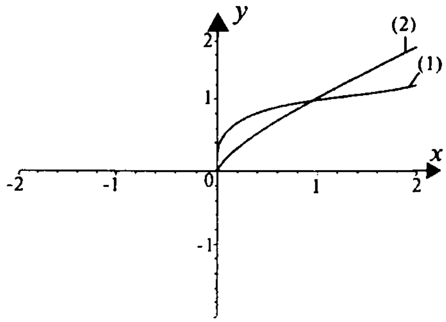




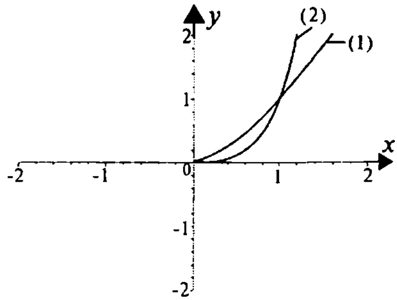
8.15- chizma. (1) $y=\sqrt[3]{x}$, (2) $y=\sqrt[5]{x^3}$. **8.16- chizma.** (1) $y=\sqrt[3]{x^5}$, (2) $y=\sqrt[3]{x^7}$.

3- hol. p — toq, q — juft bo'lsin. $y=\sqrt[q]{x^p}$ funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda aniqlangan, monoton o'sadi, $[0;+\infty)$ oraliqdagi barcha x larda $y=x^{\frac{p}{q}} \geq 0$ bo'ladi. Shuning uchun uning grafigi abssissalar o'qining yuqorisida joylashadi. Funksiyaning grafigi (0;0) va (1;1) nuqtalardan o'tadi. $0<\frac{p}{q}<1$ bo'lganda funksiyaning grafigi $[0;+\infty)$ oraliqda botiq (8.17 - chizma),

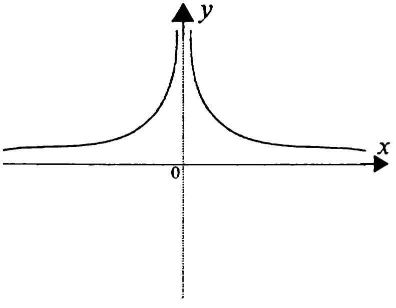
$\frac{p}{q}>1$ bo'lganda esa funksiya grafigi qavariq bo'ladi (8.18- chizma).



8.17- chizma. (1) $y=\sqrt[4]{x}$, (2) $y=\sqrt[4]{x^3}$.

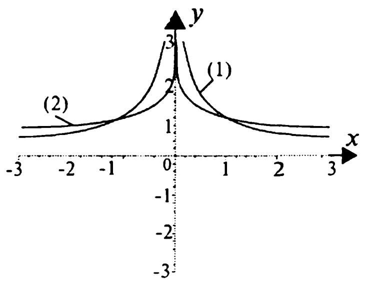


8.18- chizma. (1) $y=\sqrt{x^3}$, (2) $y=\sqrt[4]{x^5}$.



8.19- chizma.

$y=x^{-\frac{p}{q}}$, p — juft, q — toq.



8.20- chizma.

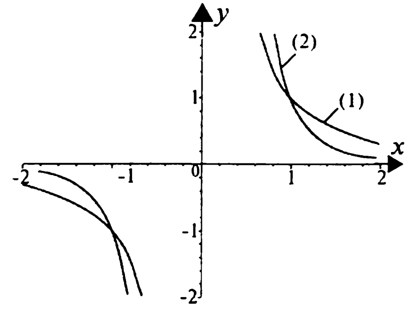
(1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$, (2) $y=x^{-\frac{2}{5}}$.

2) $\alpha = r = -\frac{p}{q}$ (p va q — o'zaro tub va natural sonlar) bo'lsin.

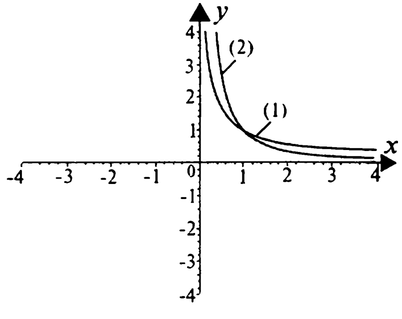
Bu holda $y=x^{-\frac{p}{q}}$ darajali $y=\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$ funksiyani ko'rinishda yozish mumkin. Ikki holni tahlil qilamiz.

1-hol. p — juft, q — toq bo'lsin. Bu holda funksiya $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ oraliqlarda aniqlangan va juft funksiya bo'ladi. Shuning uchun uning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi. $y=x^{-\frac{p}{q}}$ funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda kamayuvchi, $(-\infty;0)$ oraliqda esa o'suvchi, $(-\infty;0)$ va $(0;+\infty)$ oraliqlardagi barcha x lar uchun $y=x^{-\frac{p}{q}}>0$ bo'ladi. Shu sababli uning grafigi abssissalar o'qining yuqorisida joylashadi va (1; 1), (—1;1) nuqtalardan o'tadi. $x=0$ va $y=0$ to'g'ri chiziqlar funksiya grafigining mos ravishda vertikal va gorizontal asimptotalari bo'ladi (8.19-, 8.20 - chizmalar).

2-hol. p va q — toq bo‘lsin. Funksiya $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ sohada aniqlangan. Bu sohada funksiya toq bo‘ladi. Shuning uchun uning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Funksiya bu sohada kamayuvchi. $x=0$ va $y=0$ to‘g‘ri chiziqlar, mos ravishda, funksiyaning grafiklari uchun gorizontal va vertikal asimptotalar bo‘ladi (8.21- chizma).



8.21- chizma. (1) $y = x^{-\frac{5}{3}}$, (2) $y = x^{-\frac{7}{3}}$.



8.22- chizma. (1) $y = x^{-\frac{3}{4}}$, (2) $y = x^{-\frac{3}{2}}$.

3-hol. p — toq, q — juft bo‘lsin. $y = x^{-\frac{p}{q}}$ funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda aniqlangan va shu oraliqda kamayuvchi bo‘ladi. $x=0$ va $y=0$ to‘g‘ri chiziqlar funksiyaning grafigi uchun mos ravishda gorizontal va vertikal asimptotalar bo‘ladi (8.22- chizma).

3. Ko‘rsatkichli funksiya.

Ta‘rif. *Ko‘rsatkichli* yoki *eksponensial* (lotincha „eksponent“ - „ko‘rsatkich“) *funksiya* deb, $y = a^x$ ko‘rinishdagi funksiyaga aytiladi, bunda $a>0$, $a\neq1$, x — erkli o‘zgaruvchi.

Ko‘rsatkichli funksiya fan va texnikada muhim ahamiyatga ega. Tabiatdagi ko‘p hodisalarni $y=a^x$ ko‘rsatkichli funksiya yordamida ifoda etish mumkin.

Misollar.

1. Xalq turmush darajasining muhim ko‘rsatkichlarini aholining daromadlari, real daromad fondlari belgilaydi. Ma‘lum ma‘noda, bu xarakteristikalarni ko‘rsatkichli funksiya yordamida ifodalash mumkin. Yilning oxirida aholi jon boshiga to‘g‘ri keladigan real daromad

$$D=D_t\,(1+q)^t$$

formula yordamida ifoda etiladi, bunda D — hisobot yilida aholi jon boshiga to'g'ri keladigan real daromad, t — vaqt, D_t — har bir kishiga t yilda to'g'ri keladigan real daromad, q — aholi jon boshiga to'g'ri keladigan yillik reja daromadining ko'payishi.

2. Tirik jonzotning ko'payish populatsiyalari dinamikasi jarayoni $g(t) = g_0 e^{ct}$ ko'rsatkichli funksiya yordamida ifodalanadi. (g_0 — boshlang'ich kattalik, c — doimiy son).

3. Ehtimollik nazariyasida $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ ko'rsatkichli funksiya muhim ahamiyatga ega.

Ko'rsatkichli funksiya quyidagi xossalarga ega.

1^0. Ko'rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat: $D(a^x) = R^1$.

2^0. Ko'rsatkichli funksiyaning o'zgarish sohasi: $E(f) = (0; +\infty) = R^1_+$ dan iborat.

3^0. $a > 1$ bo'lganda a^x funksiya aniqlanish sohasida o'suvchi, $0 < a < 1$ bo'lganda esa kamayuvchidir.

4^0. $a > 1$ bo'lsin. U holda $x > 0$ bo'lganda $a^x > 1$, $x < 0$ bo'lganda $a^x < 1$ bo'ladi.

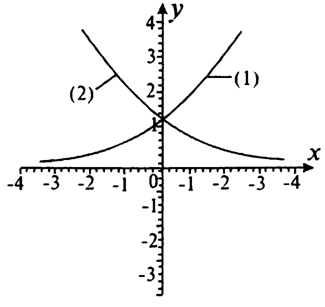
5^0. $0 < a < 1$ bo'lsin. U holda $x > 0$ bo'lganda $a^x < 1$, $x < 0$ bo'lganda $a^x > 1$ bo'ladi.

6^0. $a > 1$ bo'lsin. U holda $x \to +\infty$ da $a^x \to +\infty$, $x \to -\infty$ da esa $a^x \to 0$ bo'ladi.

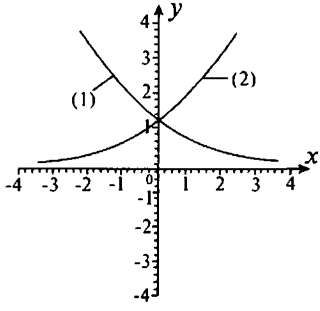
7^0. $0 < a < 1$ bo'lsin. U holda $x \to +\infty$ da $a^x \to 0$, $x \to -\infty$ da esa $a^x \to -\infty$ bo'ladi.

8^0. $y = 0$ to'g'ri chiziq $y = a^x$ funksiya grafigining gorizontal asimptotasi bo'ladi.

9^0. Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi aniqlanish sohasida qavariq bo'ladi. 8.23, 8.24-chizmalarda $y = a^x$, $y = a^{-x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) funksiyalarning grafiklari keltirilgan.



8.23- chizma. $y = a^x$, (1) $a > 1$; (2) $0 < a < 1$.



8.24- chizma. $y = a^{-x}$, (1) $a > 1$; (2) $0 < a < 1$.

4. Logarifmik funksiya.

1 - ta'rif. $y=a^x$ ko'rsatkichli funksiyaga teskari bo'lgan funksiya a *asosli logarifmik funksiya* deyiladi va $y=\log_a x$ kabi belgilanadi ($a>0$, $a\neq 1$).

Ma'lumki, $y=\log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ bo'lib, bunda $a^{\log_a x}=x$.

Nol va manfiy sonlarning logarifmlari mavjud emas.

Logarifmik funksiya quyidagi xossalarga ega.

1^0. Uning aniqlanish sohasi barcha musbat sonlar to'plamidan iborat: $D(\log_a)\ x = R^1_+ = (0;+\infty)$.

2^0. Uning qiymatlar sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat: $E(\log_a)=R^1$.

3^0. Funksiya $a>1$ bo'lganda, o'suvchi, $0<a<1$ bo'lganda esa kamayuvchidir.

4^0. $a>1$ bo'lsin. U holda $x>1$ bo'lganda $\log_a x>0$ tengsizlik, $0<x<1$ bo'lganda esa $\log_a x<0$ tengsizlik o'rinlidir (ya'ni $x>1$ bo'lsa, funksiyaning grafigi Ox o'qidan yuqorida, $0<x<1$ bo'lsa, aksincha, Ox o'qidan pastda joylashadi).

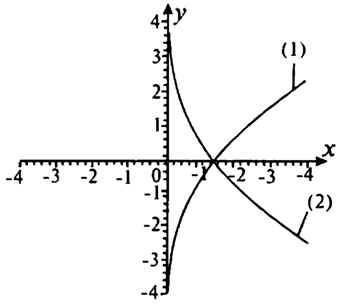
5^0. $0<a<1$ bo'lsin. U holda $x>1$ bo'lganda, $\log_a x<0$ tengsizlik, $0<x<1$ bo'lganda esa $\log_a x>0$ tengsizlik o'rinlidir (ya'ni $x>1$ bo'lsa, funksiyaning grafigi Ox o'qidan yuqorida joylashadi).

6^0. Agar $a>1$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

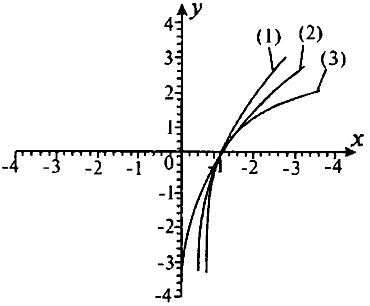
7^0. Agar $0<a<1$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=+\infty$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

8^0. Agar $a>1$ bo'lsa, funksiyaning grafigi botiq, $0<x<1$ bo'lganda esa qavariq bo'ladi.

Logarifmik funksiyaning grafigi (1; 0) nuqtadan o'tib, ordinatalar o'qiga asimptotik ravishda yaqinlashadi. $x=0$ to'g'ri chiziq (Oy o'qi) funksiya grafigiga vertikal asimptota bo'ladi (8.25- chizma).



8.25- chizma.
$y=\log_a x$, (1) $a>1$, (2) $0<a<1$.



8.26- chizma. (1) $y=\ln x$,
(2) $y=\log_3 x$, (3) $y=\lg x$.

$y=\log_a x$ logarifmik funksiya $y=a^x$ ko'rsatkichli funksiyaga teskari bo'lganligidan uning grafigi ko'rsatkichli funksiyaning grafigiga (ular bir xil asosli bo'lganda) birinchi va uchinchi chorak bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

2- ta'rif. Asosi 10 bo'lgan logarifm *o'nli logarifm* deyiladi va u „lg" belgisi orqali yoziladi, ya'ni $y=\log_{10} x=\lg x$ (8.26- chizma).

3- ta'rif. Asosi „$e\approx 2,71$" bo'lgan logarifm natural logarifm deyiladi va u „ln" belgisi orqali yoziladi, ya'ni $y=\log_e x=\ln x$ (8.26- chizma).

5. Trigonometrik funksiyalar

1. Sinus, kosinus, tangens va kotangenslarning ta'riflari.

1- ta'rif. To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchak qarshisida yotgan katetning gipotenuzaga nisbati shu o'tkir burchakning *sinusi* deyiladi va u $\sin\alpha = \frac{CB}{AB}$ kabi belgilanadi (8.27 - chizma).

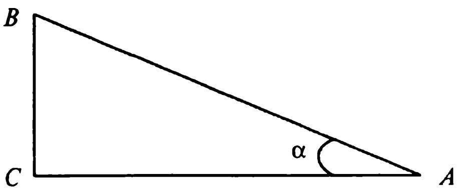
Ixtiyoriy burchakning sinusi quyidagicha aniqlanadi: markazi koordinatalar boshida bo'lgan ixtiyoriy radiusli aylana olamiz, bunda OA — boshlang'ich radius, O nuqta koordinatalar boshi, A nuqta esa aylananing Ox o'qining musbat yo'nalishida yotgan nuqtasi (8.28- chizma). Agar boshlang'ich radius OA ni O nuqta atrofida soat strelkasiga teskari yo'nalishda aylantirsak, u holda *musbat burchakka*, soat strelkasi bo'yicha aylantirsak esa, manfiy burchakka ega bo'lamiz (8.29- chizm).

Bu aylantirish natijasida A nuqta koordinatalari x, y bo'lgan B nuqta holatiga keladi. α burchakning sinusi deb, B nuqta ordinatasining aylana radiusiga nisbatiga aytiladi va u $\sin\alpha = \frac{y}{OB}$ kabi belgilanadi.

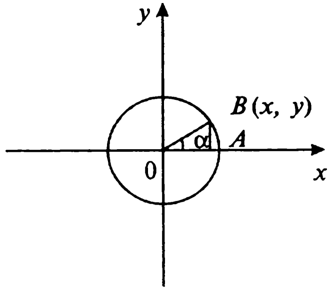
2- ta'rif. To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati, shu o'tkir burchakning kosinusi deyiladi va $\alpha = \frac{CA}{AB}$ u kabi belgilanadi (8.27- chizma).

α burchakning kosinusi deb, B nuqta abssissasining aylana radiusiga nisbatiga aytiladi va u $\sin\alpha = \frac{x}{OB}$ kabi belgilanadi (8.28 - chizma).

3- ta'rif. To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchak qarshisida yotgan katetning burchakka yopishgan katetga nisbati shu o'tkir burchakning tangensi deyiladi va u $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$ kabi belgilanadi (8.27-chizma).



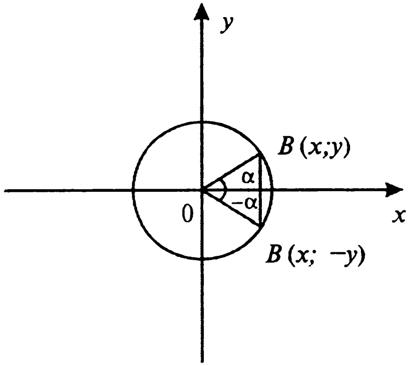
8.27- chizma.



8.28- chizma.

Ixtiyoriy α burchak tangensi deb, B nuqta ordinatasining uning abssissasiga nisbatiga aytiladi va u $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ kabi belgilanadi (8.28- chizma).

4-ta'rif. To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchakka yopishgan katetning burchak qarshisidagi katetga nisbati shu o'tkir burchakning *kotangensi* deyiladi va u $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$ kabi belgilanadi (8.27- chizma).



8.29- chizma.

Ixtiyoriy α burchak kotangensi deb, B nuqta abssissasining uning ordinatasiga nisbatiga aytiladi va u $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ kabi belgilanadi (8.28- chizma).

2) $y = \sin x$ **funksiya.** Sinus funksiya quyidagi xossalarga ega.

1^0. Uning aniqlanish sohasi sonlar o'qi, qiymatlari sohasi esa $[-1;1]$ kesmadan iborat: $D(\sin)=R$, $E(\sin)=[-1;1]$.

2^0. Sinus toq funksiya: barcha $x \in R$ lar uchun

$$y(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -y(x).$$

3^0. Sinus davriy funksiya: barcha $x \in R$ lar uchun $\sin(x+2\pi)=\sin x$ (2π— sinusning eng kichik musbat davri).

4^0. $x=\pi n$ nuqtalar, bunda $n \in Z$, sinusning nollari: $\sin x=0$

5^0. $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$ da sinusning qiymati musbat, $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$ da esa sinusning qiymatlari manfiy, bunda $n \in Z$.

6⁰. $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ kesmada funksiya —1 dan 1 gacha o'sadi, bunda $n\in Z$.

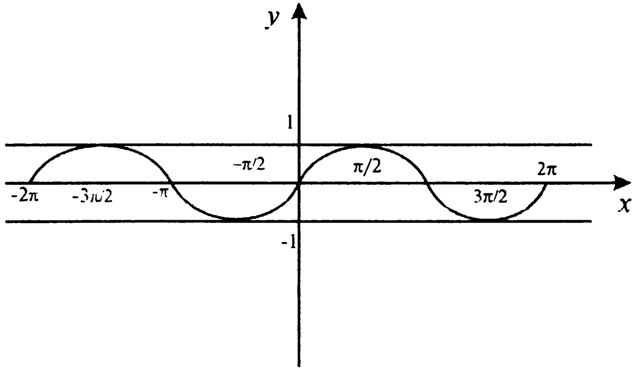
7⁰. $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$ kesmada funksiya 1 dan —1 gacha kamayadi, bunda $n\in Z$.

8⁰. Sinus funksiya uchun $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ nuqtalar maksimum nuqtalari, bunda $n\in Z$, $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ nuqtalar esa minimum nuqtalari bo'ladi, bunda $n\in Z$.

9⁰. Sinus funksiya $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ nuqtalarda 1 ga teng eng katta, $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ nuqtalarda esa —1 ga teng eng kichik qiymat qabul qiladi.

10⁰. $[0;\pi)$ da funksiya grafigi botiq, $[\pi;2\pi]$ da esa qavariq bo'ladi. $x=\pi n,\ n\in Z$ nuqtalar egilish nuqtalari.

$y=\sin x$ egri chiziq *sinusoida* deyiladi (8.30- chizma).



8.30- chizma. $y=\sin x$.

3) $y=\cos x$ **funksiya.** Kosinus funksiya quyidagi xossalarga ega.

1⁰. $y=\cos x$ funksiyaning uning aniqlanish sohasi sonlar o'qi, qiymatlar sohasi esa $[-1;1]$ kesmadan iborat: $D(\cos)=R^1$, $E(\cos)=[-1;1]$.

2⁰. Kosinus juft funksiya: barcha $x\neq R$ lar uchun

$$y(-x)=\cos(-x)=\cos x=y(x).$$

3^0. Kosinus davri 2π ga teng bo‘lgan davriy funksiya: barcha $x\in X$ lar uchun $\cos(x+2\pi)=\cos x$ (2π — kosinusning eng kichik musbat davri).

4^0. $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ nuqtalar kosinusning nollari, bunda $n\in Z$; $\cos x_1=0$.

5^0. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ intervallarda kosinusning qiymatlari musbat bo‘ladi, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ intervallarda esa kosinusning qiymatlari manfiy bo‘ladi, bunda $n\in Z$.

6^0. $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$ kesmalarda funksiya 1 dan —1 gacha kamayadi, bunda $n\in Z$.

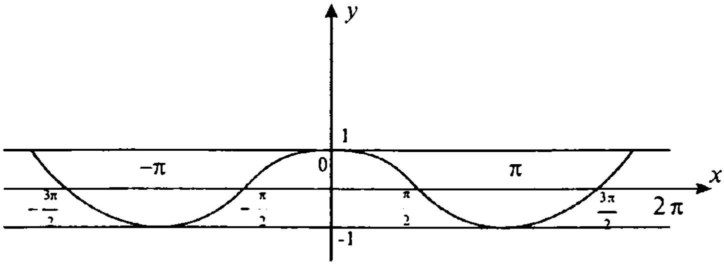
7^0. $[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$ kesmalarda funksiya —1 dan 1 gacha o‘sadi, bunda $n\in Z$

8^0. Kosinus uchun $x=2\pi n$, $n\in Z$ nuqtalar maksimum nuqtalari, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ nuqtalar esa minimum nuqtalaridan iborat.

9^0. Kosinus funksiya $x=2\pi n$, $n\in Z$ nuqtalarda 1 ga teng eng katta, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ nuqtalarda esa — 1 ga teng eng kichik qiymat qabul qiladi.

10^0. $\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ da funksiya grafigi botiq, $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ da esa funksiya grafigi qavariq bo‘ladi. $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n\in Z$. nuqtalar uning egilish nuqtalaridir.

y=cos x egri chiziq *kosinusoida* deyiladi (8.31- chizma).



8.31- chizma. y=cos x.

4) y=tg x **funksiya.** Tangens funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz.

1^0. Tangensning aniqlanish sohasi $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ ko‘rinishdagi sonlardan boshqa barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan, qiymatlari sohasi esa son o‘qidan iborat bo‘ladi.

2^0. Tangens toq funksiya: barcha $x \in D(\mathrm{tg})$ lar uchun $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ bo‘ladi.

3^0. Tangens davriy funksiya, uning davri π ga teng: barcha $x \in D(\mathrm{tg})$ lar uchun $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}\, x$ (π — tangensning eng kichik musbat davri).

4^0. Tangensning nollari $x_n = \pi n$, $n \in Z$ nuqtalardan iborat: $\mathrm{tg} x_n = 0$.

5^0. $\left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ oraliqdagi barcha x lar uchun tangens musbat ($\mathrm{tg}\, x > 0$); $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$ oraliqdagi barcha x lar uchun tangens manfiy ($\mathrm{tg} x < 0$) qiymat qabul qiladi, bunda $n \in Z$

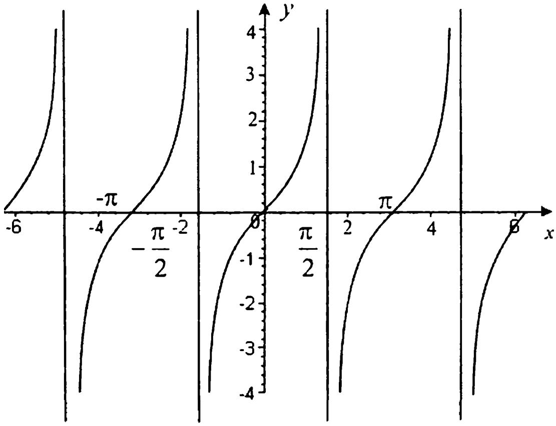
6^0. Tangens $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ oraliqlarda o‘sadi.

7^0. $y = \mathrm{tg}\, x$ funksiyaning ekstremum qiymatlari mavjud emas.

8^0. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda funksiya grafigi qavariq, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ oraliqda esa botiq. $x_n = n\pi$ nuqtalar funksiya grafigining egilish nuqtalari bo‘ladi, bunda $n \in Z$.

9^0. $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n \in Z$ to‘g‘ri chiziqlar funksiya grafigining vertikal asimptotalari bo‘ladi.

$y = \mathrm{tg}\, x$ egri chiziq *tangensoida* deb ataladi (8.32- chizma).



8.32- chizma. $y = \mathrm{tg}\, x$.

5) y=ctg x **funksiya.** Kotangens funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz.

1^0. Kotangensning aniqlanish sohasi πn, $n \in Z$ nuqtalardan tashqari barcha haqiqiy sonlar to'plami, qiymatlar sohasi esa son o'qidan iborat bo'ladi.

2^0. Kotangens toq funksiya: barcha $x \in D$(ctg) lar uchun ctg$(-x)=$ $=-$ctg x bo'ladi.

3^0. Kotangens funksiya davriy, uning davri π ga teng, barcha $x \in D$(ctg) lar uchun ctg$(x+\pi)=$ctg x (π — kotangensning eng kichik musbat davridir).

4^0. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ nuqtalar kotangensning nollari bo'ladi: ctg $x_1=0$.

5^0. $\left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ oraliqlardagi barcha x lar uchun kotangens musbat (ctg $x > 0$), $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$ oraliqlarda esa kotangens (ctg $x < 0$) manfiy qiymat qabul qiladi.

6^0. Kotangens $(\pi n, \pi+n\pi)$, $n \in Z$ oraliqlarda kamayadi.

7^0. y=ctg x funksiyaning ekstremum qiymatlari mavjud emas.

8^0. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda funksiya grafigi qavariq, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ oraliqda esa botiq. $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n \in Z$ nuqtalar funksiya grafigining egilish nuqtalari bo'ladi.

9^0. $x=\pi n$, $n \in Z$ to'g'ri chiziqlar funksiya grafigining vertikal asimptotalari bo'ladi.

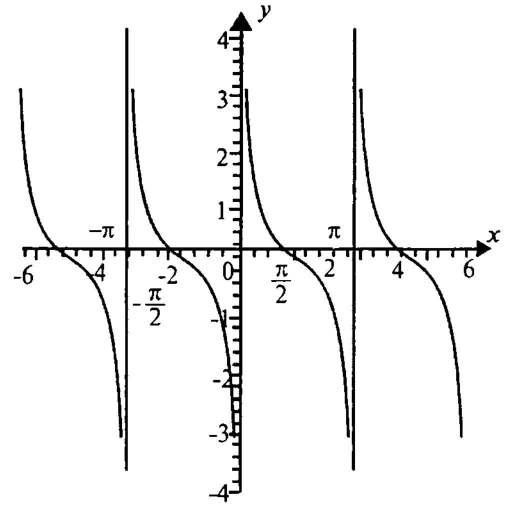
10^0. Kotangens funksiya o'z aniqlanish sohasida chegaralanmagan bo'ladi.

8.33- chizmada y=ctg x funksiyaning grafigi tasvirlangan. y=ctg x egri chiziq *kotangensoida* deyiladi.

6) y=sec x **funksiya.** $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ ko'rinishdagi funksiya *sekans funksiya* deyiladi.

Sekans funksiya quyidagi xossalarga ega.

1^0. Sekansning aniqlanish sohasi $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ ko'rinishdagi sonlardan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamidan, qiymatlar sohasi esa $E(\sec x)=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ dan iborat bo'ladi.



8.33- chizma. $y=\text{ctg}\, x$.

2^0. Sekans juft funksiya: barcha $x \in D(\sec)$ lar uchun $\sec(-x)=\sec x$ bo'ladi.

3^0. Sekans davriy funksiya, uning davri 2π ga teng: barcha $x \in D(\sec)$ lar uchun $\sec(x+2\pi)=\sec x$ (2π — sekansning eng kichik musbat davri).

4^0. Sekans funksiya argumentning birorta ham qiymatida nolga aylanmaydi: $\sec x \neq 0,\ \forall x \in D(\sec)$.

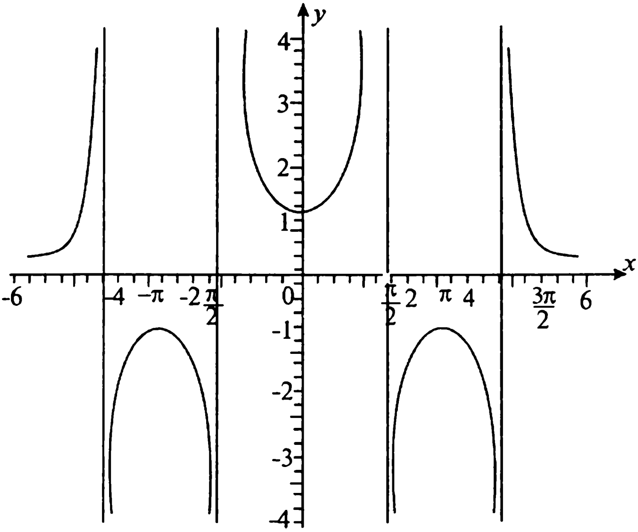
5^0. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$ oraliqlardagi barcha x lar uchun sekans musbat: $\sec x > 0$; $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$ oraliqlardagi barcha x lar uchun sekans manfiy: $\sec x < 0$ qiymatlar qabul qiladi.

6^0. $\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ va $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$ oraliqlarda sekans funksiya o'suvchi.

7^0. $\left[\pi+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ va $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$ oraliqlarda sekans funksiya kamayuvchidir.

8^0. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$ to'g'ri chiziqlar sekans funksiyaning vertikal asimptotalari bo'ladi.

8.34- chizmada $y=\sec x$ funksiyaning grafigi tasvirlangan.



8.34- chizma. y=sec x.

7) y=cosec x **funksiya.** $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ko'rinishdagi funksiya kosekans funksiya deyiladi.

Kosekans funksiya quyidagi xossalarga ega.

1^0. Kosekansning aniqlanish sohasi $x=\pi n$, $n \in Z$ ko'rinishdagi sonlardan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamidan, qiymatlar sohasi esa $E(\operatorname{cosec})=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ dan iborat bo'ladi.

2^0. Kosekans toq funksiya: barcha $x \in D(\operatorname{cosec})$ lar uchun $\operatorname{cosec}(-x)=-\operatorname{cosec} x$ bo'ladi.

3^0. Kosekans davriy funksiya, uning davri 2π ga teng: barcha $x \in D(\operatorname{cosec})$ lar uchun $\operatorname{cosec}(x+2\pi)=\operatorname{cosec} x$ (2π — kosekansning eng kichik musbat davri).

4^0. Kosekans funksiya argumentning birorta ham qiymatida nolga aylanmaydi: $\operatorname{cosec} x \neq 0$, $\forall x \in D(\operatorname{cosec})$.

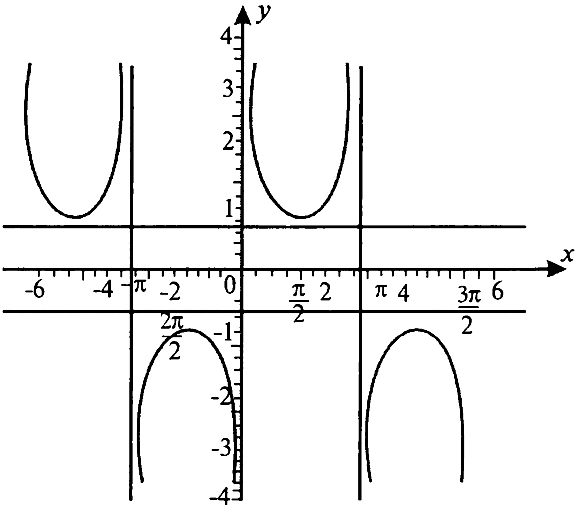
5^0. $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n \in Z$ oraliqlardagi barcha x lar uchun kosekans musbat: $\operatorname{cosec} x > 0$; $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$, $n \in Z$ oraliqlardagi barcha x lar uchun kosekans manfiy: $\operatorname{cosec} < 0$ qiymatlar qabul qiladi.

6^0. $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$ va $\left(\pi+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$ oraliqlarda kosekans funksiya o'suvchidir.

7^0. $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ va $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$ oraliqlarda kosekans funksiya kamayuvchidir.

8^0. $x=\pi n$, $n \in Z$ to'g'ri chiziqlar kosekans funksiyaning vertikal asimptotalari bo'ladi.

8.35- chizmada $y=\operatorname{cosec} x$ funksiyaning grafigi tasvirlangan.



8.35- chizma. $y=\operatorname{cosec} x$.

6. Teskari trigonometrik funksiyalar. Barcha trigonometrik funksiyalar ($y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$) davriy funksiyalar bo'lganliklari uchun ixtiyoriy trigonometrik funksiyaning bitta qiymatiga argumentning cheksiz ko'p qiymatlari mos keladi. Bu yerdan, o'z navbatida, bu funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalar ham $-\infty<x<+\infty$ da ko'p qiymatli funksiyalar bo'lishligi ko'rinadi.

Trigonometrik funksiyalar $(-\infty;+\infty)$ da monoton emas. x ning hamma haqiqiy qiymatlarida tekshirilayotgan $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ funksiyalar uchun teskari funksiya mavjud bo'lmaydi. Agar trigonometrik funksiyalarni monotonlik oraliqlarida tekshirilsa, u holda ularga teskari funksiya mavjud bo'ladi.

Ko'p qiymatli funksiyaning bir qiymatli qismi shu funksiyaning *bosh qismi* deyiladi.

Eng sodda teskari trigonometrik funksiyalar quyidagilardir: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$. Ushbu $y=\sin x$ va $y=\arcsin x$, $y=\cos x$ va $y=\arccos x$, $y=\operatorname{tg} x$ va $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ va

y=arcctg x funksiyalar o‘zaro *bir-biriga teskari funksiyalar* deyiladi. Teskari trigonometrik funksiyalaming grafigini chizishda teskari funksiyalarning xossalaridan foydalaniladi.

Teskari trigonometrik funksiyalarning xossalari va grafiklari haqida qisqacha ma’lumot keltiramiz.

1) **Arksinus funksiya.** y=Arcsin x funksiya $x \in [-1;1]$ da aniqlangan, ko’p qiymatli funksiya. Odatda bu ko’p qiymatli funksiyaning $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ga mos kelgan bitta shoxobchasi qaraladi. Bu shoxobcha Arcsin x funksiyaning *bosh qismi* deyiladi va u arcsin x kabi belgilanadi. Qolgan qiymatlari bosh qismi orqali quyidagi formula bo‘yicha topiladi:

$$\text{Arcsin}\, x = \arcsin x + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

sin x va arcsin x funksiyalar o‘zaro teskari bo‘lgani uchun

$$\sin(\arcsin x)=x, \quad -1 \le x \le 1,$$

$$\arcsin(\sin x)=x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

y=arcsin x funksiya quyidagi xossalarga ega.

1^0. y=arcsin x funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1;1]$, qiymatlari to‘plami $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmadan iborat.

2^0. y=arcsin x funksiya $[-1;1]$ kesmada uzluksiz va $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ gacha monoton o‘sadi.

3^0. y=arcsin x toq funksiya: barcha $x \in [-1;1]$ lar uchun arcsin $(-x) = -\arcsin x$ bo‘ladi.

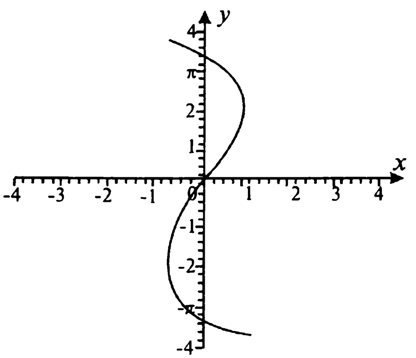
4^0. y=arcsin x funksiyaning grafigi $[-1;\ 0]$ da botiq, $[0;\ 1]$ da esa qavariq, $(0;0)$ nuqtada egilishga ega bo‘ladi.

y=arcsin x funksiyaning grafigi quyidagi ikki usuldan biri orqali hosil qilinadi.

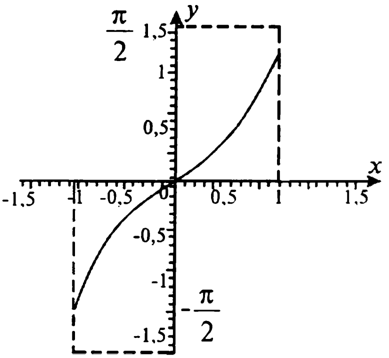
1) y=arcsin x dan x=sin y bo‘lgani uchun Oy o‘qi bo‘ylab sinusoida chiziladi va $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ kesmaga mos kelgan yoy ajratiladi (8.36- chizma).

2) y=arcsin x funksiyaning $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ kesmaga mos kelgan grafigi chizilib, bu grafik y=x bissektrisaga nisbatan simmetrik akslantiriladi.

y=Arcsin x va y=arcsin x funksiyalarning grafiklari 8.36-, 8.37 - chizmalarda tasvirlangan.



8.36- chizma. y =Arcsin x.



8.37- chizma. y =arcsin x.

2) Arkkosinus funksiya. y =Arccos x funksiya $x \in [-1;1]$ da aniqlangan, ko'p qiymatli funksiya. Bu funksiyaning $y \in [0;\pi]$ ga mos kelgan shoxobchasi y =Arccos x funksiyaning *bosh qismi* deyiladi va u arccos x kabi belgilanadi. y =Arccos x ning boshqa qiymatlari bosh qismi orqali quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$\text{Arccos}\, x = 2k\pi - \arccos x, \quad k \in Z$$

cos x va arccos x funksiyalar o'zaro teskari bo'lgani uchun $\cos(\arccos x)=x$, $|x| \le 1$; $\arccos(\cos x)=x$, $0 \le x \le \pi$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

y=arccos x funksiya quyidagi xossalarga ega:

1^0. y=arccos x funksiya $[-1;1]$ kesmada aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari to'plami $[0;\pi]$ kesmadan iborat.

2^0. y=arccos x funksiya $[-1;1]$ kesmada uzluksiz va π dan 0 gacha monoton kamayadi.

3^0. y=arccos x funksiya uchun $\arccos(-x)=\pi - \arccos x$ tenglik o'rinli bo'ladi.

4^0. y=arccos x funksiyaning grafigi $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nuqtadan o'tadi va bu nuqta funksiya grafigi uchun egilish nuqtasi hamda grafikning simmetriya markazi ham bo'ladi.

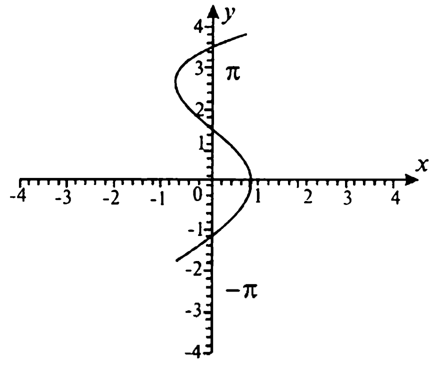
5^0. $[-1; 0]$ da funksiya grafigi botiq, $[0; 1]$ da esa qavariq bo'ladi.

y=arccos x funksiyaning grafigini quyidagi ikki usul orqali chizish mumkin:

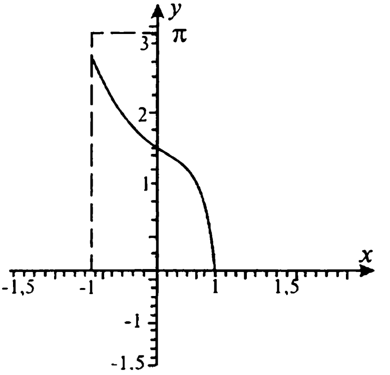
1) y=arccos x dan x=cos y bo'lgani uchun Oy o'qi bo'ylab kosinusoida chiziladi va $0 \le y \le \pi$ ga mos kelgan yoy ajratiladi (8.38 - chizma).

2) y=cos x funksiyaning $0 \le y \le \pi$ ga mos kelgan grafigi chizilib, bu grafik $y = x$ bissektrisaga nisbatan simmetrik akslantiriladi.

y=Arccos x va y=arccos x funksiyalarning grafiklari 8.38-, 8.39-chizmalarda tasvirlangan.



8.38- chizma. y=Arccos x.



8.39- chizma. y=arccos x.

3) Arktangens funksiya. y=Arctg x funksiya $x \in (-\infty;+\infty)$ da aniqlangan, ko'p qiymatli. Bu funksiyaning $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ga mos kelgan shoxobchasi y=Arctg x funksiyaning bosh qismi deyiladi va u arctg x kabi belgilanadi. y=Arctg x funksiyaning boshqa qolgan qiymatlari bosh qismi orqali quyidagi formuladan topiladi:

$$\text{Arctg}\, x = \text{arctg}\, x + k\pi, \quad k \in Z.$$

tg x va arctg x funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'lgani uchun

$$\text{tg}(\text{arctg}\, x) = x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\text{arctg}(\text{tg}\, x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

y=arctg x funksiya quyidagi xossalarga ega:

1^0. y=arctg x funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari to'plami $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervaldan iborat.

2^0. $y=\operatorname{arctg} x$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda uzluksiz va $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ gacha monoton o‘sadi.

3^0. $y=\operatorname{arctg} x$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da toq funksiya: barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ lar uchun $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$ bo‘ladi.

4^0. $y=\operatorname{arctg} x$ funksiyaning grafigi $O(0;0)$ nuqtadan o‘tadi va bu nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi hamda grafikning simmetriya markazi bo‘ladi.

5^0. $y=\operatorname{arctg} x$ funksiya grafigi $(-\infty;0)$ da botiq, $(0;+\infty)$ da qavariq bo‘ladi.

$y=\operatorname{Arctg} x$ funksiyaning grafigi uchun $y=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$ to‘g‘ri chiziqlar gorizontal asimptotalar bo‘ladi.

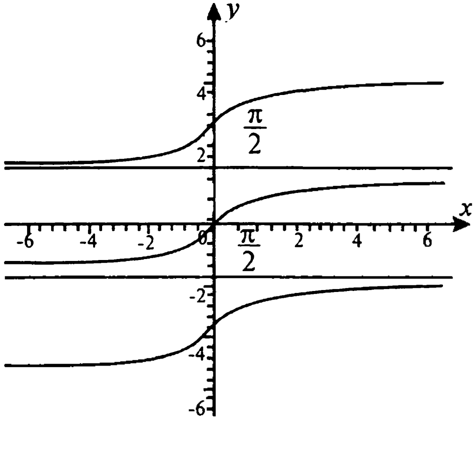
$y=\operatorname{arctg} x$ funksiyaning ham grafigini ikki xil usulda chizish mumkin:

1) $y=\operatorname{arctg} x$ dan $x=\operatorname{tg} y$ bo‘lgani uchun Oy o‘qi bo‘ylab tangensoida chiziladi.

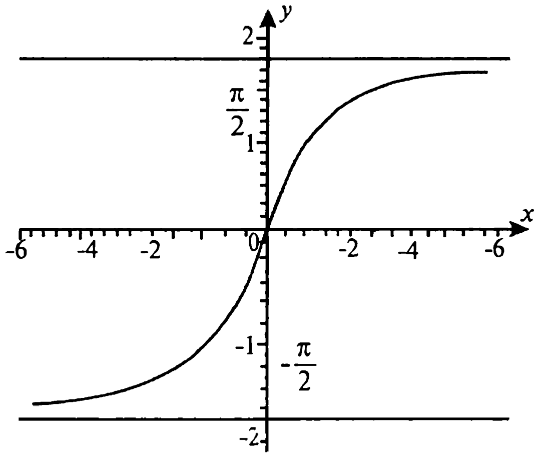
2) $y=\operatorname{tg} x$ funksiyaning $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ga mos kelgan grafigi chizilib va bu grafik $y=x$ bissektrisaga nisbatan simmetrik akslantirilib, $y=\operatorname{arctg} x$ funksiya grafigi hosil qilinadi.

$y=\operatorname{Arctg} x$ va $y=\operatorname{arctg} x$ funksiyalarning grafiklari 8.40-, 8.41 - chizmalarda tasvirlangan.

4) Arkkotangens funksiya. $y=\operatorname{Arcctg} x$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan, ko‘p qiymatli. Bu funksiyaning $y\in(0;\pi)$ ga mos kelgan shoxobchasi $y=\operatorname{Arcctg} x$ ning *bosh qismi* deyiladi va u $\operatorname{arcctg} x$ kabi belgilanadi. $y=\operatorname{Arcctg} x$ ning boshqa qolgan qiymatlari bosh



8.40- chizma. $y=\operatorname{Arctg} x$.



8.41- chizma. y=arctg x.

qismi orqali quyidagi formuladan topiladi:

$$\mathrm{Arcctg}\, x = \mathrm{arcctg}\, x + k\pi, \quad k \in Z.$$

ctg x va arcctg x funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalar bo‘lgani uchun ctg(arcctg)=x, $-\infty < x < +\infty$, arcctg(ctg x)=x, $0 < x < \pi$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

y=arcctg x funksiya quyidagi xossalarga ega:

1^0. y=arcctg x funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo’lib, uning qiymatlari to’plami $(0;\pi)$ dan iborat.

2^0. y=arcctg x funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda uzluksiz va π dan 0 gacha monoton kamayadi.

3^0. y=arcctg x funksiya uchun arcctg $(-x)=\pi-$arcctg x tenglik o’rinli b’ladi.

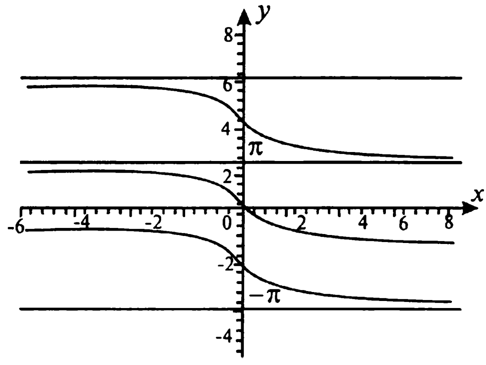
4^0. y=arcctg x funksiyaning grafigi $O\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nuqtadan o’tadi va bu nuqta funksiya grafigi uchun egilish nuqtasi hamda grafikning simmetriya markazi bo’ladi.

5^0. y=arcctg x funksiyaning grafigi $(-\infty;0)$ da qavariq, $(0;+\infty)$ oraliqda esa botiq bo’ladi.

y=Arcctg x funksiyaning grafiga uchun $y=\pm k\pi$, $(k\in Z)$ to’g’ri chiziqlar gorizontal asimptotalar bo’ladi.

y=arcctg x funksiyaning grafigini quyidagi ikki xil usulda chizish mumkin:

1) y=arcctg x dan x=ctg$y$ bo’lgani uchun Oy o’qi bo’ylab



8.42- chizma. $y=\mathrm{Arcctg}\,x$.

tangensioda chiziladi (8.42- chizma).

2) $y=\mathrm{ctg}x$ $(0<x<\pi)$ funksiyaning grafigi $y=x$ bissektrisaga nisbatan simmetrik akslantirilib, $y=\mathrm{arcctg}\,x$ funksiyaning grafigi hosil qilinadi.

$y=\mathrm{Arcctg}\,x$ va $y=\mathrm{arcctg}\,x$ funksiyalarning grafiklari 8.42-, 8.43- chizmalarda tasvirlangan.

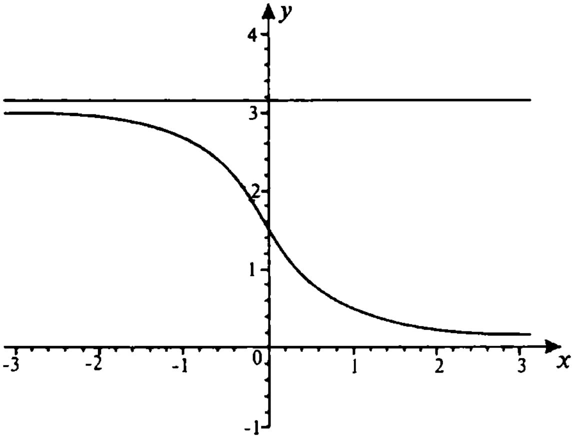
5) teskari trigonometrik funksiyalar orasidagi munosabatlar:

$$\arcsin x-\arccos\sqrt{1-x^2}=\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad(0<x<1).$$

$$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\mathrm{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0<x<1).$$

$$\mathrm{arctg}x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{arcctg}\frac{1}{x}\quad(0<x<+\infty).$$

$$\mathrm{arcctg}x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\quad(0<x<+\infty).$$



8.43- chizma. $y = \operatorname{arcctg} x$.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \le x \le 1.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \ xy \le 0 \ \text{yoki} \\ x^2 + y^2 \le 1 \quad \text{da;} \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ x > 0, \ y > 0 \ \text{va} \ x^2 + y^2 > 1 \ \text{da;} \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), x < 0, y < 0 \\ \text{va} \ x^2 + y^2 > 1 \ \text{da;} \end{cases}$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \ xy > 0 \ \text{yoki} \\ x^2 + y^2 \le 1 \ \text{da;} \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ x > 0, \ y < 0 \ \text{va} \ x^2 + y^2 > 1 \quad \text{da;} \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), x < 0, y > 0 \\ \text{va} \ x^2 + y^2 > 1 \ \text{da;} \end{cases}$$

$$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & x+y\geq 0 \text{ da;}\\ 2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \\ x+y<0 \text{ da;} & \end{cases}$$

$$\arccos x-\arccos y=\begin{cases}-\arccos\left(xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & x\geq y \text{ da;}\\ \arccos\left(xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & x<y \text{ da;}\end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & xy<1 \text{ da}\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & x>0 \text{ va } xy>1 \text{ da;}\\ -\pi+\operatorname{arctg} y\,\dfrac{x+y}{1-xy}, & x<0 \text{ va } xy>1 \text{ da;}\end{cases}$$

II bob. FUNKSIYALARNING GRAFIKLARINI HOSILADAN FOYDALANMASDAN CHIZISH

9- §. FUNKSIYALARNING GRAFIKLARI USTIDA ARIFMETIK AMALLAR

1. Funksiyalar grafigini qo'shish va ayirish. Ikki funksiyaning grafigini qo'shish va ayirish uchun, avvalo, har ikkala funksiyalarning grafiklarini alohida-alohida shtrix chiziqlar bilan chizish, so'ngra ularning xarakterli nuqtalardagi x ning bir xil qiymatlariga mos kelgan (funksiyalar grafiklarining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari, ekstremum nuqtalari, egilish nuqtalari va hokazolar) ordinatalarini qo'shish va ayirish kerak. Hosil bo'lgan xarakterli nuqtalar yordamida yig'indi yoki ayirma funksiyaning grafigi chiziladi.

Ba'zi hollarda yig'indi va ayirma funksiyaning grafigini quyidagi usullar yordamida ham chizish mumkin:

1) agar ikkita funksiyaning yig'indisi berilgan bo'lsa, avvalo ularning eng soddasining (misol uchun chiziqli funksiya) grafigi shtrixlar yordamida chiziladi, so'ngra ikkinchisining xarakterli nuqtalardagi ordinatalarining birinchi grafikning ularga mos ordinatalaridan chetlanishi aniqlanib, yig'indi funksiyaning grafigi chiziladi;

2) agar ikkita funksiyaning ayirmasi berilgan bo'lsa, avvalo ulardan kamayuvchi funksiyaning grafigi shtrixlar yordamida chiziladi, so'ngra ayiriluvchi funksiyaning xarakterli nuqtalardagi teskari ishora bilan olingan ordinatalarining kamayuvchi funksiya grafigining ularga mos kelgan ordinatalaridan chetlanishi topilib, berilgan ayirma funksiyaning grafigi chiziladi;

3) agar ikkita funksiyaning yig'indisi yoki ayirmasi berilgan bo'lib, ularni bitta funksiyaga keltirish qulay bo'lsa, yig'indi yoki ayirma funksiyaning grafigi bitta funksiyaning grafigi sifatida chiziladi;

4) agar funksiyaning juftligi, toqligi, davriyligi va hokazo xossalaridan foydalanilsa, funksiyalar algebraik yig'indisining grafigini chizish soddalashadi.

2. Funksiya grafigini ko'paytirish va bo'lish. Ikki funksiyaning grafigini ko'paytirish yoki bo'lish uchun, avvalo, har ikkala funksiyaning grafiklarini alohida-alohida shtrix chiziqlar bilan chizib, so‘ngra xarakterli nuqtalardagi ordinatalarini ko‘paytirib yoki bo‘lib, topilgan nuqtalar yordamida ko‘paytma yoki bo‘linma funksiyaning grafigi chiziladi.

Ba‘zi hollarda ko‘paytma va bo‘linma funksiyaning grafigini quyidagi usullar yordamida ham chizish mumkin:

1) avvalo ko‘paytma yoki bo‘linmaga kiruvchi yordamchi funksiyalarning grafiklarini chizish berilgan funksiyaning grafigini chizishni osonlashtiriladi;

2) ikki funksiya ko‘paytmasi yoki bo‘linmasini shakl almashtirishlar yordamida bitta sodda funksiyaga keltirish qulay bo‘lsa, ko‘paytma yoki bo‘linma funksiyalarning grafigi bitta funksiya grafigi kabi chiziladi;

3) agar funksiyalarning juftligi, toqligi, davriyligi va hokazo xossalaridan foydanilsa, funksiyalar algebraik ko‘paytmasining grafigini chizish soddalashadi.

1- misol. $f(x)=x+\operatorname{tg} x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiya $f_1(x)=x$ va $f_2(x)=\operatorname{tg} x$ funksiyalar yig‘indisidan iborat. Dastlab $f_1(x)=x$ funksiyaning grafigini chizamiz, so‘ngra $f_2(x)=\operatorname{tg} x$ funksiyaning xarakterli nuqtalardagi x ning bir xil qiymatlariga mos kelgan ordinatalarini qo‘shamiz.

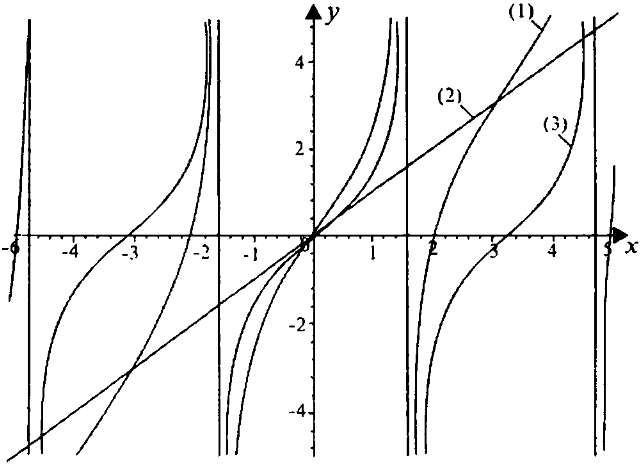
$\operatorname{tg}x=0$ tenglamani qanoatlantiradigan, ya‘ni $x=k\pi$, $k\in Z$ nuqtalarda berilgan funksiya $f(x)=x$ ko‘rinishda bo‘ladi. Berilgan funksiya grafigining $x=k\pi$, $k\in Z$ nuqtalarga mos kelgan nuqtalari $f(x)=x$ to‘g‘ri chiziqda yotadi.

$f_2(x)=\operatorname{tg}x$ funksiya haqiqiy sonlar to‘plamining

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarida

aniqlangan. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ to‘g‘ri chiziqlar $f_2(x)=\operatorname{tg}x$ va $f(x)=x+\operatorname{tg}x$ funksiyalarning vertikal asimptotalari bo‘ladi (9.1 - chizma).

2 - misol. $f(x)=x-\sin x$ funksiyaning grafigini chizing.



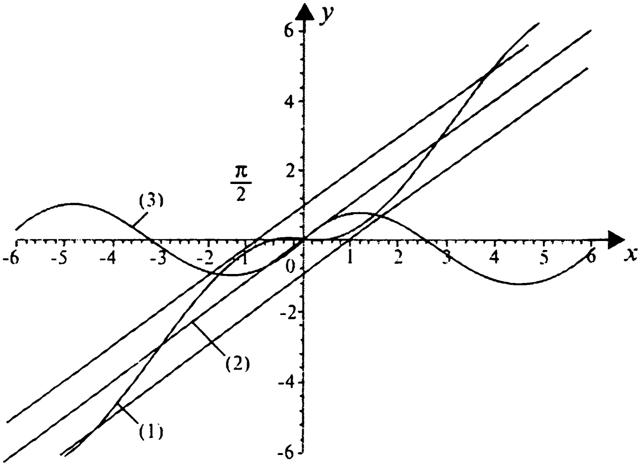
9.1- chizma. (1) $f(x)=x+\mathrm{tg}x$, (2) $f_1(x)=x$, (3) $f_2(x)=\mathrm{tg}x$.

Yechilishi. Berilgan funksiya $f_1(x)=x$ va $f_2(x)=\sin x$ funksiyalar ayirmasidan iborat. Dastlab $f_1(x)=x$ funksiyaning grafigini chizamiz, so'ngra $f_2(x)=\sin x$ funksiyaning xarakterli nuqtalaridagi teskari ishorasi bilan olingan ordinatalari qiymatlarining $f_1(x)=x$ funksiya grafigining ularga mos kelgan ordinatalari qiymatlaridan chetlanishini topamiz. Grafik chizishni soddalashtirish uchun $f_1(x)=x$ ga parallel, ikkita yordamchi $f(x)=x+1$ va $f(x)=x-1$ to'g'ri chiziqlarni chizamiz, chunki $|\sin x|\leq 1$.

$\sin x=0$ tenglamani qanoatlantiradigan $x=k\pi$, $k\in Z$ nuqtalarda berilgan funksiya $f(x)=x$ ko'rinishda bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigining $x=k\pi$, $k\in Z$ nuqtalarga mos kelgan nuqtalari $f_1(x)=x$ to'g'ri chiziqda yotadi.

$\sin x=1$ tenglamani qanoatlantiradigan $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$ nuqtalarda berilgan funksiya $f(x)=x-1$ ko'rinishda bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigining bu nuqtalarga mos nuqtalari $f(x)=x-1$ to'g'ri chiziqda yotadi.

$\sin x=-1$ tenglamani qanoatlantiradigan $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$ nuqtalarda berilgan funksiya $f(x)=x+1$ ko'rinishda bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigining bu nuqtalarga mos nuqtalari $f(x)=x+1$ to'g'ri chiziqda yotadi.



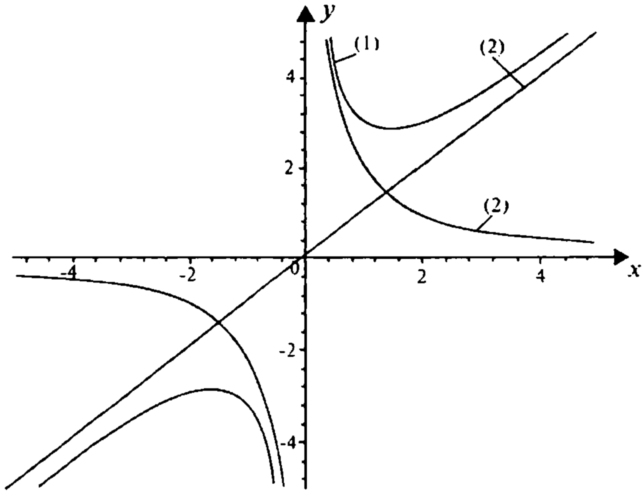
9.2- chizma.

(1) $f(x)=x-\sin x$, (2) $f_1(x)=x$, (3) $f_2(x)=\sin x$.

Shunday qilib, berilgan ayirma funksiyaning grafigi $f(x)=x-1$ va $f(x)=x+1$ to'g'ri chiziqlar orasida yotadi (9.2- chizma).

3- misol. $f(x)=x+\frac{k}{x}$ $(k>0)$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Ravshanki, $f(x)=x+\frac{k}{x}$ toq funksiyadir. Shuning uchun uning grafigini Ox o'qning musbat $(x>0)$ qismida chizish yetarli. Berilgan funksiya $f_1(x)=x$ va $f_2(x)=\frac{k}{x}$ funksiyalar yig'indisidan iborat. Dastlab $f_1(x)=x$ va $f_2(x)=\frac{k}{x}$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Berilgan chizma uchun $x=0$ va $y=x$ to'g'ri chiziqlar, mos ravishda, vertikal va og'ma asimptotalar bo'ladi. Berilgan funksiya $x>0$ da minimumga ega. Funksiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtalarni quyidagicha topamiz. Ma'lumki, ikkita musbat miqdorning o'rta arifmetigi uning o'rta geometrigidan kichik emas. Berilgan funksiya uchun $x+\frac{k}{x}\geq 2\sqrt{k}$ munosabatlar o'rinli. $x+\frac{k}{x}$ funksiya o'zining minimum qiymatiga $x+\frac{k}{x}=2\sqrt{k}$ shartda erishadi, bundan $x^2+k=2\sqrt{k}x$ yoki $(x-\sqrt{k})^2=0$, $x=\sqrt{k}$ va $\frac{k}{x}=\sqrt{k}$ bo'ladi.



9.3- chizma. (1) $f(x)=x+\frac{2}{x}$, (2) $f_1(x)=x$, (3) $f_2(x)=\frac{2}{x}$.

Demak, k=2 bo'lgan xususiy holda berilgan funksiya $x=\sqrt{2}$ va $\frac{2}{x}=\sqrt{2}$ nuqtalarda $y_{\min}(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ qiymatga ega bo'ladi(9.3- chizma).

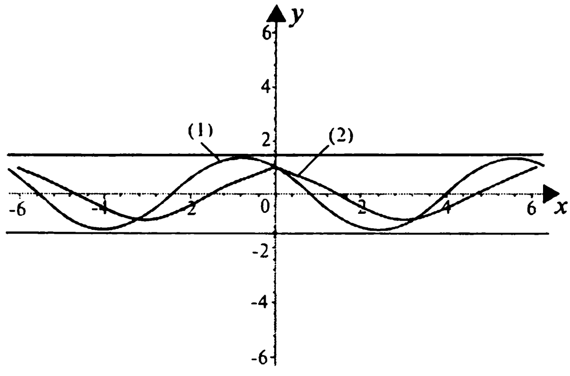
4- misol. $f(x)=\sin x+\cos x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiyani ushbu

$f(x)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ko'rinishga keltiramiz, so'ngra $f(x)=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$ funksiyaning grafigini chizamiz (9.4- chizma).

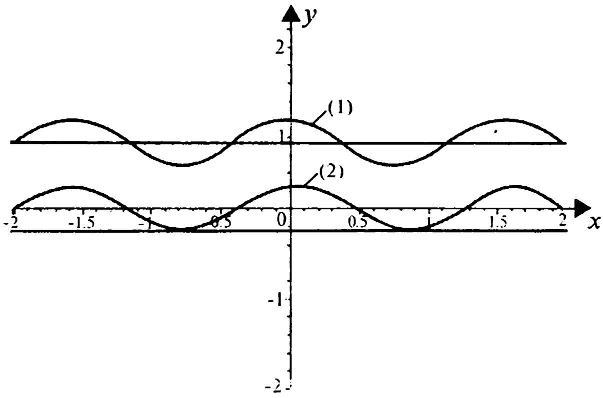
5- misol. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiyani trigonometriyada mavjud munosabatlardan foydalanib, quyidagi $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos^4 x$ ko'rinishda ifodalaymiz. $f_1(x)=\frac{3}{4}$ va $f_2(x)=\frac{1}{4}\cos 4x$ deb belgilaymiz, so'ngra grafiklarni qo'shish qoidasi bo'yicha $f(x)$ funksiya grafigini tuzamiz (9.5- chizma).



9.4- chizma.

(1) $f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$, (2) $f_1(x) = \cos x$.



9.5-chizma.

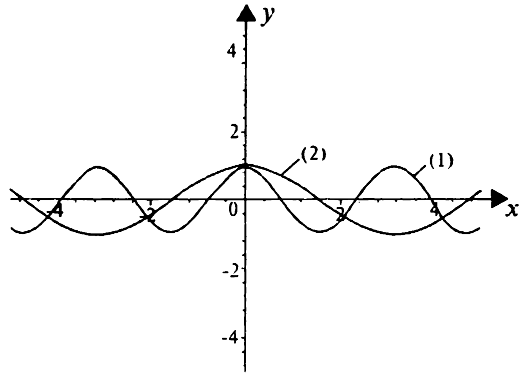
(1) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, (2) $f_2(x) = \frac{1}{4}\cos^4 x$.

6- misol. $f(x)=\cos^4 x - \sin^4 x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiyani ushbu $f(x)=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)=\cos 2x$ ko‘rinishga keltiramiz, so‘ngra $f(x)=\cos 2x$ funksiyaning grafigini chizamiz (9.6- chizma).

7- misol. $f(x)=x\cdot\sin x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiya $f_1(x)=x$ va $f_2(x)=\sin x$ funksiyalar ko‘paytmasidan iborat. Ko‘paytmaga kiruvchi yordamchi $f_1(x)=x$ va $f_2(x)=\sin x$ funksiyalarning grafiklarini shtrix chiziqlar yordamida chizamiz.



9.6- chizma.
(1) $f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x$, (2) $f_1(x)=\cos^2 x$.

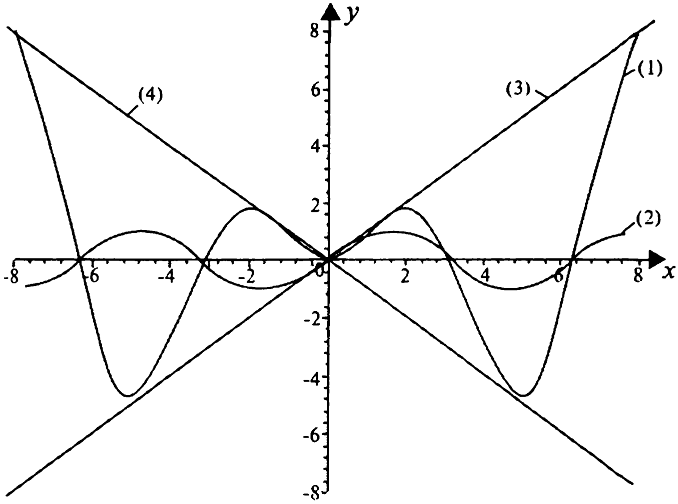
Ravshanki, $f_2(x)=\sin x$ davriy funksiya bo‘lib, uning $x=\pi n, x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ xarakterli nuqtalarida, mos ravishda, 0,1 va —1 qiymatlarni qabul qiladi. Birinchidan, $f(x)=x\sin x$ funksiyaning grafigi Ox o‘qini $x=\pi n$, $n\in Z$ nuqtalarda kesib o‘tadi, ikkinchidan, uning grafigi $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ nuqtalarda esa, mos ravishda, $y=x$ va $y=-x$ to‘g‘ri chiziqlarga urinadi.

$f(x)=x\sin x$ juft funksiya bo‘lganligidan, uning grafigini Ox o‘qning musbat ($x\geq 0$) qismida chizish yetarli(9.7- chizma).

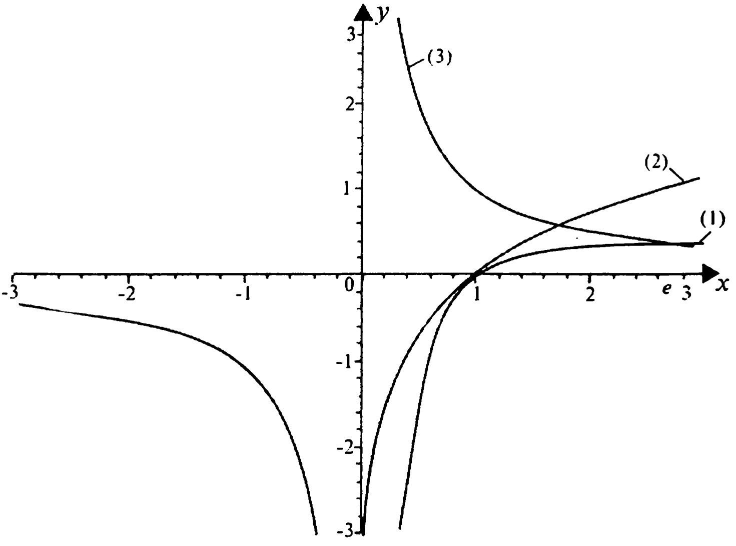
8- misol. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiya $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=\frac{1}{x}$ yordamchi funksiyalar ko‘paytmasidan iborat.

Dastlab, ma‘lum bo‘lgan $f_1(x)=\ln x$ va $f_2(x)=\frac{1}{x}$ funksiyalarning grafigini chizamiz. Ravshanki, berilgan $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ funksiyaning grafigi (1; 0) nuqtada abssissalar o‘qini kesib o‘tadi. $x=2$, $x=e$ va $x=3$ qiymatlarda $f_1(x)=\ln x$ va $f_2(x)=\frac{1}{x}$ funksiyalarning ordinatalarini ko‘paytiramiz. Berilgan funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda aniqlangan. Funksiya aniqlanish sohasining chegaralarida funksiyaning limitik qiymatini hisoblaymiz:



9.7- chizma. (1) $y = x\sin x$, (2) $y = \sin x$, (3) $y = x$, (4) $y = -x$.



9.8-chizma. (1) $f(x) = \ln x/x$, (2) $f_1(x) = \ln x$, (3) $f_2(x) = 1/x$.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
(9.8- chizma).

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarning grafiklarini chizing:

1. $f(x)=x+\cos x$. **2.** $f(x)=x+\operatorname{ctg} x$. **3.** $f(x)=1+e^{-x}$.

4. $f(x)=x-\frac{2}{x}$. **5.** $f(x)=x-\cos x$. **6.** $f(x)=x^2+2x$.

7. $f(x)=\operatorname{arctg} x+2^x$. **8.** $f(x)=x+\lg x$.

9. $f(x)=x^2-x^6$. **10.** $f(x)=3^x+3^{-x}$.

11. $f(x)=x-\arcsin x$. **12.** $f(x)=|x-2|+|x-3|$.

13. $f(x)=x\cdot\cos x$. **14.** $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$.

15. $f(x)=\frac{x}{3^x}$. **16.** $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

17. $f(x)=x\ln x$. **18.** $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$.

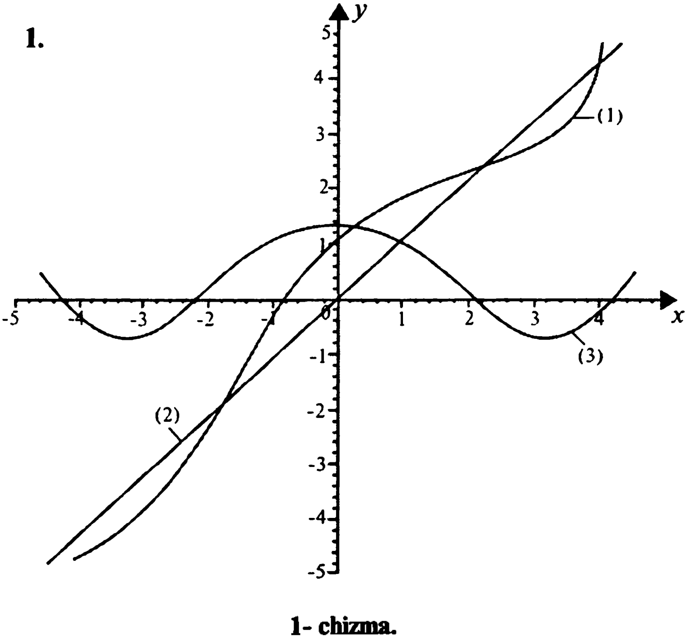
19. $f(x)=\ln x-\ln 3$. **20.** $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.

21. $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. **22.** $f(x)=1+x+e^x$.

23. $f(x)=x+\sin x$.

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

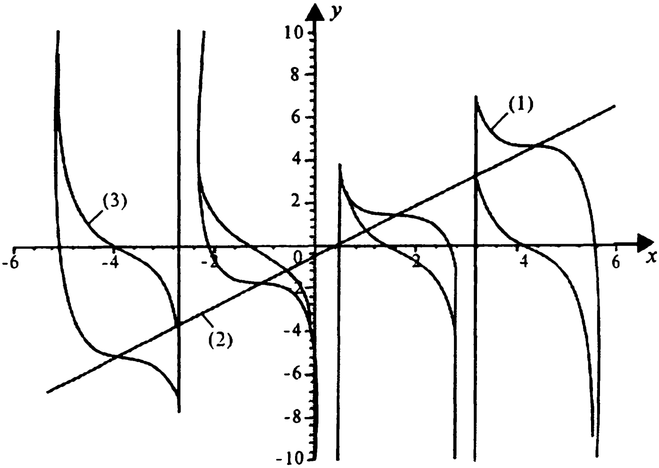
1.



1- chizma.

(1) $y_1=x+\cos x$, (2) $y_2=x$, (3) $y_3=\cos x$.

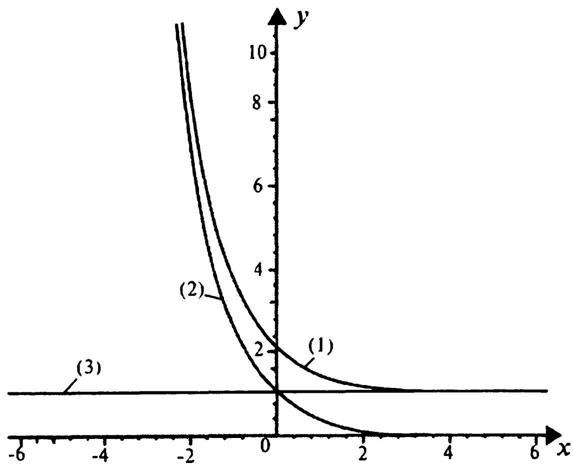
2.



2- chizma.

(1) $y_1 = x + \operatorname{ctg} x$, (2) $y_2 = x$, (3) $y_3 = \operatorname{ctg} x$.

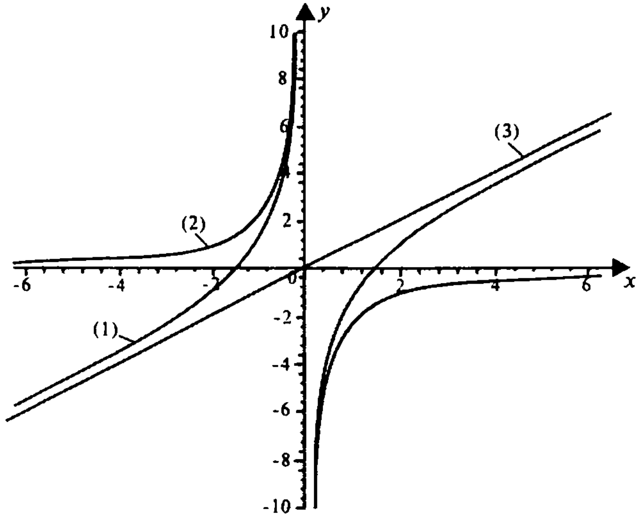
3.



3- chizma.

(1) $y_1 = 1 + e^{-x}$, (2) $y_2 = e^{-x}$, (3) $y_3 = 1$.

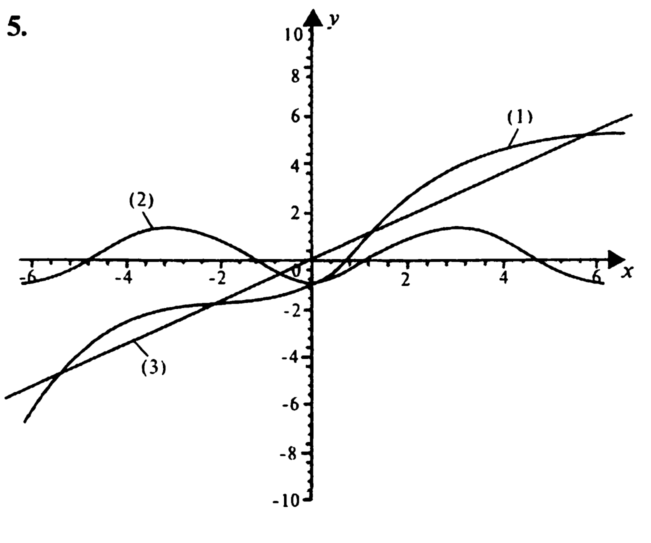
4.



4- chizma.

(1) $y_1 = x - 2/x$, (2) $y_2 = 2/x$, (3) $y_3 = x$.

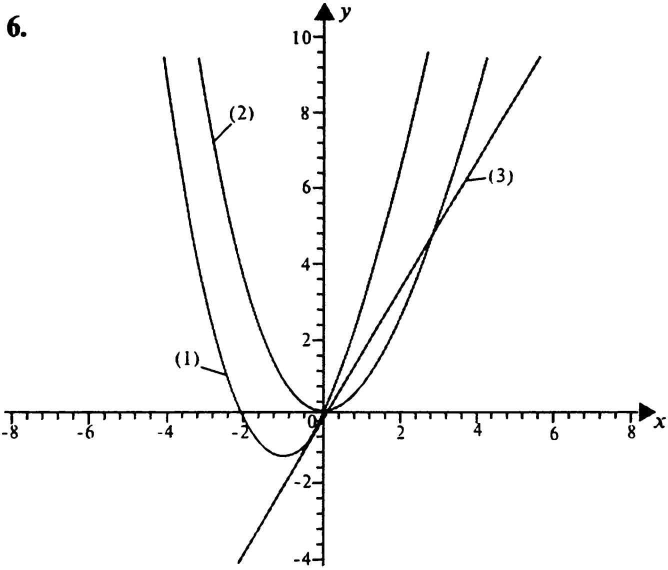
5.



5- chizma.

(1) $y_1 = x - \cos x$, (2) $y_2 = -\cos x$, (3) $y_3 = x$.

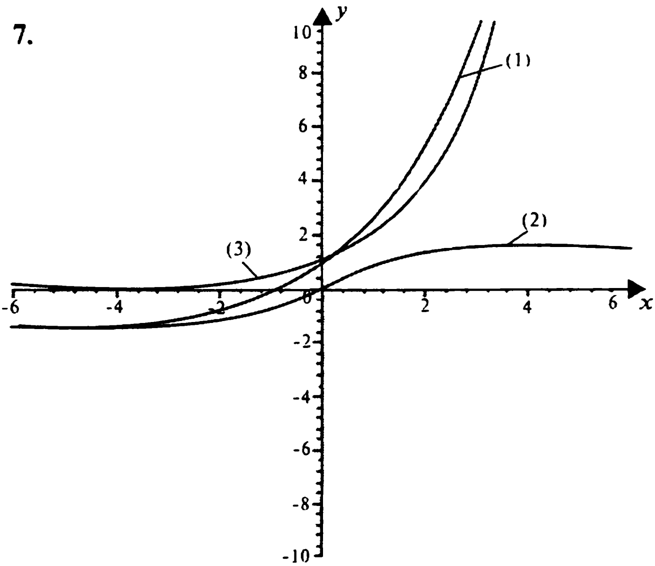
6.



6- chizma.

(1) $y_1 = x^2 + 2x$, (2) $y_2 = x^2$, (3) $y_3 = 2x$.

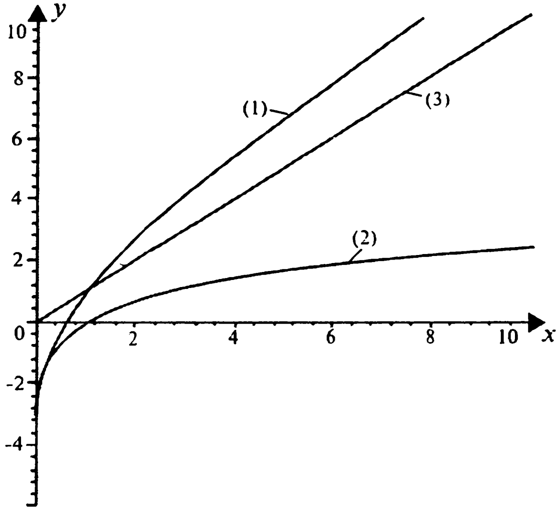
7.



7- chizma.

(1) $y_1 = \text{arctg}x + 2^x$, (2) $y_2 = \text{arctg}x$, (2) $y_3 = 2^x$.

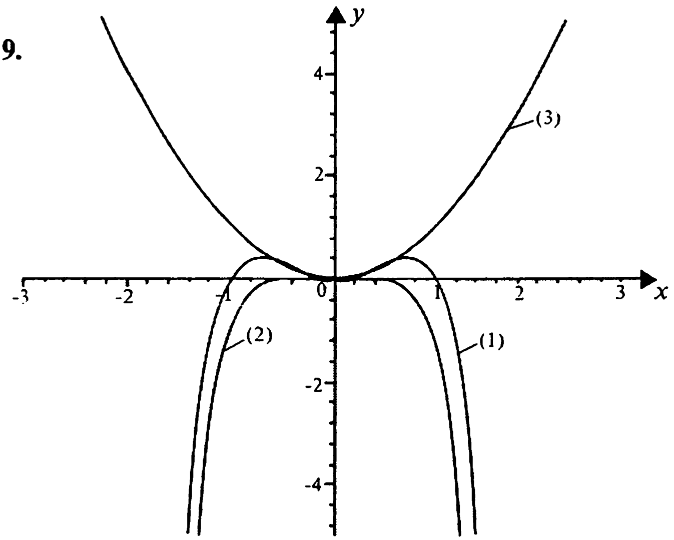
8.



8- chizma.

(1) $y_1 = x = \lg x^x$, (2) $y = \lg x$, (3) $y = x$.

9.

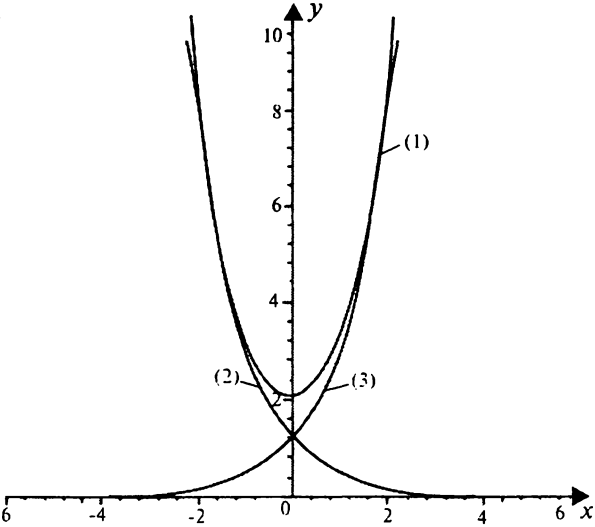


9- chizma.

(1) $y_1 = x^2 - x^6$,

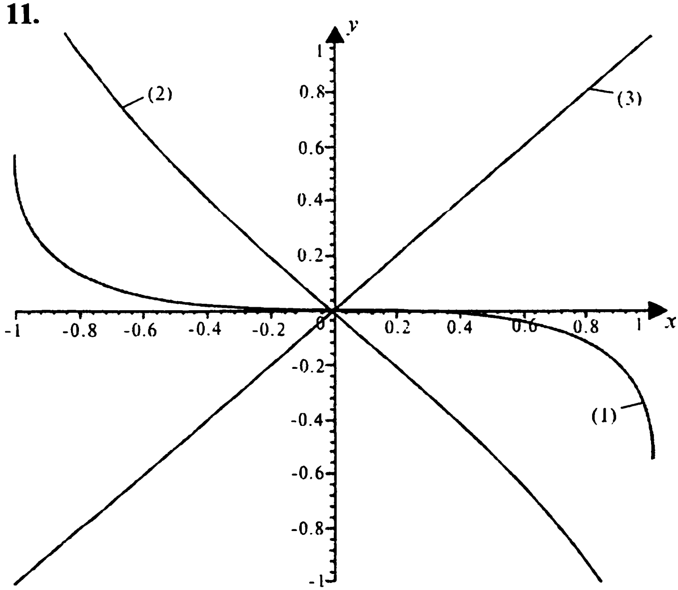
(2) $y_2 = -x^6$, (3) $y_3 = x^2$.

10.



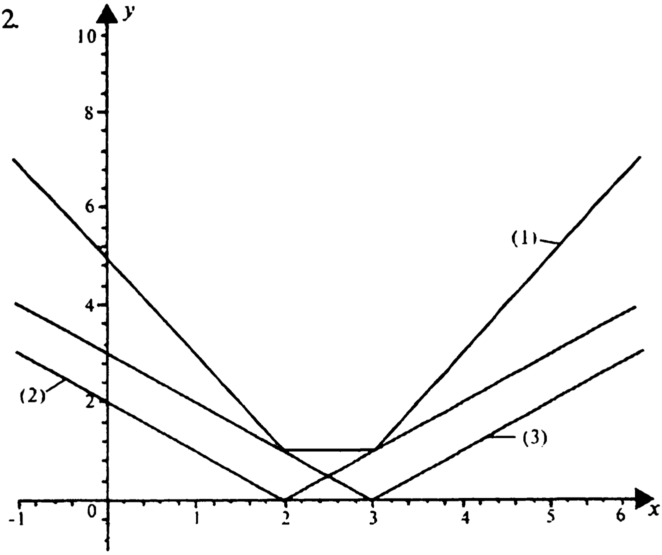
10- chizma. (1) $y_1 = 3^x + 3^{-x}$, (2) $y_2 = 3^{-x}$, (3) $y_3 = 3^x$.

11.



11-chizma. (1) $y_1 = x - \arcsin x$, (2) $y_2 = -\arcsin x$, (3) $y_3 = x$.

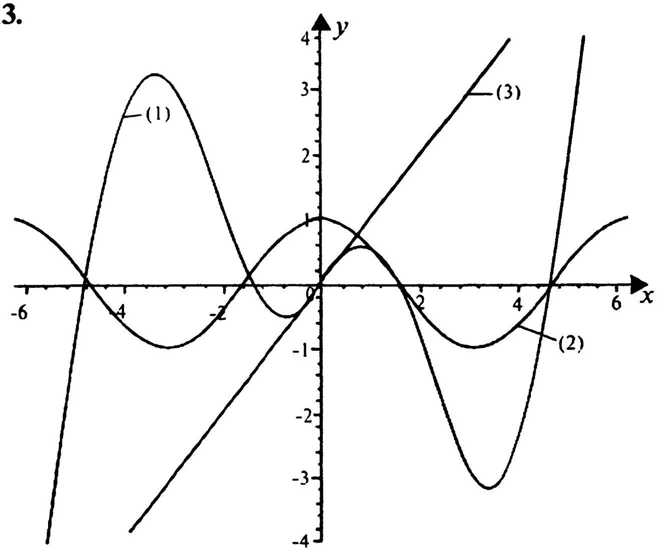
12.



12-chizma.

(1) $y_1 = |x-2| + |x-3|$, (2) $y_2 = |x-2|$, (3) $y_3 = |x-3|$.

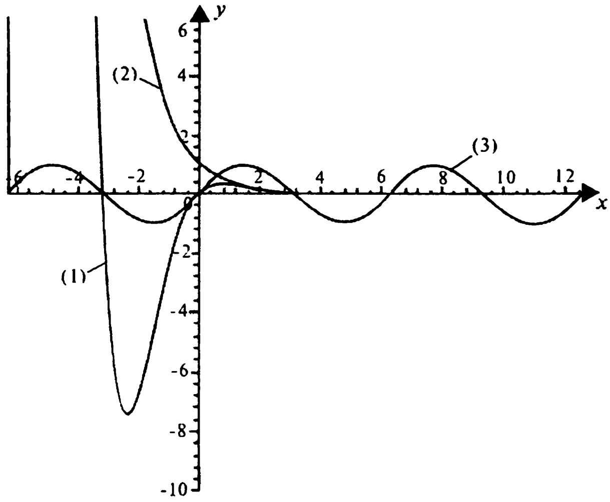
13.



13- chizma.

(1) $y_1 = x\cos x$, (2) $y_2 = \cos x$, (3) $y_3 = x$.

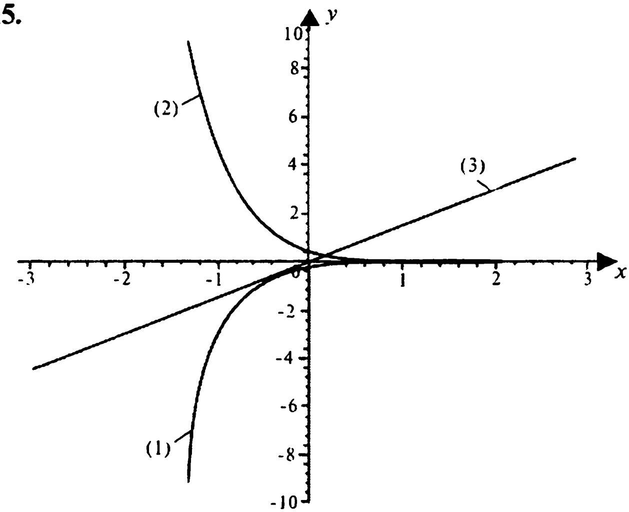
14.



14- chizma.

(1) $y_1 = e^{-x}\sin x$, (2) $y_2 = e^{-x}$, (3) $y_3 = \sin x$.

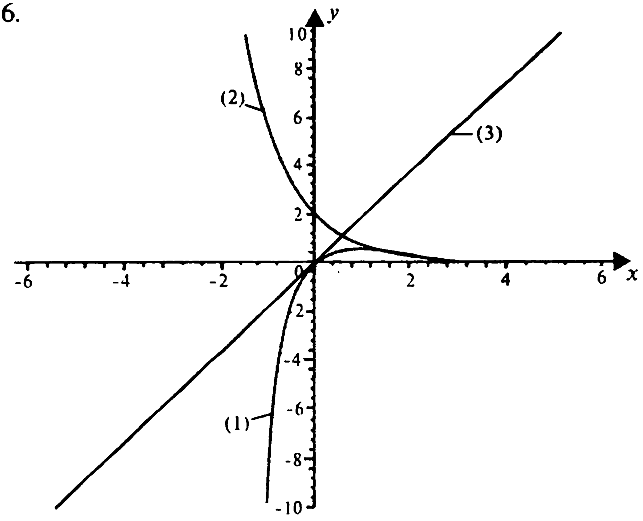
15.



15- chizma.

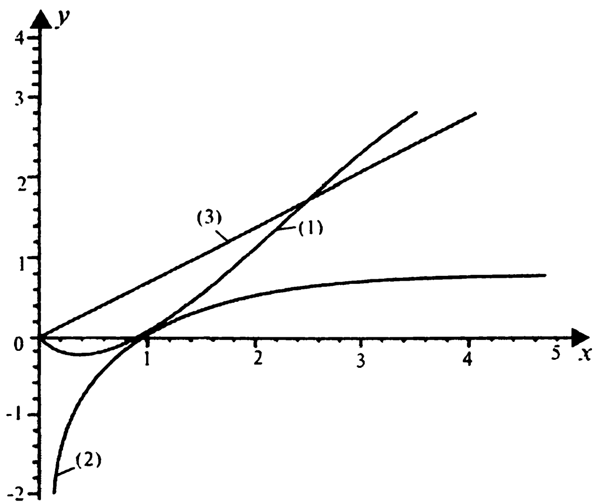
(1) $y_1 = \frac{x}{3^x}$, (2) $y_2 = 3^{-x}$, (3) $y_3 = x$.

16.



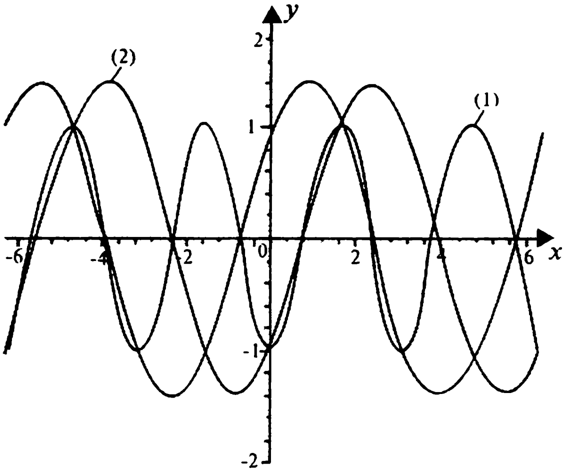
16- chizma. (1) $y_1 = xe^{-x}\sin x$, (2) $y_2 = e^{-x}$, (3) $y_3 = x$.

17.



17- chizma. (1) $y_1 = x\ln x$, (2) $y_2 = \ln x$, (3) $y_3 = x$.

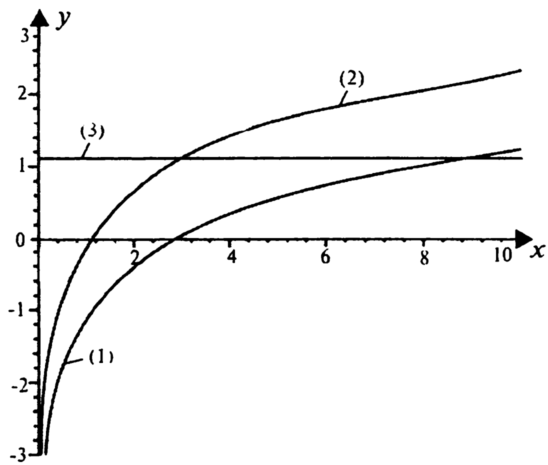
18.



18- chizma.

(1) $y_1 = \sin^2 x - \cos^2 x$, (2) $y_2 = \sin^2 x$, (3) $y_3 = -\cos^2 x$.

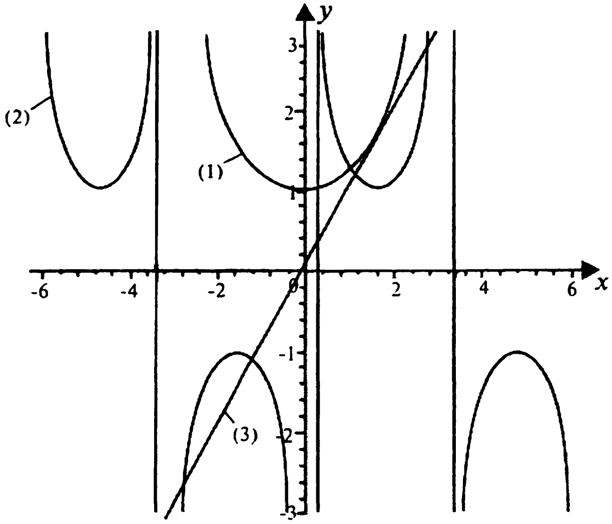
19.



19- chizma.

(1) $y_1 = \ln x - \ln 3$, (2) $y_2 = \ln x$, (3) $y_3 = \ln 3$.

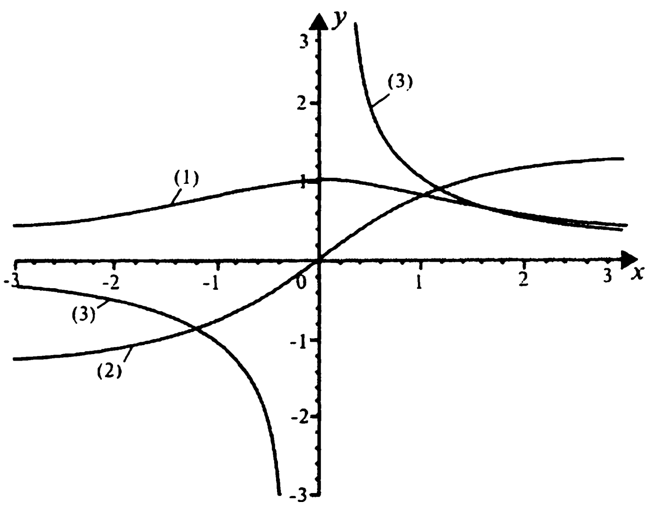
12.



20- chizma.

(1) $y_1 = \dfrac{x}{\sin x}$, (2) $y_2 = \sin^{-1} x$, (1) $y_3 = x$.

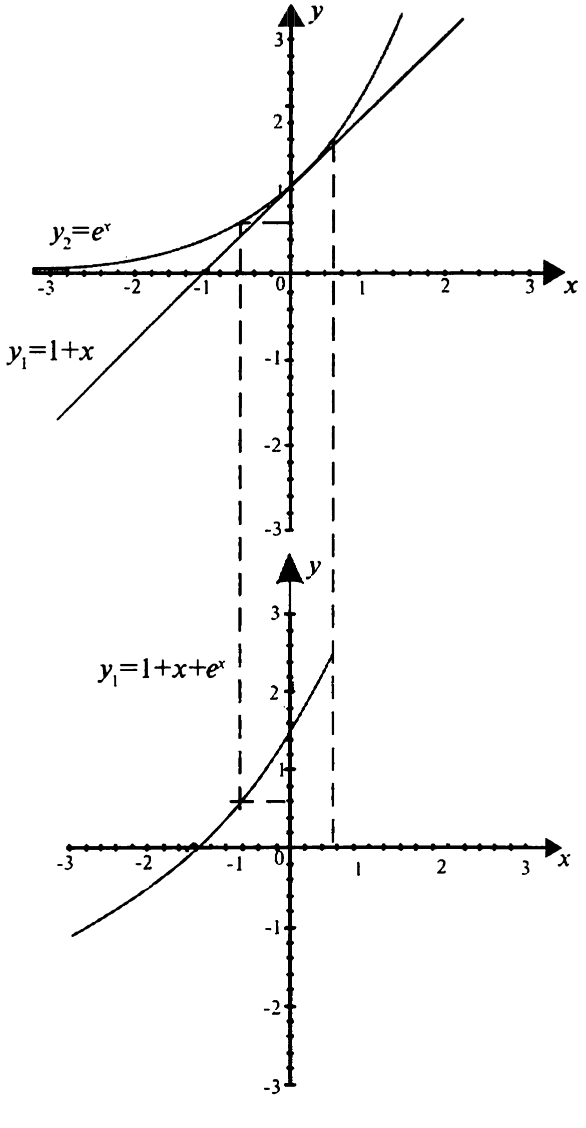
13.



21- chizma.

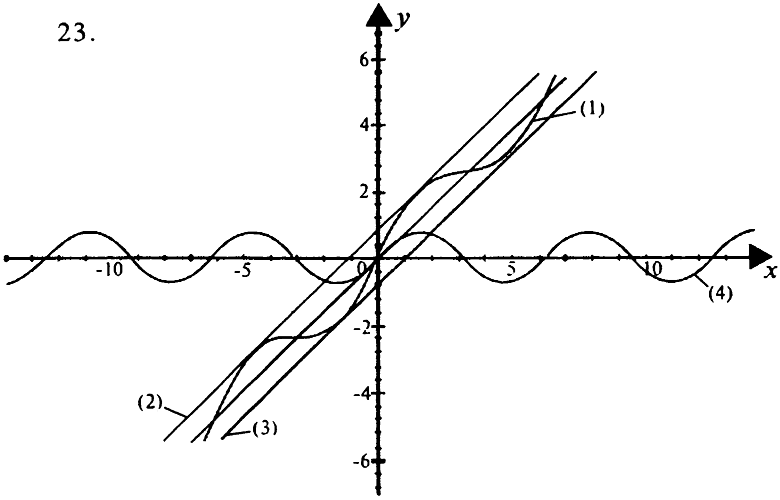
(1) $y_1 = \dfrac{\mathrm{arctg} x}{x}$, (2) $y_2 = \mathrm{arctg}\, x$, (1) $y_3 = x^{-1}$.

22.



22- chizma. $y=1+x+e^x$.

23.

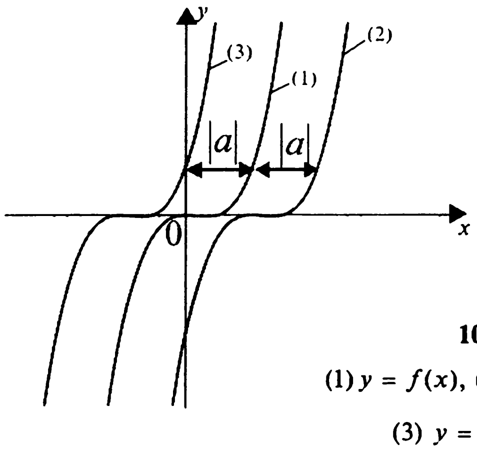


23- chizma.

(1) $y = x + \sin x$, (2) $y = x + 1$, (3) $y = x - 1$, (4) $y = \sin x$.

10-§. FUNKSIYA GRAFIKLARINI ALMASHTIRISH

1. Grafiklarni abssissalar o'qi bo'ylab parallel ko'chirish (siljitish). $y=f(x)$ funksiyaning grafigi berilgan bo'lsin. Agar $a>0$ ($a<0$) bo'lsa, $y=f(x-a)$ funksiyaning grafigi $y=f(x)$ funksiyaning grafigini Ox o'q bo'ylab o'ngga (chapga) $|a|$ birlikka ko'chirish natijasida hosil qilinadi (10.1- chizma). Masalan: 1) $y=\sqrt{x-2}$ funksiyaning grafigini chizishdan oldin, $y=\sqrt{x}$



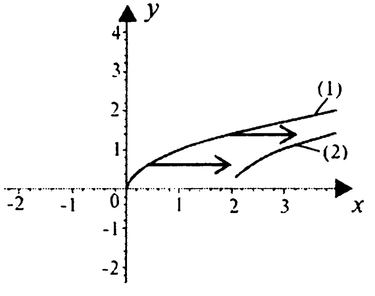
10.1-chizma.

(1) $y = f(x)$, (2) $y = f(x - a), a > 0$,

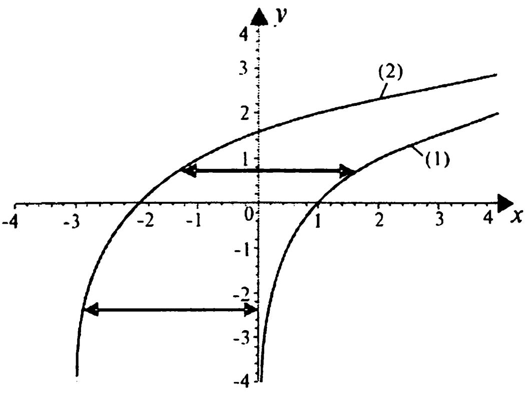
(3) $y = f(x - a)$, $a < 0$.

funksiya grafigini chizib, so'ngra grafik 2 birlikka o'ngga ko'chiriladi (10.2 -chizma). 2) $y=\log_2(x+3)$ funksiyaning grafigini chizish uchun avvalo $y=\log_2 x$ funksiya grafigi chizilib, so'ngra grafik $|-3|$ birlik chapga ko'chiriladi (10.3- chizma).

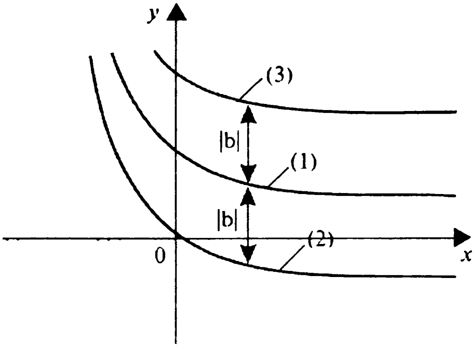
2. Grafiklarni ordinatalar o'qi bo'ylab parallel ko'chirish (siljitish). Agar $b>0$ ($b<0$) bo'lsa, $y=f(x)+b$ funksiyaning grafigi $y=f(x)$ funksiyaning grafigini Oy o'q bo'ylab $|b|$ birlik yuqoriga (pastga) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi (10.4- chizma). Masalan: 1) $y(x)= =3^x-1$ funksiya grafigini chizish uchun avvalo $y_1=3^x$ funksiya grafigi chizilib, so'ngra grafik bir birlik pastga parallel ko'chiriladi (10.5- chizma). 2) $y=x^2+2$ funksiya grafigini chizish uchun avvalo $y_1=x^2$ funksiya grafigi chizilib, so'ngra bu grafikni ikki birlik yuqoriga ko'chiramiz (10.6- chizma).



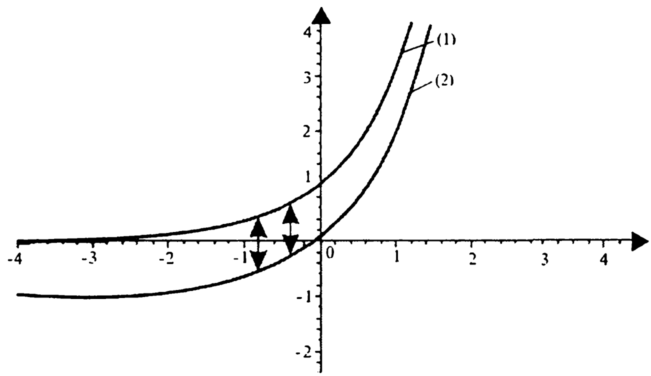
10.2- chizma. (1) $y=\sqrt{x}$, (2) $y=\sqrt{x-2}$.



10.3- chizma. (1) $y=\log_2 x$; (2) $y=\log_2(x+3)$.

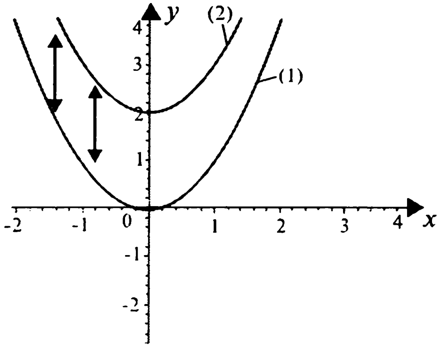


10.4- chizma.
(1) $y = f(x)$, (2) $y = f(x) + b$, $b < 0$,
(3) $y = f(x) + b$, $b > 0$.

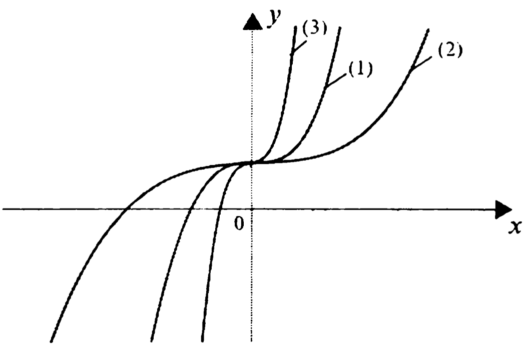


10.5- chizma. (1) $y=3^x$; (2) $y=3^x-1$.

3. Grafiklarni abssissalar o'qi bo'yicha cho'zish (siqish). Agar $a>1$ $(0<a<1)$ bo'lsa, $y=f(ax)$ funksiyaning grafigi $y=f(x)$ funksiyaning grafigini Ox o'qqa nisbatan a marta $(\frac{1}{a}$ marta) cho'zish (siqish) natijasida hosil bo'ladi (10.7- chizma). Masalan: 1) $y=\log_2 2x$ funksiyaning grafigini chizish uchun avvalo $y_1=\log_2 x$ funksiya grafigini chizib, so'ngra grafikni Oy o'qqa nisbatan 2 marta siqamiz, natijada talab qilingan grafik hosil bo'ladi (10.8- chizma); 2) $y = \sin\frac{x}{3}$ funksiyaning grafigini chizish uchun avvalo $y_1=\sin x$ funksiya grafigi chizilib, so'ngra bu grafikni Ox o'qqa nisbatan 3



10.6- chizma. (1) $y = x^2$, (2) $y = x^2 + 2$.

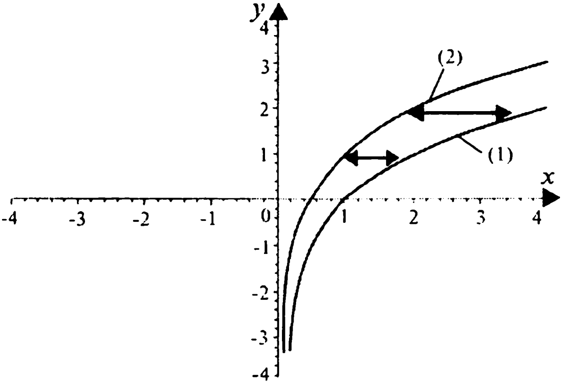


10.7- chizma.

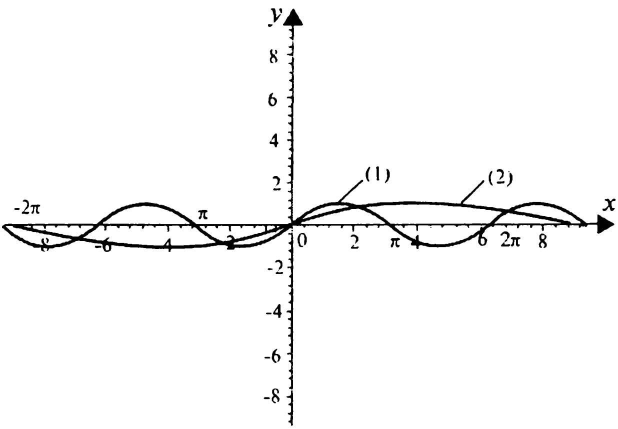
(1) $y_2=f(x)$; (2) $y_2=f(ax)$, $0<a<1$, $y_3=f(ax)$, $a>1$.

marta cho'zish natijasida talab qilingan grafik hosil bo'ladi (10.9-chizma).

4. Grafiklarni ordinatalar o'qi bo'ylab cho'zish (siqish). Agar $a>1$ $(0<a<1)$ bo'lsa, $y=af(x)$ funksiyaning grafigi $y=f(x)$ funksiyaning grafigini Oy o'qqa nisbatan a marta ($\frac{1}{a}$ marta) cho'zish (siqish) natijasida hosil bo'ladi (10.10- chizma). Masalan: 1) $y=3x^3$ funksiya grafigini chizishdan oldin $y_1=x^3$ funksiya grafigini chizib, so'ngra grafikni 3 marta Oy o'qqa nisbatan cho'zish kerak (10.11- chizma). 2) $y = \frac{1}{2}4^x$ funksiyaning grafigini chizish uchun



10.8- chizma. $y_1=\log_2 x$; (2) $y_2=\log_2 2x$.

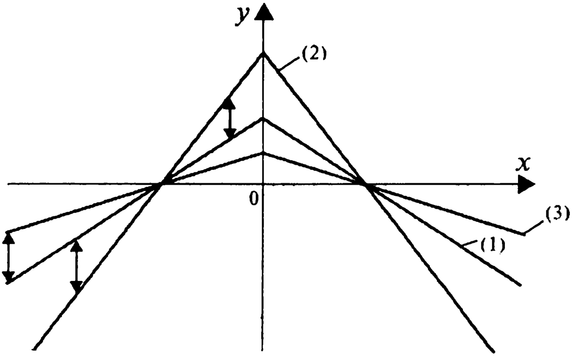


10.9- chizma. (1) $y = \sin \frac{x}{3}$; (2) $y = \sin x$.

avvalo $y_1=4^x$ funksiya grafigi chizilib, so'ngra grafikni 2 marta Oy o'qqa nisbatan siqish kerak (10.12- chizma).

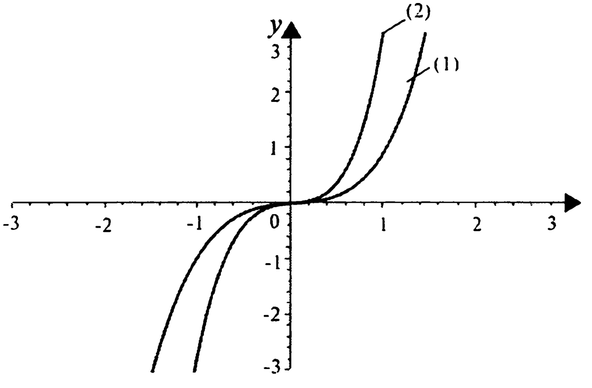
5. Grafiklarni abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish. $y=-f(x)$ funksiyaning grafigi $y=f(x)$ funksiya grafigini Ox o'qqa nisbatan simmetrik akslantirish natijasida hosil qilinadi (10.13-chizma). Masalan: 1) $y=-x^2$ funksiyaning grafigini chizish uchun avvalo $y_1=x^2$ funksiya grafigini chizib, so'ngra Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantirib, $y=-x^2$ funksiyaning grafigi hosil qilinadi (10.14- chizma).

10.

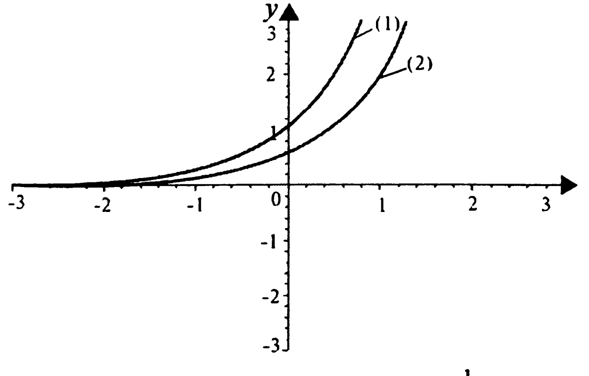


10.10- chizma. (1) $y_1=f(x)$; (2) $y_2=2f(x)$; (3) $y_3=\frac{1}{2}f(x)$;

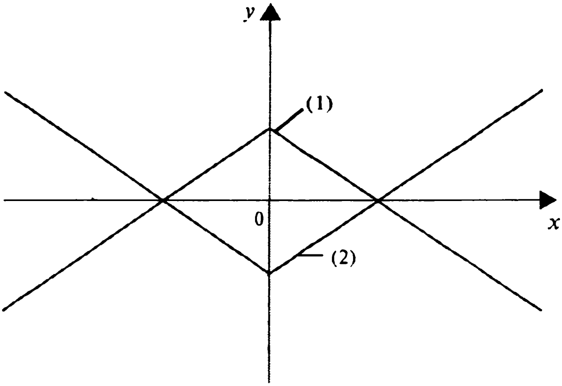
13.



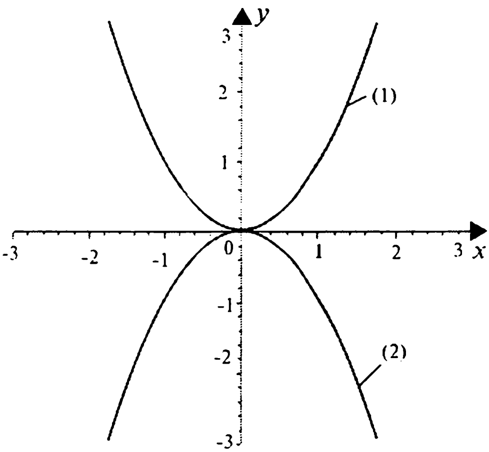
10.11- chizma. (1) $y_1=x^3$, $y=3x^3$.



10.12- chizma. (1) $y_1 = 4^x$, (2) $y = \frac{1}{2}4^x$.

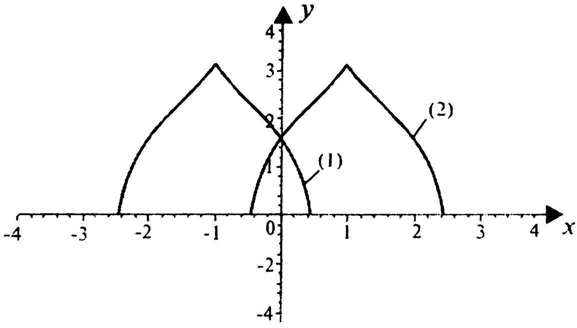


10.13- chizma. (1) $y_1=f(x)$; (2) $y=-f(x)$.

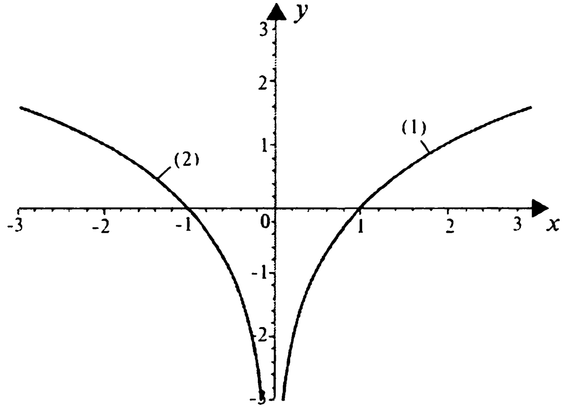


10.14- chizma. (1) $y_1=x^2$, (2) $y=-x^2$.

6. Grafiklarni ordinata o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish. $y=f(-x)$ funksiyaning grafigi $y_1=f(x)$ funksiya grafigini Oy o'qqa nisbatan simmetrik akslantirish natijasida hosil qilinadi (10.15- chizma). Masalan, 1) $y=\log_2(-x)$ funksiyaning grafigini chizish uchun, avvalo $y=\log_2 x$ funksiya grafigi chizilib, so'ngra Oy o'qqa nisbatan simmetrik akslantirib, $y=\log_2(-x)$ funksiya grafigi hosil qilinadi (10.16- chizma).



10.15- chizma. (1) $y_1=f(x)$; (2) $y=f(-x)$.



10.16- chizma. (1) $y_1=\log_2 x$; (2) $y=\log_2(-x)$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarning grafiklarini chizing.

1. $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$. **2.** $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

3. $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{4})$. **4.** $f(x)=\log_3(x-6)$.

5. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. **6.** $f(x)=\sin 3x$.

7. $f(x)=\lg\frac{x}{5}$. **8.** $f(x)=\operatorname{tg}(\frac{x}{\pi}+\frac{\pi}{3})$.

9. $f(x)=\cos 3x$. **10.** $f(x)=2\operatorname{tg} x$.

11. $f(x)=3x^4$. **12.** $f(x)=\frac{3}{5}(x-2)^2$.

13. $f(x) = \frac{4}{5}x^2$.

14. $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{3})$.

15. $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$.

16. $f(x)=2^{2x-3}$.

17. $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x}$.

18. $f(x)=2^{-3x}$.

19. $f(x) = -\sin(3x + \frac{\pi}{4})$.

20. $f(x)=x^2-4$.

21. $f(x) = \sqrt[4]{-x-3}$.

22. $f(x) = \sqrt[5]{-x} + 2$.

23. $f(x)=\ln(x-2)$.

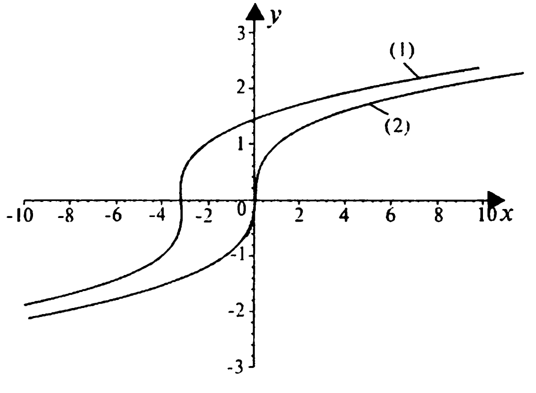
24. $f(x) = \frac{1}{3}2^{-x} + 2$.

25. $f(x)=-4^x-3$.

26. $f(x)=-2\cos(x + \frac{\pi}{6})$.

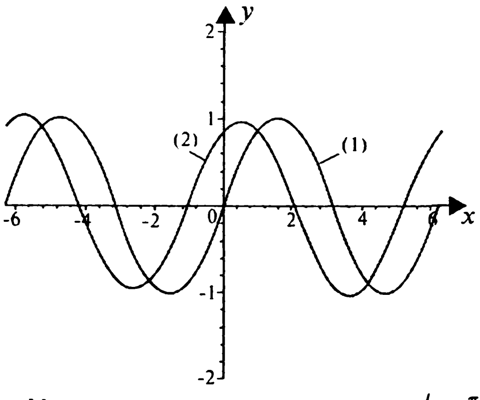
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



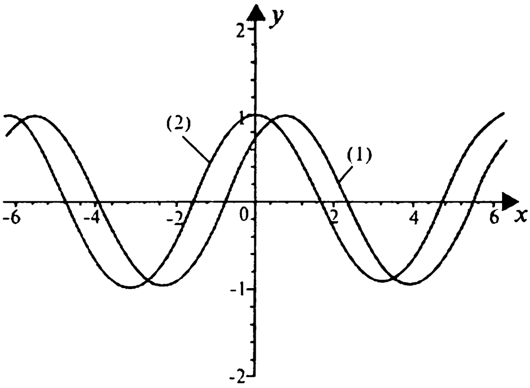
1- chizma. (1) $y_1 = \sqrt[3]{x+3}$, (2) $y_2 = \sqrt[3]{x}$.

2.



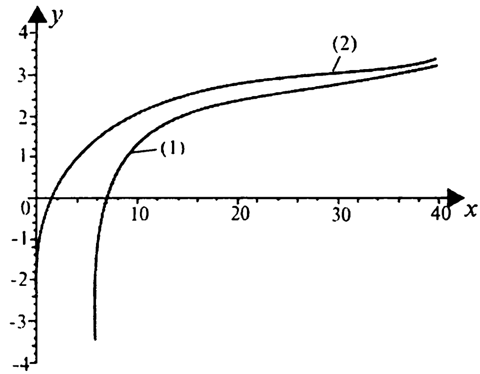
2- chizma. (1) $y_1 = \sin x$, (2) $y_2 = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

3.



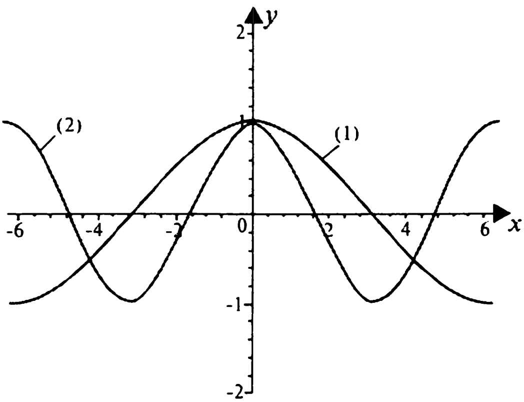
3- chizma. $y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (1), $y_2 = \cos x$ (2).

4.



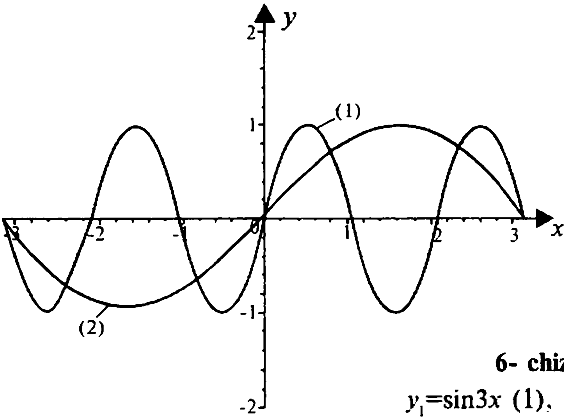
4- chizma. $y_1 = \log_3(x-6)$ (1), $y_2 = \log_3 x$ (2).

5.



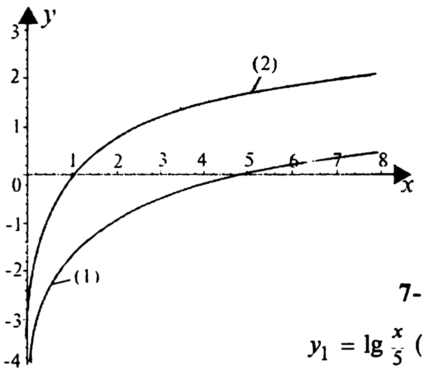
5- chizma. $y_1 = \cos\frac{x}{2}$ (1), $y_2 = \cos x$ (2).

6.



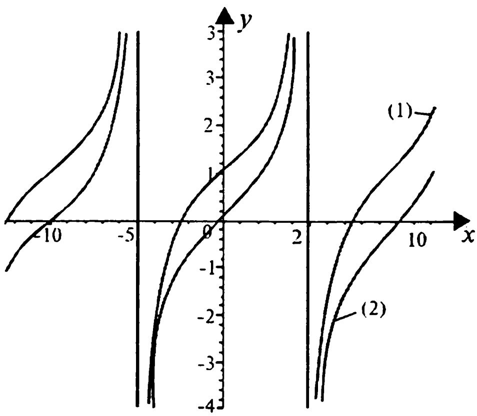
6- chizma.
$y_1 = \sin 3x$ (1), $y_2 = \sin x$ (2).

7.



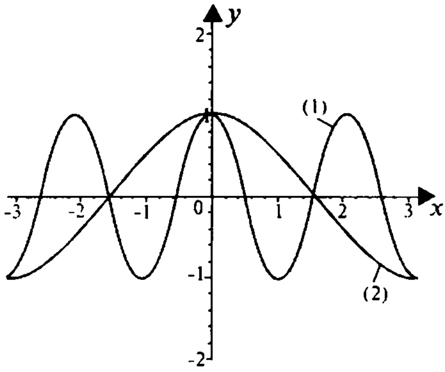
7- chizma.
$y_1 = \lg \frac{x}{5}$ (1), $y_2 = \lg x$ (2).

8.



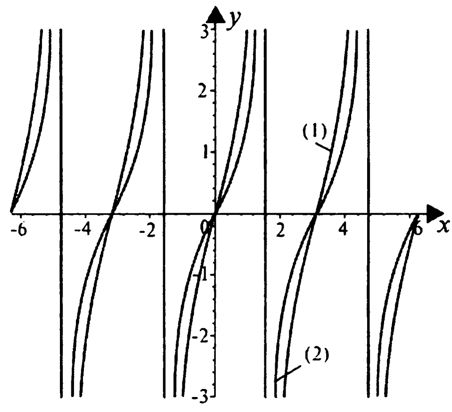
8- chizma. $y_1 = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{\pi} + \frac{\pi}{3}\right)$ (1), $y_2 = \mathrm{tg}\,\frac{x}{\pi}$ (2)

9.



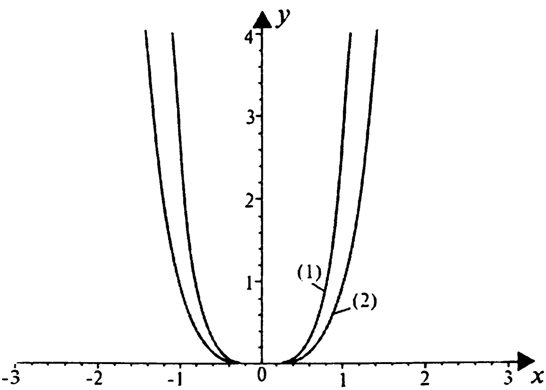
9- chizma. $y_1=\cos 3x$ (1), $y_2=\cos x$ (2).

10.



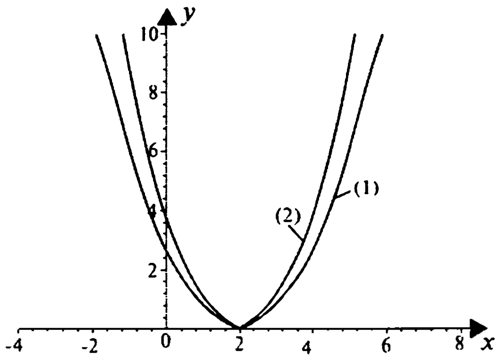
10- chizma. $y_1=2\mathrm{tg}x$ (1), $y_2=\mathrm{tg}x$ (2).

11.



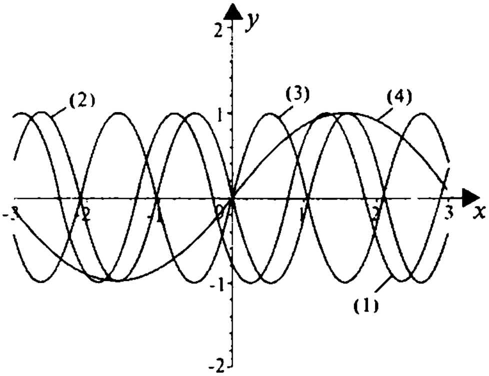
11- chizma. $y_1=3x^4$ (1), $y_2=x^4$ (2).

12.



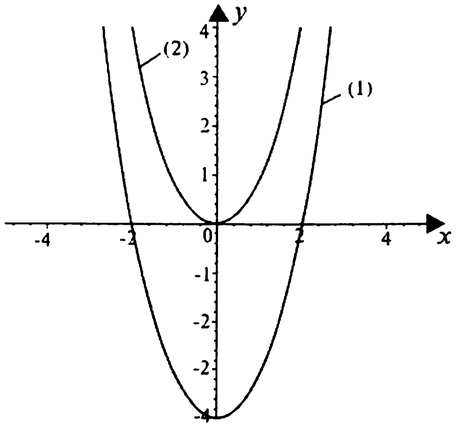
12- chizma. $y_1 = \frac{3}{5}(x-2)^2$ (1), $y_2 = (x-2)^2$ (2).

19.



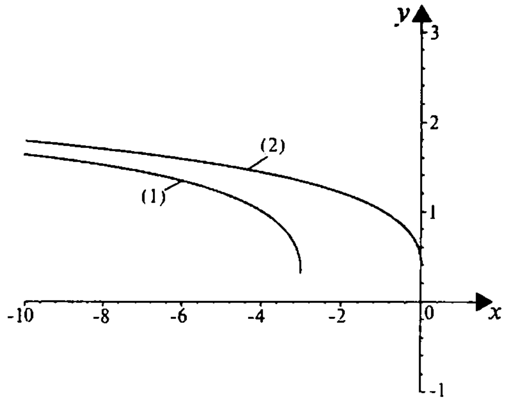
19- chizma. $y_1 = -\sin(3x + \frac{\pi}{4})$ (1), $y_2 = -\sin 3x$ (2),
$y_3 = \sin 3x$ (3), $y_4 = \sin x$ (4).

20.



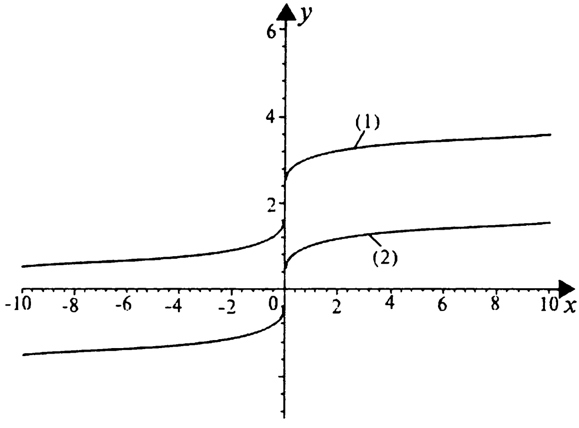
20- chizma. $y_1 = x^2 - 4$ (1), $y_2 = x^2$ (2)

21.



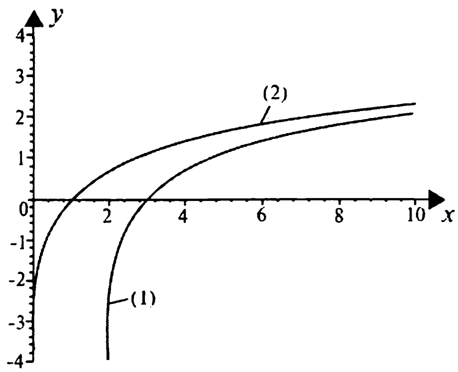
21- chizma. (1) $y_1 = \sqrt[4]{-x-3}$, (2) $y_2 = \sqrt[4]{-x}$.

22.



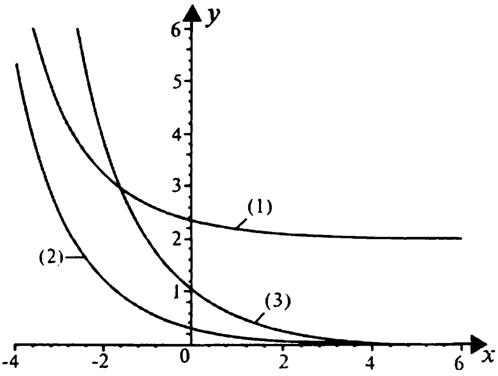
22- chizma. (1) $y_1 = \sqrt[5]{-x} + 2$, (2) $y_2 = \sqrt[5]{-x}$ (2).

23.



23- chizma. $y_1 = \ln(x-2)$ (1), $y_2 = \ln x$ (2).

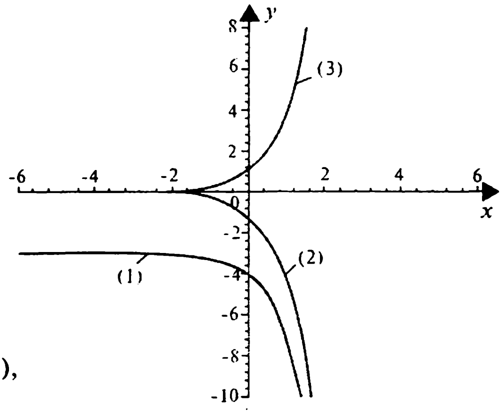
24.



24- chizma.

$y_1 = \frac{1}{3}2^{-x} + 2$ (1), $y_2 = \frac{1}{3}2^{-x}$ (2),
$y_3 = 2^{-x}$ (3).

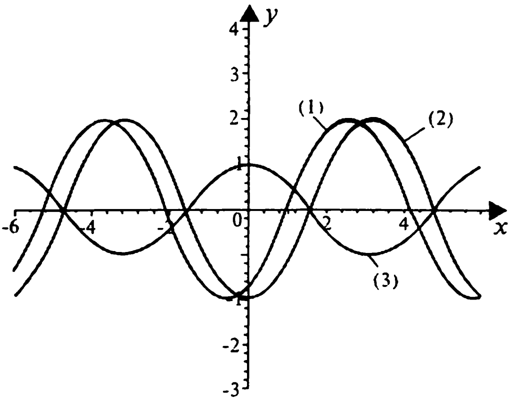
25.



25- chizma.

$y_1 = -4^x - 3$ (1), $y_2 = -4^x$ (2),
$y_3 = 4^x$ (3).

26.



26- chizma.

$y_1 = -2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ (1),
$y_2 = -2\cos x$ (2), $y_3 = \cos x$ (3).

11-§. GIPERBOLIK FUNKSIYALAR VA ULARNING GRAFIKLARI

1. Giperbolik funksiyalar.

1) Giperbolik sinus funksiyasi.

1- ta'rif. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ funksiya *giperbolik sinus* deyiladi va u sh x kabi belgilanadi:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Giperbolik sinus quyidagi xossalarga ega:

1^0. $y = \operatorname{sh} x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami $(-\infty, +\infty)$.

2^0. $y = \operatorname{sh} x$ funksiya o'z aniqlanish sohasida uzluksiz va monoton o'suvchi.

3^0. $y = \operatorname{sh} x$ toq funksiya: barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ lar uchun $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ bo'ladi.

4^0. $O(0; 0)$ nuqta funksiya grafigi uchun egilish nuqtasi va simmetriya markazi bo'ladi.

$y = \operatorname{sh} x$ funksiya grafigiga O (0; 0) dan o'tgan urinmaning Ox o'qi bilan tashkil qilingan burchagi $\frac{\pi}{4}$ ga teng. Funksiya grafigi asimptotaga ega emas. sh x funksiyaning o'z aniqlanish sohasining chegara nuqtalaridagi o'zgarishi quyidagicha bo'ladi:

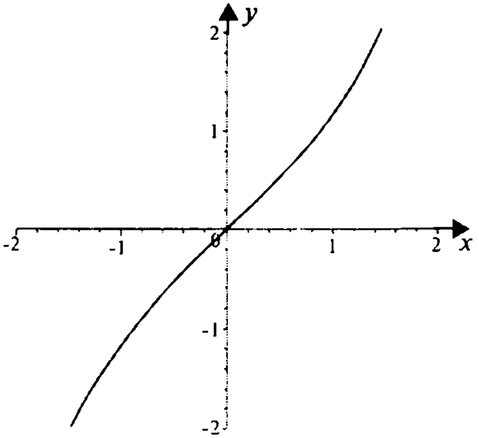
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty \quad \text{va} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.$$

Giperbolik sinusning grafigini chizishda grafiklar ustida arifmetik amallar mavzusidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi (9- §, 1, 4 -bandlarga q.). Avvalo e^x va e^{-x} funksiyalarning grafiklari chiziladi. So'ngra bu grafiklarni bir-biridan ayirib, hosil bo'lgan grafikni 2 marta siqish kerak. Natijada izlangan grafik hosil qilinadi (11.1- chizma).

2) Giperbolik kosinus.

2- ta'rif. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ funksiya *giperbolik kosinus* deb ataladi va uch x kabi belgilanadi:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



11.1- chizma. $y = \text{sh}\, x$.

Giperbolik kosinus quyidagi xossalarga ega.

1^0. $y = \text{ch}\, x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan boʻlib, uning qiymatlari toʻplami $[1; +\infty)$.

2^0. $y = \text{ch}\, x$ funksiya oʻz aniqlanish sohasida uzluksiz boʻlib, $(0; +\infty)$ oraliqda oʻsuvchi, $(-\infty, 0)$ da esa kamayuvchidir.

3^0. $y = \text{ch}\, x$ juft funksiya; yaʻni barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ lar uchun $\text{ch}\,(-x) = \text{ch}\, x$ boʻladi.

4^0. $(0; 1)$ nuqta $y = \text{ch}\, x$ funksiyaning minimum nuqtasi boʻladi.

$y = \text{ch}\, x$ funksiyaning grafigi asimptotaga ega emas. $y = \text{ch}\, x$ funksiyaning oʻz aniqlanish sohasining chegara nuqtalarida oʻzgarishi quyidagicha boʻladi:

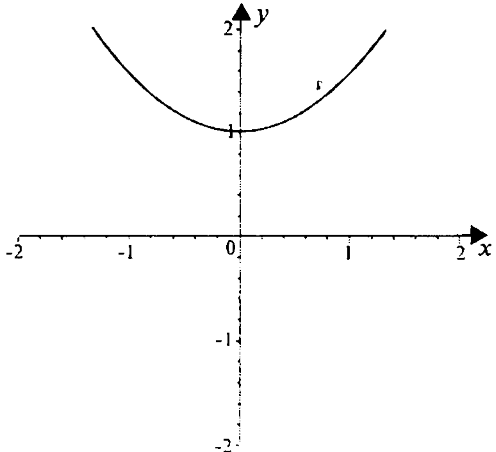
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty.$$

$y = \text{ch}\, x$ funksiyaning grafigini chizishda ham funksiyaning grafiklari ustida arifmetik amallar mavzusidan foydalaniladi (11.2-chizma).

3) Giperbolik tangens.

3- taʻrif. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ funksiya *giperbolik tangens* deb ataladi va u $\text{th}\, x$ kabi belgilanadi:

$$\text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



11.2- chizma. $y=\operatorname{ch} x$.

Giperbolik tangens quyidagi xossalarga ega:

1^0. $y=\operatorname{th} x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari to'plami $[-1;1]$.

2^0. $y=\operatorname{th} x$ funksiya o'z aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lib, $(-\infty,+\infty)$ oraliqda o'suvchi funksiya bo'ladi.

3^0. $y=\operatorname{th} x$ toq funksiya, ya'ni barcha $x\in(-\infty,+\infty)$ lar uchun $\operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th} x$ bo'ladi.

4^0. $O(0;0)$ nuqta funksiya grafigi uchun simmetriya markazi va egilish nuqtasi bo'ladi.

5^0. $y=\pm 1$ to'g'ri chiziqlar funksiya grafigi uchun gorizontal asimptotalar bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = -1$.

$y=\operatorname{th} x$ funksiyaning grafigini chizishda uning yuqoridagi xossalaridan va grafiklarni bo'lish usulidan (9- §, 2- bandga q.) foydalaniladi (11.3- chizma).

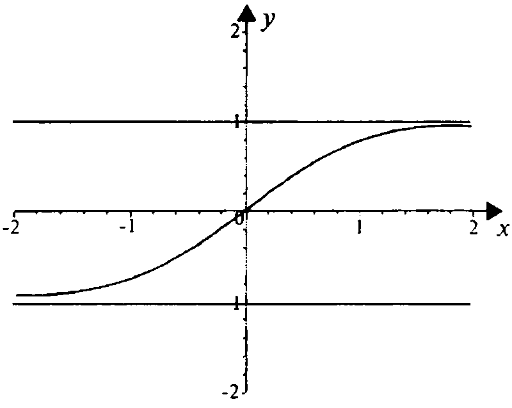
4) Giperbolik kotangens.

4- ta'rif. $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ funksiya *giperbolik kotangens* deb ataladi va u $\operatorname{cth} x$ kabi belgilanadi.

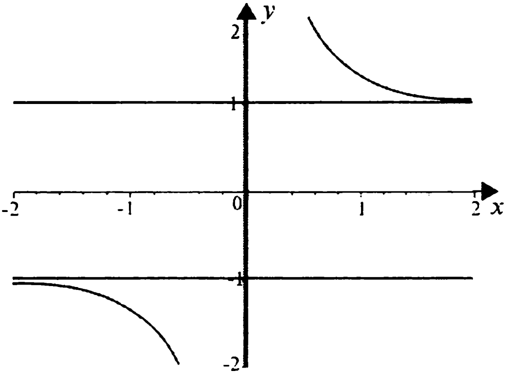
$$\operatorname{cth} x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Giperbolik kotangens quyidagi xossalarga ega:

1^0. $y=\operatorname{cth} x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(\operatorname{cth})=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, qiymatlar to'plami $E(\operatorname{cth})=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.



11.3- chizma. $y=\text{th}\,x$.



11.4- chizma. $y=\text{cth}\,x$.

2^0. $y=\text{cth}\,x$ toq funksiya, ya'ni barcha $x\in D(\text{cth})$ lar uchun $\text{cth}(-x)=-\text{cth}\,x$ bo'ladi.

3^0. $y=\pm 1$ to'g'ri chiziqlar funksiya grafigi uchun gorizontal asimptotalar bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=1$.

4^0. $y=\text{cth}\,x$ funksiya nolga aylanmaydi, $x=0$ to'g'ri chiziq uning uchun vertikal asimptota bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=+\infty$,

$$\lim_{x\to-0}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=-\infty.$$

$y=\text{cth}\,x$ funksiyaning grafigi ham th x funksiyaning grafigi kabi chiziladi (11.4- chizma).

Giperbolik funksiyalar orasida quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \qquad \mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x,$$

$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y, \qquad \mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x,$$

$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y, \qquad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2},$$

$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}\,x + \mathrm{th}\,y}{1 + \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y}, \qquad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x + 1}{2}.$$

2. Teskari giperbolik funksiyalar. 1) **Teskari giperbolik sinus.** Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan, $x = \mathrm{sh}\,y$ funksiyaga $(-\infty, +\infty)$ da o'suvchi va uzluksiz bo'lgan teskari funksiyani aniqlash mumkin. Bu funksiya **teskari giperbolik sinus** deyiladi va u Arsh kabi belgilanadi. Bu funksiyani analitik ko'rinishda ifodalash uchun

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{yoki} \quad e^{2y} - 2x\,e^y - 1 = 0$$

tenglamani yechib, $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 + 1})$ ni topamiz (logarifm belgisi ostida musbat ifoda hosil bo'lishi uchun «+» ishorani olish zarur). Shunday qilib,

$$\mathrm{Arsh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Teskari giperbolik sinus quyidagi xossalarga ega:

1^0. $y = \mathrm{Arsh}\,x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(\mathrm{Arsh}\,x) = (-\infty, +\infty)$, qiymatlar to'plami $E(\mathrm{Arsh}\,x) = (-\infty, +\infty)$.

2^0. $y = \mathrm{Arsh}\,x$ o'z aniqlanish sohasida uzluksiz va o'suvchi funksiya.

3^0. $y = \mathrm{Arsh}\,x$ toq funksiya, ya'ni barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ lar uchun

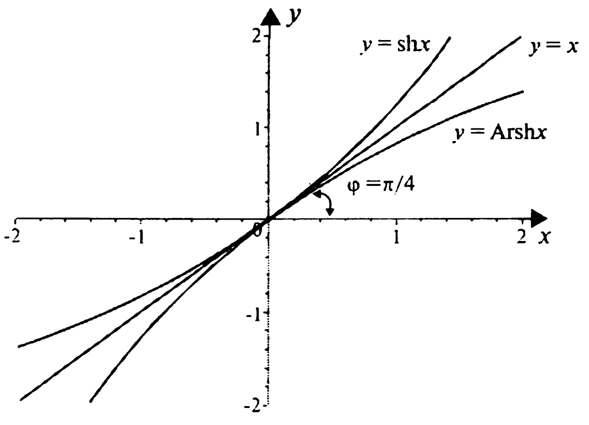
$$\mathrm{Arsh}(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\mathrm{Arsh}\,x.$$

4^0. $O(0;0)$ nuqta funksiyaning grafigi uchun simmetriya markazi va egilish nuqtasi bo'ladi.

5^0. $y = \mathrm{Arsh}\,x$ funksiyaning grafigi 11.5- chizmadan iborat.

$y = \mathrm{Arsh}\,x$ funksiyaning grafigi asimptotaga ega emas.

2) Teskari giperbolik kosinus. $x = \mathrm{ch}\,y$ funksiya $0 \le y < +\infty$ da o'suvchi bo'lib, qiymatlari to'plami $1 \le x < +\infty$ dan iboratdir. Teskari funksiyaning



11.5- chizma.

mavjudligi haqidagi teoremaga asosan, unga $1 \leq x < +\infty$ da o'suvchi va uzluksiz bo'lgan teskari funksiya mavjud bo'ladi. Bu funksiya *teskari giperbolik kosinus* deyiladi va $y = \text{Arch}\, x$ ko'rinishda yoziladi. Ushbu $x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ tenglamani yechib, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (bunda $1 \leq x$) ni hosil qilamiz (Bu yerda «+» ishora olinadi). Shunday qilib $\text{Arch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (11.6- chizma). $y = \text{Arch}\, x$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

1⁰. $y = \text{Arch}\, x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(\text{Arch}) = [1, +\infty)$, qiymatlar to'plami $E(\text{Arch}) = (-\infty, +\infty)$.

2⁰. $y = \text{Arch}\, x$ toq funksiya: $\forall x \in D(\text{Arch})$ lar uchun $\text{Arch}\,(-x) = -\text{Arch}\, x$.

3⁰. $y = \text{Arch}\, x$ funksiya grafigi uchun $O(0; 0)$ nuqta simmetriya markazi bo'lib, u o'z navbatida egilish nuqtasi ham bo'ladi.

4⁰. $y = \text{Arch}\, x$ funksiya asimptotaga ega emas.

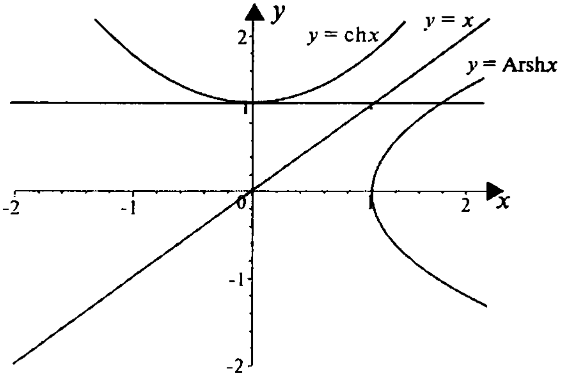
5⁰. $y = \text{Arch}\, x$ funksiyaning grafigi 11.6- chizmada tasvirlangan.

3) Teskari giperbolik tangens. $y = \text{th}\, x$ ga teskari funksiya teskari giperbolik tangens deyiladi va u $y = \text{Arth}\, x$ kabi belgilanadi.

Yuqorida ko'rsatilganiga o'xshash amallar natijasida

$$\text{Arth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

ekanligi topiladi.



11.6- chizma.

Teskari giperbolik tangens quyidagi xossalarga ega:

1^0. $y=\mathrm{Arth}\,x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(\mathrm{Arth})=(-1;1)$, qiymatlar to‘plami $E(\mathrm{Arth})=(-\infty,+\infty)$.

2^0. $y=\mathrm{Arth}\,x$ toq funksiya: barcha $x\in D(\mathrm{Arth})$ lar uchun $\mathrm{Arth}\,(-x)=-\mathrm{Arth}\,x$.

3^0. $y=\mathrm{Arth}\,x$ funksiya $(-1;\,1)$ da o‘suvchi va uzluksiz.

4^0. $(0;\,0)$ nuqta $y=\mathrm{Arth}\,x$ funksiya grafigi uchun simmetriya markazi bo‘lib, u o‘z navbatida egilish nuqtasi ham bo‘ladi.

5^0. $y=\mathrm{Arth}\,x$ funksiya $x=\pm1$ vertikal asimptotalarga ega.

6^0. $y=\mathrm{Arth}\,x$ funksiyaning grafigi 11.7- chizmadan iborat.

4) Teskari giperbolik kotangens. $y=\mathrm{cth}\,x$ ga teskari funksiya *teskari giperbolik kotangens* deyiladi va $y=\mathrm{Arcth}\,x$ kabi belgilanadi. Uning analitik ifodasi

$$\mathrm{Arcth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\quad(|\,x\,|>1)$$

ko‘rinishda topiladi.

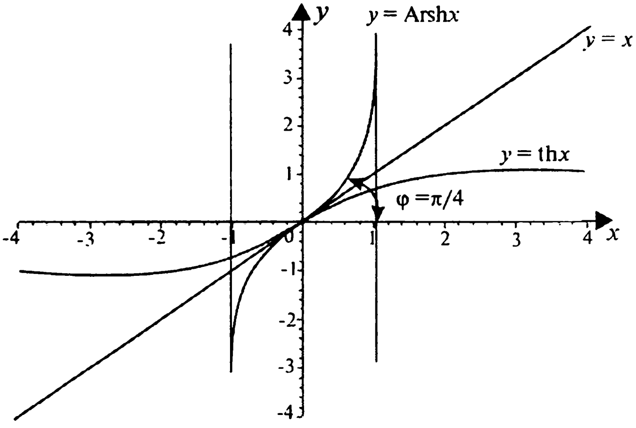
Teskari giperbolik kotangens quyidagi xossalarga ega:

1^0. $y=\mathrm{Arcth}\,x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(\mathrm{Arcth})=(-\infty;\,-1)\cup(1;+\infty)$, qiymatlar to‘plami $E(\mathrm{Arcth})=(-\infty,+\infty)$ dan iborat.

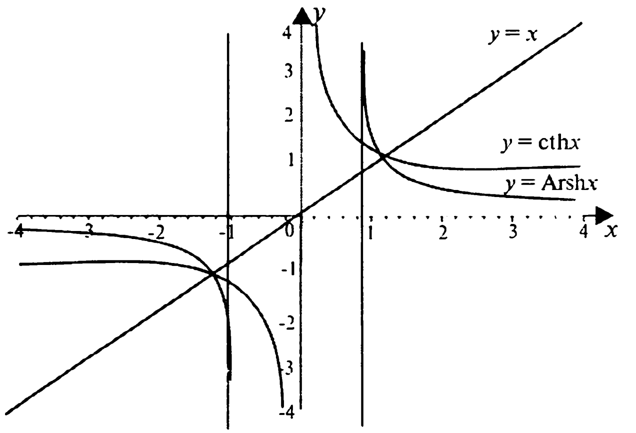
2^0. $y=\mathrm{Arcth}\,x$ toq funksiya: barcha $x,\,-x\in D\,(\mathrm{Arcth})$ lar uchun $\mathrm{Arcth}\,(-x)=\mathrm{Arcth}\,x$.

3^0. $y=\mathrm{Arcth}\,x$ funksiya $\forall x\in(-\infty,-1)$ uchun 0 dan $-\infty$ gacha monoton kamayuvchi, $\forall x\in(1;+\infty)$ uchun $+\infty$ dan 0 gacha monoton kamayuvchi.

4^0. $y=\mathrm{Arcth}\,x$ funksiya egilish nuqtalariga ega emas.



11.7- chizma.



11.8- chizma.

5^0. y =Arcth x funksiya uchun x=±1 vertikal asimptotalar, y =0 esa gorizontal asimptota chiziqlari bo'ladi.

6^0. y =Arcth x funksiyaning grafigi 11.8- chizmada tasvirlangan.

Giperbolik va teskari giperbolik funksiyalarning grafiklarini tahlil qilish natijasida quyidagi xulosaga kelish mumkin: *teskari giperbolik funksiyalarning grafigini ularga mos giperbolik funksiyalar grafiklarini* $\angle xOy$ *burchak bissektrisasiga nisbatan simmetrik akslantirish natijasida hosil qilish mumkin.*

Teskari giperbolik funksiyalarning $y=\text{Arch}\,x$ (area-sinus), $y=\text{Arch}\,x$ (area-kosinus), $y=\text{Arth}\,x$ (area-tangens), $y=\text{Arcth}\,x$ (area-kotangens) belgilanishidagi «Ar» area (yuza) so'zidan kelib chiqqan, chunki *area*— funksiyalar geometrik jihatdan giperbolik sektor yuzini ifoda etadi.

12-§. ALGEBRAIK FUNKSIYALARNING GRAFIKLARI

Bu paragrafda butun ratsional (ko'phad), kasr ratsional, irratsional funksiyalarning grafiklari qaraladi.

1. Butun ratsional funksiyalarning grafigi.

Umumiy holda butun ratsional funksiya $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko'rinishda bo'ladi, bunda n — butun musbat son, a_0, $a_1,\ldots, a_n$ — haqiqiy o'zgarmas sonlar. Eng sodda butun ratsional funksiyalar: o'zgarmas ($n=0$), to'g'ri proporsionallik ($n=1$, $a_1=0$) va chiziqli funksiyalar ($n=1$) hisoblanadi.

O'zgarmas funksiya haqida batafsil ma'lumot 8- § da keltirilgan edi.

1) To'g'ri proporsionallik. *To'g'ri proporsionallik* deb, $y=kx$ formula bilan berilgan funksiyaga aytiladi, bu yerda $k\neq 0$; k son *proporsionallik koeffitsiyenti* deyiladi.

$y=kx$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

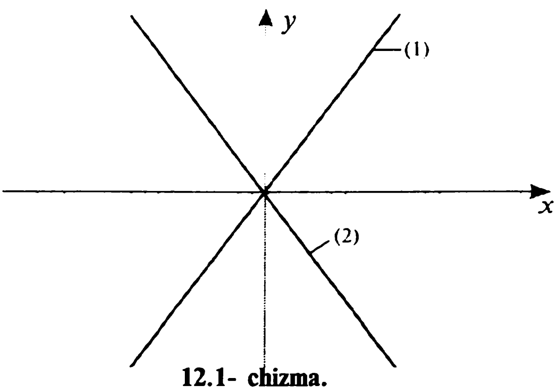
1^0. Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f)=R^1$.

2^0. Funksiyaning o'zgarish sohasi: $E(f)=R^1$.

3^0. $y=kx$ — toq funksiya: $f(-x)=k(-x)=-kx=-f(x)$.

4^0. $k>0$ da o'sadi, $k<0$ da esa kamayadi.

$y=kx$ to'g'ri proporsionallikning grafigi koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iborat (12.1- chizma).



12.1- chizma.
(1) $y=kx\,(k>0)$, (2) $y=kx\;(k<0)$

2) Chiziqli funksiya. $y=kx+b$ (bu yerda k va b — haqiqiy sonlar) ko'rinishda berilgan funksiya *chiziqli funksiya* deyiladi. Xususiy holda, $k=0$ bo'lsa, $y=b$ o'zgarmas funksiya hosil bo'ladi.

Agar $b=0$ bo'lsa, $y=kx$ to'g'ri proporsionallik hosil bo'ladi.

$y=kx+b$ ($k\neq0$, $b\neq0$) chiziqli funksiya quyidagi xossalarga ega:

1^0. Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f)=R^1$.

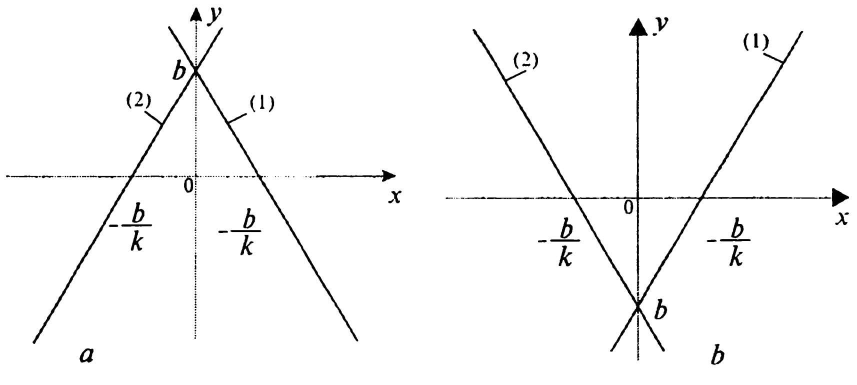
2^0. Funksiyaning o'zgarish sohasi: $E(f)=R^1$.

3^0. Funksiya toq ham emas, juft ham emas.

4^0. Funksiya $k>0$ bo'lganda o'sadi, $k<0$ bo'lganda esa kamayadi.

$y=kx+b$ chiziqli funksiyaning grafigi to'g'ri chiziqdan iborat. Uning grafigi $y=kx$ funksiyaning grafigini ordinatalar o'qi bo'ylab b birlik siljitish natijasida hosil qilinadi. $y=kx$ va $y=kx+b$ funksiyalarning grafiklari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar bo'ladi.

Chiziqli funksiyaning grafigini yasash uchun fuksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish yetarli. Bu grafikning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari $(-\frac{b}{k};0)$ va $(0;b)$ bo'ladi (12.2- *a*, *b* chizmalar).



12.2- chizma.

a) (1) $y=kx+b$, $b>0$, $k<0$,
(2) $y=kx+b$, $b>0$, $k>0$.

b) (1) $y=kx+b$, $b<0$, $k>0$.
(2) $y=kx+b$, $b<0$, $k<0$.

3) Kvadrat funksiya (kvadrat uchhad) ning grafigi.

Ta'rif. Parametrlari $a\neq0$, b va c haqiqiy sonlar bo'lgan

$$y=ax^2+bx+c \qquad (1)$$

ko'rinishdagi funksiya *kvadrat uchhad* yoki *kvadrat funksiya* deyiladi.

Amaliyotda (1) shaklda ifodalanadigan funksional bog'lanishlar juda ko'p uchraydi .

Masalan, v_0 (m/s) boshlang'ich tezlikda tekis o'zgaruvchan harakat qilayotgan jismning o'tgan yo'li s (m) vaqt t (s) ning funksiyasi sifatida

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda a — tekis o'zgaruvchan harakatning tezlanishi.

Kvadrat uchhadning o'ng tomonini ushbu ko'rinishda ifodalaymiz:

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c =$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2})\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}.$$

Bunda $D = b^2 - 4ac$ kvadrat uchhadning *diskriminanti* deyiladi. Bu funksiyaning grafigi *parabola* deb ataluvchi egri chiziqdan iborat. Kvadrat funksiyaning grafigini chizishda quyidagi xossalardan foydalaniladi:

1⁰. Kvadrat funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(y) = R^1$.

2⁰. Kvadrat funksiyaning o'zgarish sohasi:

$$\begin{cases} a > 0 \text{ bo'lganda } & E(f) = [n, +\infty) \\ a < 0 \text{ bo'lganda } & E(f) = (-\infty, n],\ n = \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{cases}$$

3⁰. Kvadrat funksiya har bir $x \in R^1$ da uzluksiz.

4⁰. Kvadrat funksiya faqat bitta $x_0 = -\frac{b}{2a}$ kritik nuqtaga ega.

Funksiyaning $x = x_0$ dagi qiymati $y_0 = -\frac{D}{4a}$ ga teng. $M(x_0; y_0)$ nuqta parabolaning uchidir.

5⁰. Agar $a > 0$ bo'lsa, funksiya $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nuqtada minimumga ega bo'lib, $(-\infty; x_0)$ da kamayuvchi, $(x_0; +\infty)$ da o'suvchidir, $(-\infty; +\infty)$ da grafikni ifodalovchi egri chiziq qavariq bo'ladi.

6⁰. Agar $a < 0$ bo'lsa, funksiya $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nuqtada maksimumga ega va $(-\infty; x_0)$ da o'suvchi, $(x_0; +\infty)$ da kamayuvchidir, $(-\infty; +\infty)$ da grafikni ifodalovchi egri chiziq botiq bo'ladi.

7^0. $b \neq 0$ bo'lganda kvadrat funksiya toq ham, juft ham emas, $b=0$ bo'lganda esa u juft funksiyadan iborat.

8^0. Kvadrat funksiyaning grafigi ordinatalar o'qini doimo $y(0)=c$ nuqtada kesib o'tadi, abssissalar o'qini esa hamma vaqt ham kesib o'tavermaydi.

Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) $D<0$ bo'lganda grafik abssissalar o'qini kesib o'tmaydi;

2) $D=0$ bo'lganda grafik $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nuqtada abssissalar o'qiga urinadi;

3) $D>0$ bo'lganda grafik abssissalar o'qini $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ nuqtalarda kesib o'tadi.

9^0. Kvadrat funksiyani $y = x^2(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2})$ ko'rinishga keltiramiz. Agar $x \to \infty$ da $\frac{b}{x} \to 0$, $\frac{c}{x^2} \to 0$ ekanligini hisobga olsak, funksiyaning qiymatlari a ning ishorasi qanday bo'lsa, shu ishorali cheksizlikka intiladi. Demak, parabolaning tarmoqlari $a > 0$ bo'lganda yuqoriga, $a < 0$ bo'lganda esa pastga yo'nalgan bo'lar ekan.

Quyidagi kvadrat funksiyalar berilgan bo'lsin:

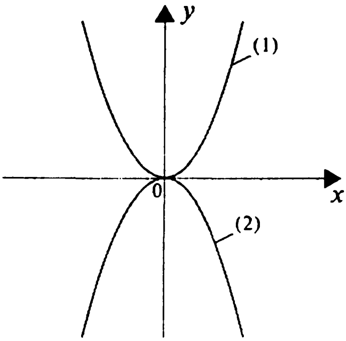
1) $y=ax^2$, 2) $y=ax^2+n$, 3) $y=a(x-m)^2$,

4) $y=a(x-m)^2+n$, 5) $y=ax^2+bx+c$.

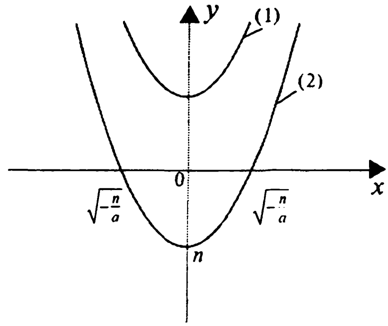
Bularning barchasining grafigi bir xil ko'rinishdagi parabolalardan iborat, chunki $y=ax^2$ funksiyaning grafigi ma'lum bo'lganda (12.3- chizma), uni Oy o'qi bo'yicha n birlik ($n>0$ bo'lganda yuqoriga, $n<0$ bo'lganda pastga) siljitish bilan $y=ax^2+n$ funksiyaning grafigi hosil qilinadi (12.4-, 12.5- chizmalar).

$y=a(x-m)^2$ funksiyaning grafigi ham paraboladan iborat. Uni $y=ax^2$ funksiyaning grafigidan $m>0$ bo'lganda bu grafikni x o'qi bo'yicha m birlik o'ngga parallel ko'chirish yordamida yoki $m < 0$ bo'lganda esa, $-m$ birlik chapga parallel ko'chirish yordamida hosil qilish mumkin (12.6-, 12.7-chizmalar).

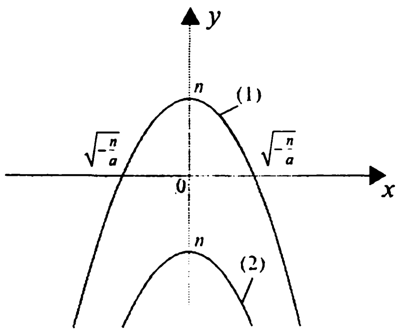
$y=a(x-m)^2+n$ funksiyaning grafigi ham parabola bo'lib, uni $y=ax^2$ funksiyaning grafigidan ikkita parallel ko'chirish yordamida: agar $m>0$ bo'lsa, grafikni x o'qi bo'ylab m birlik o'ngga siljitish, yoki $m<0$ bo'lsa, $-m$ birlik chapga siljitish va agar $n>0$ bo'lsa, y o'qi bo'ylab n birlik yuqoriga siljitish yoki agar $n < 0$ bo'lsa, $-n$ birlik pastga siljitish yordamida hosil qilish mumkin (12.8-chizma).



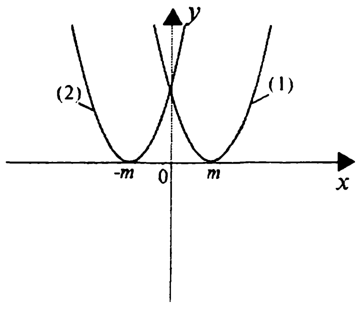
12.3- chizma.
$y = ax^2$, (1) $a>0$, (2) $a<0$.



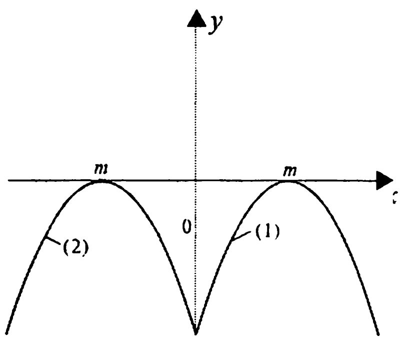
12.4- chizma.
$y = ax^2+n$, (1) $a>0$, $n>0$.
(2) $a>0$, $n<0$.



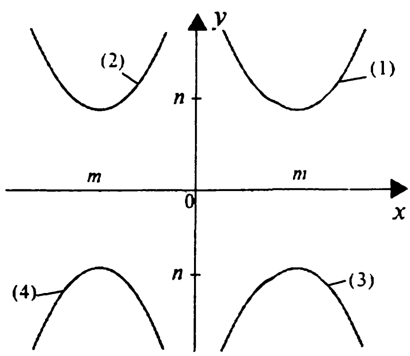
12.5- chizma.
$y = ax^2+n$, (1) $a<0$, $n>0$.
(2) $a<0$, $n<0$



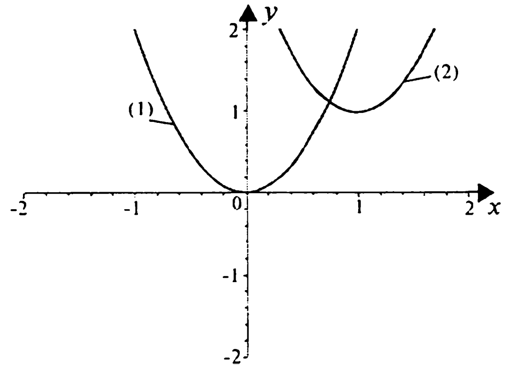
12.6- chizma.
$y = a(x-m)^2$, (1) $a>0$, $m>0$,
(2) $a>0$, $m<0$.



12.7- chizma.
$y = a(x-m)^2$, (1) $a<0$, $m>0$,
(2) $a<0$, $m<0$.



12.8- chizma. $y = a(x-m)^2+n$, (1) $a>0$, $m>0$, $n>0$, (2) $a>0$, $m<0$, $n>0$, (3) $a<0$, $m>0$, $n<0$, (4) $a<0$, $m<0$, $n<0$.



12.9- chizma.
(1) $y=2x^2$, (2) $y=2(x-1)^2+1$.

Agar $y=ax^2+bx+c$ funksiya berilgan bo‘lsa, u 4) shaklga ($y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a}$), bunda ($m=-\frac{b}{2a}, n=-\frac{D}{4a}$)) keltiriladi va uning grafigi 4) ning grafigi kabi chiziladi.

1-misol. $y=2x^2-4x+3$ funksiya grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiyani 4) shaklga keltiramiz:

$$y=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1,$$

bunda $a=2$, $m=1$, $n=1$. Bu funksiyaning grafigini chizish uchun $y=2x^2$ parabolaning $O(0;0)$ uchini $m=1$ birlik o‘ngga va $n=1$ birlik yuqoriga siljitish kifoya (12.9- chizma).

4) Kub funksiya (uchinchi darajali ko‘phad) ning grafigi.

Uchinchi darajali ko‘phadning umumiy ko‘rinishi

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \qquad (1)$$

shaklda bo‘ladi, bunda $a \neq 0$, b, c, d — ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

a) Agar $a=1$, $b=c=d=0$ bo‘lsa, ko‘phadning ko‘rinishi $y=x^3$ shaklida bo‘ladi. Bu funksiyani 8-§ da o‘rgangan edik (12.10- chizma).

b) Agar $a=1$, $c=k\neq 0$, $b=d=0$ bo‘lsa, kub funksiya (1)

$$y=x^3+kx \qquad (2)$$

ko‘rinishga keladi.

$y=x^3+kx$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

1^0. (2) funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$ dan iborat.

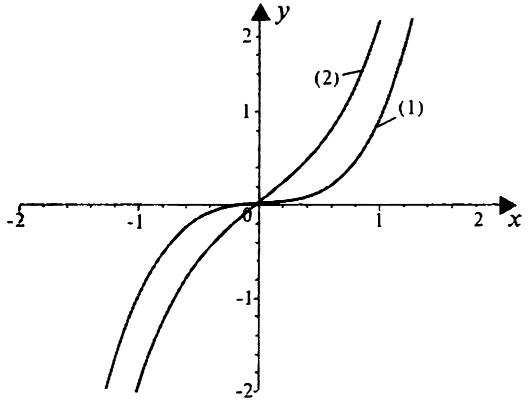
2^0. Toq funksiya.

3^0. Agar $k>0$ bo'lsa, (2) funksiyaning grafigi $O(0;0)$ dan o'tadi. $k>0$ da $y=x^3$ va $y=kx$ funksiyalar o'suvchi bo'lgani uchun $y=x^3+kx$ funksiya ham o'suvchi, ekstremumga ega emas.

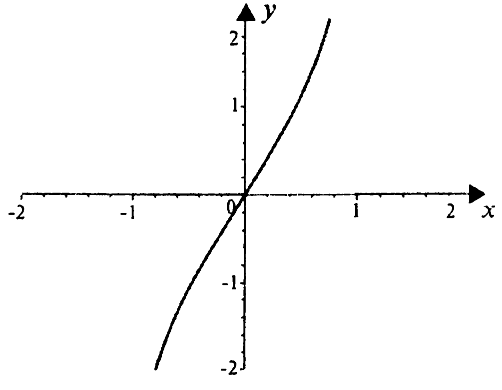
4^0. (2) funksiyaning grafigi $x\in(0;+\infty)$ da qavariq ($(-\infty;0)$ da botiq). Har qanday kub funksiyaga chiziqli funksiyani qo'shganda funksiya grafigining botiqligi (qavariqligi) o'zgarmaydi.

5^0. $O(0;0)$ nuqta (2) funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

6^0. $k>0$ bo'lganda $y=x^3+kx$ funksiyaning grafigi $y=x^3$ funksiyaning grafigiga qaraganda tikroq ko'tariladi (12.11- chizma).



12.10- chizma. (1) $y=x^3$, (2) $y=x^3+x$.



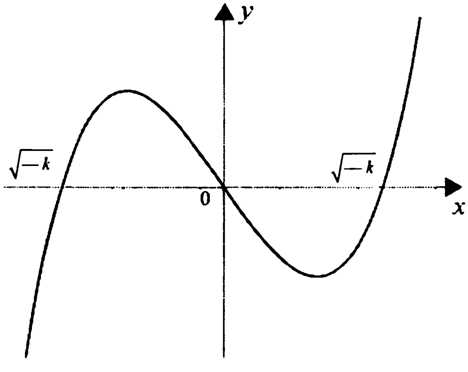
12.11- chizma. $y=x^3+kx$, $k>0$.

7^0. $k<0$ bo'lganda, (2) funksiyaning grafigi $O(0;0)$, $(\sqrt{-k};0), (-\sqrt{-k};0)$ nuqtalardan o'tadi (12.12- chizma).

8^0. $k<0$ bo'lganda, (2) funksiya $x \in (-\infty; -\sqrt{\frac{-k}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{-k}{3}}; +\infty)$ da o'sadi, $x \in (-\sqrt{\frac{-k}{3}}; \sqrt{\frac{-k}{3}})$ da esa kamayadi.

9^0. Agar $k<0$ bo'lsa, (2) funksiya $x=-\sqrt{\frac{-k}{3}}$ nuqtada maksimumga ($Y_{\max} = -\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}}$), $x = \sqrt{\frac{-k}{3}}$ nuqtada esa minimumga ($Y_{\min} = \frac{2k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}}$) ega (12.12- chizma).

a) $y=x^3+kx+b$ funksiyaning $y=x^3+kx$ grafigi funksiya grafigini ordinatalar o'qi bo'ylab $|b|$ masshtab birligiga parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi, bunda uning ishorasi b ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi.



12.12- chizma. $y=x^3+kx$, $k<0$.

b) $y=x^3+bx+cx+d$ funksiyaning grafigini chizish uchun koordinatalar boshini

$$\begin{cases} x = x' - \frac{b}{3} \\ y = y' \end{cases}$$

almashtirish yordamida parallel ko'chiramiz, unda berilgan funksiya

$$y = x'^3 + k_1 x' + b_1$$

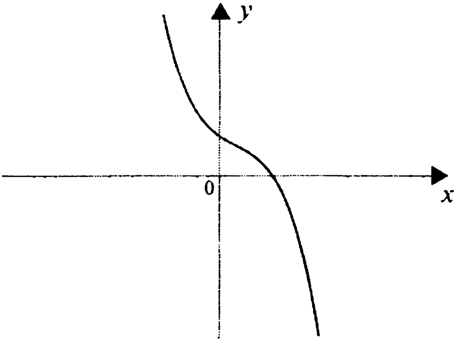
shaklga keladi. Shunday qilib, $y=x^3+bx^2+cx+d$ funksiyaning grafigi

$y=x^3+kx+b$ funksiyaning grafigi kabi bo'lar ekan, bunda faqat uning simmetriya markazi abssissalar o'qi bo'ylab $-\frac{b}{3}$ masofaga siljigan bo'ladi.

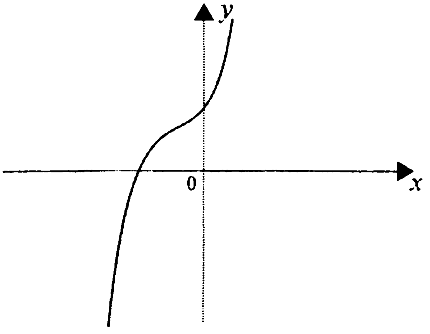
d) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ funksiyaning grafigini chizish $y=x^3+kx+b$ funksiyaning grafigini chizishga keltiriladi. Haqiqatan ham, $y=ax^3+bx^2+cx+d$ funksiyani $y=a(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a})$ ko'rinishga keltiramiz, keyin $y_1=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$ funksiyaning grafigini chizamiz, so'ngra bu grafikni ordinata o'qi bo'ylab a marta cho'zish (siqish) natijasida berilgan funksiya grafigini hosil qilamiz. $y=ax^3+bx^2+cx+d$ funksiyaning grafigi ham paraboladan iborat bo'ladi.

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ funksiya a va $\Delta=3ac-b^2$ miqdorlarning ishorasiga bog'liq bo'lgan quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\Delta>0$ bo'lib, $a>0$ da funksiya monoton o'sadi, $a<0$ da esa monoton kamayadi (12.13-, 12.14-chizmalar).



12.13- chizma.
$y=ax^3+bx^2+cx+d$.



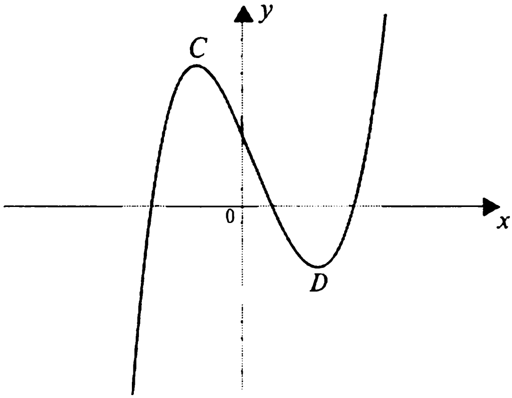
12.14- chizma.
$y=ax^3+bx^2+cx+d$.

2^0. $\Delta<0$ bo'lsa, unda funksiya bitta maksimum va bitta minimumga ega bo'ladi, ya'ni

$$C\left(-\frac{-b+\sqrt{-\Delta}}{3a};\ d+\frac{2b^3-9abc+(6ac-2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right),$$

$$D\left(-\frac{b-\sqrt{-\Delta}}{3a};\ d+\frac{2b^3-9abc+(6ac-2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^3}\right)$$

nuqtalarda mos ravishda maksimum va minimumga ega bo'ladi (12.15-chizma).



12.15- chizma. $y=ax^3+bx^2+cx+d.$

Funksiya grafigining Ox o'qi bilan kesishish nuqtalarining abssissalari $ax^3+bx^2+cx+d=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlaridan iborat bo'ladi. Uning egilish nuqtasi bir vaqtning o'zida funksiya grafigining simmetriya markazi ham bo'ladi.

5) Bikvadrat funksiya va uning grafigi.

Ta'rif. Ushbu ko'rinishdagi funksiyaga bikvadrat funksiya deyiladi:

$$y=ax^4+bx^2+c, \quad a\neq 0,$$

bunda $a,b,c\in R^1$.

Bikvadrat funksiyani tekshirish va uning grafigini chizish Dekart koordinatalar sistemasida kvadrat funksiyani tekshirish va uning grafigini chizish kabi bo'ladi.

Ba'zi hollarda bikvadrat funksiyaning grafigi $y=x^4$, $y=x^2$ funksiyalarning grafigi yordamida chiziladi. Haqiqatan ham,

$$y = ax^4 + bx^2 + c = \frac{b^2}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}x^4 + \frac{a}{b}x^2\right) + c =$$

$$= \frac{b^2}{a}\left(\frac{x^4}{\frac{b^2}{a^2}} + \frac{x}{\frac{b}{a}}\right) + c = \frac{b^2}{a}\left(\left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^4 \pm \left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^2\right) + c$$

ko‘rinishga keltiramiz. Demak, $y=ax^4+bx^2+c$ funksiyaning grafigini $y=x^4+x^2$ yoki $y=x^4-x^2$ funksiyalarning grafiklarini har ikkala koordinata o‘qlari bo‘yicha cho‘zish (siqish) va ordinatalar o‘qi bo‘ylab $|c|$ masshtab birlikka parallel ko‘chirish natijasida hosil qilinadi (12.16-, 12.17-chizmalar). $y=x^4+x^2$ funksiyaning grafigi $y=x^4$ va $y=x^2$ funksiyalar grafiklarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

6) n - darajali funksiya va uning grafigi. Ushbu ko‘rinishdagi ifoda n - *darajali funksiya* (*ko‘phad*) deyiladi:

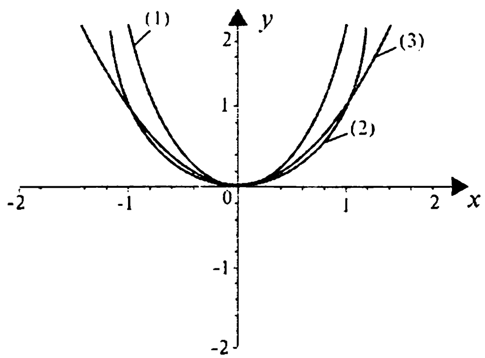
$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

bunda $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — haqiqiy sonlar.

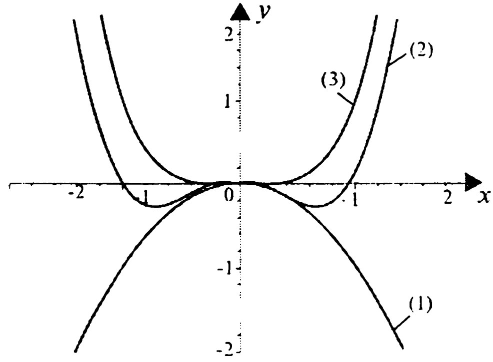
(1) ko‘phadning grafigi parabolik tipdagi egri chiziqdan iborat bo‘ladi.

(1) funksiya quyidagi xossalarga ega:

1°. (1) funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda aniqlangan uzluksiz funksiyalar yig‘indisidan iborat.



12.16- chizma. (1) $y=x^4+x^2$, (2) $y=x^4$, (3) $y=x^2$.



12.17- chizma. (1) $y=-x^2$, (2) $y=x^4-x^2$, (3) $y=x^4$.

2^0. $n=2k-1$, $k\in N$ toq bo'lsin, (1) funksiya $a_0>0$ bo'lganda $-\infty$ dan $+\infty$ gacha, $a_0<0$ bo'lganda esa $+\infty$ dan $-\infty$ gacha uzluksiz o'zgaradi. $n=2k-1$ ($k\in N$) -darajali ko'phadni ifodalovchi funksiya abssissalar o'qini 1 dan n martagacha kesib o'tishi (unga urinishi) mumkin. Bunda funksiya ekstremumga ega bo'lmasligi ham mumkin. Agar funksiya ekstremumga ega bo'lsa, ularning soni juft bo'lib, 2 dan $n-1$ gacha, maksimum va minimum nuqtalari almashib keladi. Bundan tashqari, uning egilish nuqtalari toq sonda (1 dan $n-2$ tagacha) bp'ladi.

3^0. $n=2k$, $k\in N$ — juft bo'lsin, $a_0>0$ bo'lganda (1) funksiya $+\infty$ dan $-\infty$ gacha, $a_0<0$ bo'lganda esa $-\infty$ dan $+\infty$ gacha uzluksiz o'zgaradi. (1) funksiyaning grafigi abssissalar o'qini kesmasligi (unga urinmasligi) mumkin. Agar (1) funksiya abssissalar o'qini kessa, 1 dan n martagacha kesadi (urinadi). Funkiya toq sondagi ekstremum nuqtalarga (1 dan $n-1$ tagacha) ega bo'lib, maksimum va minimumlari almashib keladi. Funksiyaning grafigi asimptotalarga ega bo'lmaydi.

7) $y=(ax^2+bx+c)^n$ **(n — butun musbat son) ko'rinishdagi funksiyaning grafigi.** Agar ax^2+bx+c kvadrat uchhad ikkita o'zaro teng haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, $y=(ax^2+bx+c)^n$ funksiya $y=a^n(x-\alpha)^{2n}$ (bunda α — kvadrat uchhadning ildizi) ko'rinishga keltiriladi. Bu funksiyaning grafigi $y=x^{2n}$ darajali (I- bob 8- § ga q.) funksiyaning grafigi yordamida chiziladi.

Agar ax^2+bx+c kvadrat uchhad haqiqiy har xil α va β ildizlarga ega bo'lsa, $(ax^2+bx+c)^n$ funksiyani

$$y=a^n(x-\alpha)^n\ (x-\beta)^n$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu funksiyaning grafigini chizish $y_1=a^n(x-\alpha)^n$ va $y_2=(x-\beta)^n$ funksiyalarning grafiklarini chizishga va ularni ko'paytirishga keltiriladi (II bob 9-§ ga q).

Agar ax^2+bx+c kvadrat uchhad kompleks ildizlarga ega bo'lsa, funksiyaning grafigini chizish, murakkab funksiyaning grafigini chizishga keltiriladi (II bob 17-§ ga q).

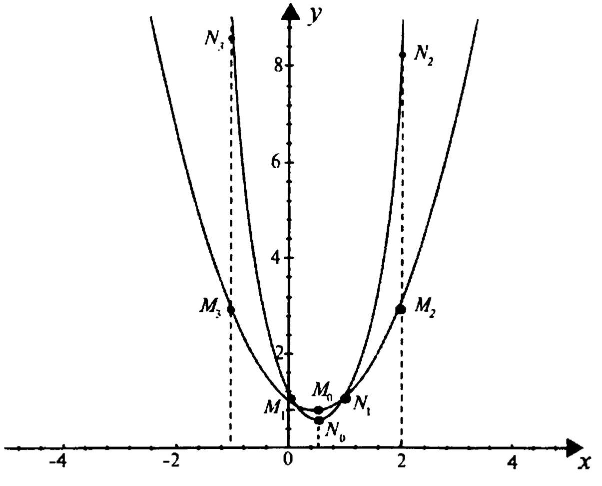
1- misol. $y=(x^2-x+1)^2$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. 1. Funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,+\infty)$ dan iborat. Aniqlanish sohasining chegaralarida

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=+\infty.$$

2. $y=x^2-x+1$ deb belgilaymiz, bunda $y=y_1^2.\,y_1=x^2-x+1$ funksiyaning grafigini chizamiz (12.18- chizma). U funksiyaning xarakterli nuqtalari, ya'ni parabolaning uchi $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$, koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtasi $M_1(0;1)$ topiladi va funksiya grafigida yordamchi $M_2(2;3)$, $M_3(-1;3)$ nuqtalar olinadi.

3. M_0, M_1, M_2, M_3 nuqtalarning ordinatalarini kvadratga ko'taramiz. Bu holda, mos ravishda $N_0\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$, $N_1(0;1)$,



12.18- chizma.

$N_2(2; 9)$, $N_3(-1; 9)$ nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalarni Dekart koordinatalar sistemasida joylashtirib, izlanayotgan funksiyaning grafigini chizamiz (12.18- chizma).

2- misol. $y=(x^2-4x+3)^2$ funksiyaning grafigini chizing.

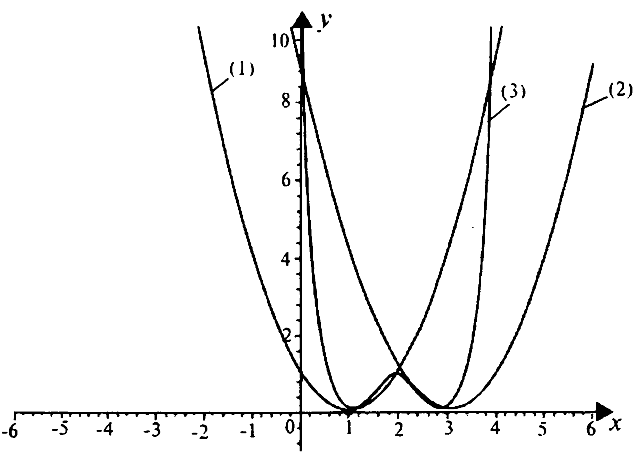
Yechilishi. x^2-4x+3 kvadrat uchhad ikkita haqiqiy har xil 1 va 3 ildizlarga ega. U holda berilgan funksiyani $y=(x-1)^2(x-3)^2$ ko'rinishda yozish mumkin. Endi

$$y_1=(x-1)^2,\ y_2=(x-3)^2$$

belgilashlarni kiritamiz, bunda $y=y_1\cdot y_2$, y_1, y_2 va y funksiyalarning grafiklarni chizish uchun ularning xarakterli nuqtarini topamiz:

x	0	1	2	3	4
y_1	1	0	1	4	9
y_2	9	4	1	0	1
y	9	0	1	0	9

Bu nuqtalarni 12.19- chizmada joylashtiramiz va izlanayotgan funksiyaning grafigini chizamiz.



12.19- chizma.

(1) $y_1=(x-1)^2$; (2) $y_2=(x-3)^2$; (3) $y=(x^2-4x+3)^2$.

2. Kasr-ratsional funksiyaning grafigi.

1) Teskari proporsionallik. Ushbu formula bilan berilgan funksiya teskari proporsionallik deyiladi:

$$y = \frac{k}{x} \text{ (bu yerda } k \neq 0\text{)}, \qquad (1)$$

bunda k son proporsionallik koeffitsiyenti deb ataladi.

$y = \frac{k}{x}$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

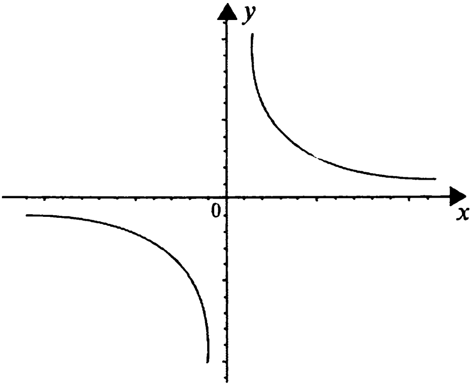
1^0. Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2^0. Funksiyaning o'zgarish sohasi: $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

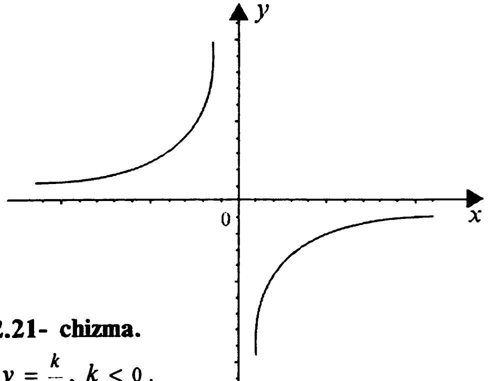
3^0. $y = \frac{k}{x}$ — toq funksiya: $f(-x) = \frac{k}{-x} = \frac{k}{x} = -f(x)$.

4^0. $k > 0$ bo'lganda, funksiya $(-\infty;0)$ va $(0;+\infty)$ oraliqlarda kamayadi. $k < 0$ bo'lganda, funksiya $(-\infty;0)$ va $(0;+\infty)$ oraliqlarda o'sadi.

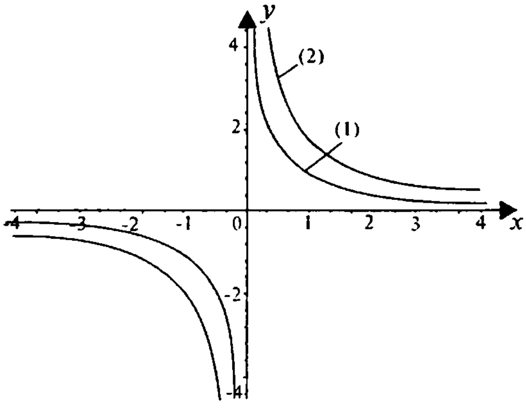
5^0. $k > 0$ bo'lganda, teskari proporsionallik grafigining tarmoqlari I va III choraklarda joylashadi, $k < 0$ bo'lganda esa II va IV choraklarda joylashadi (12.20-, 12.21-, 12,22- chizmalar). $y=\frac{k}{x}$ teskari proporsionallikning grafigi *giperbola* deyiladi.



12.20- chizma.
(1) $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$.



12.21- chizma.
(1) $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$.



12.22- chizma. (1) $y=\frac{1}{x}$, (2) $y=\frac{2}{x}$.

2) Sodda kasr-ratsional funksiyaning grafigi. Kasr-ratsional funksiyaning eng sodda ko'rinishi

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad (ad-bc\neq 0) \qquad (2)$$

shaklda bo'ladi. (2) funksiya *kasr-chiziqli funksiya* deyiladi, bunda kasrning surati ham, maxraji ham chiziqli funksiyadir.

Agar $a=0$ va $d=0$ bo'lsa, u holda (2) funksiya quyidagi $y=\frac{b}{cx}=\frac{\frac{b}{c}}{x}$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar $c=0$ bo'lsa, kasr-ratsional funksiya quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{a}.$$

Agar $\frac{a}{d}=k$, $\frac{b}{a}=b_1$ deb belgilasak, $y=kx+b_1$ chiziqli funksiyaga ega bo'lamiz.

Agar $\frac{a}{d}=\frac{b}{d}$ yoki $ad=bc$ bo'lsa, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=p$ deb belgilasak, $a=cp$, $b=dp$ va

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{p(cx+d)}{cx+d}=p\quad (cx+d\neq 0)$$

bo'ladi.

$c\neq 0$ va $ad\neq bc$ bo'lgan hollarda bu funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D=\{x\in R: x\neq -\frac{d}{c}\}$. Berilgan funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$y=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+\frac{bc}{a}\right)}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+d+\frac{bc}{a}-d\right)}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}},$$

$$y-\frac{a}{c}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

Agar $y-\frac{a}{c}=Y$, $x+\frac{d}{c}=X$ va $\frac{bc-ad}{c^2}=k$ deb belgilasak, kasr-chiziqli funksiyani teskari proporsionallik bog‘lanishga keltirish mumkin, ya’ni

$$Y=\frac{k}{X}. \tag{3}$$

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ funksiya quyidagi asosiy xossalarga ega:

1^0. (2) funksiya $x\neq-\frac{d}{c}$ uchun aniqlangan, ya’ni

$$D(f)=\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c};+\infty\right).$$

2^0. (2) funksiyaning o‘zgarish sohasi:

$$E(f)=\left(-\infty;-\frac{a}{c}\right)\cup\left(-\frac{a}{c};+\infty\right).$$

3^0. (2) funksiya juft ham, toq ham emas.

4^0. $k>0$ bo‘lsin, u holda:

a) $\frac{a}{c}>0$ bo‘lganda, funksiya $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$ va $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$ oraliqlarda musbat, $\left(-\frac{b}{a};-\frac{d}{c}\right)$ oraliqda esa manfiy bo‘ladi;

b) $a=0$ bo‘lganda, funksiya $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ oraliqda manfiy, $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$ oraliqda esa musbat bo‘ladi;

d) $\frac{a}{c}<0$ bo‘lganda, funksiya $\left(-\infty;-\frac{d}{a}\right)$ va $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$ oraliqlarda manfiy, $\left(-\frac{d}{c};-\frac{b}{a}\right)$ oraliqda esa musbat.

5^0. $k<0$ bo'lsin. U holda:

a) $\frac{a}{c}>0$ bo'lganda, funksiya $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ va $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$ oraliqda musbat, $\left(-\frac{d}{c};-\frac{b}{a}\right)$ oraliqda esa manfiy bo'ladi;

b) $a=0$ bo'lganda, funksiya $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ oraliqda musbat, $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$ oraliqda esa manfiy bo'ladi;

d) $\frac{a}{c}<0$ bo'lganda, funksiya $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$ va $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$ oraliqlarda manfiy, $\left(-\frac{d}{c};-\frac{b}{a}\right)$ oraliqda esa musbat bo'ladi.

6^0. $k>0$ bo'lganda funksiya kamayuvchi, $k<0$ bo'lganda esa o'suvchidir.

7^0. (2) funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga ega emas.

8^0. $k>0$ bo'lganda, funksiyaning grafigi $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ oraliqda botiq, $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$ oraliqda qavariq bo'ladi;

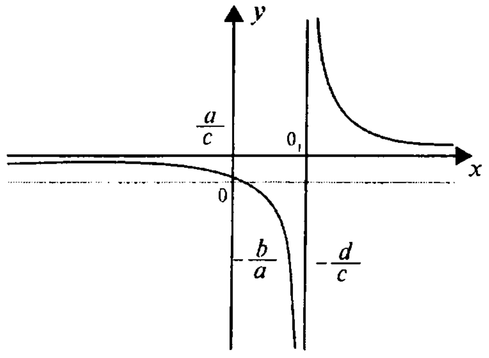
9^0. $k<0$ bo'lganda, funksiyaning grafigi $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ da qavariq, $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$ da esa botiq bo'ladi.

10^0. (2) funksiyaning grafigi $c\neq0$ va $ad\neq bc$ uchun markazi $O_1\left(-\frac{d}{c};-\frac{a}{c}\right)$ nuqtada bo'lgan giperboladan iborat (12.23-, 12.24-chizmalar).

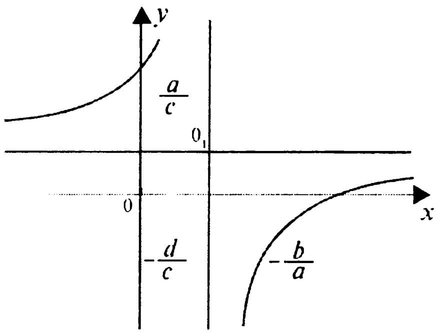
11^0. Funksiya grafigi asimptotalari koordinata o'qlariga, mos ravishda, parallel $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$ bo'lgan har tomonli giperboladan iborat.

3) Umumlashgan kasr-ratsional funksiyaning grafigi. Ushbu

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$



12.23- chizma. $k > 0$.



12.24- chizma. $k < 0$.

va

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$$

ko'phadlarning (bunda $a_0, a_1, ... a_n$, b_0, $b_1, ..., b_m$ — o'zgarmas sonlar, $m, n \in N$) bo'linmasi

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m} \qquad (1)$$

kasr-ratsional funksiya deyiladi. $n<m$ bo'lganda esa (1) to'g'ri *kasr-ratsional funksiya* deyiladi.

Bizga algebra kursidan ma'lumki, har qanday qisqarmaydigan (1) ratsional kasrni, agar

$$Q_m(x) = a_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}...(x-\alpha_s)^{m_s}(x^2+b_1x+q_1)^{\mu_1}...(x^2+b_kx+q_k)^{\mu_k}$$

ko'rinishda ifodalansa (bunda α_1, $\alpha_2, ..., \alpha_s$ lar $Q_m(x)$ ko'phadning, mos ravishda, m_1, m_2,...m_s karrali ildizlari, uchhadlar esa $Q_m(x)$ ning o'zaro qo'shma kompleks μ_1, μ_2,... μ_k karrali ildizlariga mos keladi), uni yagona ravishda chekli sondagi sodda kasrlar yig'indisi shaklida tasvirlash mumkin:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{A_2}{(x-\alpha_2)^{m_1-1}}+\ldots+\frac{A_{m_1}}{x-\alpha_1}+\frac{B_1}{(x-\alpha_s)^{m_s}}+$$

$$+\frac{B_2}{(x-\alpha_s)^{m_s-1}}+\ldots+\frac{B_s}{x-\alpha_s}+\frac{D_1x+C_1}{(x^2+b_1x+q_1)^{\mu_1}}+\ldots+\frac{D_{\mu_1}x+C_{\mu_1}}{x^2+b_1x+q_1}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+b_kx+q_k)^{\mu_k}}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+b_kx+q_k}.$$

Quyidagi $\frac{A}{x-k}$, $\frac{1}{(x-k)^m}$, $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\mu}$ kasrlar elementar to'g'ri ratsional kasrlar deyiladi. Bunda A, B, C, k - haqiqiy sonlar, m va μ — natural sonlar bo'lib, $\mu, m > 1$; haqiqiy koeffitsiyentli $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad mavhum ildizlarga ega.

Shunday qilib, kasr-ratsional funksiyaning grafigi elementar to'g'ri ratsional kasrlar grafiklarining yig'indisidan iborat bo'lar ekan.

$y=\frac{1}{(x-k)^m}$ $(m\in N)$ funksiyaning grafigi $y=\frac{1}{x^m}$, $m\in N$ funksiyaning grafigini abssissalar o'qi bo'ylab $|k|$ masshtab birligiga o'ngga parallel ko'chirish natijasida hosil qilinadi.

$y=\frac{1}{x^2+px+q}$ funksiyaning grafigini chizish uchun, avvalo, uning maxrajining to'liq kvadrati ajratiladi:

$$y=\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}},$$

so'ngra grafik $\frac{1}{x^2}$ funksiyaning grafigini chizish kabi chiziladi.

$y=\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ funksiyaning grafigini chizish

$$y=\frac{1}{x^2+px+q} \text{ va } y=Bx+C$$

funksiyalar ko'paytmasining grafigini chizishga keltiriladi.

1- misol. $y=\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning butun qismini ajratib yozamiz:

$$y = 1 + \frac{2x-1}{x^2-2x-3}.$$

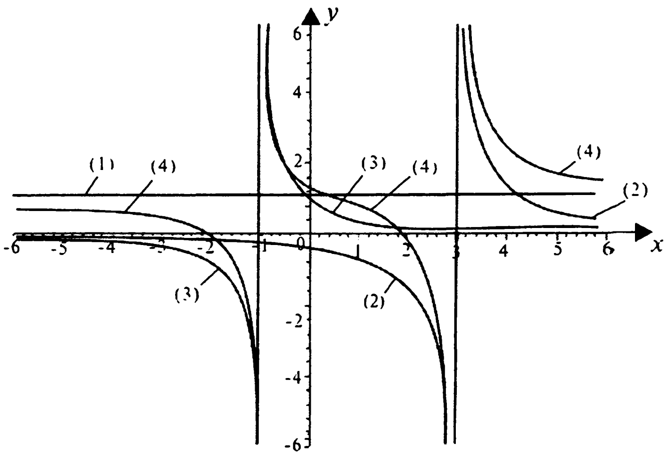
$\frac{2x-1}{x^2-2x-3}$ ifoda to'g'ri ratsional funksiya bo'lganligi uchun bu ifodani oddiy kasrlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlaymiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1},$$

bunda A, B — o'zgarmas sonlar. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli bilan A va B larni topamiz: $2x-1=A(x+1)+B(x-3)$; $x=-1$ bo'lsin, $-3=-4B$, $B=\frac{3}{4}$, $x=3$ bo'lsin, $5=4A$, $A=\frac{5}{4}$. Demak, berilgan funksiyani quyidagi

$$y = 1 + \frac{5}{4}\frac{1}{x-3} + \frac{3}{4}\frac{1}{x+1}$$

ko'rinishda yozamiz: $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{5}{4(x-3)}$, $y_3 = \frac{3}{4(x+1)}$ belgilashlar kiritamiz. y_1, y_2 va y_3 funksiyalarning grafiklarini chizib va hosil qilingan grafiklarini qo'shib, izlanayotgan funksiyaning grafigini chizamiz (12.25- chizma).



12.25- chizma. (1) $y=1$, (2) $y_2=\frac{5}{4(x-3)}$, (3) $y=\frac{3}{4(x+1)}$,

(4) $y=\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$.

2- misol. $y = \frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-2}$ funksiyaning grafigini chizing.

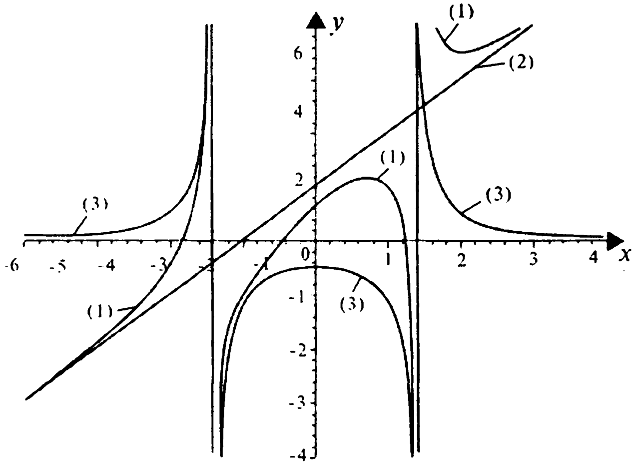
Yechilishi. Berilgan funksiyaning butun qismini ajratamiz:

$$y = x + 1 + \frac{1}{x^2-2}.$$

Natijada ikkita funksiyaning yig'indisiga ega bo'lamiz:

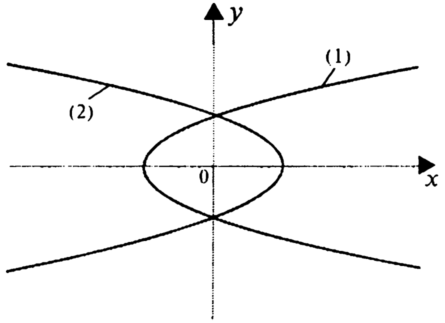
$$y = y_1 + y_2, \text{ bunda } y_1 = x+1, \; y_2 = \frac{1}{x^2-2}.$$

y_1 va y_2 funksiyalarning grafiklarini alohida chizamiz, so'ngra y_1 va y_2 funksiyalarning xarakterli nuqtalarining ordinatalarini qo'shib izlanayotgan funksiyaning grafigini hosil qilamiz (12.26-chizma).



12.26- chizma. (1) $y=\frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-2}$, (2) $y=x+1$, (3) $y=\frac{1}{x^2-2}$.

3. Irratsional funksiyaning grafigi. *a*) $y = \pm\sqrt{ax+b}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi $y = \sqrt{x}$ funksiyaning grafigi (1 bob 8- § ga q.) yordamida chiziladi. $y = \pm\sqrt{ax+b}$ funksiyaning grafigi paraboladan iborat bo'lib, uning o'qi abssissalar o'qi, parametri $p = \frac{a}{2}$, uchi esa $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ nuqtadan iborat (12.27- chizma).



12.27- chizma.

$y = \pm\sqrt{ax+b}$. (1) $a > 0$, (2) $a<0$.

b) $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini chizish (I bob, 7-§) dagi sxema bo'yicha chiziladi.

$$y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

funksiya grafigining ko'rinishi a va $D=4ac-b^2$ laming ishorasiga bog'liq bo'ladi.

Agar $a<0$, $D<0$ bo'lsa, uning grafigi ellips; agar $a>0$, $D>0$ yoki $D<0$ bo'lsa, funksiyaning grafigi giperboladan iborat bo'ladi va uning o'qlari $y = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$ to'g'ri chiziqlardan iborat, uchlari esa

$$A\left(-\frac{b+\sqrt{-D}}{2a};0\right),\ C\left(-\frac{b-\sqrt{-D}}{2a};0\right),\ B\left(-\frac{b}{2a};\sqrt{\frac{D}{2a}}\right),\ E\left(-\frac{b}{2a};\sqrt{\frac{D}{4a}}\right)$$

nuqtalardan iborat bo'ladi (12.28- chizmalar *a*), *b*), *d*).

Eslatma. $a < 0$ va $D > 0$ bo'lganda x ning haqiqiy qiymatlarida egri chiziq mavjud bo'lmaydi.

1- misol. $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. 1. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari:

$$D(f) = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty),\quad E(f) = (-\infty,+\infty).$$

2. Funksiya juft, ya'ni $\forall x \in D(f)$ uchun

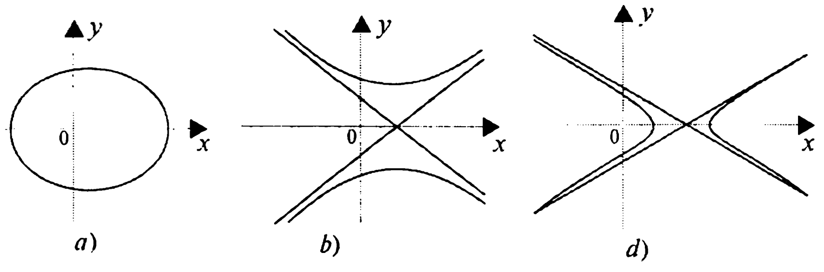
$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x) \text{ bo'ladi.}$$

3. $x=\pm 1$ nuqtalar funksiyaning nollari, ya‘ni $y(\pm 1)=0$.

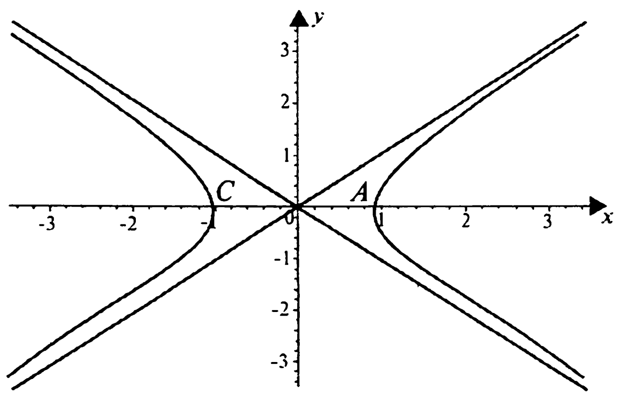
4. $a=1$, $D=-4<0$ bo‘lganligi uchun yuqoridagi *b*) bandga asosan, berilgan funksiyanng grafigi giperbolani ifodalaydi, uning simmetriya o‘qlari $y=0$, $x=0$ to‘g‘ri chiziqlardan, uchlari esa $C(-1;0)$, $A(1;0)$ nuqtalardan iborat bo‘ladi.

5. $y=\pm x$ to‘g‘ri chiziqlar funksiya grafigining og‘ma asimtotalari bo‘ladi.

Yuqoridagi mulohazalarga asosan berligan funksiyaning grafigini chizamiz (12.29- chizma).



12.28- chizma. $y=\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$, (*a*) $a<0$, $D<0$.
(*b*) $a>0$, $D>0$, (*d*) $a>0$, $D<0$.



12.29- chizma. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$.

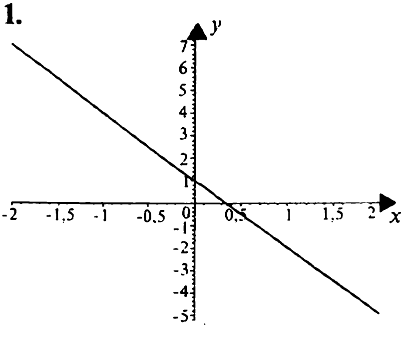
Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarning grafiklarini chizing:

1. $y=1-3x$.
2. $y=2-\frac{1}{2}x$.
3. $y=4$.
4. $y=5-4x$.
5. $x=-5$.
6. $y=2x+3$.
7. $x=\frac{5}{4}y$.
8. $3x-6y-2=0$.
9. $2=4x-y$.
10. $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$.
11. $y=x^2-4x$.
12. $y=x^2+4x+2$.
13. $y=-x^2-5x+6$.
14. $y=2x^2-8x+5$.
15. $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.
16. $y=(2x-1)^2+\frac{1}{4}$.
17. $y=-2+\left(\frac{x}{3}+1\right)^2$.
18. $y=(3x-1)^2+2$.
19. $y=2x^2-5$.
20. $y=x^2+4$.
21. $y=\frac{1}{3x+4}$.
22. $y=\frac{2}{x-3}$.
23. $y=\frac{5}{2-x}$.
24. $y=1+\frac{1}{x}$.
25. $y=-3+\frac{2}{x}$.
26. $y=\frac{4}{2-3x}$.
27. $y=\frac{3x+2}{3-x}$.
28. $y=\frac{2x+3}{x+1}$.
29. $y=\sqrt{1-x}$.
30. $y=\sqrt{-5x+10}$.
31. $y=(x^2+2x-3)^2$.
32. $y=x^3-x^2-x-1$.
33. $y=\frac{x^2}{x^2-4}$.
34. $y=\frac{x^2-2x}{x^2+x+1}$.

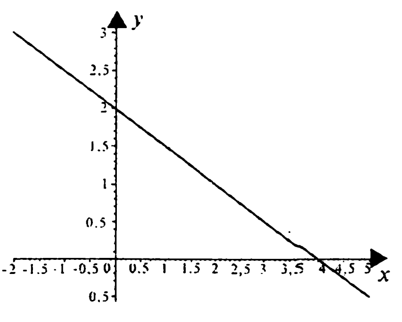
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



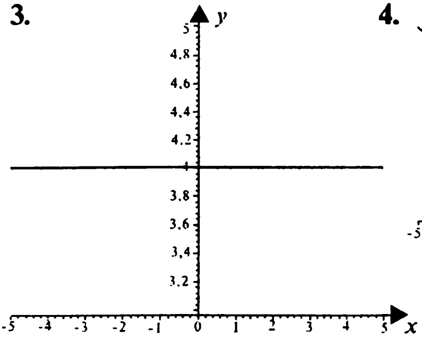
1- chizma.

2.



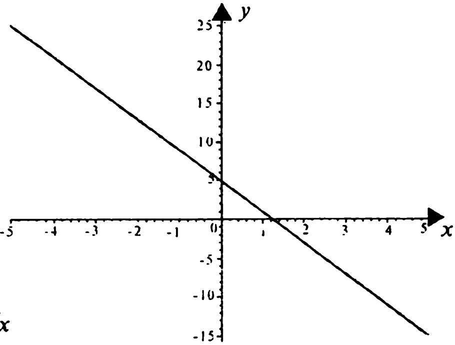
2- chizma.

3.



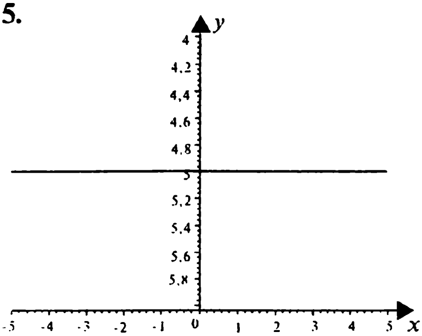
3- chizma.

4.



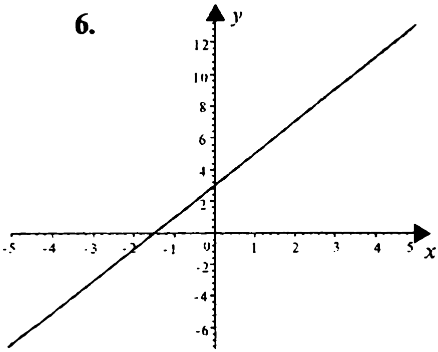
4- chizma.

5.



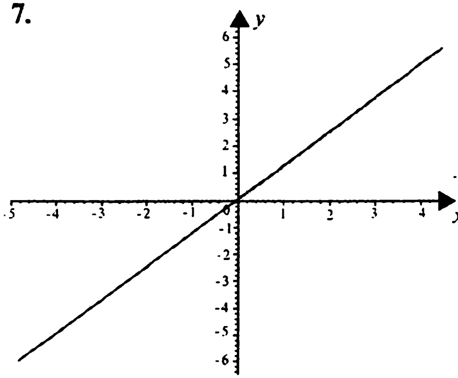
5- chizma.

6.



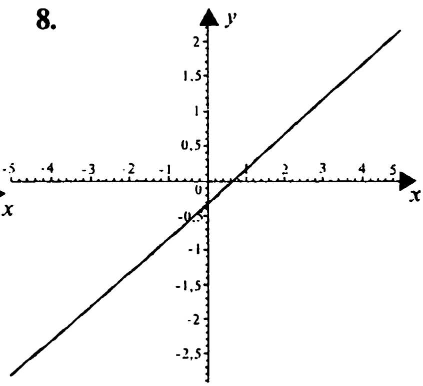
6- chizma.

7.



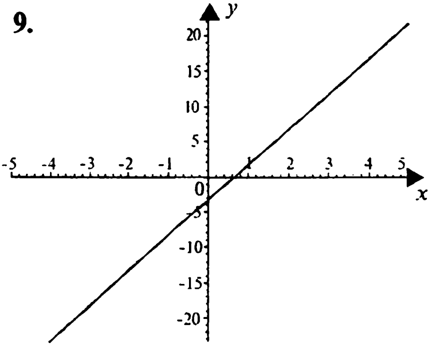
7- chizma.

8.



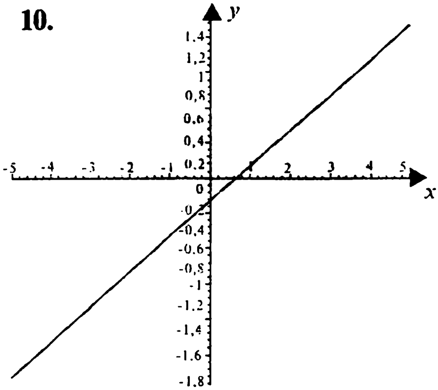
8- chizma.

9.



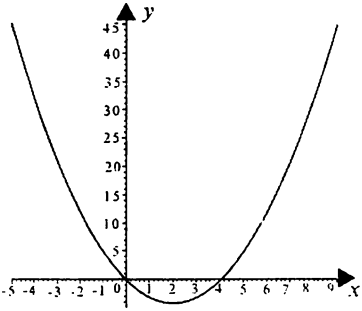
9- chizma.

10.



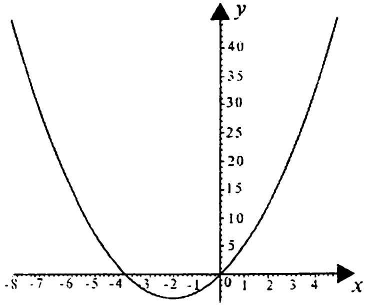
10- chizma.

11.



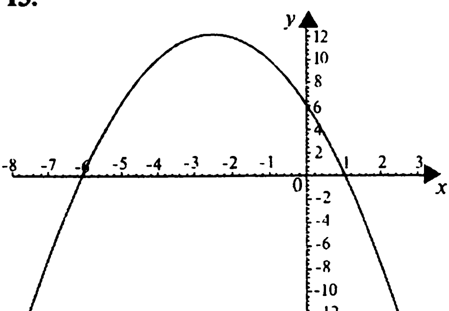
11- chizma.

12.



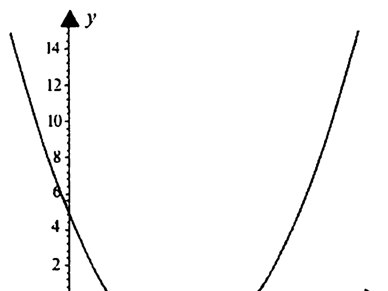
12- chizma.

13.



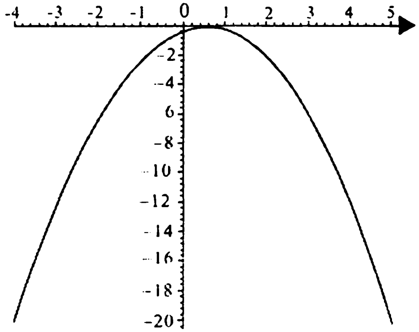
13- chizma.

14.



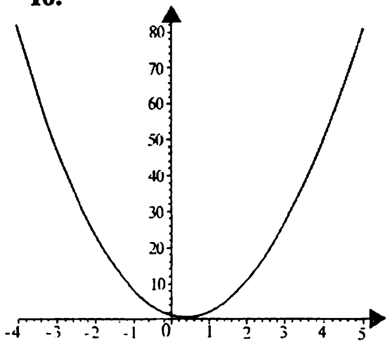
14- chizma.

15.



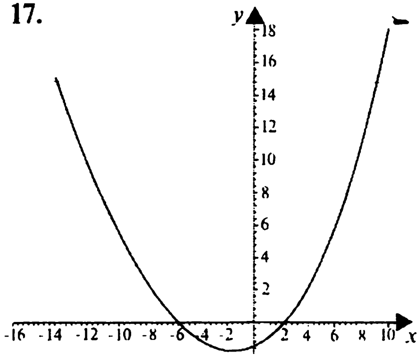
15- chizma.

16.



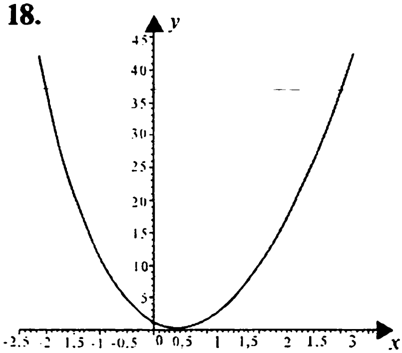
16- chizma.

17.



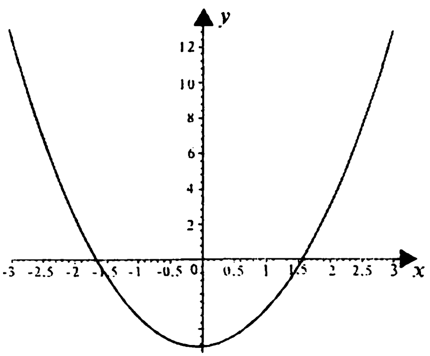
17- chizma.

18.



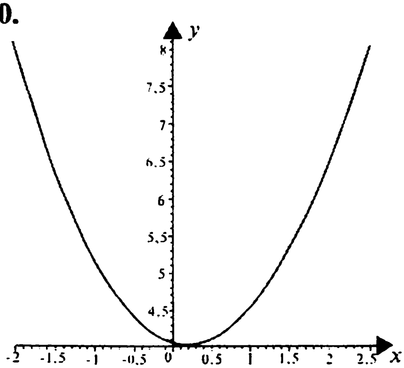
18- chizma.

19.



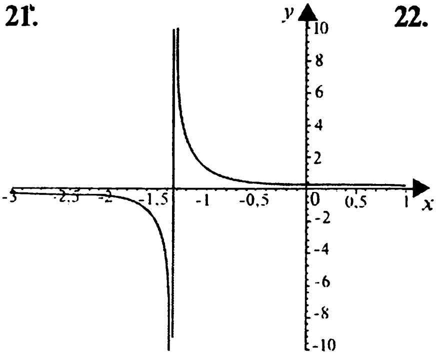
19- chizma.

20.



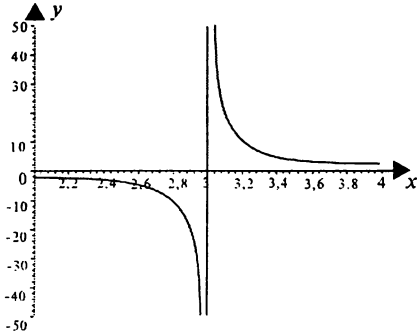
20- chizma.

21.



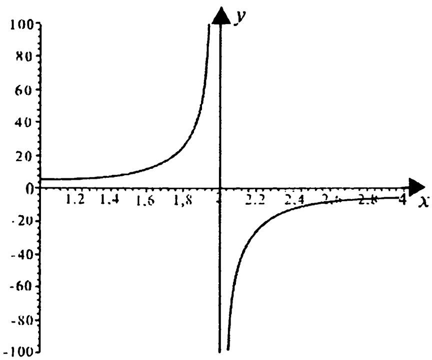
21- chizma.

22.



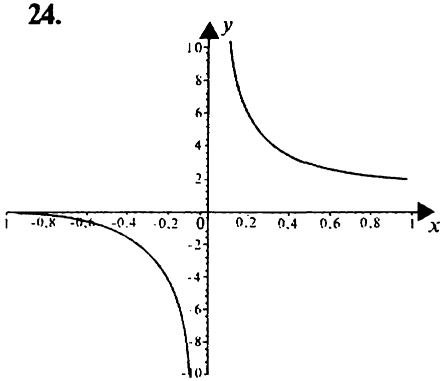
22- chizma.

23.



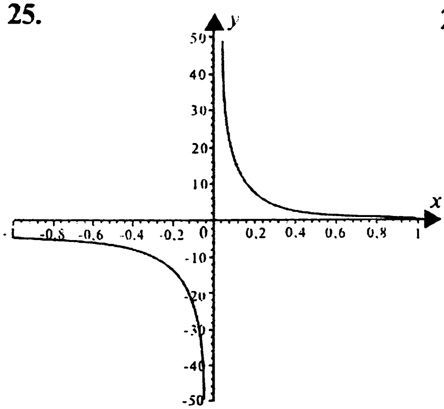
23- chizma.

24.



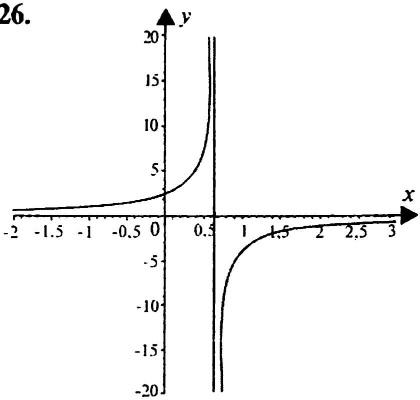
24- chizma.

25.



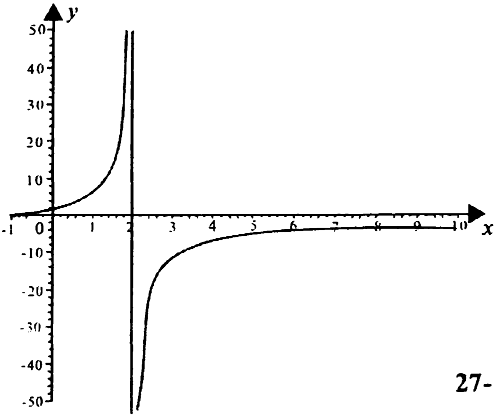
25- chizma.

26.



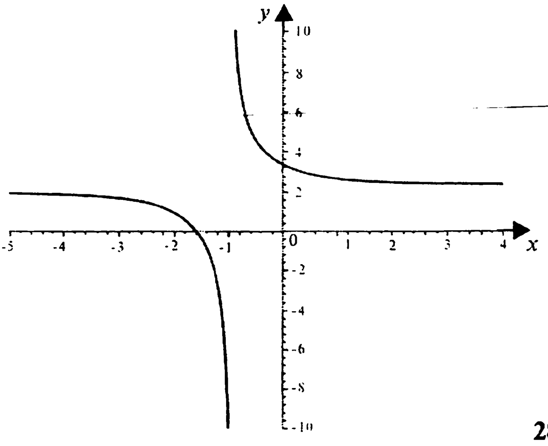
26- chizma.

27.



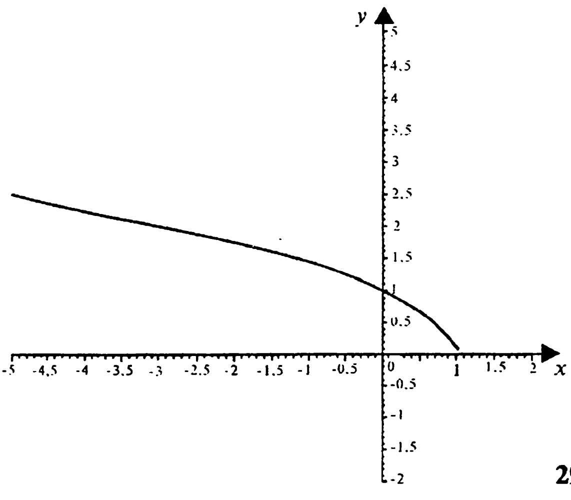
27- chizma.

28.



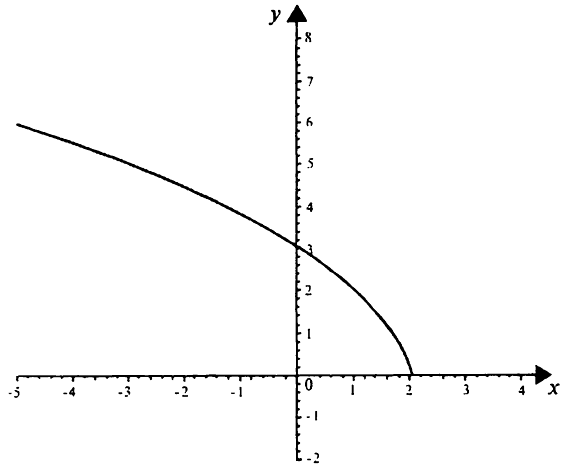
28- chizma.

29.



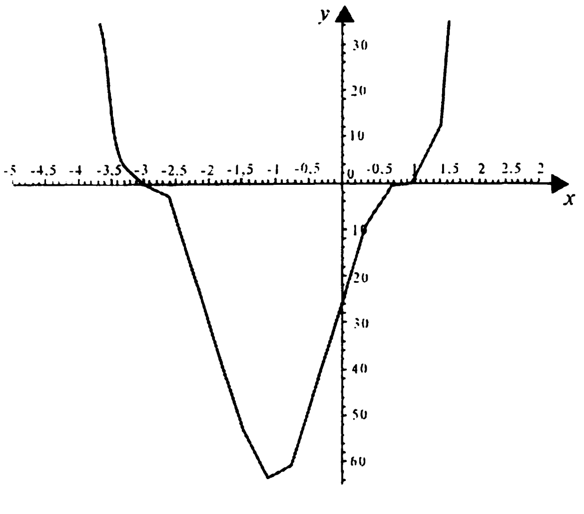
29- chizma.

30.



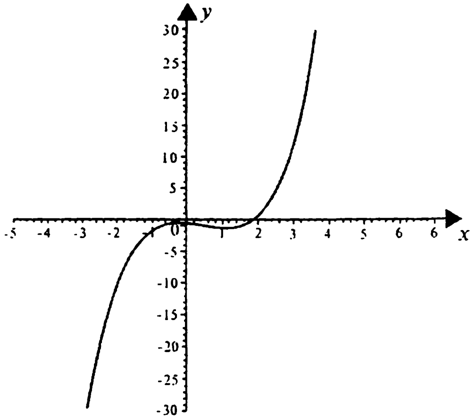
30- chizma.

31.



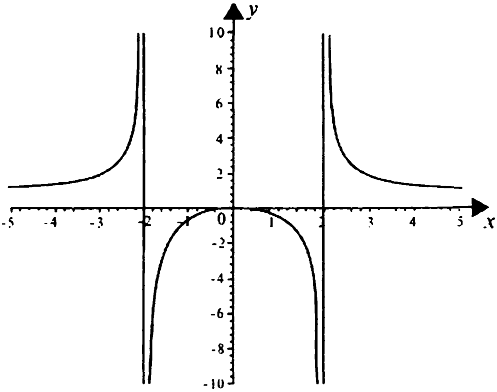
31- chizma.

32.



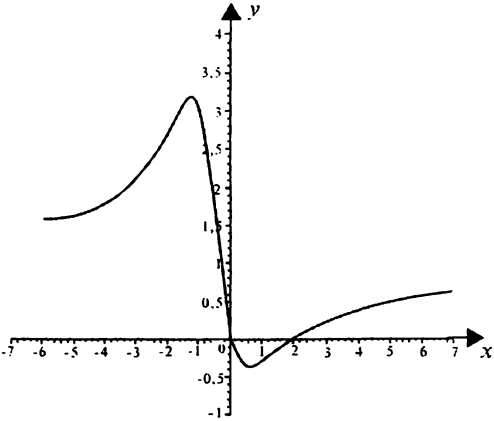
32- chizma.

33.



33- chizma.

34.



34- chizma.

13- §. ANALITIK IFODASIDA MODUL QATNASHGAN FUNKSIYALARNING GRAFIKLARINI CHIZISH

1. $y=f(|x|)$ funksiyaning grafigini chizish. $y=f(|x|)$ funksiyaning grafigini chizish uchun, avvalo, $y=f(x)$ funksiyaning grafigini $[0,+\infty)$ oraliqda chizish keyin chizilgan funksiya grafigini ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak. Natijada hosil bo‘lgan grafik berilgan $y=f(|x|)$ funksiyaning grafigini ifodalaydi.

1- misol. $y=2|x|-5$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Yuqoridagi qoidaga ko‘ra $[0,+\infty)$ oraliqda $y=2x-5$ funksiyaning grafigini chizamiz (13.1- chizmada AB nur). AB nurga Oy o‘qiga nisbatan simmetrik qilib, AC nurni chizamiz. BAC siniq chiziq berilgan funksiyaning grafigi bo‘ladi (13.1-chizma).

Berilgan funksiyani ikkita formula yordamida , ya‘ni

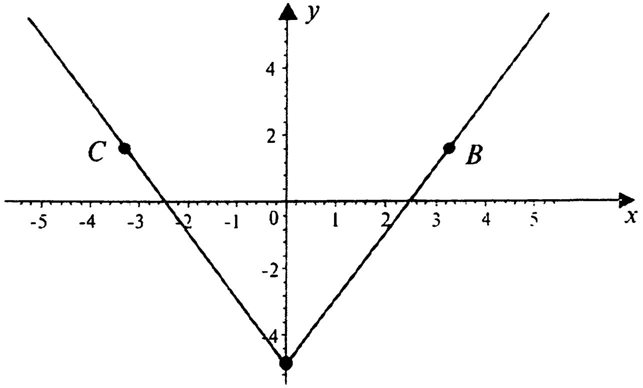
$$y=\begin{cases}2x-5, & \text{agar } x\geq 0 \text{ bo‘lsa,}\\ -2x-5, & \text{agar } x<0 \text{ bo‘lsa,}\end{cases}$$

ko‘rinishda ifoda qilib, grafikni chizilganda ham BAC siniq chiziq hosil bo‘lar edi.

2-misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$y=x^2-3|x|+2.$$

Yechilishi. Dastlab $y=x^2-3x+2=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$ funksiyaning



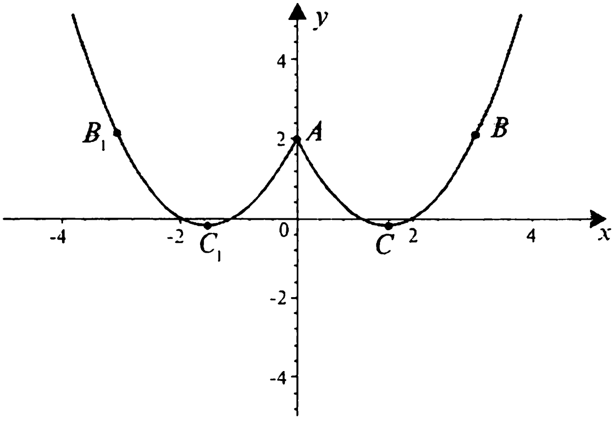
13.1- chizma.

grafigini $[0,+\infty)$ oraliqda chizamiz. Chizmada parabolaning bir qismi ACB hosil bo'ladi. So'ngra chizilgan egri chiziqqa Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan AC_1B_1 ni chizamiz. Natijada berilgan funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (13.2-chizma).

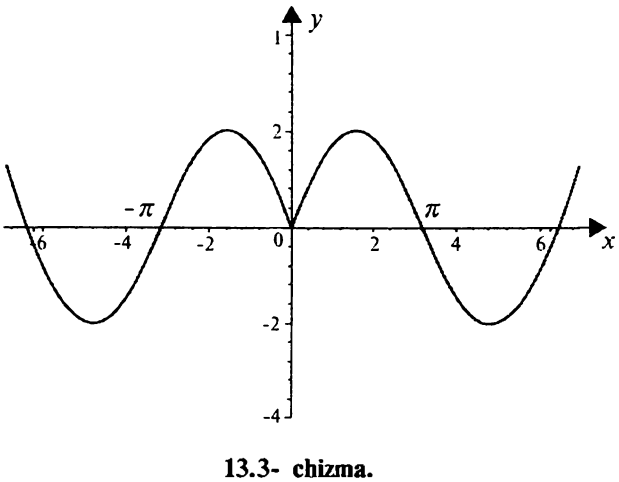
3- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$y = \sin|x|.$$

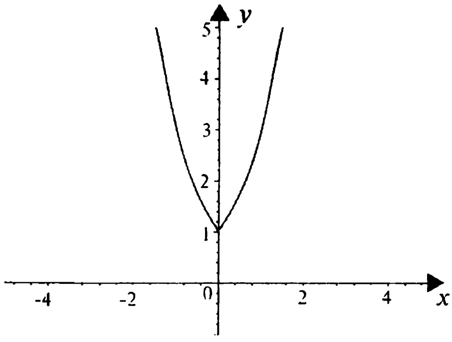
Yechilishi. Avval $y=\sin x$ funksiyaning grafigini $[0,+\infty)$ oraliqda chizamiz, so'ngra chizilgan egri chiziqni Oy o'qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz. Natijada berilgan funksiyaning grafigi hosil



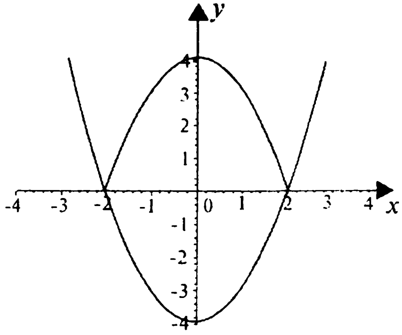
13.2- chizma.



13.3- chizma.



13.4- chizma.



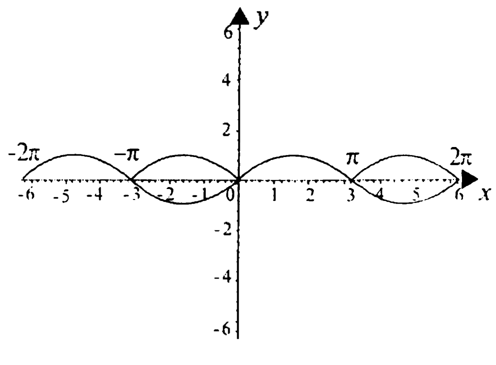
13.5- chizma.

bo‘ladi (13.3- chizma).

4-misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing.

$$y=3^{|x|}$$

Yechilishi. Avval $y=3^x$ funksiyaning grafigini $[0,+\infty)$ oraliqda chizamiz. So‘ngra chizilgan egri chiziqni Oy o‘qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz. Natijada berilgan funksiyaning grafigi hosil bo‘ladi (13.4- chizma).

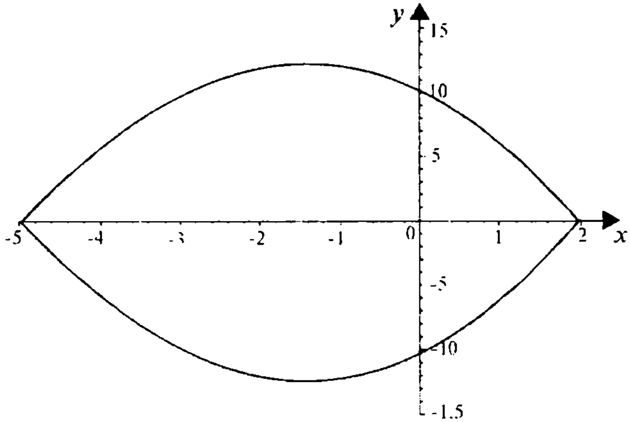


13.6- chizma.

2. $y=|f(x)|$ **funksiyaning grafigini chizish.** $y=|f(x)|$ funksiyaning grafigini chizish uchun $y=f(x)$ funksiyaning grafigini chizib va grafikning abssissalar o‘qidan yuqorida $(y\geq 0)$ joylashgan qismini o‘zgarishsiz qoldirib, grafikning abssissalar o‘qidan pastda $(y<0)$ joylashgan qismini esa Ox o‘qiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak.

5-misol. $y=x^2-4$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Avvalo $y=x^2-4$ funksiyaning grafigini $(-\infty;+\infty)$ da chizamiz. $y=x^2-4<0$ funksiyaning grafigi $(-2;2)$ oraliqda abssissalar o‘qidan pastda joylashadi. $y=x^2-4$ funksiya grafigining abssissalar o‘qidan yuqorida $(y\geq 0)$ joylashgan qismini o‘zgarishsiz qoldirib, pastda $(-2;\ 2)$ oraliqda joylashgan qismini esa Ox o‘qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz. Natijada berilgan funksiyaning grafigi hosil bo‘ladi (13.5-chizma).



13.7- chizma.

6- misol. $y = \sin x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Avval $(-\infty,+\infty)$ oraliqda $y=\sin x$ funksiyaning grafigini chizamiz, so'ngra abssissalar o'qidan yuqorida $(y\geq 0)$ joylashgan qismini o'zgarishsiz qoldirib, pastda $(y<0)$ joylashgan qismini esa Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz (13.6- chizma).

3. $|y|=f(x)$ **funksiyaning grafigini chizish.** $|y|=f(x)$ funksiyaning grafigini chizish uchun $y=f(x)$ funksiyaning grafigini chizib, uning $f(x)\geq 0$ bo'lgan qismini o'zgarishsiz qoldirib, o'zgarishsiz qoldirilgan qismini Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak.

Eslatma. $|y|=f(x)$ formula bilan berilgan funksiya $f(x)\geq 0$ bo'lsa, bir qiymatli funksiyani ifodalamaydi, ya'ni ikki qiymatli funksiyani ifodalaydi: $y=\pm f(x)$. Agar $f(x)<0$ bo'lsa, funksiyaning grafigi chizilmay qoldiriladi, chunki bu holda $|y|=f(x)$ tenglik ma'nosini yo'qotadi.

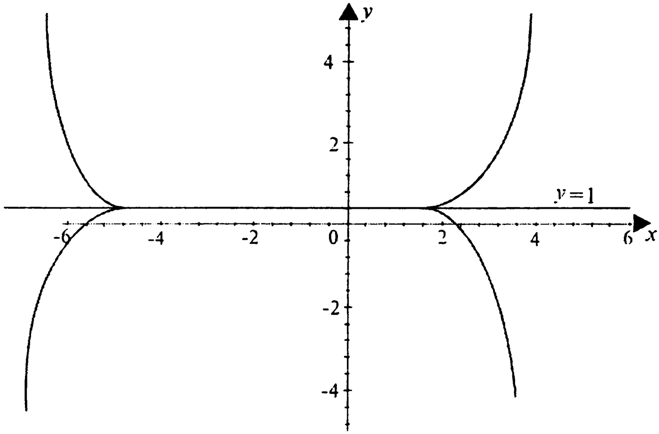
7-misol. $|y| = -x^2-3x+10$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. $-x^2-3x+10\geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x\in[-5;2]$ da $y=-x^2-3x+10$ funksiyaning grafigini chizamiz. So'ngra chizilgan grafikni Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz. Natijada berilgan funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (13.7- chizma).

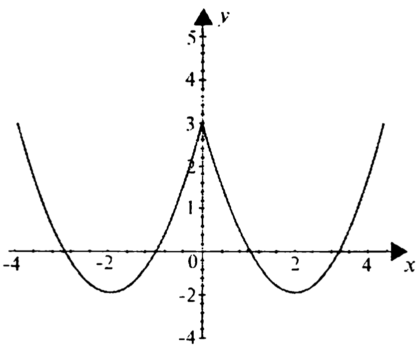
8- misol. $|y-1|=x^2+4x-5$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. $x^2+4x-5\geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x\in(-\infty;-5]$ va $[1;+\infty)$ larda $y=x^2+4x-5=(x+2)^2-9$ parabolaning grafigini chizamiz, ularni Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz, so'ngra 1 birlik yuqoriga siljitamiz. Natijada berilgan funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (13.8- chizma).

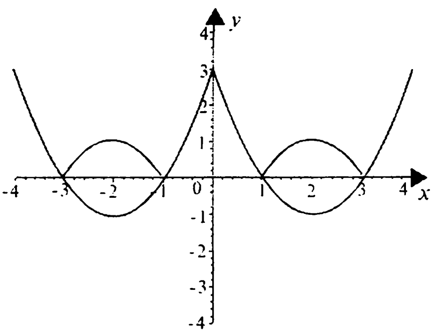
4. $y=|f(|x|)|$, $|y|=|f(x)|$, $|y|=f(|x|)$, $|y|=|f(|x|)|$ **funksiyalarning grafiklarini chizish.** Bu funksiyalarning grafiklarini chizish uchun



13.8- chizma.



13.9- chizma.

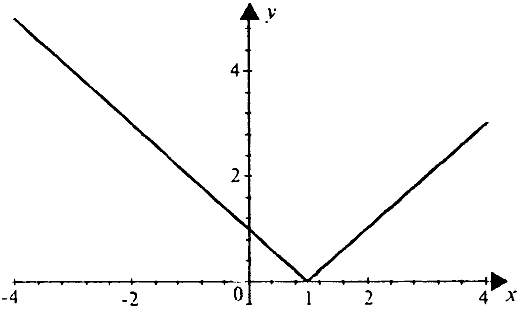


13.10- chizma.

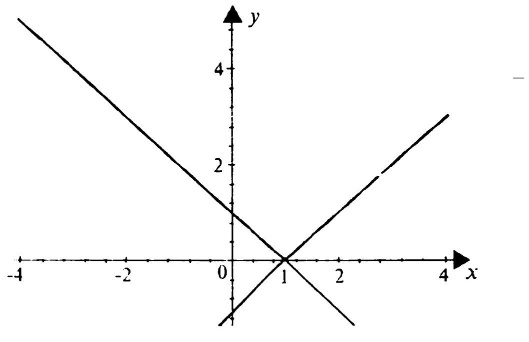
yuqorida keltirilgan 1^0-, 2^0-, 3^0- bandlardagi grafik chizish usullarini ketma-ket qo'llash kerak. Masalan, $y=|f(|x|)|$ funksiyaning grafigini chizish uchun avvalo $y=f(|x|)$ funksiyaning grafigini chizib va uning abssissalar o'qidan yuqorida joylashgan qismini o'zgarishsiz qoldirib, pastda joylashgan qismini Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak.

9- misol. $y=|x^2-4|x|+3|$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning grafigini chizish uchun, dastlab $y=x^2-4|x|+3$ funksiyaning grafigini 1^0-bandga asosan chizamiz (13.9- chizma), uning abssissalar o'qidan yuqorida joylashgan



13.11- chizma.



13.12- chizma.

qismini o'zgarishsiz qoldirib, pastda ($y<0$) joylashgan qismini Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz (13.10- chizma).

10-misol. $|y|=|x-1|$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning grafigini chizish uchun, avvalo $y=|x-1|$ funksiyaning grafigini chizamiz (13.11- chizma), so'ngra uni Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz (13.12- chizma).

Mustaqil ishlash uchun misollar

Funksiyalarning grafigini chizing:

1. $y=|x-5|$. **2.** $y=|1-x^2|$.

3. $y=|x^2+2x|$. **4.** $y=|x^2-4x+3|$.

5. $y=|x-x^2|+1$. **6.** $y=|x|-|x-1|$.

7. $y=|x+2|+|x-2|$.

8. $|y|=x-1$.

9. $|y|=2-3x$.

10. $|y|+|x|=1$.

11. $y=|\log_2 x|$.

12. $y=|\sin 2x|$.

13. $y=|\sin x|+\sin|x|$.

14. $|y^2-2y|=1-x^2$.

15. $y=\dfrac{|x|}{x}$.

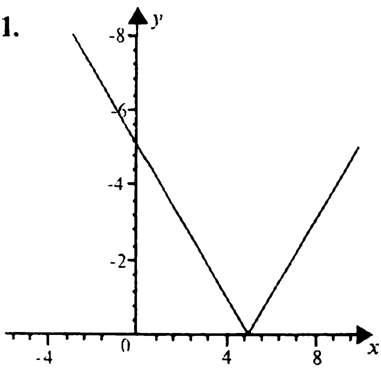
16. $y=10^{\lg|x-1|}$.

17. $y=||x|-1|$.

18. $y=|x^2-4|+|x^2+4|$.

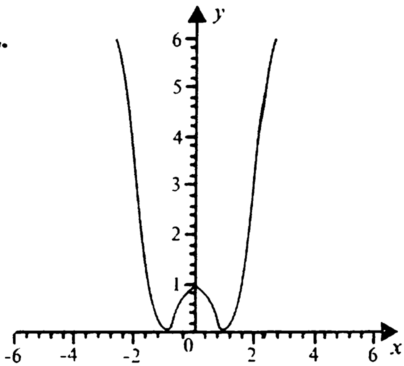
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



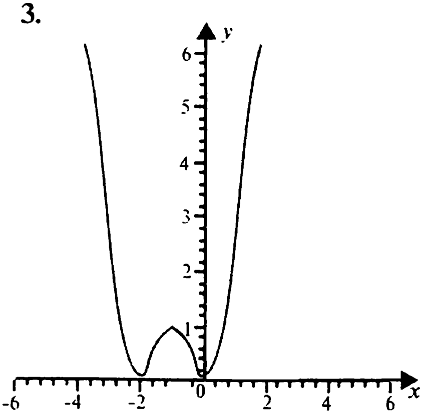
1- chizma.

2.



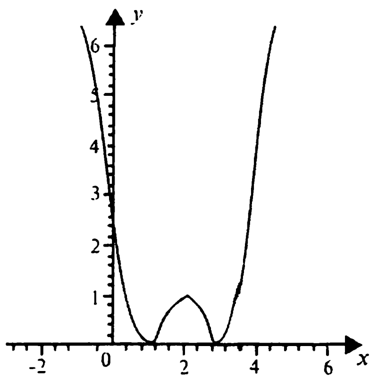
2- chizma.

3.



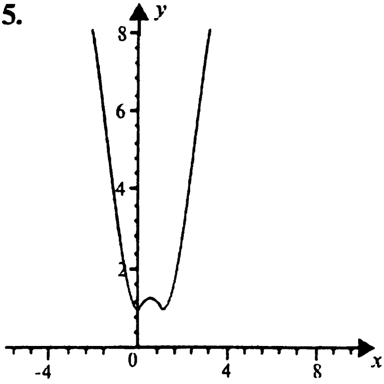
3- chizma.

4.



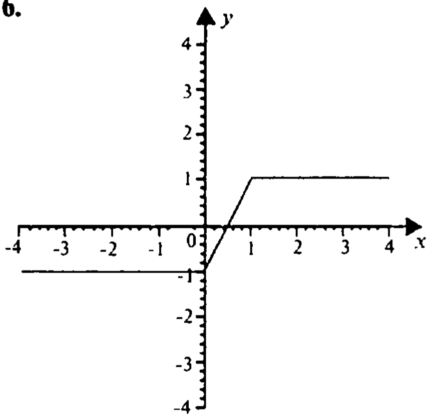
4- chizma.

5.



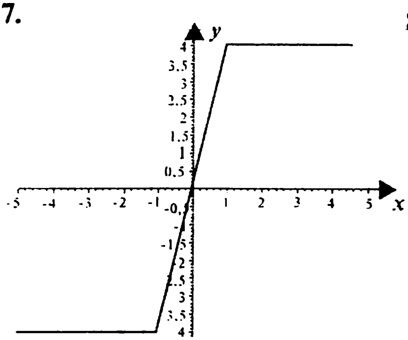
5- chizma.

6.



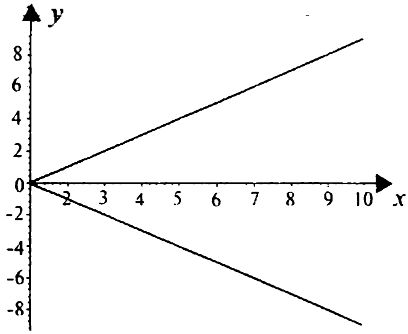
6- chizma.

7.



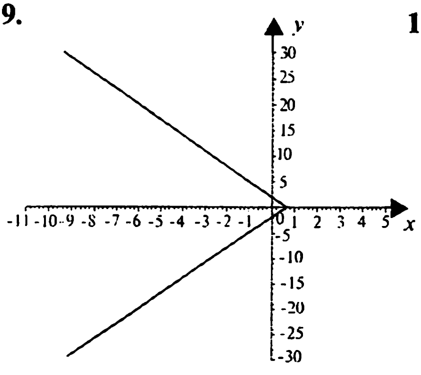
7- chizma.

8.



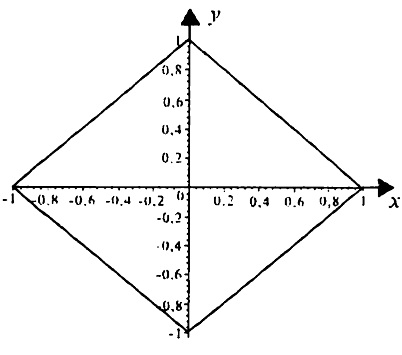
8- chizma.

9.



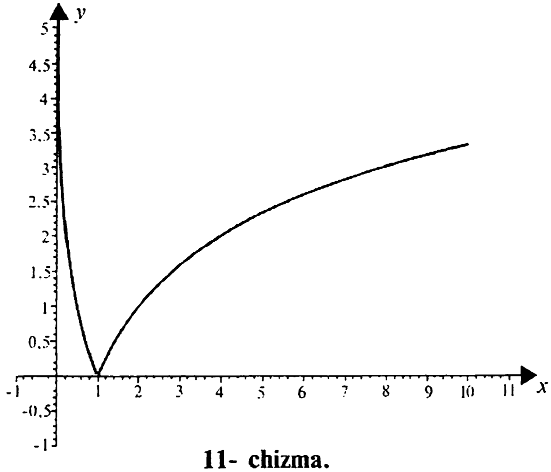
9- chizma.

10.



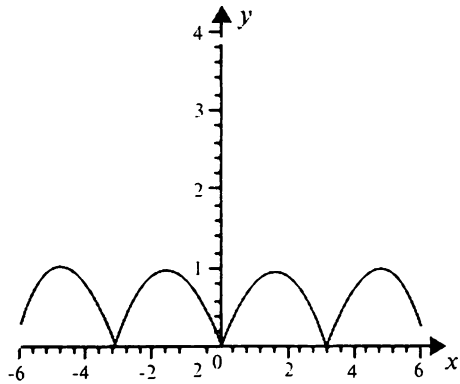
10- chizma.

11.



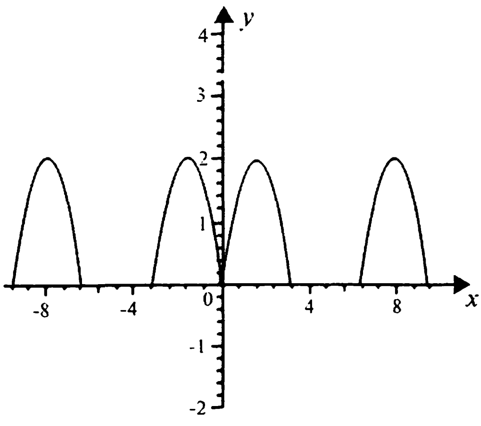
11- chizma.

12.



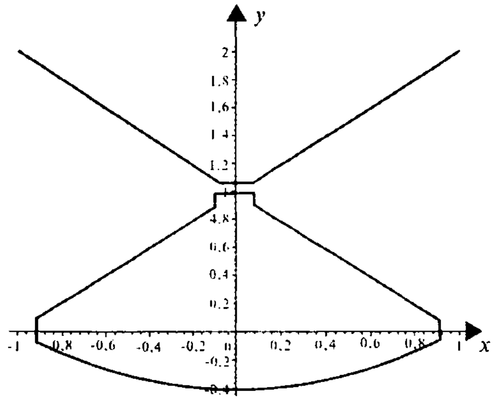
12- chizma.

13.



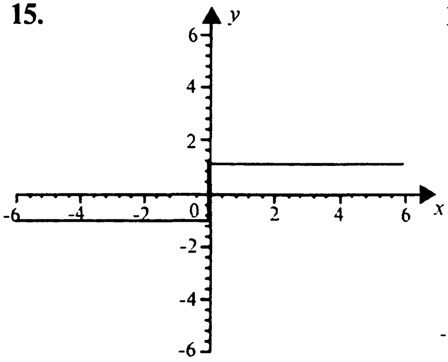
13- chizma.

14.



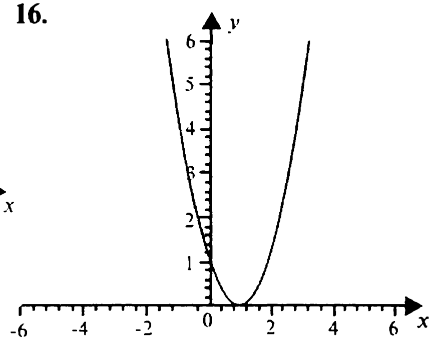
14- chizma.

15.



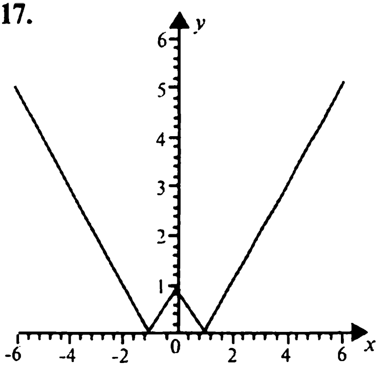
15- chizma.

16.



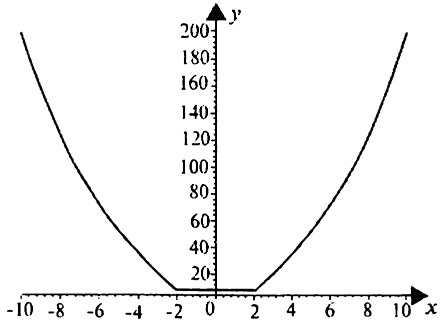
16- chizma.

17.



17- chizma.

18.



18- chizma.

14- §. TENGLAMASI PARAMETRIK SHAKLDA BERILGAN FUNKSIYALARNING GRAFIGI

1. Parametrik shaklda berilgan funksiyalarni tekshirish. Faraz qilaylik, funksiyaning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(t — parametr, $t_1 \le t \le t_2$) ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu holda funksiyani tekshirish va uning grafigini chizish $y=f(x)$ ko'rinishda berilgan funksiyani tekshirish va uning grafigini chizish kabi olib boriladi.

Avvalo, mos ravishda, $t\,Ox$ va $t\,Oy$ koordinatalar sistemalarida $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalarning grafiklari chiziladi. $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalarning grafiklariga qarab, 6-, 7-§dagi sxema bo'yicha $y=y(x)$ funksiya tekshiriladi va grafigi chiziladi. (1) funksiyaning grafigini chizishda uning quyidagi muhim tomonlarini e'tiborga olish lozim.

Agar t ni $-t$ ga almashtirilganda o'z ishorasini o'zgartirmasa, x esa $-x$ ga almashsa, unda funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Agar t ni $-t$ ga almashtirilganda x o'z ishorasini o'zgartirmasdan, y esa $-y$ ga almashsa, unda funksiyaning grafigi abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Funksiyaning davri $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalarning davrlari bo'yicha aniqlanadi.

(1) funksiya grafigining ordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtasi koordinatalarini topish uchun, avvalo, $x=\varphi(t)=0$ tenglamani yechib, $y=\psi(t)$ ning shu yechimlarga mos qiymatlarini hisoblash kerak. Shunga o'xshash, (1) funksiya grafigining abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtasi koordinatalarini topish uchun, avvalo, $y=\psi(t)=0$ tenglamani yechib, $x=\varphi(t)$ ning shu yechimlarga mos qiymatlari hisoblanadi.

Ba'zi hollarda, (1) funksiya grafigining $y=x$ va $y=-x$ bissektrisalar bilan kesishish nuqtalarini topish ahamiyatli bo'ladi, buning uchun $\psi(t)=\varphi(t)$ va $\psi(t)=-\varphi(t)$ tenglamalarini yechish kerak. Bu yechimlarga mos kelgan $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalarning qiymatlari (1) funksiya grafigining $y=x$ va $y=-x$ bissektrisalar bilan kesishish nuqtalarining koordinatalarini ifodalaydi.

Ba'zi sodda hollarda, tenglamasi parametrik shaklda berilgan funksiyaning grafigini nuqtalar yordamida ham chizish mumkin.

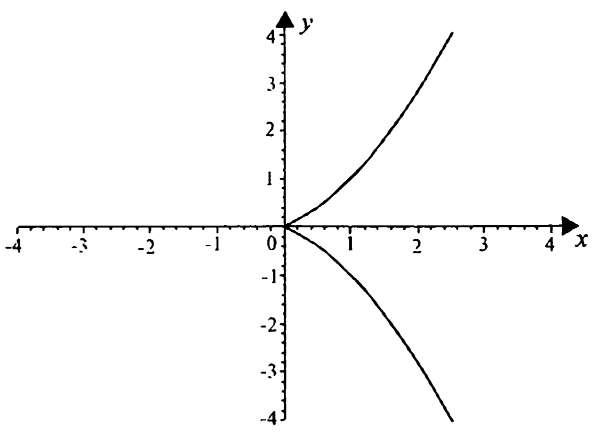
1- misol. Ushu bu funksiyaning grafigini chizing:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases} \qquad (2)$$

Yechilishi. (2) ko'rinishda berilgan funksiyaning grafigini nuqtalar yordamida chizamiz. Buning uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

t	0	1	2	3	−1	−2	−3	−4
x	0	1	4	9	1	4	9	16
y	0	1	8	27	−1	−8	−27	−64

Topilgan nuqtalar yordamida berilgan funksiyaning grafigini chizamiz (14.1- chizma)



14.1- chizma.

2- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + t^2. \end{cases} \qquad (3)$$

Yechilishi. (3) ko'rinishda berilgan funksiyaning grafigini yuqorida ko'rsatilgan tartibda chizamiz: avvalo $t\,Ox$ va $t\,Oy$ koordinatalar sistemasida, $x=1+t$ va $y=1+t^2$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz.

Endi $y=y(x)$ funksiyani tekshiramiz. Bu funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari $D(y)=(-\infty;+\infty)$, $E(y)=[1;+\infty)$.

1) $y(-t)=y(t)$ bo'lgani uchun $t=0$, ya'ni to'g'ri chiziq simmetriya o'qi bo'ladi. Ravshanki, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=+\infty$.

2) Koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Ordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtalarini topish uchun $x=0$ yoki $1+t=0$ tenglamani yechib, $t=-1$ ni topamiz. $y=1+t^2$ funksiyaning $t=1$ dagi qiymati $y=2$ ga teng. Demak, $y=y(x)$ funksiyaning grafigi ordinatalar o'qini $B(0;2)$ nuqtada kesadi.

3) Abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtasini topish uchun $y=0$ yoki $1+t^2=0$ tenglamani yechish kerak. $t^2=-1$ tenglama haqiqiy yechimga ega emas. Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiyaning grafigi abssissa o'qini kesib o'tmaydi.

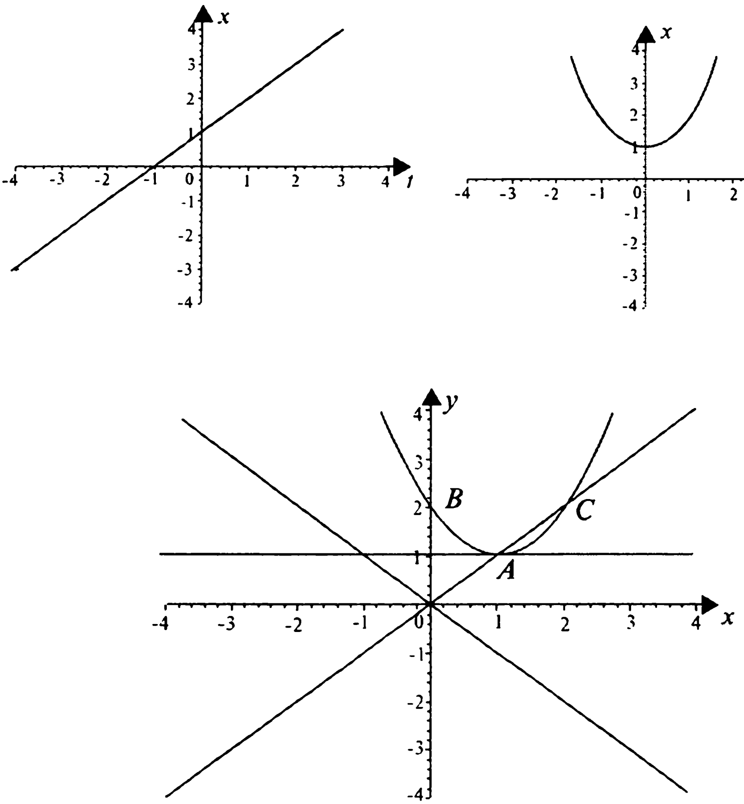
4) Berilgan funksiya grafigining $y=x$ va $y=-x$ bissektrisalar bilan kesishish nuqtalarini topamiz: *a*) $y=x$ bissektrisa bilan kesishish nuqtasini topish uchun $1+t^2=1+t$ tenglamani yechamiz. Bu tenglamaning yechimlari $t_1=0$, $t_2=1$ lardan iborat. Shunday qilib, $y=y(x)$ funksiyaning grafigi $y=x$ bissektrisa bilan $A(1;1)$ va $C(2;2)$ nuqtalarda kesishadi; *b*) $y=-x$ bissektrisa bilan kesishish nuqtasini topish uchun $1+t^2=-(1+t)$ tenglamani yechish kerak. Bu tenglama haqiqiy yechimlarga ega emas. Demak, berilgan funksiyaning grafigi $y=-x$ bissektrisa bilan kesishmaydi.

Berilgan funksiyaning grafigi asimptotalarga ega emas.

Endi yuqorida topilgan natijalar bo'yicha $y=y(x)$ funksiyaning grafigini chizamiz. Dastlab, $y=1$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Ravshanki, $y=y(x)$ funksiyaning grafigi bu to'g'ri chiziqdan yuqorida joylashadi. $y=y(x)$ funksiyaning ordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtasi $B(0;2)$ hamda $y=x$ bissektrisa bilan kesishish nuqtalari va $C(2;2)$, $A(1;1)$ nuqtalarni belgilab, $y=y(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi. Shunday qilib, $x=1-t$, $y=1-t^2$ funksiyaning grafigi 14.2- chizmada tasvirlangan.

3- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$\begin{cases} x = te^{t}, \\ y = te^{-t}. \end{cases} \tag{4}$$



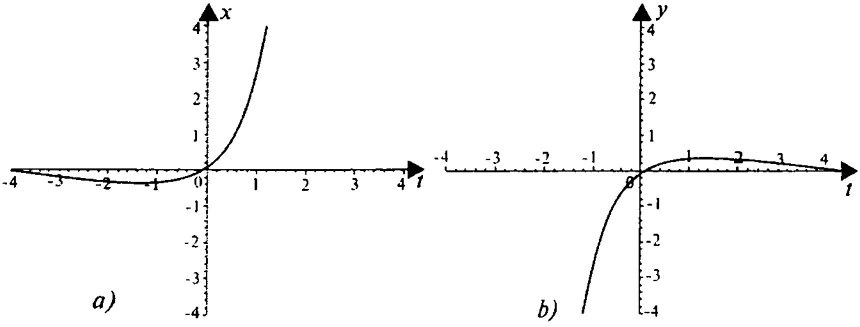
14.2- chizma.

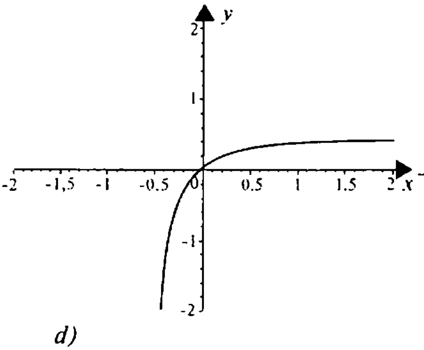
Yechilishi. xOt va yOt koordinatalar sistemalarida, mos ravishda, $x = te^{t}$ va $y = te^{-t}$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz (14.3- a), b) chizmalar). $x = te^{t}$ va $y = te^{-t}$ funksiyalarning grafiklari bo'yicha $y = y(x)$ funksiyani tekshiramiz. $D(y) = (-e^{-1};+\infty)$, $E(y) = (-\infty;e^{-1})$ bo'lib, funksiyaning limit qiymati nolga teng, ya'ni $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$. Funksiyaning grafigi $O(0;0)$ nuqtadan o'tadi va $x+y=0$ to'g'ri chiziqqa simmetrikdir (14.3- chizma, *d*)).

4- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

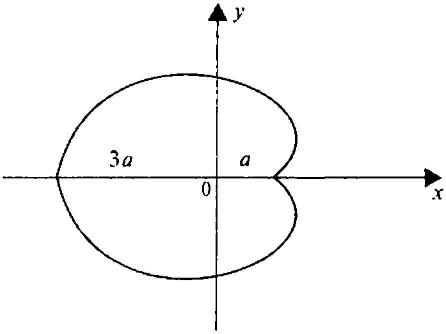
$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t, \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$$

Yechilishi. xOt va yOt koordinatalar sistemalarida, mos ravishda, $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - \sin 2t$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklar bo'yicha $y = y(x)$ funksiyani





14.3- chizma.



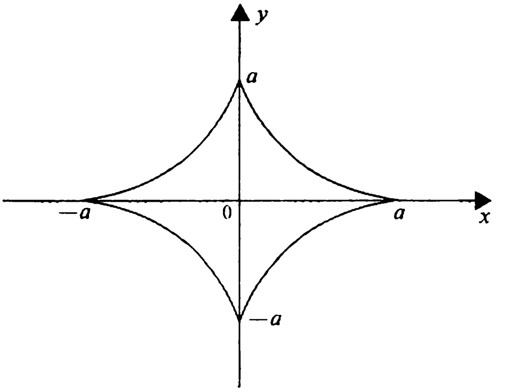
14.4- chizma.

tekshiramiz. Ravshanki, $D(y)=[-3a; a]$, $E(y)=[-2a;2a]$ bo'lib, funksiyaning grafigi abssissalar o'qiga nisbatan simmetrikdir. $x=$ $=2a\cos t - a\cos 2t$, $y=2a\sin - a\sin 2t$ funksiyalar 2π davrga ega bo'lganligidan $y=y(x)$ funksiya ham davriy bo'lib, uning davri 2π ga teng. $[0;2\pi]$ oraliqning chetki nuqtalarda $y=y(x)$ funksiyaning limit qiymati nolga teng. Bu funksiyaning grafigi 14.4-chizmada tasvirlangan. Bu chiziq *kardioida* deyiladi.

5- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases} \qquad (6)$$

Yechilishi. xOt va yOt koordinatalar sistemalarida, mos ravishda, (6) funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklarga ko'ra $y=y(x)$ funksiyani tekshiramiz. Ravshanki, $D(y)=[-a; a]$, $E(y)=[-a; a]$ dan iborat. Funksiyaning grafigi koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik. Funksiya davriy bo'lib, uning davri 2π dan iborat. Funksiya grafigining koordinatalar o'qlari bilan kesishish nuqtalari, mos ravishda, $(a;0)$, $(-a;0)$; $(0;a)$, $(0;-a)$ nuqtalardan iborat. Berilgan funksiyaning grafigi 14.5- chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu chiziq *astroida* deyiladi.



14.5- chizma.

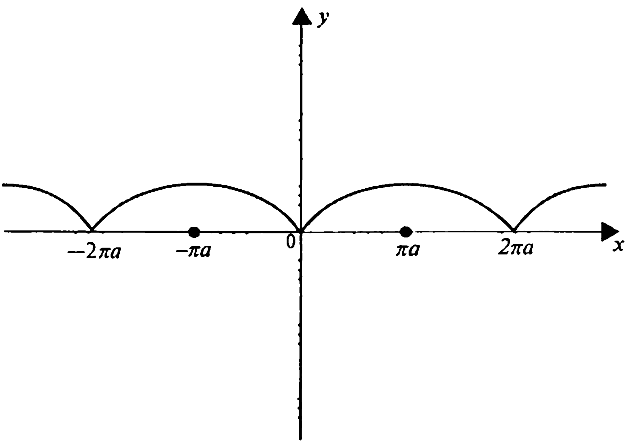
6- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \qquad (7)$$

Yechilishi. Dastlab, xOt va yOt koordinatalar sistemalarida $x=a(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz, so‘ngra bu grafiklarga ko‘ra $y=y\,(x)$ funksiyani tekshiramiz. Ma‘lumki, $D\,(y)=(-\infty;+\infty)$, $E\,(y)=[0;2a]$. Funksiya davriy bo‘lib, uning davri 2π ga teng. Funksiyaning grafigi ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik. Funksiya grafigining koordinatalar o‘qlari bilan kesishish nuqtalari:

a) abssissalar o‘qi bilan kesishish nuqtalari $(0;0)$, $(0;2\pi a)$, $(0;4\pi a)$, ...;

b) ordinatalar o‘qi bilan kesishish nuqtasi esa $O(0;0)$ dan iborat. Berilgan (7) funksiyaning grafigi 14.6- chizmada tasvirlangan. Bu chiziq *sikloida* deyiladi.



14.6- chizma.

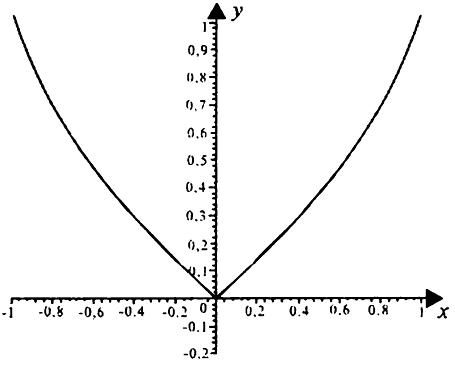
Mustaqil yechish uchun misollar

Tenglamasi parametrik shaklda berilgan quyidagi funksiyalarning grafiklarini chizing:

1. $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1}; \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi, \\ y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}t. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = 16\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 1 - t^2. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = t + e^{-t}, \\ y = 2t + e^{-2t}. \end{cases}$

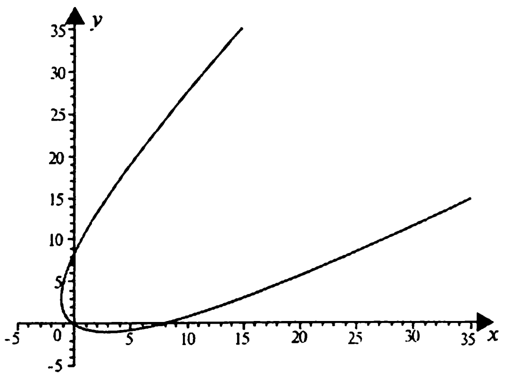
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



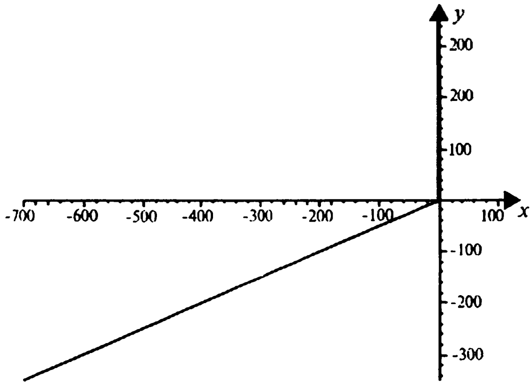
1- chizma.

2.



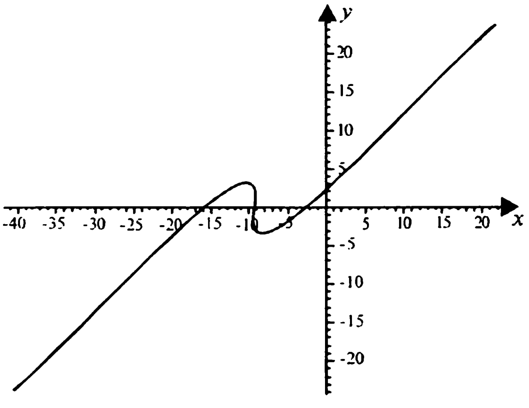
2- chizma.

3.



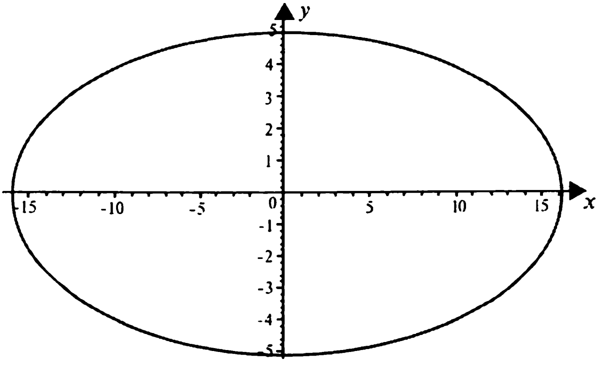
3- chizma.

4.



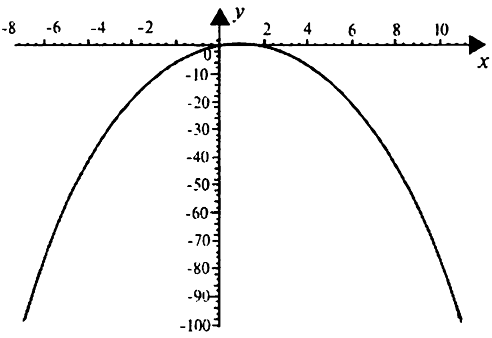
4- chizma.

5.



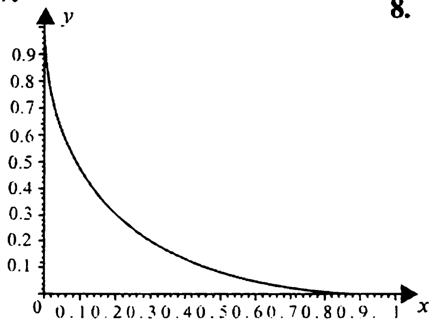
5- chizma.

6.



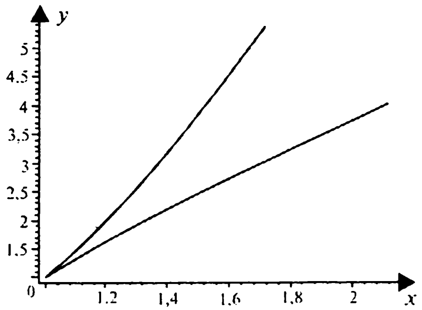
6- chizma.

7.



7- chizma.

8.

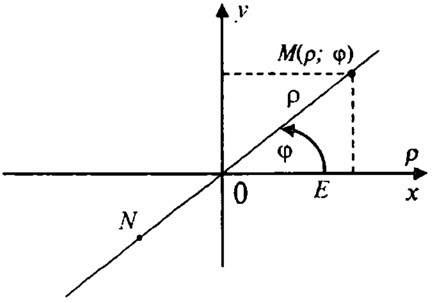


8- chizma.

15- §. QUTB KOORDINATALARIDA BERILGAN FUNKSIYALARNING GRAFIKLARI

1. Qutb koordinatalar sistemasi haqida tushuncha. Tekislikdagi nuqtalarning o'rnini qutb koordinatalar sistemasida aniqlash uchun biror O nuqta olib, bu nuqtadan O to'g'ri chiziqni o'tkazamiz va bu to'g'ri chiziqda musbat yo'nalishni belgilaymiz (15.1- chizma). O nuqtani *qutb*, Ox o'qini esa *qutb o'qi* deb ataymiz.

Endi ma'lum masshtab birligi olib, tekislikdagi ixtiyoriy M nuqtaning o'rnini O qutbga va Ox qutb o'qiga nisbatan aniqlaymiz. Buning uchun M nuqta bilan O qutbni tutashtiramiz. Natijada qutbdan M nuqtagacha bo'lgan $|OM|$ masofa va qutb o'qi bilan $\overline{OM}$ yo'nalgan kesma orasida $\angle xOM = \varphi$ burchak hosil bo'ladi. Bunda $\rho = \overline{OM}$ shu M nuqtaning *qutb radiusi*, φ burchak esa M nuqtaning *qutb burchagi* deyiladi. φ burchakni trigonometriyadagi burchak deb tushinishga kelishib olamiz, ya'ni bu burchakni ishorasi bilan $\pm 2\pi k$, $k \in Z$ qo'shiluvchi aniqligida qaraymiz. ρ va φ ni M nuqtaning *qutb koordinatalari* deb ataymiz va $M(\rho;\varphi)$ shaklda yozamiz. M nuqta qutb burchagining $-\pi<\varphi<\pi$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan qiymati uning *qutb burchagining bosh qiymati* deb ataladi.



15.1- chizma.

Yuqorida aytilganlarga binoan, qutb koordinatalari uchun $\rho \geq 0$ va $-\pi<\varphi<\pi$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Qutb koordinatalariga bunday shartni qo'ymaslik ham mumkin. Bu holda ρ bilan φ ni umuman $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgaradi deb qaraladi. φ burchak $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgarganda qutb koordinatalar sistemasi *umumlashgan qutb koordinatalari sistemasi* deyiladi.

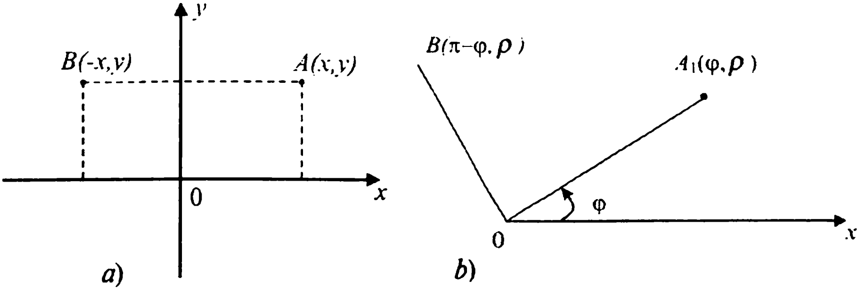
Agar M nuqtaning qutb koordinatalari ma'lum bo'lsa (15.1-chizma), u holda uning Dekart koordinatalari $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ formulalar orqali ifodalanadi .

Agar M nuqtaning Dekart koordinatalari x va y berilgan bo'lsa, u holda uning qutb koordinatalari:

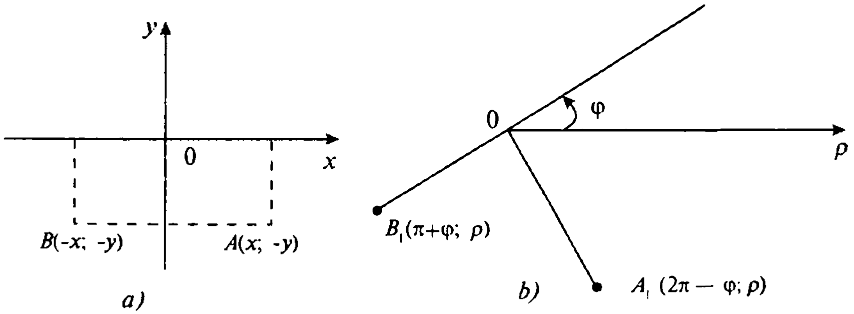
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

formulalar orqali topiladi.

Ba'zi bir masalalarni yechishda qutbdan o'tuvchi bitta to'g'ri chiziqda O nuqtaning turli tomonida joylashgan ikkita M va N nuqtalarni qarashga to'g'ri keladi (15.1- chizma). Bu holda M va N nuqtalarning qutb burchagi sifatida OE kesmadan OM nurgacha



15.2- chizma.



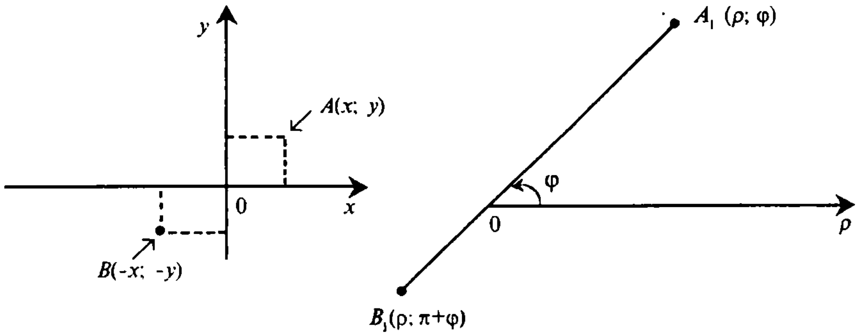
15.3- chizma.

bo'lgan burchakni olish mumkin. Bunda ρ ni M nuqta uchun musbat, N nuqta uchun esa manfiy deb hisoblanadi.

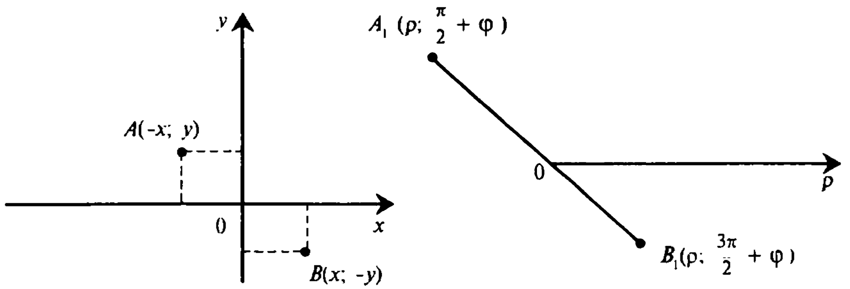
Qutb koordinatalar sistemasida berilgan funksiyaning umumiy ko'rinishi $\rho=f(\varphi)$ yoki $F(\rho;\varphi)=0$ shaklida bo'ladi. $\rho=f(\varphi)$ funksiyani qutb koordinatalar sistemasida tekshirsak, Dekart koordinatalar sistemasida $y=f(x)$ ga taqqoslash yo'li bilan ham amalga oshirish mumkin, bunda ρ ni y ga, φ ni esa x ga almashtiriladi. $\rho=f(\varphi)$ funksiyani tekshirish sxemasi $y=f(x)$ funksiyani tekshirish sxemasi kabi tekshiriladi. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[a,b]$ endi $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $a \le \varphi \le \beta$ ga mos bo'ladi. $y=f(x)$ funksiyaning x_1, x_2, ... maxsus nuqtalari $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning $\varphi_1=x_1$, $\varphi_2=x_2$, ... maxsus nuqtalariga mos keladi.

1) $y=f(x)$ juft funksiya bo'lsin . U holda $f(x)=f(-x)$ tenglikka asosan, $y=f(x)$) egri chiziqning $A(x;y)$ va $B(-x;y)$ nuqtalari $\rho=f(\varphi)$ egri chiziqning $A_1(\varphi;\rho)$ va $B_1(\pi-\varphi;\rho)$ nuqtalariga mos keladi. $y=f(x)$ egri chiziqning $A(x;-y)$ va $B(-x,-y)$ nuqtalari $\rho=f(\varphi)$ egri chiziqning $A_1(\rho;2\pi-\varphi)$ va $B_1(\rho;\pi+\varphi)$ nuqtalariga mos keladi (15.3- chizma).

2) $y=f(x)$ toq funksiya bo'lsin. U holda Dekart koordinatalar sistemasining koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $A(x;y)$ va $B(-x,-y)$ nuqtalari qutb koordinatlar sistemasining qutbiga nisbatan simmetrik bo'lgan $A_1(\varphi;\rho)$ va $B_1(\rho;\pi+\varphi)$ nuqtalarga mos keladi (15.4- chizma), Dekart koordinatalar sistemasidagi $A(-x;-y)$ va $B(x;-y)$ nuqtalar esa qutb koordinatalar sistemasidagi $A_1\left(\rho;\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ va $B_1\left(\rho;\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)$ nuqtalarga mos keladi. (15.5-chizma).



15.4- chizma



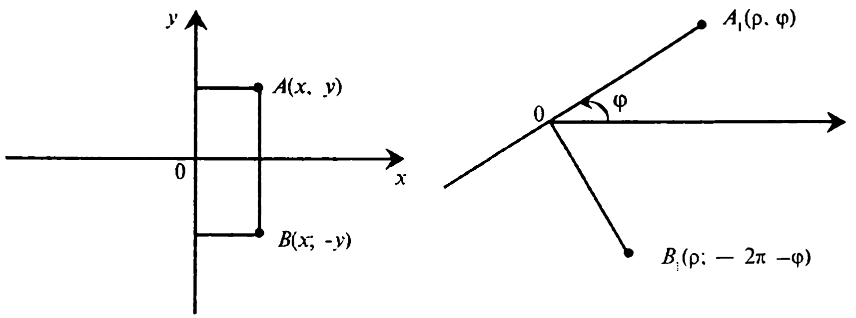
15.5- chizma

3) agar $y=f(x)$ egri chiziq $x>0$ bo'lganda abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'lsa, Dekart koordinatalar sistemasidagi $A(x;y)$ va $B(x;-y)$ nuqtalarga qutb koordinatalar sistemasidagi $A_1(\rho;\varphi)$ va $B_1(\rho;2\pi-\varphi)$ nuqtalar mos keladi. (15.6- chizma).

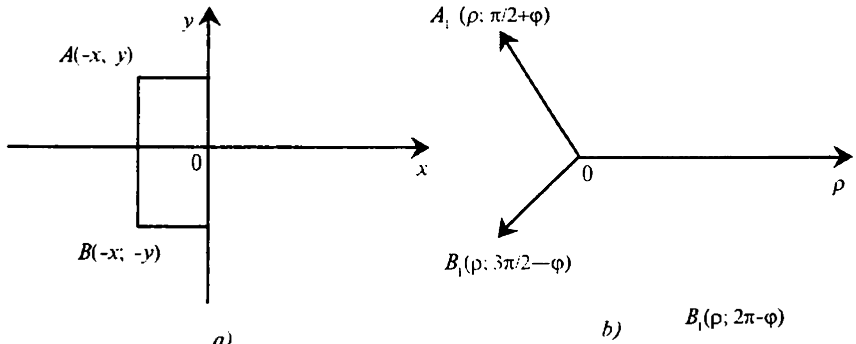
4) agar $y=f(x)$ egri chiziq $x<0$ bo'lganda abssissalar o'qiga simmetrik bo'lsa, bu chiziqning Dekart koordinatalar sistemasidagi $A(-x;y)$ va $B(-x;-y)$ nuqtalari qutb koordinatalar sistemasining $A_1\left(\rho;\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ va $B_1\left(\rho;\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$ nuqtalariga mos keladi (15.7- chizma).

5) agar $y=f(x)$ funksiya davriy bo'lsa, $\rho=f(\varphi)$ funksiya ham davriy bo'ladi va ularning davrlari o'zaro teng.

Agar $y=f(x)$ chegaralangan $(m<f(x)<M)$ bo'lsa, uning grafigi $y=m$ va $y=M$ to'g'ri chiziqlar orasida bo'ladi. Unga mos $\rho=f(\varphi)$ funksiya uchun ham $m<f(\varphi)<M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning grafigi ichki radiusi m, tashqi radiusi M bo'lgan halqaning ichida joylashadi.



15.6- chizma



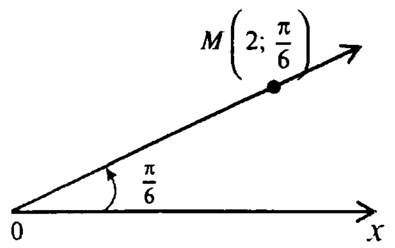
15.7- chizma

Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, $\rho=f(\varphi)$ funksiya $\varphi=\varphi_0$ da ekstremumga ega bo‘ladi.

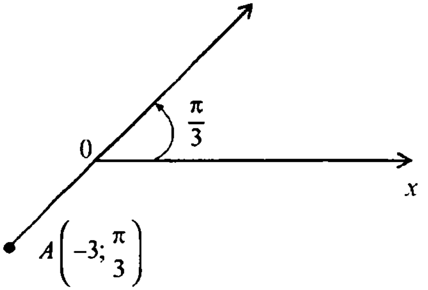
Agar $f(x)$ funksiya biror oraliqda kamayuvchi bo‘lsa, qutb koordinatalar sistemasida $\rho=f(\varphi)$ funksiya uchun qutb radiusining qiymati: soat strelkasi bo‘yicha harakat qilganda kamayadi, soat strelkasiga teskari harakat qilganda esa uning qiymati ortadi.

$y=f(x)$ funksiyaning Dekart koordinatalar sistemasidagi $y=c$ gorizontal asimptotasi qutb koordinata sistemasiga $\rho=c$ radiusli asimptotik aylana bo‘lib ko‘chadi. Xususiy holda $c=0$ bo‘lsa, aylana nuqtaga aylanadi.

$y=f(x)$ chiziqning Dekart koordinatalar sistemasidagi $x=b$ vertikal asimptotasi qutb koordinatalar sistemasiga $\varphi=b$ nur bo‘lib ko‘chadi. Xususiy holda $b=0$ bo‘lsa, $x=0$ asimptota qutb koordinatalar sistemasiga qutb o‘qi bo‘lib o‘tadi. Agar $b=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (k — biror butun son) bo‘lsa, $x=b$ asimptota $\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ vertikal nur bo‘lib o‘tadi.



15.8- chizma.



15.9- chizma

Agar $y=f(x)$ chiziq Dekart koordinatalar sistemasida $y=ax+b$ asimptotaga ega bo'lsa, bu og'ma asimptota qutb koordinatalar sistemasiga $\rho=a\varphi+b$ Arximed spirali bo'lib o'tadi. Xususiy holda $y=f(x)$ egri chiziqning $y=ax$ asimptotasi $\rho=a\varphi$ Arximed spirali bo'lib o'tadi.

1- misol. $M\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ nuqtani yasang.

Yechilishi. Tekislikda O qutbni belgilab undan Ox qutb o'qini o'tkazamiz. Ox o'qini musbat yo'nalishda $\frac{\pi}{6}$ burchakka buramiz va unda musbat yo'nalishda 2 birlik kesma ajratamiz, natijada OM kesma hosil bo'ladi. Bu kesmaning M uchi izlanayotgan nuqta bo'ladi. (15.8-chizma).

2-misol. $A\left(-3;\frac{\pi}{3}\right)$ nuqtani yasalng.

Yechilishi. Ox qutb o'qini o'tkazib, uni $\frac{\pi}{3}$ burchakka buramiz va shu bilan $\overline{OM}$ musbat yo'nalishni aniqlaymiz. Endi $\rho=-3$ bo'lgani uchun OM ning teskari yo'nalishdagi davomida $|-3|=3$ birlik masshtabni olamiz, bu kesmaning uchi izlanayotgan $A\left(-3;\frac{\pi}{3}\right)$ nuqtani beradi (15.9- chizma).

2. Qutb koordinatalar sistemasida funksiyalarning grafiklarini chizish. $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning grafigini chizish quyidagicha bajariladi:

a) $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning grafigini chizish uchun unga mos kelgan $y=f(x)$ funksiya quriladi;

b) $\rho=f(\varphi)$ funksiyani tekshirish qoidasi, xuddi $y=f(x)$ funksiyani tekshirishdek bo'ladi (6-, 7-§ larga q.);

d) $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning grafigini chizish $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo'yicha bajariladi.

1-misol. $\rho=a\varphi$ $(a>0)$ funksiya grafigini chizing.

Yechilishi. Qutb koordinatalar sistemasida ba'zan funksiyalarning grafiklari nuqtalar bo'yicha chiziladi.

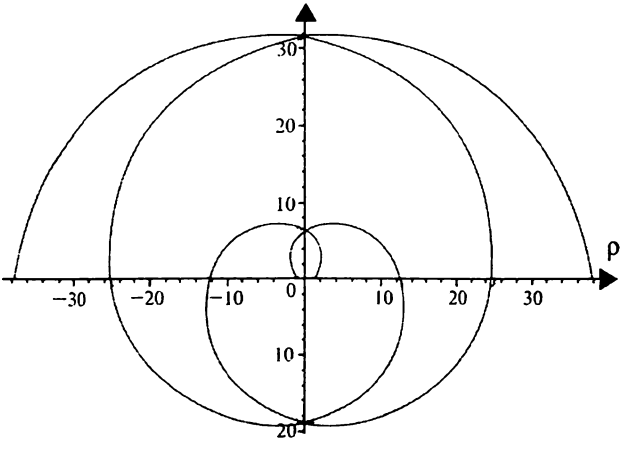
$\varphi>0$ qiymatlar uchun jadval tuzamiz:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π
ρ	0	$0{,}8a$	$1.6a$	$2{,}5a$	$3{,}1a$	$3{,}9a$	$4{,}7a$	$5{,}5a$	$6{,}3a$	$7{,}1a$	$7{,}9a$	$8.7a$	$9{,}5a$

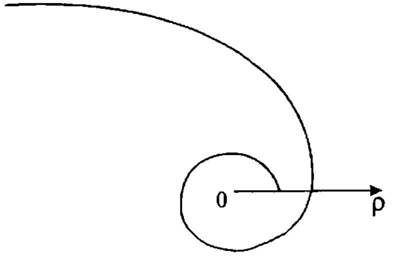
Koordinatalar tekisligida yuqorida topilgan nuqtalarning o'rinlarini topib, ularni chiziqlar bilan birlashtirish natijasida $\varphi>0$ bo'lganda funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (15.10- chizma).

2-misol. $\rho=ae^{k\varphi}$ (a va k — o'zgarmas musbat sonlar) funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Bu tenglama bilan berilgan chiziq *logarifmik spiral* deyiladi. Uni chizish uchun φ burchakka ixtiyoriy qiymatlar berib, bu qiymatlarni berilgan tenglamaga qo'yamiz va undan φ ning bu qiymatlariga mos bo'lgan ρ ning qiymatlarini aniqlaymiz:



15.10- chizma.



15.11- chizma.

Agar $\varphi = ..., -\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, ...$ qiymatlarni qabul qilib o'sib borsa, tenglamadan aniqlangan ρ ning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$\rho = ..., ae^{-k\pi}, ae^{-\frac{k\pi}{2}}, ae^{-\frac{\pi}{4}k}, a, ae^{\frac{\pi k}{4}}, ae^{\frac{\pi k}{2}}, ae^{k\pi}, ae^{\frac{3\pi k}{2}}, ae^{2k\pi}, ...$$

Ushbu

$$(ae^{-k\pi}, -\pi), \left(ae^{-\frac{k\pi}{2}}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(ae^{\frac{k\pi}{4}}, -\frac{\pi}{4}\right), (a, 0), \left(ae^{\frac{\pi}{4}k}, \frac{\pi}{4}\right), \left(ae^{k\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right) \quad ...$$

nuqtalarni olamiz.

Qutb koordinatalar sistemasida yuqorida topilgan nuqtalarning o'rnini topib, ularni ravon chiziq yordamida birlashtirish natijasida $\rho = ae^{k\varphi}$ funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (15.11-chizma).

3- misol. $\rho = 4\sin 2\varphi$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. $\rho = 4\sin 2\varphi$ funksiyani tekshirishda, uni $y = 4\sin 2x$ funksiya bilan taqqoslanadi. $y = 4\sin 2x$ funksiya $\forall x \in R^1$ da aniqlangan, demak, $\rho = 4\sin 2\varphi$ funksiya ham $\forall \varphi$ da aniqlangan.

$y = 4\sin 2x$ toq funksiya, demak, $\rho = 4\sin 2\varphi$ funksiya qutbga nisbatan simmetrik.

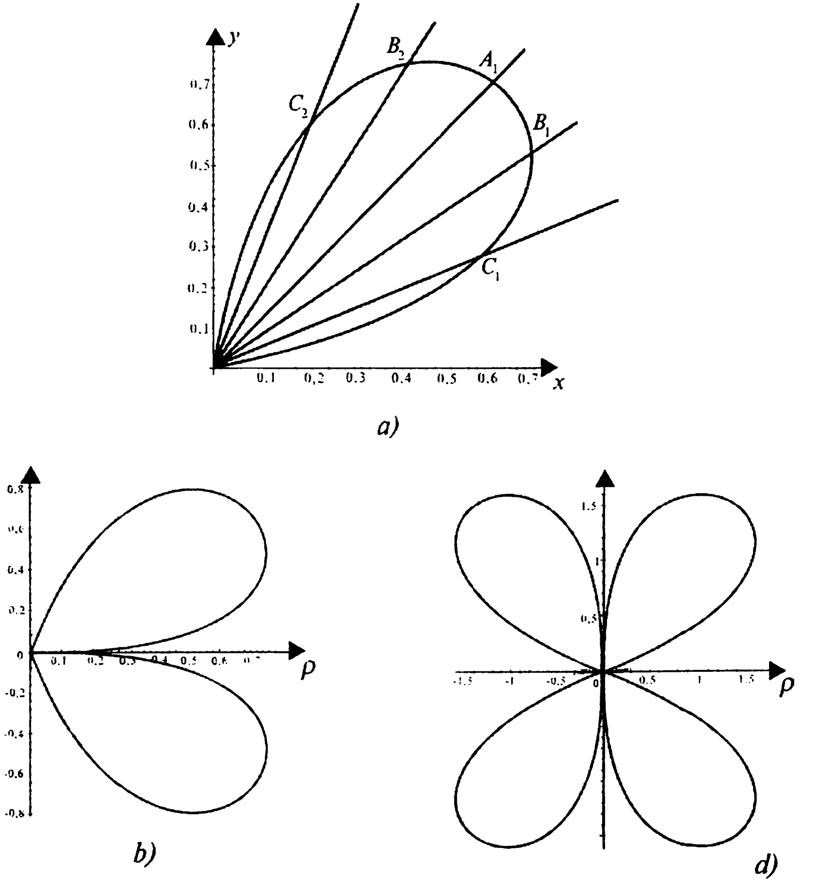
$y = 4\sin 2x$ davriy funksiya, uning eng kichik musbat davri π, u holda $\rho = 4\sin 2\varphi$ ham davriy funksiya bo'lib, $T = \pi$ uning davri bo'ladi.

$y = 4\sin 2x$ funksiya chegaralangan ($|4\sin 2x| \le 4$), demak, $\rho = 4\sin 2\varphi$ funksiya ham chegaralangan ($|4\sin 2\varphi| \le 4$).

$y = 4\sin 2x$ funksiya $[0;\pi]$ dagi $x = \frac{\pi}{4}$ nuqtada maksimumga $\left(y_{\max}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\right)$, $x = \frac{3\pi}{4}$ nuqtada esa minimumga $\left(y_{\min}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\right)$

ega bo‘ladi, ρ=4sin 2φ funksiya mos ravishda $\varphi=\frac{\pi}{4}$ va $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ nuqtalarda 4 va —4 ekstremum qiymatlariga ega bo‘ladi.

$y=4\sin 2x$ funksiya $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$ oraliqlarda o‘suvchi, $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ oraliqlarda esa kamayuvchi, demak, mos ravishda ρ=4sin 2φ funksiya ham $\varphi\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$ oraliqlarda o‘suvchi, $\varphi\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ oraliqlarda esa kamayuvchi.



15.12- chizma.

$y=4\sin 2x$ funksiya grafigi asimptotaga ega emas, u holda $\rho=4\sin 2\varphi$ ham asimptotaga ega bo'lmaydi.

Demak, $\rho=4\sin 2\varphi$ egri chiziq markazi qutbda, radiusi 4 ga teng bo'lgan doirada joylashadi.

$\rho=4\sin 2\varphi$ egri chiziqning qutbga nisbatan simmetrikligi va uning davriyligini hisobga olib, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $\rho=4\sin 2\varphi$ funksiyaning grafigini quramiz.

Bu grafikni yasash uchun, dastlab xarakterli nuqtalarni topamiz:

$$A_1\left(4;\frac{\pi}{4}\right),\ A_2(0;0), A_3\left(0;\frac{\pi}{2}\right), B_1\left(2\sqrt{3};\frac{\pi}{6}\right), B_2\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{8}\right), C_1\left(2;\frac{\pi}{12}\right).$$

Bu nuqtalarni ravon chiziq yordamida birlashtiramiz, natijada $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ dagi $\rho=4\sin 2\varphi$ funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (15.12-chizma, (*a*)). $\rho=4\sin 2\varphi$ egri chiziqning qutbga nisbatan simmetrikligini hisobga olsak, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$ uchun $\rho=4\sin 2\varphi$ egri chiziq grafigini chizamiz (15.12- chizma, (*b*)). Qutb atrofida burchakni π burish natijasida $\rho=4\sin 2\varphi$ funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (15.12- chizma (*d*)).

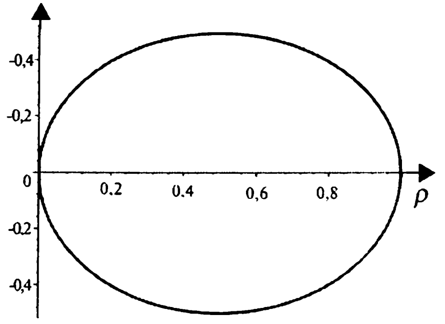
3. Qutb koordinatalar sistemasida funksiya grafiklarini almashtirish. Qutb koordinatalar sistemasida $\rho=mf(\varphi+a)+b$ funksiyaning grafigi ham Dekart koordinatalar sistemasidagi $y=mf(x+a)+b$ funksiyaning grafigi kabi chizilib, bunda quyidagi xossalarga asoslaniladi:

1°. $\rho=-f(\varphi)$ va $\rho=f(\varphi)$ funksiyalarning grafiklari qutb boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

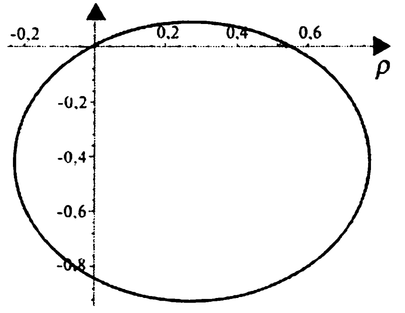
2°. $\rho=f(-\varphi)$ va $\rho=f(\varphi)$ funksiyalarning grafiklari qutb o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

3°. $\rho=mf(\varphi)$ $(m>0)$ funksiyaning grafigi $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning grafigini qutb o'qi bo'ylab m marta qisish (cho'zish) natijasida hosil qilinadi.

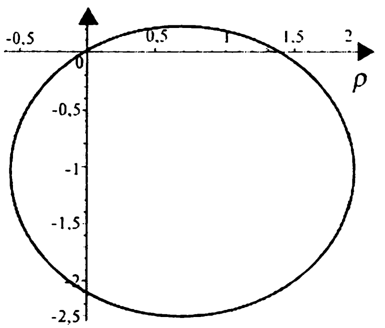
4°. $\rho=f(\varphi+a)$ funksiyaning grafigi $\rho=f(\varphi)$ funksiyaning grafigini α burchakka burish natijasida hosil bo'ladi.



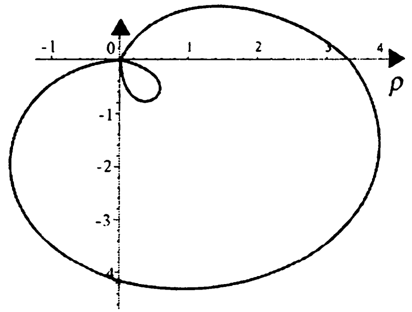
15.13- chizma. $\rho = \cos\varphi$.



15.14- chizma. $\rho = \cos(\varphi+1)$.



15.15- chizma. $\rho = 3\cos(\varphi+1)$.



15.16- chizma. $\rho = 2+3\cos(\varphi+1)$.

5°. $\rho = f(\varphi)+b$ funksiyaning grafigi $\rho = f(\varphi)$ funksiyaning grafigini qutb o'qi bo'ylab b masshtab birligiga parallel ko'chirish natijasida hosil qilinadi.

Misol. $\rho = 2+3\cos(\varphi+1)$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Avvalo, $\rho=\cos\varphi$ funksiyaning grafigini chizamiz (15.13- chizmaga qarang), so'ngra yuqoridagi 3^0—5^0 - bandlarga asosan, $\rho = \cos(\varphi+1)$ (15.14- chizma), $\rho = 3\cos(\varphi+1)$ (15.15- chizma), $\rho = 2+3\cos(\varphi+1)$ funksiyalarning grafiklarini ketma-ket chizish natijasida berilgan funksiyaning grafigini hosil qilamiz (15.16- chizma).

Mustaqil yechish ucbun misollar

Funksiyalarning grafiklarini chizing:

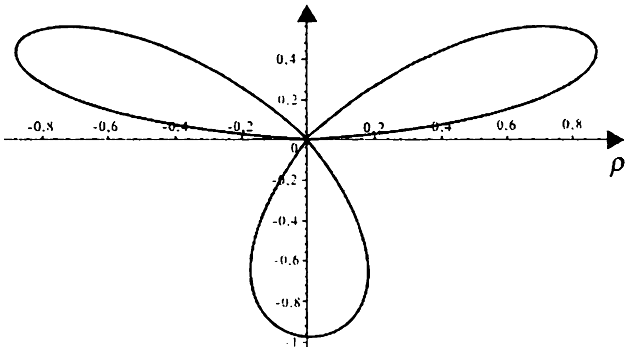
1. $\rho = a\sin 3\varphi$. **2.** $\rho = 2+6\cos\varphi$. **3.** $\rho = 3+4\cos\varphi$.

4. $\rho = \frac{2}{\sin\varphi} + 4$. **5.** $\rho = 2\frac{\sin\varphi}{\varphi}$. **6.** $\rho = 6\sin\frac{\varphi}{3}$.

7. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$. **8.** $\rho = \frac{3}{\varphi}$.

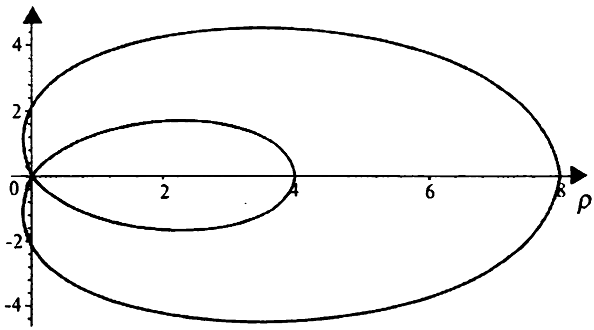
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



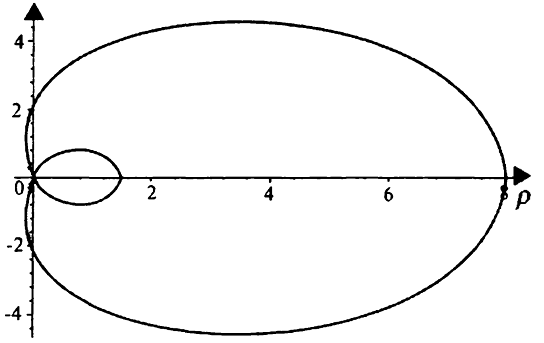
1- chizma.

2.



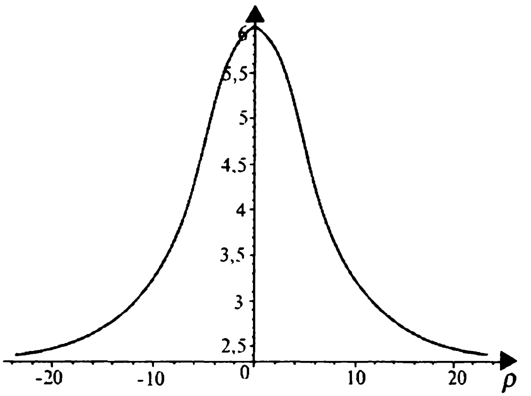
2- chizma.

3.



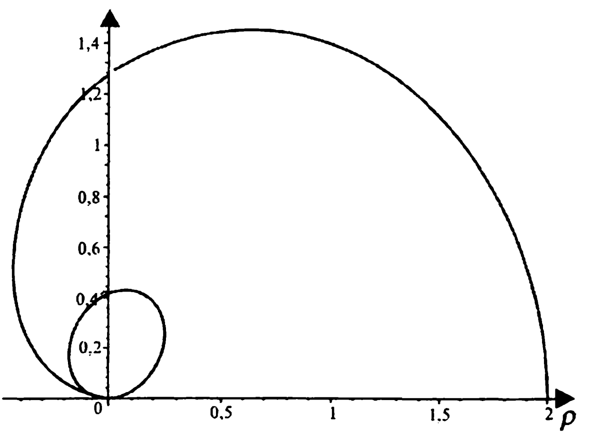
3- chizma.

4.



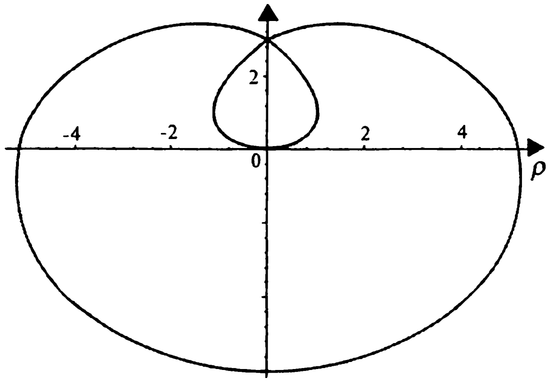
4- chizma.

5.



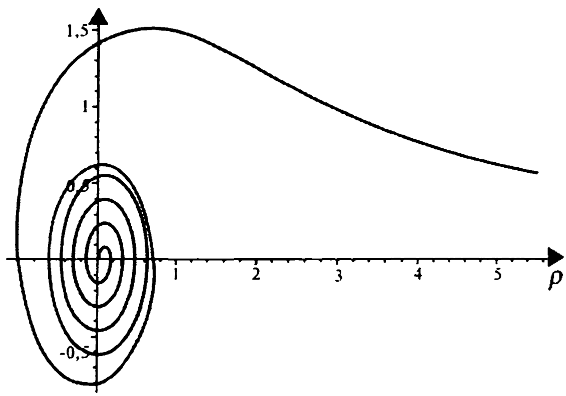
5- chizma.

6.



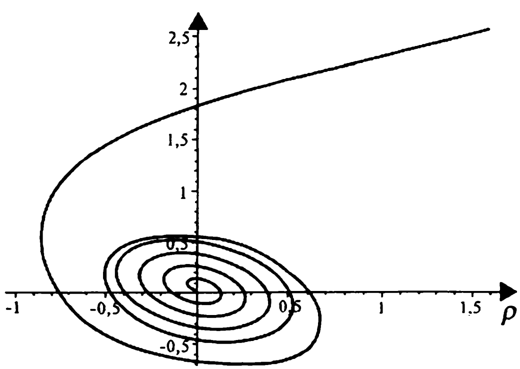
6- chizma.

7.



7- chizma.

8.



8- chizma.

16- §. OSHKORMAS SHAKLDA BERILGAN FUNKSIYANING GRAFIGI

1. Oshkormas shaklda berilgan funksiyaning grafigini tekshirish. Tenglamasi $F(x, y)=0$ shaklda berilgan funksiyani qaraymiz. Bu shaklda berilgan funksiyalar algebraik va transsendent funksiyalarga bo'linadi.

Agar $F(x, y)$ funksiya $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$,..., $\varphi_n(x,y)$ funksiyalar ko'paytmasiga yoyilsa, $F(x, y)=0$ tenglama $\varphi_1(x,y)=0$, $\varphi_2(x,y)=0$,... $\varphi_n(x,y)=0$ tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

Agar egri chiziq tenglamasi $F(x, y)=0$ da x ni $-x$ ga almashtirilganda, u o'zgarmasa, chiziq ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Agar egri chiziq tenglamasi $F(x, y)=0$, da y ni $-y$ ga almashtirilganda, u o'zgarmasa, chiziq abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Agar egri chiziq tenglamasi $F(x, y)=0$ da bir vaqtda x ni $-x$ ga, y ni $-y$ ga almashtirilganda, u o'zgarmasa, chiziq koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Agar chiziq tenglamasi $F(x, y)=0$ da y ni x ga, x ni y ga almashtirilganda, u o'zgarmasa, chiziq $y=x$ bissektrisaga nisbatan simmetrik bo'ladi.

$F(x+a, y)=0$ tenglama bilan ifodalanadigan chiziq $F(x, y)=0$ tenglama bilan ifodalangan chiziqni abssissalar o'qi bo'ylab $|a|$ masshtab birligiga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi, bunda yo'nalish a ning ishorasiga teskari bo'ladi.

$F(x,y+b)=0$ chiziq $F(x, y)=0$ chiziqni ordinatalar o'qi bo'ylab $|b|$ masshtab birligiga parallel ko'chirish natijasida hosil qilinadi, bunda yo'nalish b ning ishorasiga teskari bo'ladi.

$F\left(\frac{x}{p}, y\right)$ chiziq $F(x, y)=0$ chiziqni abssissalar o'qi bo'ylab p marta siqish (cho'zish) natijasida hosil qilinadi.

$F\left(x, \frac{y}{q}\right)=0$ chiziq $F(x, y)=0$ chiziqni ordinatalar o'qi bo'ylab q marta siqish (cho'zish) natijasida hosil qilinadi.

$F\left(\frac{x}{p}+a, \frac{y}{q}+b\right)=0$ tenglama bilan ifodalangan chiziq yuqoridagi almashtirishlar yordamida $F(x, y)=0$ funksiyaning grafigi orqali hosil qilinadi.

$F(x, y)=0$ chiziqning abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtalari

$$F(x,0)=0,$$
$$F(x, y)=0$$

sistemaning yechimlaridan iborat bo'ladi. $F(x, y)$ funksiyaning grafigini aniqroq chizish uchun bu chiziqning koordinatalar o'qlarida yotmagan ba'zi nuqtalarini topish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Bu yordamchi nuqtalarni $F(x, y)=0$ chiziqning $y=kx$ to'g'ri chiziq bilan (k ning har xil qiymatlarida) kesishish nuqtalari sifatida axtarish kerak.

$F(x, y)=0$ chiziqning gorizontal asimptotalarini topish uchun, x ning bu tenglamada qatnashgan yuqori darajasi oldidagi koeffitsiyentini nolga tenglashtirish kerak, bunda koeffitsiyent o'zgarmas miqdor bo'lsa, u holda chiziqning gorizontal asimptotasi bo'lmaydi.

$F(x, y)=0$ chiziqning vertikal asimptotalarini topish uchun esa, y ning tenglamada qatnashgan yuqori darajasi oldidagi koeffitsiyentini nolga tenglashtirish kerak.

$F(x, y)=0$ chiziqning og'ma asimptotalarini topish uchun tenglamada y ni $kx+b$ ga almashtirib, ikkita x ning eng yuqori darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtirish kerak.

1- misol. Ushbu egri chiziq ikkita gorizontal asimptotaga ega ekanligini ko'rsating:

$$x^2y^2+y^4-25x^2=0.$$

Yechilishi. Haqiqatan ham, berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$(y^4-25)\ x^2+y^4=0.$$

x^2 oldidagi koeffitsiyentni nolga tenglashtiramiz:

$$y^4-25=0 \text{ yoki } (y-5)(y+5)=0.$$

$y=5$, $y=-5$ to'g'ri chiziqlar berilgan egri chiziqning gorizontal asimptotalari bo'ladi.

2-misol. $2y^2-xy^2-6x^2y=0$ egri chiziq bitta vertikal asimptotaga ega ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. Haqiqatan ham, berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$(2-x)y^2-6x^2y=0.$$

y^2 va x^2 oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtiramiz:

$$2-x=0, \text{ yoki } x=2.$$

$$-6y=0, \text{ yoki } y=0.$$

Demak, $x=2$ va $y=0$ to'g'ri chiziqlar, mos ravishda, berilgan egri chiziqning vertikal va gorizontal asimptotalari bo'ladi.

3- misol. $x^3+y^3-4x^2=0$ egri chiziqning og'ma asimptotaga ega ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. Haqiqatan ham, egri chiziq tenglamasidagi y ni $kx+b$ ga almashtiramiz:

$$x^3+(kx+b)^3-6x^2=0,$$

$$x^3+k^3x^3+3k^2x^2b+3kxb^2+b^3-6x^2=0,$$

$$(1+k^3)x^3+(3k^2b-6)\ x^2+3kb^2x+b^3=0.$$

Endi x^3 va x^2 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} 1+k^3=0, \\ 3k^2b-6=0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{matrix} k=-1, \\ b=2. \end{matrix}$$

Demak, $y=-x+2$ to'g'ri chiziq berilgan egri chiziqning og'ma asimptotasi bo'ladi.

4- misol. $x^4+2y^2-x^2-y^4=0$ egri chiziqning grafigini chizing.

Yechilishi. Oshkormas shaklda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini topish uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$(y^2-1)^2=x^4-x^2+1$$

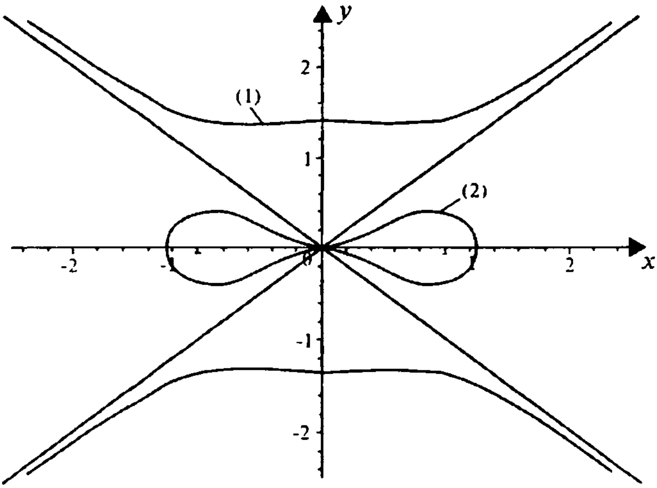
yoki

$$y_1=\pm\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2+1}} \quad \text{va} \quad y_2=\pm\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2+1}},$$

Natijada, egri chiziqning ikkita shoxiga ega bo'lamiz. Birinchi shoxning aniqlanish sohasida ixtiyoriy x uchun

$$x^4-x^2+1\geq 0 \quad \text{yoki} \quad (x^2-1)^2+x^2\geq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.



16.1- chizma.

$$x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0. \quad (1)\ y = \pm\sqrt{1+\sqrt{x^4 - x^2 + 1}},$$

$$(2)\ y = \pm\sqrt{1-\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}.$$

Ikkinchi shoxi uchun esa

$$\sqrt{x^4 - x^2 + 1} \le 1 \quad \text{yoki} \quad x^2 - 1 \le 0$$

tengsizlik $|x| \le 1$ o'rinli bo'ladi

Demak, egri chiziq birinchi shoxining aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$, ikkinchi shoxining aniqlanish sohasi esa $[-1;1]$.

Egri chiziq koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'ladi, chunki x ni $-x$ ga, y ni $-y$ ga almashtirganda egri chiziq tenglamasi o'zgarmaydi.

Berilgan egri chiziq gorizontal va vertikal asimptotalarga ega emas, chunki x^4 va y^4 o'zgaruvchilar oldidagi koeffisiyentlar o'zgarmas.

Endi og'ma asimptotani topish uchun y ni $kx+b$ ga almashtiramiz:

$$x^4 - (kx+b)^4 - x^2 + 2(kx+b)^2 = 0.$$

Bunda x^4 va x^3 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} k^4 - 1 = 0, \\ 4k^3 b = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{matrix} k = \pm 1, \\ b = 0. \end{matrix}$$

Demak, $y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlar berilgan egri chiziqning og'ma asimptotalari bo'ladi.

Egri chiziqning bir nechta qo'shimcha nuqtalarini topamiz. Buning uchun ushbu sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0, \\ y = kx. \end{cases}$$

Bu yerdan $x_{1,2}=0$ va $x^2 = \frac{1-2k^2}{1-k^4}$. Agar $k=0$ bo'lsa, $x=\pm1$ bo'ladi.

Berilgan funksiyaning grafigi 16.1- chizmada tasvirlangan.

5- misol. $y^2-x^3-8=0$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$y = \pm\sqrt{x^3 + 8}.$$

Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi:

$$D(F)=[-2;+\infty)$$

bo'ladi. Funksiyaning grafigi Ox o'qqa nisbatan simmetrik, chunki y ni $-y$ ga almashtirganda egri chiziq o'zgarmaydi.

Egri chiziq asimptotalarga ega emas, berilgan funksiyaning grafigini chizish uchun, yuqori shoxini chizamiz, ya'ni $y = \sqrt{x^3 + 8}$. Bu chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz: $A(0;2\sqrt{2})$, $B(-2;0)$. $t = x^3 + 8$ deb belgilasak, bunda $y = \sqrt{t}$ bo'ladi.

Ravshanki, $y = \sqrt{t}$ va $t=x^3+8$ funksiyalarning grafiklari ma'lum.

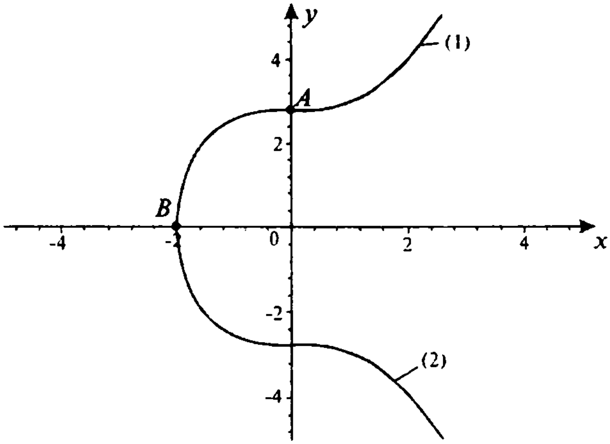
Yuqori shox uchun chizilgan funksiyaning grafigini abssissalar o'qiga nisbatan akslantirib, izlanayotgan funksiyaning grafigini hosil qilamiz (16.2- chizma).

6-misol. $y^3-9x^2+x^3=0$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$y = \sqrt[3]{9x^2 - x^3}.$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi: $(-\infty;+\infty)$ dan iborat. Berilgan funksiya vertikal va gorizontal asimptotalarga ega emas.



16.2- chizma. $y^2-x^3-8=0$. (1) $y=\sqrt{x^3+8}$.
(2) $y=-\sqrt{x^3+8}$.

Endi og'ma asimptotasini topamiz:

$$(kx+b)^3-9x^2+x^3=0.$$

Bundan

$$\begin{cases} k^3+1=0, \\ 3k^2b-9=0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} k=-1, \\ b=3. \end{cases}$$

$x+y=3$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi.

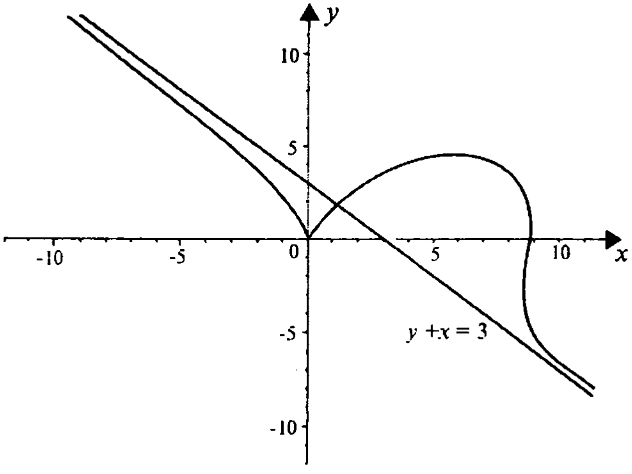
$t=9x^2-x^3$ deb belgilaymiz, bunda $y=\sqrt[3]{t}$. Ushbu $t=9x^2-x^3$ va $y=\sqrt[3]{t}$ funksiyalarning grafiklari yordamida izlanayotgan funksiyaning grafigi chiziladi (16.3- chizma).

7-misol. $x^4+y^4-x^2-y^2=0$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. Berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=0.$$

Bu egri chiziq koordinata o'qlari va $y=x$ hamda $y=-x$ bissektrisalarga nisbatan simmetrik bo'ladi, chunki $F(-x,-y)=F(x,y)$ va $F(x,y)=F(y,x)$. Endi $0\le x\le y$ qismdagi grafikni chizamiz. Bu



16.3- chizma. $y^3+x^3-9x^2=0$.

shartlarda berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}.$$

Buning $y = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}$ shoxobchasini qaraymiz.

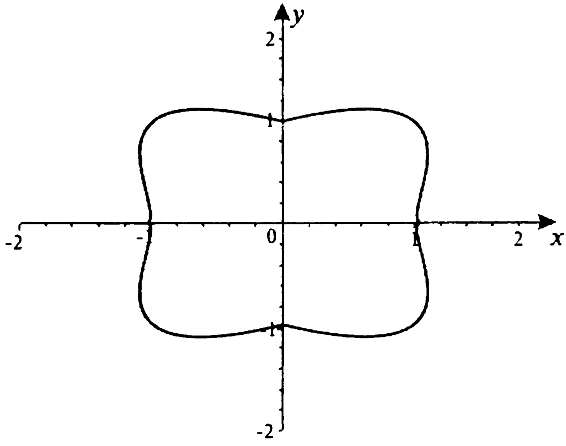
Ravshanki, $x \leq 1$ bo'lsa, chegaralangan, $x > 1$ bo'lsa, $\sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4} < \frac{1}{2}, y < 1$. $z = \frac{1}{4} + x^2 - x^4 = \frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$ funksiya $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ da $y = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}$ eng katta qiymatga erishadi.

$\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ da $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ ifoda $\frac{1}{4}$ dan 0 gacha kamayadi. z funksiya $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{4}$ gacha kamayadi, y funksiya esa 1 dan $\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}$ gacha o'sadi.

x o'zgaruvchi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dan 1 gacha o'sganda, $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ ifodaning qiymati 0 dan $\frac{1}{4}$ gacha o'sadi, shuning uchun z endi $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{4}$

gacha kamayadi, y esa $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ dan 1 gacha kamayadi.

Izlanayotgan funksiyaning grafigi 16.4- chizmada tasvirlangan.



16.4- chizma. $x^4+y^4-x^2-y^2=0$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Oshkormas shaklda berilgan funksiyalarni tekshiring va grafigini chizing.

1. $y^4-x^3-1=0$.

2. $x^2y^2-y^6-25x^2=0$.

3. $3xy^2=x^3-2$.

4. $(y-x^2)^2=x^5$.

5. $y^2=x^2(x-1)$.

6. $y^2=x(x-1)^2$.

7. $9y^2=4x^3-x^4$.

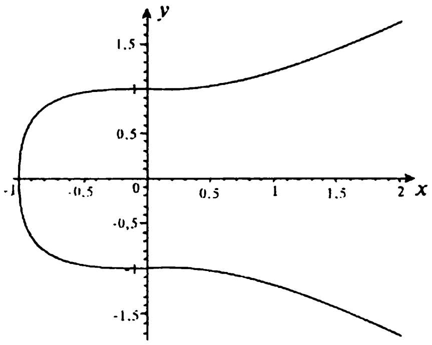
8. $y^2=x^2-x^4$.

9. $y^2=(1-x^2)^3$.

10. $y^3=x^2(x^2-4)^3$.

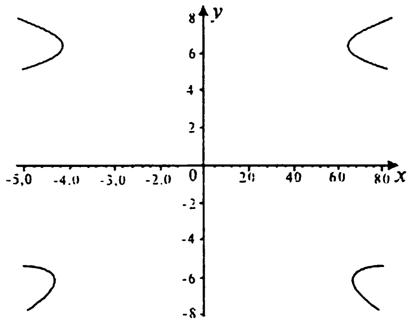
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



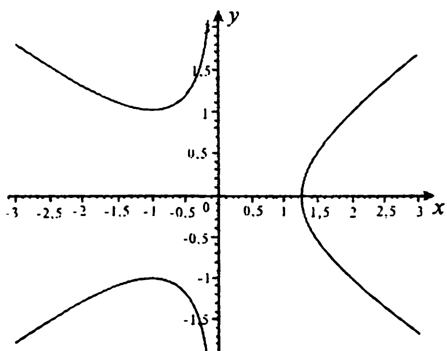
1- chizma.

2.



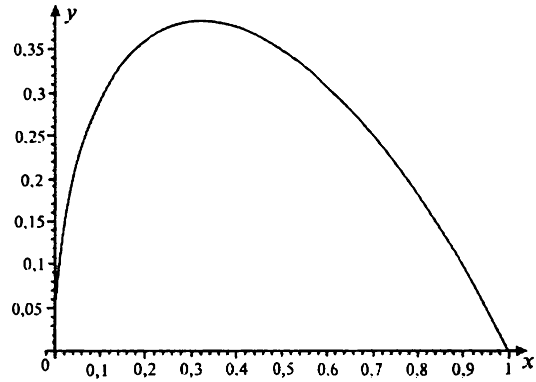
2- chizma.

3.



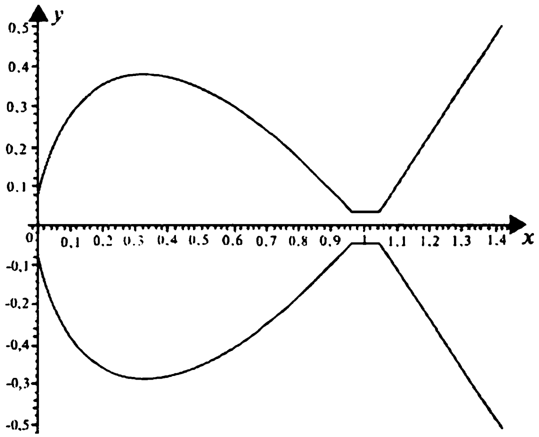
3- chizma.

4.



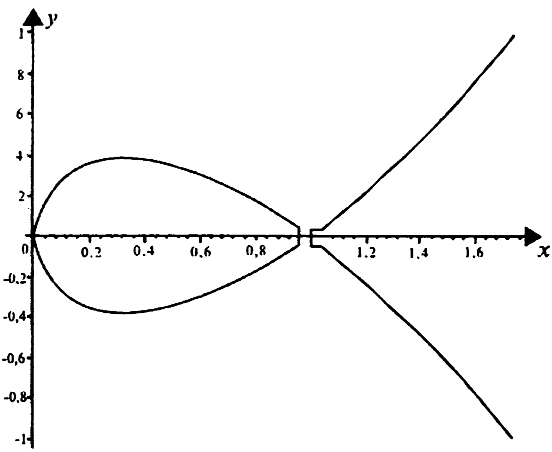
4- chizma.

5.



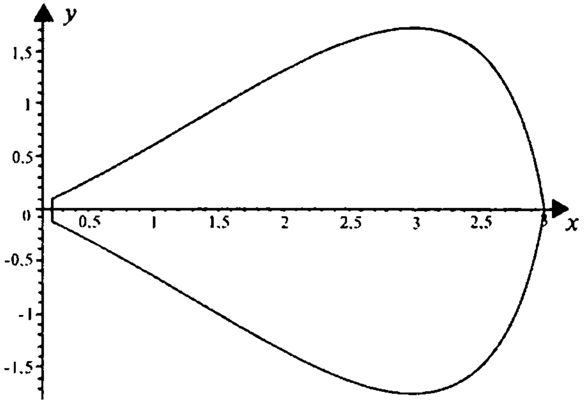
5- chizma.

6.



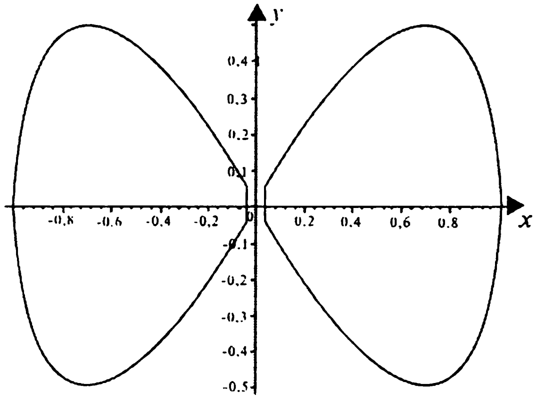
6- chizma.

7.



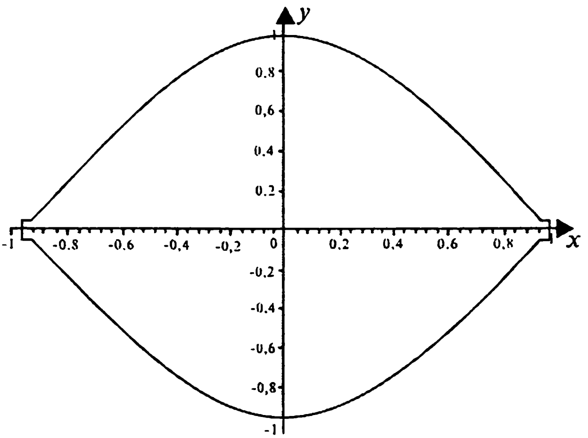
7- chizma.

8.



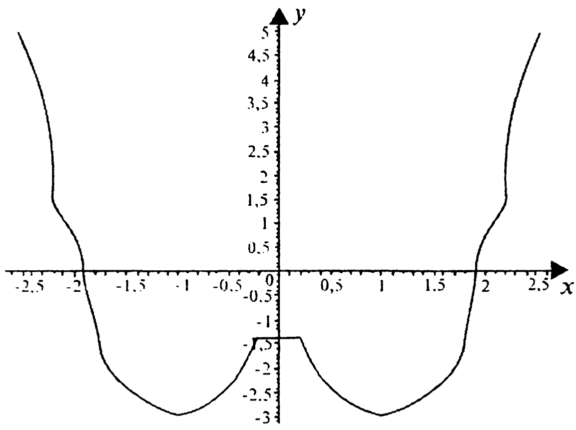
8- chizma.

9.



9- chizma.

10.



10- chizma.

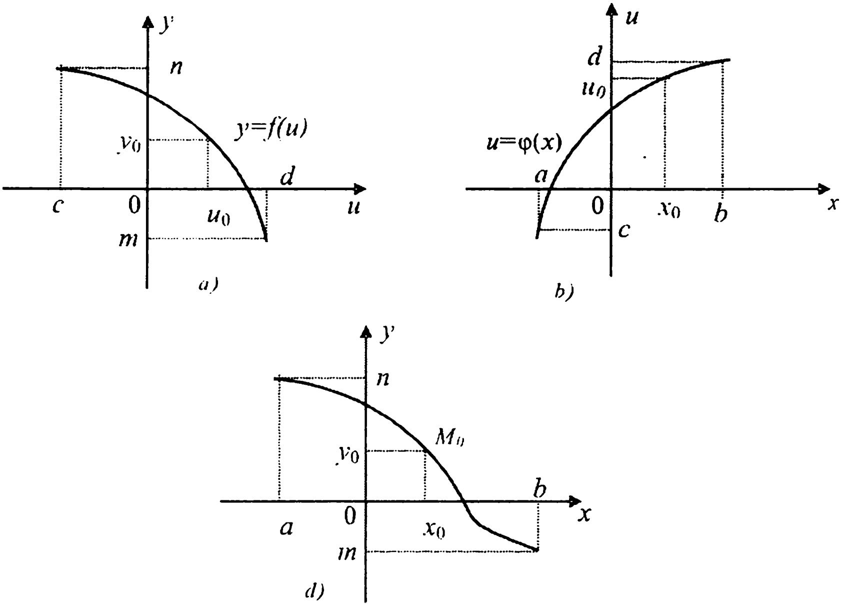
17- §. MURAKKAB FUNKSIYALARNING GRAFIKLARINI CHIZISH

1. Murakkab funksiyalarning grafiklarini chizish. $u=\varphi(x)$ funksiya X to'plamda, $y=f(u)$ funksiya esa E to'plamda aniqlangan bo'lib, $u=\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $F\subseteq E$ bo'lsin. U holda X to'plamda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya aniqlangan bo'ladi. Bu murakkab funksiyaning grafigini quyidagi tartibda chizish tavsiya etiladi:

1) $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalarning grafiklari alohida-alohida chiziladi (17.1-a, b- chizmalar);

2) $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyaning xossalaridan foydalanib;

3) $u=\varphi(x)$ funksiyaning $x=x_0\in X$ xarakterli nuqtasini olib, unga mos kelgan $u_0=\varphi(x_0)$ qiymatni topamiz. So'ngra 17.1-a chizmadagi Ou o'qidan u_0 qiymatni ajratib, unga mos kelgan $y_0=f(x_0)$ qiymatni topib, xOy koordinatalar sistemasida $f(\varphi(x))$ funksiya grafigining $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasini aniqlaymiz. Shunga o'xshash holda yana bir nechta xarakterli nuqtalarni topib, ularni birlashtirish natijasida izlanuvchi $y=f(\varphi(u))$ funksiya grafigi hosil qilinadi (17.1-d chizma).



17.1.- chizma. *a*) $y=f(u)$, *b*) $u=\varphi(x)$, *d*) $y=f(\varphi(u))$.

1- misol. $y=e^{-x^2}$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. $u=x^2$ belgilash orqali berilgan funksiyani $y=e^{-u}$ ko‘rinishga keltiramiz.

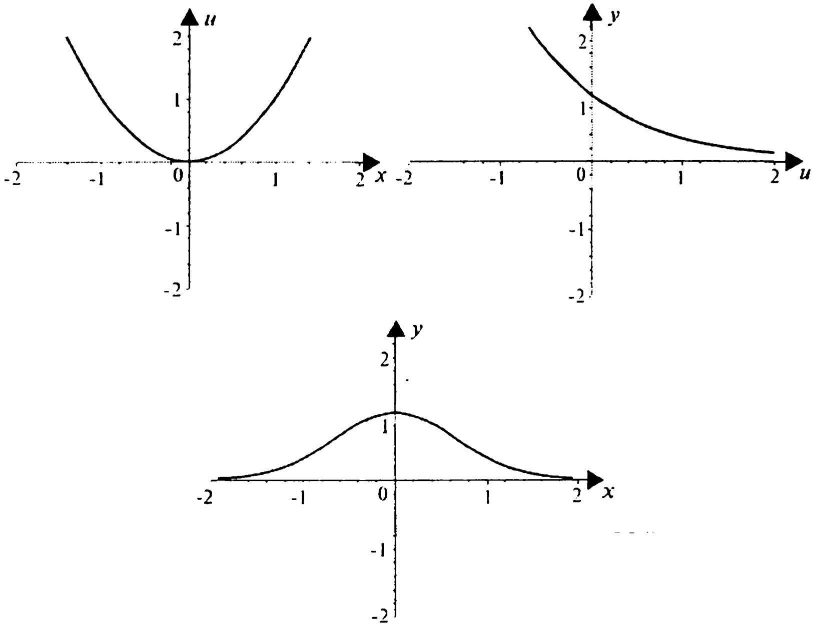
$u=x^2$ funksiya $X=(-\infty;+\infty)$ aniqlangan bo‘lib, uning qiymatlari to‘plami $\{u\}=\{0;+\infty)$ dan iborat. $y=e^{-u}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(-\infty;+\infty)$ bo‘lib, $\{u\}=\{0;+\infty)\subset E$ bo‘ladi.

Endi $y=e^{-x^2}$ murakkab funksiyaning grafigini yuqorida ko‘rsatilgan tartibda chizamiz.

1) $y=e^{-u}$ va $u=x^2$ funksiyalarning grafiklarini, mos ravishda, $u\,Oy$ va $x\,Oy$ koordinatalar sistemasida chizamiz (17.2- *a*, *b*- chizmalar).

2) $y=e^{-u}$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan bo‘lib, uning qiymatlar to‘plami $[0;+\infty)$ dan iborat, funksiya kamayuvchi, $(-\infty;+\infty)$ da funksiyaning grafigi qavariq bo‘lib, $(0;1)$ nuqtadan o‘tadi, $x\to\infty$ da $y\to 0$, $x\to-\infty$ esa $u\to+\infty$. $u=0$ to‘g‘ri chiziq funksiyaning grafigi uchun gorizontal asimptota bo‘ladi.

$u=x^2$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan, uning qiymatlar to‘plami $(0;+\infty)$ dan iborat, funksiya juft bo‘lgani uchun uning grafigini $x\geq 0$ uchun chizish yetarli.



17.2- chizma. *a*) $u=x^2$, *b*) $y=e^{-u}$, *d*) $y=e^{-x^2}$.

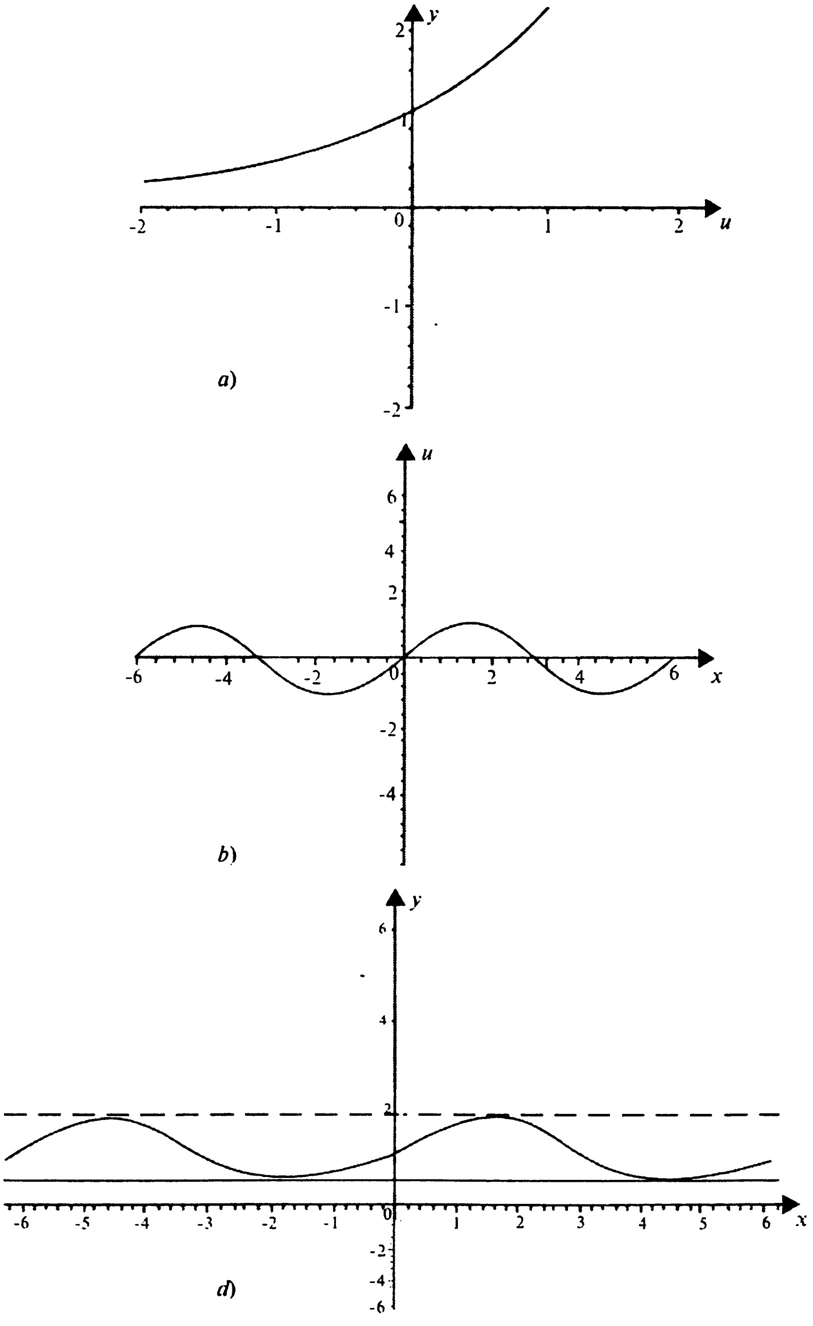
3) $y=e^{-u}$ funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda kamayuvchi, $u=x^2$ funksiya esa $[0;+\infty)$ da o‘suvchi bo‘lgani uchun, $y=e^{-x^2}$ funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda kamayuvchi bo‘ladi. $x_0=0$ da $u_0=0$. Ou o‘qidan $u_0=0$ qiymatni ajratib, unga mos kelgan $y=f(u_0)=1$ qiymatni topib, xOy koordinatalar sistemasida $M_0(x_0;y_0)=M_0(0;1)$ nuqtani aniqlaymiz. Ravshanki, $M_0(0;1)$ nuqtada $y=e^{-x^2}$ funksiya eng katta qiymatga ega bo‘ladi. Shuningdek, $x\to\pm\infty$ va $u\to+\infty$ da $y\to 0$ (17.2 *d*- chizma).

2-misol. $y=2^{\sin x}$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. $u=\sin x$, $y=2^u$ funksiyalarni qaraymiz. Ravshanki, bu funksiyalar murakkab funksiyani tashkil etadi. Bu murakkab funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$, qiymatlari sohasi esa $\left[\frac{1}{2};2\right]$ dan iborat.

1) $y=2^u$ va $u=\sin x$ funksiyalarning grafiklarini uOy va xOu koordinatalar sistemalarida alohida chizamiz (17.3 *a*, *b*- chizmalar).

2) $y=2^u$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da o‘suvchi, $u=\sin x$ funksiyaning eng



17.3- chizma. *a*) $y = 2^u$, *b*) $y = \sin x$, *d*) $y = 2^{\sin x}$.

kichik davri 2π bo'lib, $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k \in Z)$ oraliqda o'suvchi, $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k \in Z)$ oraliqlarda esa kamayuvchi bo'ladi.

3) Quyidagi $x_0=0$, $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\pi$, $x_3=\frac{3\pi}{2}$ xarakterli nuqtalarni olib, ularga mos kelgan $u_1=0$, $u_1=1$, $u_3=1$ qiymatlarni topamiz. *Ou* o'qidan $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=0$, $u_3=1$ qiymatlarni ajratib, ularga mos kelgan $y_0=f(u_0)=1$, $y_1=2$, $y_2=1$, $y_3=\frac{1}{2}$ qiymatlarni topib, xOy koordinatalar sistemasida $M_0(0;1)$, $M_1\left(\frac{\pi}{2};2\right)$, $M_2(\pi;1)$ nuqtalarni aniqlaymiz. Ravshanki, funksiya $M_1\left(\frac{\pi}{2};2\right)$ nuqtada eng katta qiymati 2 ga, $M_3\left(\frac{3\pi}{2};\frac{1}{2}\right)$ nuqtada esa eng kichik $\frac{1}{2}$ qiymatga erishadi (17.3- *d* chizma).

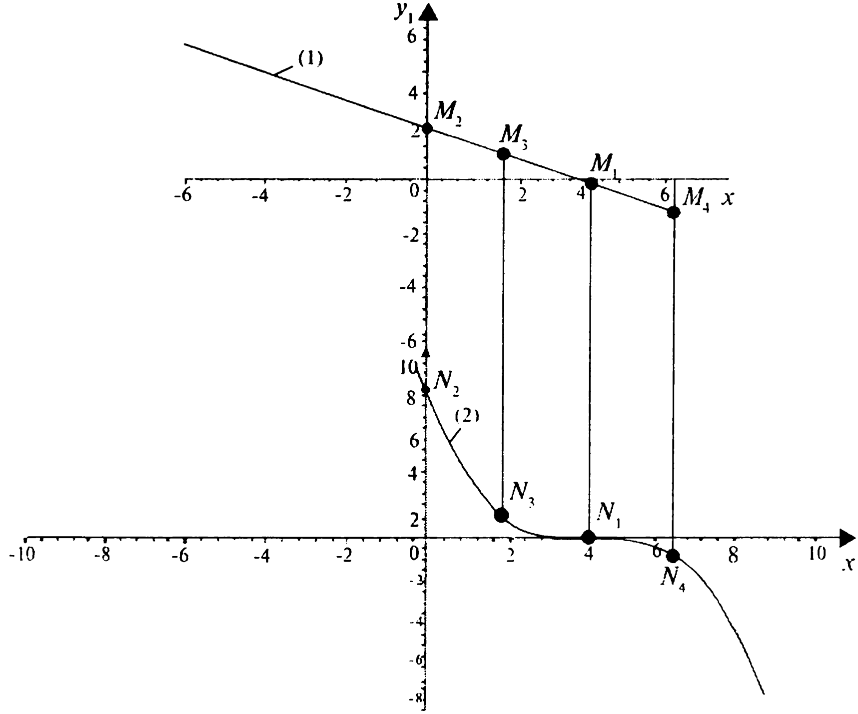
3- misol. $y=\left(2-\frac{1}{2}x\right)^3$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. 1. Aniqlanish sohasi: $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Aniqlanish sohasining chegaralaridagi qiymatlari: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{4}x\right)^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{4}x\right)^3=-\infty$.

2. $y_1=2-\frac{1}{2}x$ deb belgilaymiz, bunda $y=y_1^3$. $y_1=2-\frac{1}{2}x$ funksiyaning grafigini chizamiz (17.4- chizmaning yuqori qismi). $y_1=2-\frac{1}{2}x$ funksiyaning xarakterli nuqtalarini, ya'ni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari $M_1(4;0)$, $M_2(0;2)$ va yordamchi $M_3(2;1)$, $M_4(6;-1)$ nuqtalrini olamiz.

3. M_1, M_2, M_3, M_4 nuqtalarning ordinatalarini kubga ko'taramiz. Natijada, mos ravishda, quyidagi nuqtalarni olamiz: $N_1(4;0)$, $N_2(0;8)$, $N_3(2;1)$, $N_4(6;-1)$.

4. Bu nuqtalarni chizmaning pastki qismida joylashtiramiz va ravon chiziq bilan ularni birlashtiramiz. Natijada izlanayotgan funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (17.4- chizmaning pastki qismi).



17.4.- chizma. (1) $y_1 = 2 - \frac{1}{2}x$, (2) $y = \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^3$.

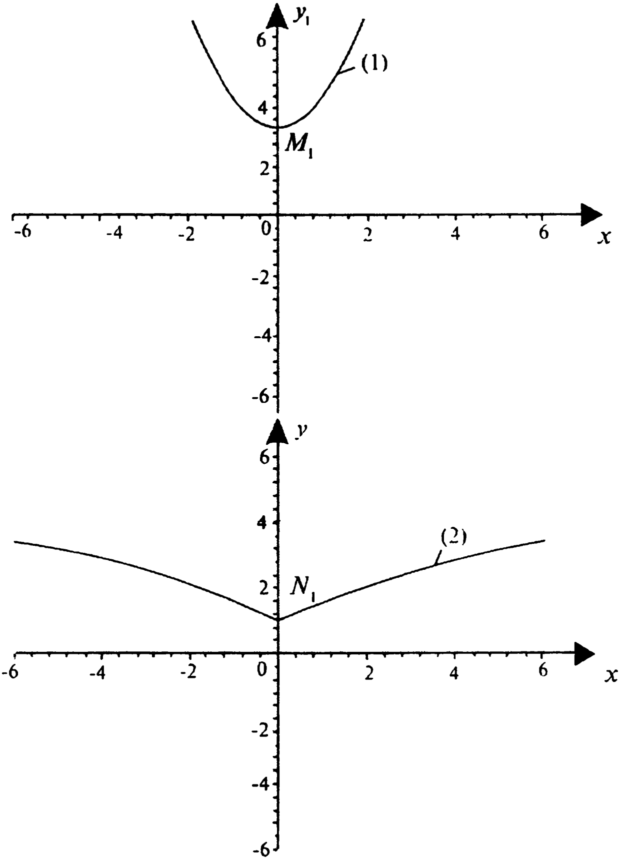
4- misol. $y = \log_3(x^2+3)$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi 1.Aniqlanish sohasi: $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasining chegaralarida $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \log_3(x^2+3) = +\infty$.

2. $y_1 = x^2+3$ deb belgilaymiz, bunda $y = \log_3 y_1$. Endi y_1 funksiyaning xarakterli nuqtalarini topamiz, ya'ni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari va yordamchi nuqtalar: $M_1(0;3)$, $M_2(\sqrt{6};9)$, $M_3(-\sqrt{6};9)$. y_1 juft funksiya, uning grafigi paraboladir (17.5- chizmaning yuqori qismi).

3. M_1, M_2, M_3 nuqtalar ordinatalarining logarifmlarini hisoblaymiz. Natijada mos ravishda quyidagi nuqtalarni topamiz.

$$M_1(0;3): y_1 = 3 \Rightarrow y = \log_3 y_1 \Rightarrow N_1(0;1);$$
$$M_2(\sqrt{6};9): y_1 = 9 \Rightarrow y = \log_3 y_1 \Rightarrow N_2(\sqrt{6};2);$$
$$M_3(-\sqrt{6};9): y_1 = 9 \Rightarrow y = \log_3 y_1 \Rightarrow N_3(-\sqrt{6};2).$$



17.5- chizma. (1) $y_1 = x^2+3$, (2) $y = \log_3(x^2+3)$.

4. Bu N_1, N_2, N_3 nuqtalarni 17.5- chizmaning pastki qismida joylashtiramiz va ularni birlashtirish natijasida izlanayotgan $y = \log_3(x^2+3)$ funksiyaning grafigi hosil bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Murakkab funksiyalarning grafiklarini chizing:

1. $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$. **2.** $y = \arcsin \frac{1}{x}$. **3.** $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

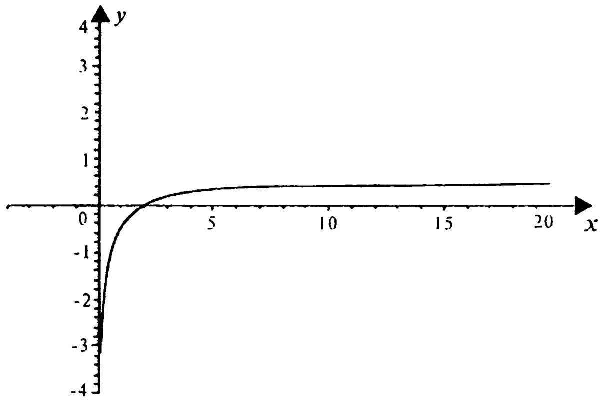
4. $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$. **5.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. **6.** $y = \sin(\sin x)$.

7. $y = \sin(\arcsin x)$. **8.** $y = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$. **9.** $y = \arccos 2x$.

10. $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

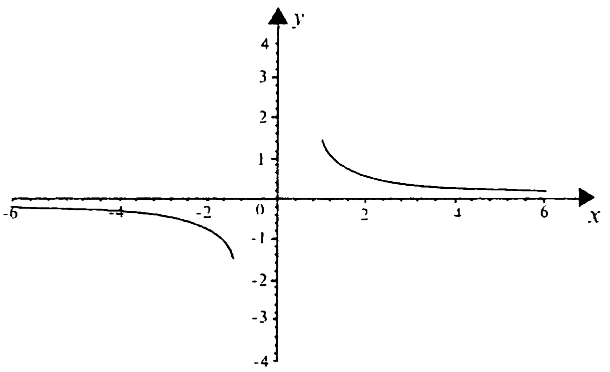
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



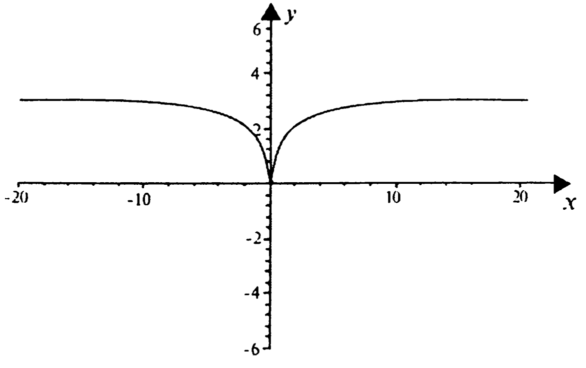
1- chizma.

2.



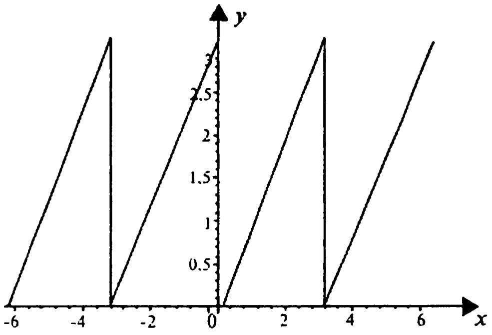
2- chizma.

3.



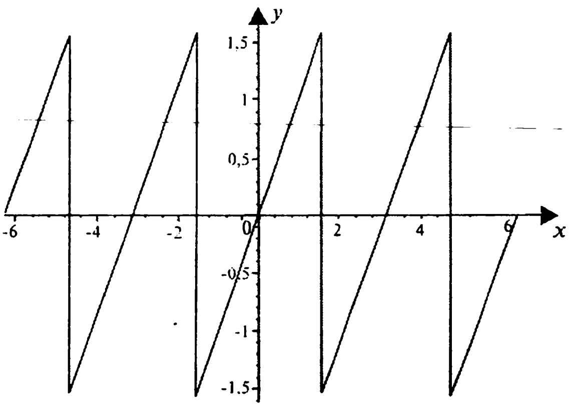
3- chizma.

4.



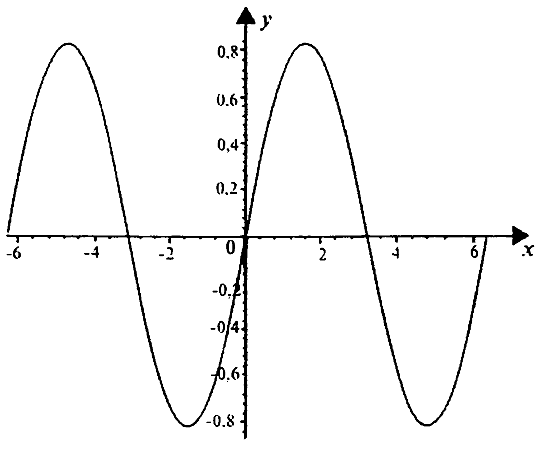
4- chizma.

5.



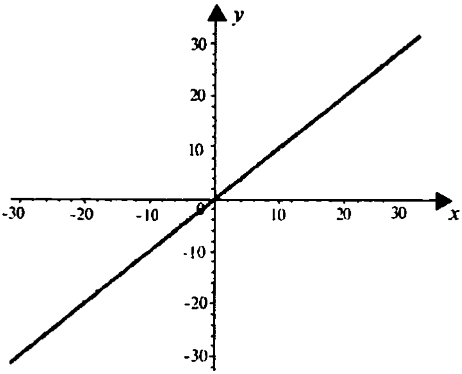
5- chizma.

6.



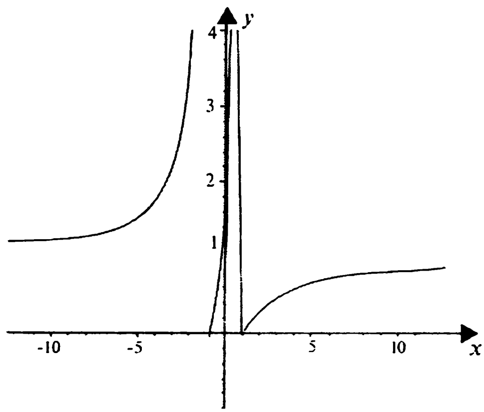
6- chizma.

7.



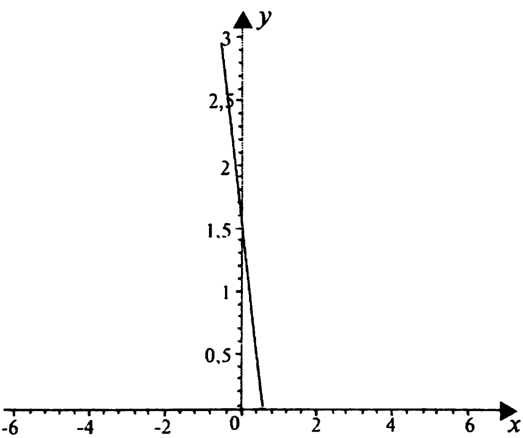
7- chizma.

8.



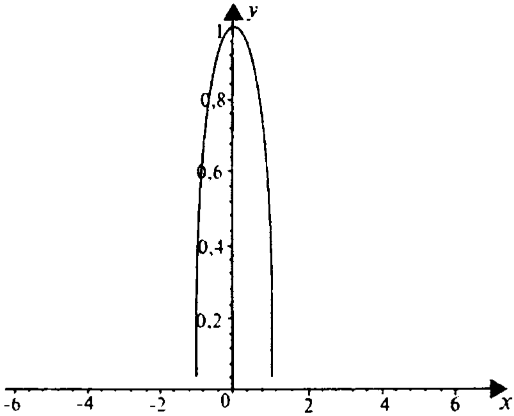
8- chizma.

9.



9- chizma.

10.



10- chizma.

18- § FUNKSIYA GRAFIGINI CHIZISHNING UMUMIY TARTIBLARI

1. Funksiya grafigini chizishning umumiy tartiblari. Funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishni quyidagi tartibda amalga oshirish tavsiya etiladi:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish;

2) funksiyaning juft va toqligini aniqlash;

3) funksiyani davriylikka tekshirish;

4) funksiya grafigining xarakterli nuqtalarini topish:

a) funksiyaning nollari;

b) funksiyaning ishorasi;

d) ekstremum nuqtalari, eng katta va eng kichik qiymatlari;

e) uzilish (maxsus) nuqtalari atrofida o'zgarishi hamda $x \to \pm\infty$ bo'lgandagi o'zgarishi.

5) funksiyaning qiymatlar sohasini (to'plamini) topish;

6) funksiya grafigining monotonlik va qavariqlik (botiqlik) oraliqlarini aniqlash;

7) funksiya grafigining asimptotik chiziqlarini aniqlash;

8) funksiyaning grafigini chizish.

Eslatma. Ba'zi hollarda, ya'ni maktab kursida yaxshi o'rganilgan funksiyalarning grafigini chizishda, yuqorida keltirilgan bandlarning hammasini tekshirmasdan turib, funksiya grafigini chizish ham mumkin.

1- misol. Ushbu funksiyani tekshiring va grafigini chizing:

$$f(x)=x^2-x^4. \qquad (1)$$

Yechilishi 1) ravshanki, (1) funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=R^1$.

2) (1) juft funksiyadir, ya'ni $\forall x \in (-\infty;+\infty)$ lar uchun $f(-x)= =(-x)^2-(-x)^4=x^2-x^4=f(x)$ bo'ladi. Shuning uchun, uni $(0;+\infty)$ oraliqda tekshiramiz.

3) davriy emas.

4) *a*) $x^2-x^4=0$; $x=-1$, $x=0$, $x=1$ — funksiyaning nollari;

b) $x^2-x^4>0$ yoki $x^2(x+1)(x-1)<0$, yoki $(-1;0)\cup(0;1)$ bo'lganda, musbat; $x^2-x^4<0$ yoki $x^2(x+1)(x-1)<0$, yoki $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ bo'lganda, manfiydir;

d) (1) funksiyani quyidagicha shakl almashtiramiz:

$$f(x)=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Bu funksiya parabola shaklida bo'lganligidan $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$

nuqtalarda eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{4}\right)$ va $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{4}\right)$

da $y_{\max}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}$, $x=0$ esa, $y=0$ bo'ladi. Demak, $O(0;0)$ minimum nuqtasi, A, B nuqtalar funksiyaning ekstremum nuqtalari bo'ladi.

e) (1) funksiya uzilish nuqtasiga ega emas.

5) $x_1<x_2$ bo'lsin, u holda $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_2^4-x_1^2+x_1^4=$

$(x_2-x_1)(x_2+1)\left[1-\left(x_2^2+x_1^2\right)\right]$ kabi tasvirlash mumkin. Agar x_1

va x_2 nuqtalar, mos ravishda, $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraliqlarda yotsa,

$f(x_2)>f(x_1)$ bo'ladi, ya'ni (1) funksiya $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraliqlarda o'sadi.

Agar x_1 va x_2 nuqtalar, mos ravishda, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

oraliqlarda yotsa, $f(x_2)<f(x_1)$ bo'ladi, ya'ni (1) funksiya

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ oraliqlarda kamayadi.

(1) funksiyaning grafigi $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ larda botiq, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ da esa qavariqdir. $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ va $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtalar funksiya grafigining egilish nuqtalari bo'ladi.

6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-x^4)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2\right)=-\infty$. Demak, (1) funksiya asimptotik chiziqlarga ega emas.

7) funksiyaning o'zgarish sohasi: $E(f)=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$.

8) funksiyaning grafigi 18.1-chizmada tasvirlangan.

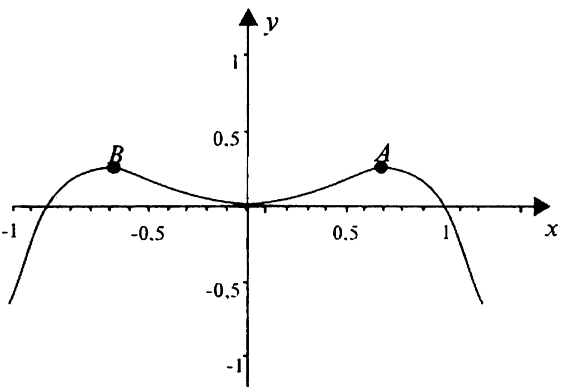
2- misol. Ushbu $y=\frac{1}{9-x^2}$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechilishi. 1) aniqlanish sohasi:

$$D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty).$$

2) juft funksiyadir, ya'ni $\forall x\in D(f)$ uchun

$$f(-x)=\frac{1}{9-(-x)^2}=\frac{1}{9-x^2}=f(x) \text{ bo'ladi.}$$



18.1- chizma. $f(x)=x^2-x^4$.

3) davriy emas.

4) *a*) funksiya nollarga ega emas.

b) $9-x^2>0$, yoki $x^2<9$, yoki $|x|<3$ bo'lganda funksiya musbat; $9-x^2<0$, yoki $x^2>9$, yoki $|x|>3$ bo'lganda esa funksiya manfiydir.

d) $x=0$ bo'lganda $9-x^2$ ifoda 9 dan iborat maksimumga ega bo'lgani sababli, berilgan funksiya $\frac{1}{9}$ dan iborat minimumga ega.

e) $x=-3$ va $x=3$ nuqtalar funksiyaning uzilish (maxsus) nuqtalari. Bu nuqtalar atrofida funksiyani tekshiraylik, ya'ni

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{(3-x)(3+x)}=-\infty,\quad \lim_{x\to 3-0}\frac{1}{(3-x)(3+x)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{(3-x)(3+x)}=+\infty,\quad \lim_{x\to 3-0}\frac{1}{(3-x)(3+x)}=-\infty.$$

Agar $x\to\pm\infty$ bo'lsa, $y=0$.

5) funksiya juft bo'lganligidan, uning o'sish yoki kamayishini $(0;3)$ va $(3;+\infty)$ oraliqlarda tekshirish kifoya.

x argument 0 dan 3 gacha yoki 3 dan $+\infty$ gacha ortganda $-x^2$ kamayadi va bunda $9-x^2$ kamayganligi sababli, berilgan funksiya ortadi. Demak, berilgan funksiya $(0;3)$ va $(3;+\infty)$ oraliqlarda o'sadi. Bu funksiya juft bo'lganligidan, $D(f)=(-\infty;-3)$ va $(-3;0)$ oraliqlarda esa kamayadi.

6) gorizontal asimptotalarni topamiz:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{9-x^2}=0.$$

$y=0$ to'g'ri chiziq (yoki Ox o'qi) berilgan funksiya grafigining gorizontal asimptotasi bo'ladi. $x=\pm3$ nuqtalarda funksiya chegaralanmagan. Demak, $x=-3$ va $x=3$ to'g'ri chiziqlar funksiya grafigining vertikal asimptotalari bo'ladi. Funksiyaning grafigi og'ma asipmtotaga emas.

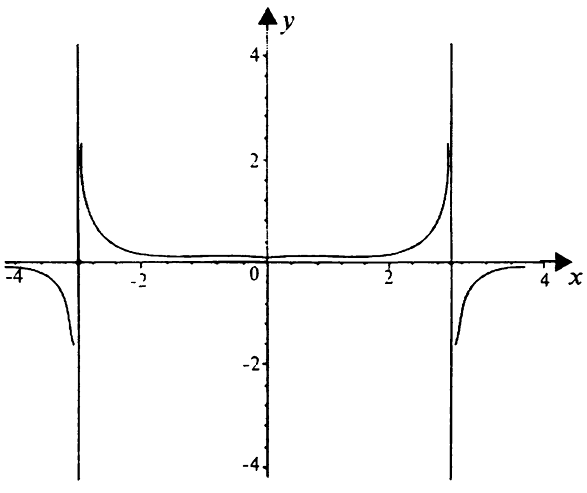
7) funksiyaning qiymatlar sohasini topish uchun $y=\frac{1}{9-x^2}$ tenglikni x ga nisbatan yechamiz: $9-x^2=\frac{1}{y}$; $x=\pm\sqrt{\frac{9y-1}{y}}$; x ning ±3 dan boshqa aniq qiymatga ega bo'lishi uchun $\frac{9y-1}{y}\geq 0$

yoki $y\left(y-\frac{1}{9}\right)\geq 0$ bo'lishi hamda $y\neq 0$ bo'lishi kerak. Bu tengsizlikning yechimlari to'plami $(-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$ bo'ladi.

Demak, berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi

$$E(f)=(-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{9};+\infty\right).$$

9) Funksiyaning grafigini chizamiz (18.2-chizma).



18.2- chizma. $y=1/(9-x^2)$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarni tekshiring va grafiklarini chizing:

1. $y=2^{\cos x}$. **2.** $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$. **3.** $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

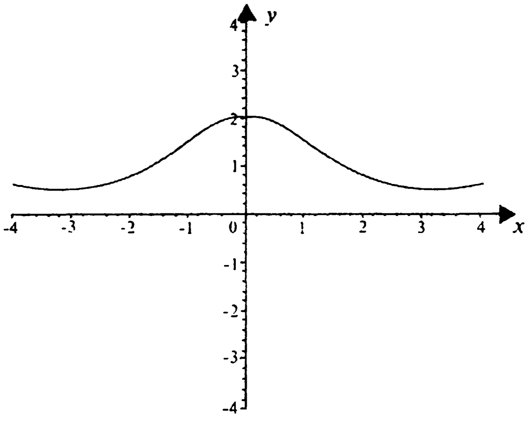
4. $y=\lg(1+x^2)$. **5.** $y=\ln\cos x+\cos x$. **6.** $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

7. $y=\arccos(\cos x)$. **8.** $y=\log_2(x^2+2x+3)$.

9. $y=\lg(\operatorname{tg} x)$. **10.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2}$.

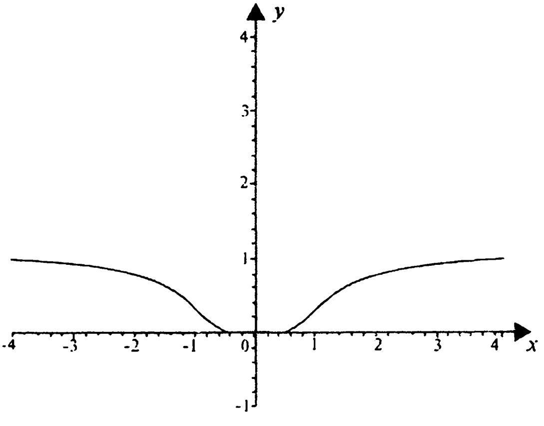
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



1- chizma.

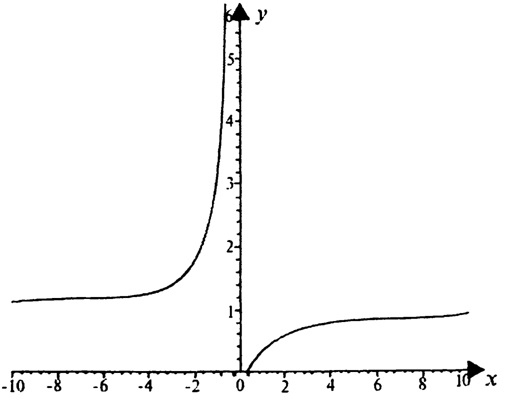
2.



3- chizma.

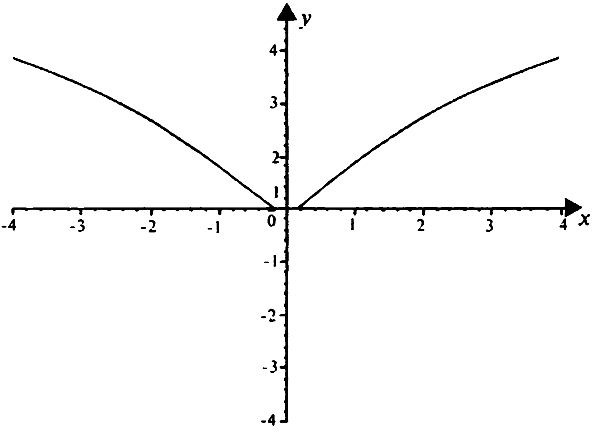
2- chizma.

3.



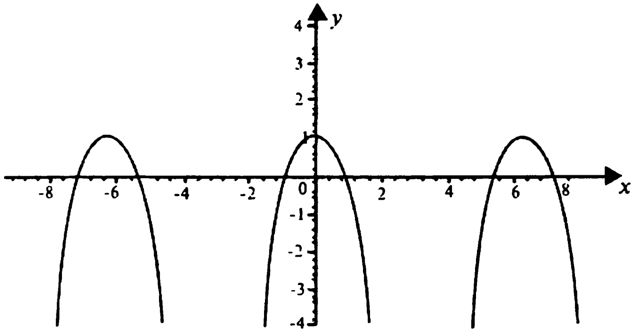
3- chizma.

4



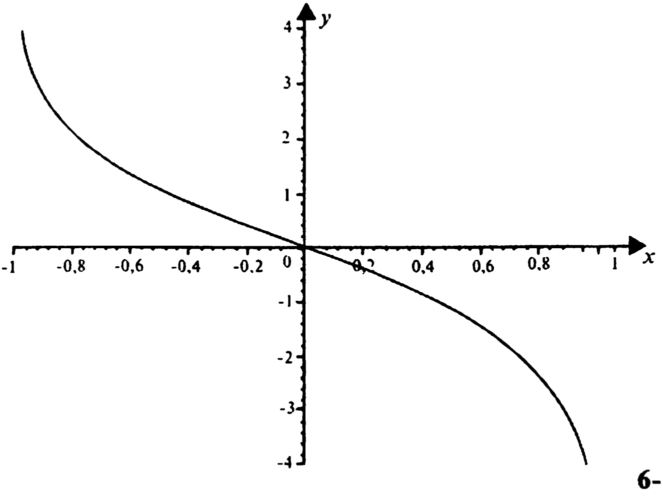
4- chizma.

5.



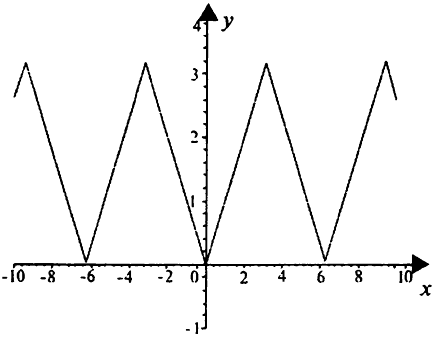
5- chizma.

6.



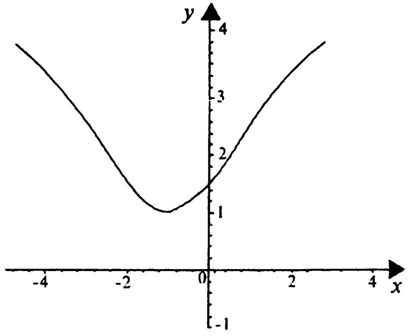
6- chizma.

7.



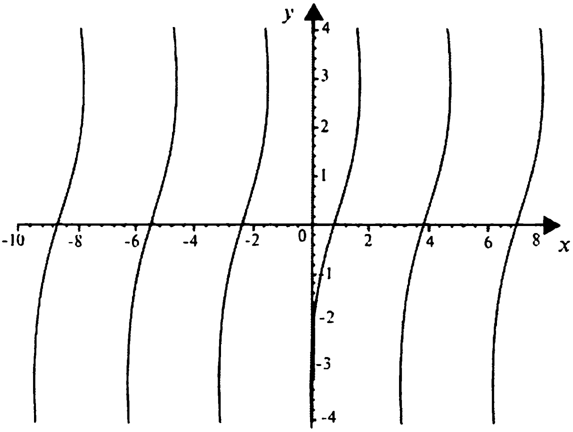
7- chizma.

8.



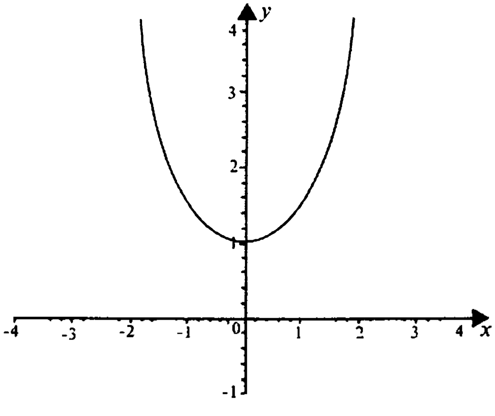
8- chizma.

9.



9- chizma.

10.



10- chizma.

III bob. FUNKSIYANING GRAFIGINI HOSILADAN FOYDALANIB CHIZISH

19- §. FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

1. Funksiya hosilasining ta'riflari. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin. Bu oraliqdan x_0 nuqta olib, unga $x_0+\Delta x\in(a;b)$ bo'lgan Δx ($\Delta x<0$ yoki $\Delta x>0$) orttirma beraylik, u holda $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi. Ushbu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

($\Delta x\neq 0$) nisbatni qaraymiz. Ravshanki, bu nisbat Δx ning funksiyasi bo'lib, u Δx ning noldan farqli qiymatlarida, jumladan, nol nuqtaning yetarli kichik $\dot{U}_\delta(0)$ atrofida aniqlangan. Bunda $\Delta x=0$ nuqta $\dot{U}_\delta(0)$ to'plamning limit nuqtasi.

1- ta'rif. Agar $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

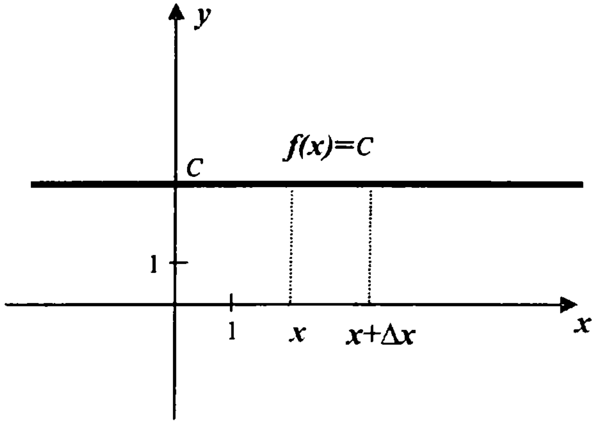
chekli limitga ega bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi hosilasi* deyiladi va

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

kabi belgilanadi.

Agar $x_0+\Delta x=x$ deb olinsa, unda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta x\to 0$ da $x\to x_0$, natijada (1) ning ko'rinishi

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x)}{x-x_0} \qquad (2)$$



19.1- chizma.

shaklda bo'ladi. Hosila quyidagi $y'(x_0)$, y'_x (Lagranj), $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ (Leybnis), Dy, Df (Koshi) belgilar yordamida ham yoziladi.

1- misol. $f(x)=C$ funksiyaning hosilasini ta'rifdan foydalanib toping, bunda C — biror o'zgarmas son (19.1- chizma).

Yechilishi. Erkli o'zgaruvchining ikkita turli x va $x+\Delta x$ qiymatini olsak, bu qiymatlarda funksiyaning qiymatlari bir xil bo'ladi, ya'ni

$$f(x)=C,\ f(x+\Delta x)=C,$$

shuning uchun

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

demak,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Shunday qilib,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

O'zgarmas sonning hosilasi nolga teng.

2- misol. $f(x)=\sin x$ funksiyaning hosilasini ta'rifdan foydalanib toping.

Yechilishi. Ma'lumki, $y=\sin x$ funksiya R^1 da aniqlangan. $\forall x \in R^1$ nuqtani olib, unga $x+\Delta x \in R^1$ bo'ladigan $\Delta x(\Delta x>0)$ orttirma beraylik. Bunda argumentning Δx orttirmasiga mos ravishda berilgan funksiya ham

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} \qquad (3)$$

orttirma oladi.

(3) ning ikkala tomonini Δx ga bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

nisbatni hosil qilamiz va uning $\Delta x \to 0$ dagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = \cos x.$$

Demak, $y' = (\sin x)' = \cos x, \quad \forall x \in R^1.$

3- misol. Ushbu

$$f(x)=(x-1)^2(x+3)$$

funksiyaning $x_0=1$ nuqtadagi hosilasini ta'rifdan foydalanib toping.

Yechilishi. (2) formulaga asosan: $f(1)=0$ va

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-1} = 0$$

bo'ladi.

Demak, $f'(1) = 0.$

2- ta'rif. Agar $\Delta x \to +0$ $(\Delta x \to -0)$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ning chekli limiti

$$\lim_{\Delta x \to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x \to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *o'ng* (*chap*) *hosilasi* deb ataladi va $f'(x_0+0)$ $(f'(x_0-0))$ kabi belgilanadi.

Odatda, funksiyaning o'ng va chap hosilalari *bir tomonli hosilalar* deb ham aytiladi.

4- misol. Ushbu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o'ng va chap hosilalarini toping:

$$y=|x|.$$

Yechilishi. 2- ta'rifga ko'ra,

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Demak, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o'ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi esa -1 ga teng ekan.

1- eslatma. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada bir tomonli $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ hosilalarga ham ega bo'lib,

$$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0)$$

tengliklar o'rinli.

2- eslatma. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $U(x_0)$ atrofida uzluksiz, x_0 nuqtada bir tomonli $f'(x_0+0)$ va $f'(x_0-0)$ hosilalarga ega bo'lib, $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'ladi va

$$f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$$

tengliklar o'rinli.

3- eslatma. Agar $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat aniq ishorali cheksiz limitga ega, ya'ni

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\pm\infty$$

bo'lsa, uni ham $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb yuritiladi. Bunday hosila *cheksiz hosila* deb ataladi.

5- misol. $y=\sqrt{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasini toping.

Yechilishi. Ta'rifga ko'ra

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{\Delta y}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty$$

bo'ladi. Demak, $f'(0)=+\infty$.

6- misol. $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiyaning $x=1$ nuqtadagi hosilasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning $x=1$ nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta f=\sqrt[3]{(1+\Delta x-1)^2}-\sqrt[3]{(1-1)^2}=(\Delta x)^{\frac{2}{3}}.$$

Endi $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ nisbatni topamiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}.$$

2- ta'rifga ko'ra

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=+\infty,\qquad \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\infty \text{ bo'ladi.}$$

Demak, $f'_{+}(0)=+\infty$, $f'_{-}(0)=-\infty$.

2. Hosilaning geometrik ma'nosi. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $x_0\in(a;b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiyaning grafigiga $M_0(x_0;\ f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud bo'ladi (19.2- chizma). Ma'lumki, funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi. M_0T urinma chiziq tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

bo'lib, bunda $f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$; egri chiziqning $M_0(x_0;f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan normalning tenglamasi esa

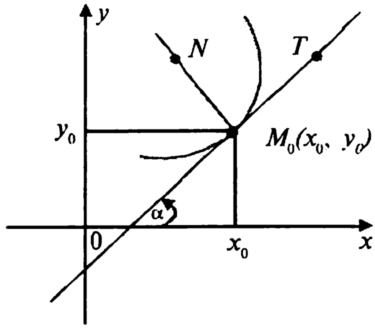
$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

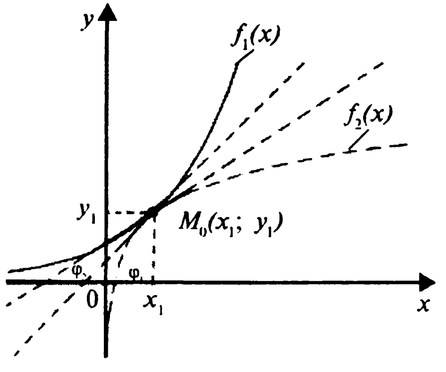
$y_1=f_1(x)$ va $y_2=f_2(x)$ funksiyalar grafiklarining $M(x_1;y_1)$ kesishish nuqtasida o'tkazilgan urinmalar orasidagi φ burchak berilgan ikki egri chiziq orasidagi burchak bo'ladi va

$$\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{f_2'(x_1)-f_1'(x_1)}{1+f_1'(x_1)f_2'(x_1)} \qquad (3)$$

formuladan topiladi (19.3- chizma).



19.2- chizma.



19.3- chizma.

7- misol. $y=x^3+3x$ funksiya grafigiga $M_0(1;4)$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini toping.

Yechilish. Urinma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topish uchun avvalo berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

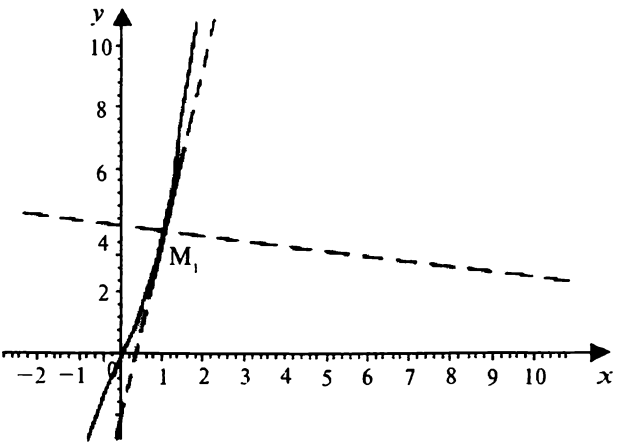
$$y' = 3x^2 + 3.$$

Bu hosilaning $x=1$ nuqtadagi qiymati urinma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi, ya'ni $f'(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$. Shunday qilib, (1) va (2) formulalarga asosan, urinma va normal chiziq tenglamalari, mos ravishda, quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi (19.4- chizma):

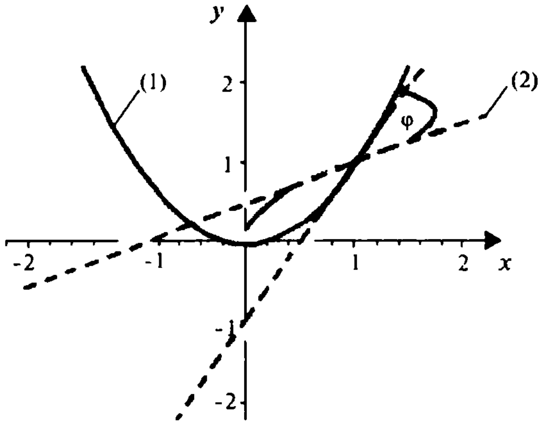
$$y-4=6(x-1) \text{ yoki } y=6x-2,$$

$$y-4=-\frac{1}{6}(x-1) \text{ yoki } y=-\frac{1}{6}x+4\frac{1}{6}.$$

8- misol. $f(x)=x^2$ va $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyalar grafiklarining $M(1;1)$ kesishish nuqtasida o'tkazilgan urinmalar orasidagi burchakni toping.



19.4- chizma.



19.5- chizma. (1) $y=x^2$, (2) $y=\sqrt{x}$.

Yechilishi. Berilgan funksiyalarning $x=1$ nuqtadagi hosilalarini topamiz:

$$f'(x)=2x, \qquad f'(1)=2,$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(1)=\frac{1}{2}.$$

(3) formulaga ko'ra $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$ bo'ladi. Bu yerdan $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$ (19.5-chizma).

3. Hosilaning fizik ma'nosi. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakati $s=f(t)$ tenglama bilan ifodalangan bo'lsin, bunda t vaqt, s shu vaqt ichida o'tilgan yo'l (masofa). $s=f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi $s=f(t)$ qonun bilan harakat qilayotgan moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini bildiradi, ya'ni

$$v=f'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Moddiy nuqtaning berilgan $t=t_0$ momentdagi a tezlanishi esa v tezlikdan t vaqt bo'yicha olingan hosilaning $t=t_0$ dagi qiymatiga tengdir, ya'ni

$$a=f'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f'(t_0+\Delta t)-f'(t_0)}{\Delta t}.$$

8-misol. Moddiy nuqta $s(t)=2t^3+t^2-4t$ qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qiladi. Uning $t=4$ momentdagi tezligini toping.

Yechilishi. Moddiy nuqtaning istalgan t vaqtdagi harakat tezligini topamiz:

$$v(t)=s'(t)=6t^2+2t-4.$$

Moddiy nuqtaning $t=4$ momentdagi harakat tezligini hisoblaymiz:

$$v(t)\big|_{t=4}=6\cdot 4^2+2\cdot 4-4=98 \text{ (m/s)}.$$

4. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari.

1. O‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng:

$(C)'=0$ (bunda C — o‘zgarmas son).

2. O‘zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$(Cf(x))'=C\cdot(f(x))'.$$

3. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x\in(a;b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsa, $f(x)\pm g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va u $\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$ formula bo‘yicha topiladi.

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x\in(a;b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsa, $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va u

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

formula bo‘yicha topiladi.

5. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x\in(a;b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lib, $g(x)\neq 0$ bo‘lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va u

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

formula bo‘yicha topiladi.

6. Agar $f(x)$ funksiya $x_0\in(a;b)$ nuqtada $f'(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo‘lsa, bu funksiyaga teskari $x=f^{-1}(y)$ funksiya x_0 nuqtaga mos bo‘lgan y_0 $(y_0=f(x_0))$ nuqtada hosilaga ega va

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglik o‘rinli.

7. Agar $u=f(x)$ funksiya $x_0 \in (a;b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib, $y=F(u)$ funksiya esa x_0 nuqtaga mos $u_0(u_0=f(x_0))$ nuqtada $F'(u_0)$hosilaga ega bo'lsa, $\varphi(x)=F(f(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada hosilaga ega va

$$\Phi'(x)=[F(f(x))]'|_{x=x_0}=F'(u_0)\cdot f'(x_0)$$

formula o'rinli.

8. Oshkormas $F(x,y)=0$ funksiya uchun

$$y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

formula o'rinli.

9. Parametrik tenglamasi bilan berilgan

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad (t_0 \le t \le t_1)$$

funksiyaning hosilasi quyidagi

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ yoki } y'_x=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

formula bo'yicha topiladi.

5. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvali.

1. $y=C$	$y'=0.$	
2. $y=x^\alpha.$	$y'=\alpha\cdot x^{\alpha-1},$	$\alpha\in R.$
3. $y=\sqrt{x}.$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$	
4. $y=e^x.$	$y'=e^x.$	
5. $y=a^x.$	$y'=a^x \ln a.$	
6. $y=\ln x.$	$y'=\frac{1}{x}.$	
7. $y=\log_a x.$	$y'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}.$	
8. $y=\lg x.$	$y'=\frac{1}{x}\lg e=\frac{1}{x\ln 10}.$	
9. $y=\sin x.$	$y'\cos x.$	
10. $y=\cos x.$	$y'=-\sin x.$	
11. $y=\mathrm{tg}x.$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$	

12. $y=\mathrm{ctg}x$. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\mathrm{cosec}^2 x$.

13. $y=\arcsin x$. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $y=\arccos x$. $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $y=\mathrm{arctg}x$. $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

16. $y=\mathrm{arcctg}x$. $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

17. $y=\sec x$. $y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x\cdot\sec^2 x$.

18. $y=\mathrm{cosec}x$. $y'=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=-\cos x\cdot\mathrm{cosec}^2 x$.

19. $y=\mathrm{sh}x$. $y'=\mathrm{ch}x$.

20. $y=\mathrm{ch}x$. $y'=\mathrm{sh}x$.

21. $y=\mathrm{th}\,x$. $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.

22. $y=\mathrm{cth}\,x$. $y'=\dfrac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

23. $y=\mathrm{Arsh}x$. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

24. $y=\mathrm{Arch}x$. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

25. $y=\mathrm{Arth}x$. $y'=\dfrac{1}{1-x^2}$.

26. $y=\mathrm{Arcth}x$. $y'=\dfrac{-1}{1-x^2}$.

27. $y=x^x$. $y'=x^x(1+\ln x)$.

6. Funksiyaning differensiali. $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda berilgan bo‘lsin. $x_0\in(a;b)$ nuqtani olib, unga Δx($\Delta x>0$ yoki $\Delta x<0$) orttirma beramiz ($x_0+\Delta x\in(a;b)$). Natijada berilgan funksiya ham shu nuqtada orttirma oladi va u

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

kabi ifodalanadi.

1- ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a;b)$ nuqtadagi Δy orttirmasi ushbu

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \qquad (1)$$

(bunda A—shu Δx ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son, $\alpha=\alpha(\Delta x)$ bo'lib, $\Delta x\to 0$ da $\alpha(\Delta x)\to 0$) ko'rinishda tasvirlansa, funksiya x_0 nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi.

(1) munosabatni quyidagicha yozish ham mumkin:

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x). \qquad (2)$$

2- ta'rif. $f(x)$ funksiya Δy orttirmasining Δx ga nisbatan chiziqli bosh qismi $A\Delta x$ funksiyaning *differensiali* deyiladi va $dy=df(x_0)$ kabi belgilanadi. Demak, $dy=df(x_0)=A\Delta x$; $\Delta x=dx$ ni e'tiborga olsak, $dy=Adx$ bo'ladi (erkli o'zgaruvchi x ning orttirmasi Δx ni uning differensiali dx bilan almashtirish mumkin).

9- misol. $f(x)=x^3-2x^2+3$ funksiyaning $x_0(\forall x_0\in R^1)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-2(x_0+\Delta x)^2+3-(x_0^3-2x_0^3+3)=$$
$$=x_0^3+3x_0^3\Delta x+3x(\Delta x)^2+\Delta x^3-2x_0^2-4x_0\Delta x-2\Delta x^2-x_0^3+2x_0^2=$$
$$=(3x_0^2-4x_0)\Delta x+(3x_0\Delta x+\Delta x^2-2\Delta x).$$

Agar $A=3x_0^2-4x_0$, $\alpha=\alpha(\Delta x)=3x_0\Delta x-2\Delta x+\Delta x^2$ deyilsa,

$$\Delta f(x_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan funksiyaning x_0 nuqtada differensiallanuvchi ekanligini bildiradi.

10-misol. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $f(0)=0$ funksiya $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

Yechilishi. Berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x},$$

bu tenglikdan ko'rinadiki, berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtadagi $\Delta f(0)$ orttirmasini (1) ko'rinishda ifodalab bo'lmaydi. Demak, funksiya $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lmaydi.

1- teorema. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Agar $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa,

$$dy=df(x_0)=f'(x_0)dx \qquad (3)$$

ekanligini ko'rish qiyin emas. Ma'lumki, differensiallanuvchi funksiyalar uchun dy bilan dx lar proporsional o'zgarib, $f'(x)$ proporsionallik koeffitsiyentini ifodalaydi.

11- misol. $f(x)=e^{-x}+\ln x$ funksiyaning differensialini toping.

Yechilishi. Bu funksiyaning differensialini (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$dy = d(e^{-x} + \ln x) = (e^{-x} + \ln x)'dx = (-e^{-x} + \frac{1}{x})dx.$$

Funksiya differensialining (3) ifodasidan foydalanib, elementar funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1. $d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$ $(x>0)$.
2. $d(a^x)=a^x \ln a dx (a>0,\ a\neq 1)$.
3. $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1\ )$.
4. $d(\sin x)=\cos x\, dx$.
5. $d(\cos x)=-\sin x\, dx$.
6. $d(\mathrm{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx,\quad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,...$
7. $d(\mathrm{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx,\quad x \neq k\pi,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,...$
8. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$.
9. $d(e^x)=e^x dx$.
10. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad -1<x<1$.
11. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1$.
12. $d(\mathrm{arc\,tg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.
13. $d(\mathrm{arc\,ctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Hosila ta'rifidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

1. $f(x)=x^3-2x$. **2.** $f(x)=2^x\cos x$. **3.** $f(x)=(x-4)^3(x+3)$, $f'(4)$.

4. $f(x)=\frac{(x-2)^3\ln x}{\sin x}$, $f'(2)$. **5.** $f(x)=\arccos 2x$.

6. $f(x)=\cos 5x$. **7.** $f(x)=\mathrm{tg}x+2x$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **8.** $f(x)=e^{-x}+e^x$.

9. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x=0 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$

10. $f(x)=\ln x$. **11.** $f(x)=|x+3|$, $f'(-3+0)$, $f'(-3-0)$.

12. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(0)$. **13.** $f(x)=\sqrt[5]{x-4}$, $f'(4)$.

14. $f(x)=\sqrt[3]{x}$. **15.** $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

16. $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ funksiya grafigiga abssissasi $x_0=2$ bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini toping.

17. $y=x^2-3x+2$ parabolaga abssissasi $x_0=2$ bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini toping.

18. $y=\sin\frac{x}{3}$ funksiya grafigining $M(\frac{3\pi}{2};4)$ nuqtasidan o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

19. $y=x^2+1$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinma $y=2x+3$ to'g'ri chiziqqa parallel. Urinish nuqtasining ordinatasini toping.

20. $y=x^2-2x+1$ egri chiziqdagi qanday nuqtada o'tkazilgan urinma $y=-4(x+1)$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi?

21. α ushbu $y=\frac{x}{1-x}$ funksiya grafigiga abssissasi $x_0=3$ bo'lgan nuqtadan o'tkazilgan urinmaning Ox o'qi bilan tashkil etgan burchagi bo'lsa, $\mathrm{tg}2\alpha$ ni toping.

22. Qanday nuqtalarda $y=\frac{x+2}{x-2}$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma, Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan $135°$ li burchak tashkil etadi?

23. Qanday nuqtada $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning grafigi abssissalar o'qiga $30°$ li burchak ostida joylashgan bo'ladi?

24. Qanday nuqtada $y=x^3+2x-1$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma $x+y=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi?

25. $y=x^4$ va $y^4=x$ funksiyalarning grafiklari qaysi nuqtalarda qanday burchak ostida kesishishlarini aniqlang.

26. $s=2\sin 3t$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning $t=\frac{\pi}{9}$ paytdagi tezligini toping.

27. $v=\sin 2t$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning $t=\frac{\pi}{6}$ paytdagi tezlanishini toping.

28. Moddiy nuqta $s=e^t+\cos t+5t$ qonuniyat bo'yicha harakatlanyapti. Bu nuqtaning $t=0$ dagi tezligini toping.

29. Ikki moddiy nuqta $s_1=2{,}5t^2-6t+1$ va $s_2=0{,}5t^2+2t-3$ qonuniyat bo'yicha harakatlanyapti. Qaysi vaqtda birinchi nuqtaning tezligi ikkinchisinikidan 3 marta ko'p bo'ladi?

30. Moddiy nuqta $s=\ln t+\frac{1}{16}t$ qonuniyat bo'yicha to'g'ri chiziqli harakatlanyapti. Harakat boshlangandan qancha vaqt o'tgach, nuqtaning tezligi $\frac{1}{8}\ \text{m/s}$ ga teng bo'ladi?

Funksiyalarning hosilalarini toping:

1) Darajali funksiyalar.

31. $y=3x^2+6x+3$.

32. $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}+\sqrt{3}$.

33. $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

34. $y=(1+2x)^{30}$.

35. $y=\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^8$.

36. $y=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$.

37. $y=\sqrt{1-x^2}$.

38. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

39. $y=\frac{t^3}{(1-t)^2}$.

40. $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$, $y'(2)=?$

41. $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, $y'(0)=?$

42. $y=\frac{x^2}{x^2+4}$, $y'(0)=?$

2) Trigonometrik funksiyalar.

43. $y=\sin^3 x+\cos^2 x$.

44. $y=\cos^4 x$.

45. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

46. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

47. $y = 3\sin^2 x - \sin^5 x$.

48. $y = \sin\frac{1}{x}$.

49. $y = \sin(\sin x)$.

50. $y = \cos^3 4x$.

51. $y = (1+\sin^2 x)^4$.

52. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[5]{1+x^2}$.

53. $y = \sqrt{1+\operatorname{tg}x}$.

54. $y = \sin^2(\cos x^3)$.

55. $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$.

56. $y = \frac{x}{1-\sin x}$.

3). Teskari trigonometrik funksiyalar.

57. $y = x\arcsin x$.

58. $y = (\arccos x)^2$.

59. $y = \sqrt{x}\operatorname{arctg} x$.

60. $y = \arcsin\frac{3}{x}$.

61. $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

62. $y = \frac{\arccos x}{x}$.

63. $y = \operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$.

64. $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

65. $y = x\arccos x - 1 - x^2$.

4) Logarifmik funksiyalar.

66. $y = x^3\log_4 x$.

67. $y = x\ln x$.

68. $y = \sqrt{\ln x}$.

69. $y = \ln(1-2x^2)$.

70. $y = \log_2(x^2-4x)$.

71. $y = \ln^5(\sin x)$.

72. $y = \ln(\arccos 2x)$.

73. $y = (1+\ln\sin x)^n$.

74. $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

75. $y = \ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

76. $y = \ln^3 x$.

4) Ko'rsatkichli funksiyalar.

77. $y = 3^x$.

78. $y = \frac{x^2}{4^x}$.

79. $y = e^x - \cos x$.

80. $y = x^4 - 5^{2x}$.

81. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

82. $y = (x^2-5x+6)6^x$.

83. $y = 10^{3x-4}$.

85. $y = e^{-4x}$.

86. $y = e^{\arcsin 2x}$.

87. $y = a^x x^a$.

88. $y = 5^{\cos x}$.

5) Giperbolik funksiyalar.

89. $y = \mathrm{sh}^2 x$.

90. $y = \ln \mathrm{ch}\, x$.

91. $y = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x$.

92. $y = \mathrm{th}^3 x$.

93. $y = x^2 \mathrm{sh} x$.

94. $y = \dfrac{1+\mathrm{th}x}{1-\mathrm{th}x}$.

95. $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{th}\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{6}\mathrm{th}^2\dfrac{x}{3}$.

96. $y = \mathrm{cth} 4x$.

97. $y = \sqrt{x^3}$ funksiya $x = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

98. $y = x\cos\dfrac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

99. $y = \sqrt{1-x}$ funksiya $x = \dfrac{1}{2}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

Funksiyalarning differensialini toping:

100. $y = \ln x + x^2$.

101. $y = e^{3x} + \sqrt{x}$.

102. $y = \cos^2 x + 3$.

103. $y = \mathrm{tg} 4x + \dfrac{2}{x}$.

104. $y = \log_3 x + \sin 5x$.

105. $y = \arcsin^2 x + \mathrm{arctg}^3 x$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. $3x^2 - 2x$.

2. $2^x(\ln 2\cos x - \sin x)$.

3. 0.

4. 0.

5. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

6. $-5\sin 5x$.

7. 4.

8. $-e^{-x} + e^x$.

9. $\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x = 0 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$

10. $\dfrac{1}{x}$.

11. 3.

12. ∞.

13. ∞.

14. $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

15. $-\dfrac{2}{x^3}$.

16. $k = 3/2$.

17. $k = 1$.

18. $y = 4$.

19. $y = 2$.

20. $(-1;\ 4)$.

21. $-8/15$.

22. $(4;3)$, $(0;-1)$.

23. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}};\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

24. $(-1;0)$, $(1,-2)$.

25. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{8}$. **26.** $3\sqrt{3}\ (m/s)$. **27.** $\sqrt{3}\ (\mathrm{m/s^2})$.

28. 6 (m/s). **29.** 6 (s). **30.** 16 (s).

31. $6x+6=6(x+1)$. **32.** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^4}$. **33.** $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$.

34. $60(1+2x)^{29}$. **35.** $16\left(7x-\frac{4}{x}+6\right)^7\left(7x+\frac{2}{x^2}\right)$.

36. $12\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3\left(t^2+\frac{1}{t^4}\right)$. **37.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

38. $\frac{3-x}{2(1-x)^{3/2}}$. **39.** $\frac{t^2(3-t)}{(1-t)^3}$. **40.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

41. 0. **42.** 0.

43. $\cos x(3\sin^2 x-2\operatorname{cosec}^3 x)$. **44.** $4\sin x\cdot\sec^5 x$.

45. $\frac{x-0{,}5\sin 2x}{x^2\cos^2 x}$. **46.** $-\sin^3 x$.

47. $\sin x\cos x(6-5\sin^3 x)$. **48.** $-\frac{1}{x^2}\cos x$.

49. $\cos(\sin x)\cos x$. **50.** $-6\sin 8x\cos 4x$.

51. $4\sin 2x\,(1+\sin^2 x)^3$. **52.** $\frac{2x}{5\sin^2\sqrt[5]{1+x^2}\ \sqrt[5]{(1+x^2)^4}}$.

53. $\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$. **54.** $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$.

55. $\frac{\cos x+\cos 2x}{(1+\cos x)^2}$. **56.** $\frac{1-\sin x+x\cdot\cos x}{(1-\sin x)^2}$.

57. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **58.** $-\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

59. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg}x+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. **60.** $-\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-9}}\operatorname{sign}x$.

61. $\frac{2x\operatorname{arctg}x+2x^3\operatorname{arctg}x-x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}$. **62.** $-\frac{x+\sqrt{1-x^2}\arccos x}{x^2\sqrt{i-x^2}}$.

63. $-\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}\,(1-x\sqrt{1-x^2})}$. **64.** $\frac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$.

65. $\arccos x$. **66.** $3x^2\log_4 x+\frac{x^2}{2\ln 2}$.

67. $\ln x+1$.

68. $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}$.

69. $-\frac{4x}{1-2x^2}$.

70. $\frac{2(x-2)}{(x^2-4x)\ln 2}$.

71. $5\ln^4(\sin x)\operatorname{ctg} x$.

72. $\frac{2}{\arccos 2x}$.

73. $n(1+\ln\sin x)^{n-1}\operatorname{ctg}x$.

74. $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)}$.

75. $\frac{x}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

76. $\frac{3\ln 2x}{x}$.

77. $3^x\ln 3$.

78. $\frac{2(x-x^2\ln 2)}{4^x}$.

79. $e^x(\cos x-\sin x)$.

80. $4x^3-2\cdot 5^{2x}\ln 5$.

81. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

82. $6^x(x^2-3x+1)\ln 6$.

83. $3\cdot 10^{3x-4}\cdot\ln 10$.

84. $e^{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

85. $-4e^{-4x}$.

86. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}e^{\arcsin 2x}$.

87. $a^x x^a\ln a+a^{1+x}x^{a-1}$.

88. $-5^{\cos x}\cdot\sin x\cdot\ln 5$.

89. $\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x$.

90. $\operatorname{th}x$.

91. $2\operatorname{sh}2x$.

92. $3\operatorname{th}^2x\cdot\frac{1}{ch^2x}$

93. $x(2\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x)$.

94. $\frac{2}{\operatorname{ch}^2x\cdot(1-\operatorname{th}x)}$.

95. $\frac{1}{9\operatorname{ch}^2\frac{x}{3}}\cdot\left(1-\operatorname{th}\frac{x}{3}\right)$.

96. $-\frac{4}{\operatorname{sh}^2 4x}$.

97. Bo‘ladi.

98. Bo‘lmaydi.

99. Bo‘ladi.

100. $\left(\frac{1}{x}+2x\right)dx$.

101. $\left(3e^{3x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

102. $-\sin 2x\,dx$.

103. $\frac{4}{\cos 4x}dx$.

104. $\left(\frac{1}{x\ln 3}+5\cos 5x\right)dx$.

105. $\left(\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3\operatorname{arctg}^2x}{1+x^2}\right)dx$.

20-§. FUNKSIYANING YUQORI TARTIBLI HOSILASI VA DIFFERENSIALI

1. Funksiyaning yuqori tartibli hosilasi. $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqning har bir $x\in(a;b)$ nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu $f'(x)$ funksiya $x_0\in(a;b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *ikkinchi tartibli hosilasi* deb ataladi va $y''_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}$ kabi belgilarning biri orqali yoziladi.

$f(x)$ funksiya $(a;b)$ ning har bir $x\in(a;b)$ nuqtasida $(n-1)$ tartibli $f(x)^{(n-1)}$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f^{(n-1)}(x)$ funksiyaning $x_0\in(a;b)$ nuqtadagi hosilasi (agar u mavjud bo'lsa) $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *n-tartibli hosilasi* deb ataladi va u $y^{(n)}_{x=x_0}$, $f^{(n)}(x_0)$, $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=x_0}$ belgilarning biri orqali yoziladi. Odatda, $f(x)$ funksiyaning $f''(x)$, $f'''(x)$,... hosilalari uning *yuqori tartibli hosilalari* deyiladi.

Esiatma. $f(x)$ funksiyaning biror $x\in(a;b)$ nuktadagi $f'(x)$ hosilasi mavjudligidan uning shu nuqtadagi yuqori tartibli hosilalarga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x)=$ $=\sqrt{x^5}$ funksiya $x\geq0$ da, jumladan, $x=0$ nuqtada ham, $f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$, $f''(x)=\frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}}$ hosilalarga ega, lekin bu funksiya $x=0$ nuqtada chekli uchinchi tartibli hosilaga ega emas.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, ular $x\in(a;b)$ nuqtada n- tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. (Buni quyidagicha tushunish lozim: $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtani o'z ichiga olgan $(\alpha,\beta)\subset(a;b)$ oraliqda $f', f'',\dots, f^{(n-1)}$ hamda $g', g'',\dots, g^{(n-1)}$ hosilalarga ega bo'lib, x nuqtada esa $f^{(n)}(x)$ $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega). U holda

1) $[Cf(x)]^{(n)}=Cf^{(n)}(x)$, $C=\text{const}$;

2) $[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$;

3) $[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\cdot g(x)+C_n^1 f^{(n-1)}(x)\cdot g'(x)+$

$$+C_n^2 f^{(n-2)}(x)\cdot g''(x)+\ldots+C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)+\ldots+f(x)g^{(n)}(x),$$

bunda $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

(*) formula *Leybnis formulasi* deyiladi.

Asosiy elementar funksiyalarning n- tartibli hosilalarini topish formulalarini keltiramiz:

1. $y=x^m$, $\quad y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

Agar m butun son va $n>m$ bo'lsa, $y^{(n)}=0$ bo'ladi. Xususiy holda, $m=-1$ bo'lsa, $y=\dfrac{1}{x}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ bo'ladi.

2. $y=\ln x$, $y^{(n)}=(-1)(n-1)!\,\dfrac{1}{x^n}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

3. $y=\log_a x$, $\quad y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{\ln a}\dfrac{1}{x^n}$.

4. $y=e^{\lambda x}$, $\quad y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$.

5. $y=a^{bx}$, $\quad y^{(n)}=b^n a^x \ln^n a$.

6. $y=\sin bx$, $\quad y^{(n)}=b^n\sin(bx+n\frac{\pi}{2})$.

7. $y=\cos bx$, $\quad y^{(n)}=b^n\cos(bx+n\frac{\pi}{2})$.

2. Funksiyaning yuqori tartibli differensiali. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda berilgan bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya $x\in(a;b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiyaning differensiali ushbu $dy=f'(x)dx$ formula bilan hisoblanishini 19-§ ning 6- bandida ko'rdik, bunda dx miqdor $f(x)$ funksiya argumenti Δx ning ixtiyoriy orttirmasi Δx ni ifodalaydi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $x\in(a;b)$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin.

2- ta'rif. $f(x)$ funksiya differensiali dy ning $x\in(a;b)$ nuqtadagi differensiali berilgan $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tartibli differensiali* deb ataladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi, ya'ni $d^2y=d(dy)$ yoki $d^2f(x)=d(df(x))$.

Differensiallash qoidasidan foydalanib, $d^2y=d(dy)=d(y'd(x))=d(y')dx=y''(dx)^2$ ni topamiz.

Shunday qilib, funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali uning ikkinchi tartibli hosilasi orqali quyidagicha yoziladi:

$$d^2y = y'' \, dx^2, \qquad (1)$$

bunda $dx^2 = dx \cdot dx = (dx)^2$.

$f(x)$ funksiya $x \in (a;b)$ nuqtada n- tartibli $f^{(n)}(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Funksiyaning $(n$-$1)$- tartibli differensiali $d^{n-1}\, y$ dan olingan differensial berilgan $f(x)$ funksiyaning $x \in (a;b)$ nuqtadagi *n- tartibli differensiali* deb ataladi va u $d^n y$ yoki $d^n f(x)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \text{ yoki } d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)); \quad d^n y = y^{(n)} dx^n. \qquad (2)$$

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a;b)$ oraliqda berilgan bo'lib, ular $x \in (a;b)$ nuqtada differensialga ega bo'lsin. U holda quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

1) $d^n [Cf(x)] = Cd^n f(x)$, C=const;

2) $d^n [f(x) \pm f(x)] = d^n f(x) \pm d^n g(x)$.

3) $d^n [f(x) \cdot g(x)] = d^n [f(x)] \cdot g(x) + C_n^1 \, d^{n-1} [f(x)] \cdot d[g(x)] + \ldots +$
$+ C_n^k \, d^{n-k} [f(x)] \cdot d^k [g(x)] + \ldots + f(x) \cdot d^n [g(x)]$,

bunda $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

$u = f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda, $y = F(u)$ funksiya esa $(c;d)$ oraliqda berilgan bo'lib, ular yordamida $y = F(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin. $u = f(x)$ funksiya $x \in (a;b)$ nuqtada $f'(x)$, $F(u)$ funksiya esa mos $u \in (c;d)$ nuqtada $F'(u)$ hosilaga ega deb, $y = F(f(x))$ funksiyaning differensialini hisoblaymiz:

$$dy = F'(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = F'(f(x)) \cdot df(x).$$

1-misol. $y = \ln \sin^2 3x$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini toping.

Yechilishi. Ikkinchi tartibli differensialni topish uchun (1) munosabatdan foydalanamiz:

1) $y' = \dfrac{1}{\sin^2 3x} \, 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6 \text{ctg} 3x$,

2) $y'' = \dfrac{-18}{\sin^2 3x}$, $\quad d^2 y = y'' dx^2 = -\dfrac{18 dx^2}{\sin^2 3x}$.

2- misol. Ushbu $y = \sin 5x \cdot \cos 2x$ funksiyaning n- tartibli differensialini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyani $y = \frac{1}{2}[\sin 7x + \sin 3x]$ ko'rinishda ifodalaymiz. Bu funksiyaning n- tartibli differensialini topish uchun $y^{(n)}=(\sin bx)^{(n)}=b^n\sin(bx+n\frac{\pi}{2})$ va (2) formulalardan foydalanamiz:

$$d^n y = y^{(n)}dx^n = \frac{1}{2}\left[7^n \sin\left(7x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]dx^n.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarning ikkinchi tartibli hosilalarini toping:

1. $y=x\ln x$. **2.** $y=e^{2x}$. **3.** $y=x^3+4x^5$.

4. $y=\cos^2 x$. **5.** $y=\sin^3 x$. **6.** $y=(1+x^2)\mathrm{arctg}x$.

Funksiyalarning n- tartibli hosilalarini toping:

7. $y=e^{5x}$. **8.** $y=\cos^2 x$. **9.** $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+..+a^n$.

10. $y=x\cdot\cos ax$. **11.** $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. **12.** $y=x^{n-1}\ln x$.

Funksiyalarning ko'rsatilgan tartibdagi differensiallarini toping.

13. $y=x^6$, d^6y. **14.** $y=\cos 5x$, d^4y. **15.** $y=\sqrt{x}$, d^3y.

16. $y=x\ln x$, d^5y. **17.** $y=x^n$, d^ny. **18.** $y=e^{3x}$, d^5y.

19. $y=\sin 2x$, d^6y. **20.** $y=x^2e^{2x}$, $d^{20}y$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. $\frac{1}{x}$. **2.** $4e^{2x}$. **3.** $6x+80x^3$. **4.** $-2\cos 2x$.

5. $\frac{3}{2}\cos x\sin 2x + 3\sin x\cos 2x$. **6.** $2\mathrm{arctg}x + \frac{2x}{1+x^2}$.

7. 5^ne^{5x}. **8.** $-2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$. **9.** $a_0n!$

10. $xa^n\cos\left(ax+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+na^{n-1}\sin\left(ax+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

11. $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **12.** $\frac{(n-1)!}{x}$. **13.** $6!dx^6$.

14. $5^4\cos 4x dx^4$. **15.** $\frac{1}{4}x^{-5/3}dx^3$.

16. $-\frac{6}{x^4}dx^5$ $(x>0)$. **17.** $n!dx^n$. **18.** $243e^{3x}dx^3$.

19. $-64\sin 2x dx^6$. **20.** $2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)dx^{20}$.

21- §. DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI

1. Ferma, Roll, Lagranj va Koshi teoremalari. Differensial hisobining asosiy teoremalari funksiyalarni tekshirishda muhim rol o'ynaydi.

1- teorema (Ferma teoremasi). $f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan bo'lib, bu oraliqning ichki c nuqtasida o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar bu nuqtada funksiya chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

Ferma teoremasi quyidagicha sodda geometrik ma'noga ega: $f(x)$ funksiya Ferma teoremasining shartlarini qanoatlantirganda, $f(x)$ funksiyaning grafigidagi (c; $f(c)$) nuqtaga o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi (21.1- chizma).

2- teorema (Roll teoremasi). $f(x)$ funksiya:

1) $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz;

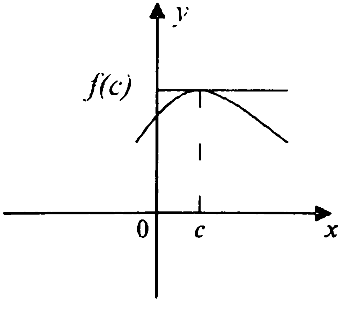
2) aqalli $(a;b)$ oraliqda $f'(x)$ chekli hosilaga ega;

3) oraliqning chetlarida o'zaro teng ($f(a)=f(b)$) qiymatlarni qabul qilsin. U holda kamida bitta shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki,

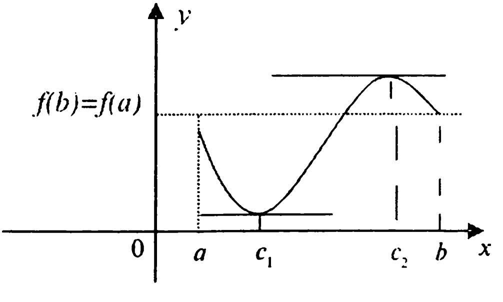
$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

Bu teoremaning geometrik ma'nosi quyidagicha: $f(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirsin. U holda bu funksiyaning grafigida shunday (c, $f(c)$) nuqta topiladiki, bu nuqtada grafikka o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi (21.2- chizma).



21.1- chizma.



21.2- chizma.

Eslatma. Roll teoremasining shartlaridan aqalli bittasi buzilsa ham teoremaning tasdig‘i o‘rinli bo‘lmaydi.

Misol. Quyidagi funksiyalar uchun Roll teoremasining shartlarini tekshiring:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;1), \\ 0, & x=1; \end{cases}$ *d*) $f(x)=x,\ x\in[0;1]$;

b) $f(x)=|x-2|,\ x\in[0;4]$; *e*) $f(x)=x^3-x,\ x\in[-1;1]$.

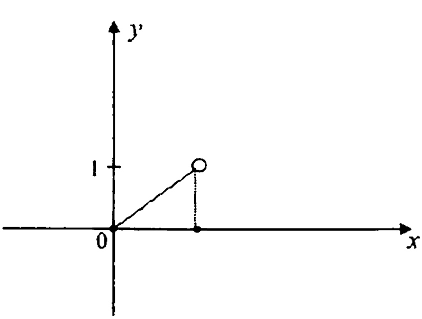
Yechilishi. *a*) Roll teoremasining 2) va 3) shartlari bajariladi, lekin 1) sharti bajarilmaydi: funksiya kesmada uzluksiz emas, $x=1$ nuqtada u uzilishga ega, chunki

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$, ammo $f(1)=0$ va $f'(c)=0$ bo‘ladigan $x=c$ nuqta mavjud emas (21.3- chizma).

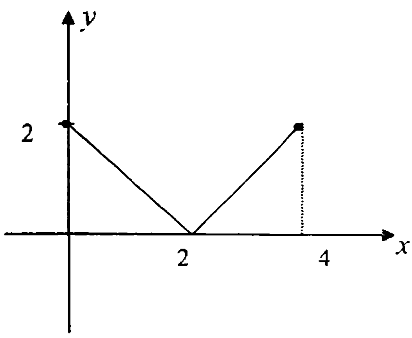
b) [0;4] kesmada berilgan $f(x)=|x-2|$ funksiya uchun Roll teoremasining 1) va 3) shartlari bajariladi, lekin 2) shart bajarilmaydi, funksiya $x=2$ nuqtada differensiallanuvchi emas (21.4- chizma). Demak, $f'(c)=0$ bo‘ladigan c nuqta mavjud emas.

d) [0;1] kesmada $f(x)=x$ funksiya uchun Roll teoremasining 1) va 2) shartlari bajariladi, lekin 3) sharti bajarilmaydi: $f(0)\neq f(1)$, chunki $f(0)=0$, $f(1)=1$. Demak, $f'(c)=0$ bo‘ladigan c nuqta mavjud emas (21.5-chizma).

e) [−1;1] kesmada berilgan $f(x)=x^3-x$ funksiya uchun Roll teoremasining hamma shartlari bajariladi: 1) $f(x)=x^3-x$ funksiya [−1;0] da aniqlangan va uzluksiz:



21.3- chizma.



21.4- chizma.

2) $(-1;1)$ oraliqda $f'(x)=3x^2-1$ chekli hosilasi mavjud;

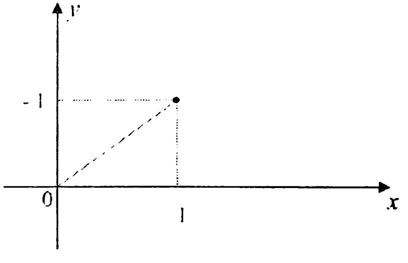
3) oraliqning chetlarida o'zaro teng $(f(-1)=f(1))$ qiymatlarni qabul qiladi. Demak, $f'(x)=0$ bo'ladigan $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nuqtalarning mavjudligini 21.6- chizmadan ko'rish mumkin.

3-teorema (Lagranj teoremasi). 1) $f(x)$ funksiya: $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, 2) aqalli $(a;b)$ oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

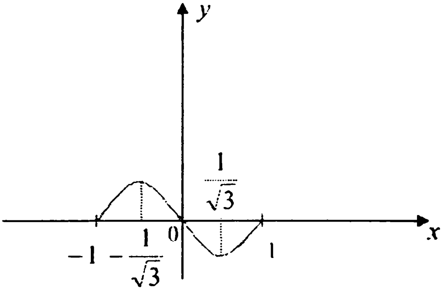
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$$

o'rinli bo'ladi.

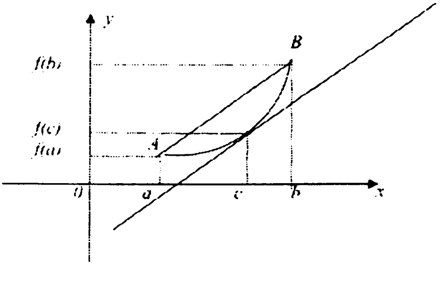
Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi quyidagicha. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining hamma shartlarini qanoatlantirsin. Funksiya grafigining $A(a;f(a))$, $B(b;f(b))$ nuqtalarini to'g'ri chiziq bilan birlashtiramiz. $f'(x)$ — bu $f(x)$ funksiya grafigining $(x;\ f(x))$ nuqtasidan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentidir, $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$. Shunday $c(a<c<b)$ nuqta topiladiki, $f(x)$ funksiya grafigiga $(c\ f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi (21.7- chizma).



21.5- chizma.



21.6- chizma.



21.7- chizma.

4- teorema. (Chekli orttirmalar haqidagi umumlashgan Koshi teoremasi). 1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada uzluksiz, 2) aqalli $(a;b)$ oraliqda $f'(x)$ va $g'(x)$ chekli hosilalarga ega bo'lib, $\forall x \in (a;b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $c(a<c<b)$ nuqta topiladiki.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Misol. Ushbu tengsizliklarni isbotlang:

a) $\ln(1+x)<x \qquad (x>0)$,

b) $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 \leq x_2 - x_1$, $x_1, x_2 \in (-\infty;+\infty)$

Isboti. *a*) $[0;x]$ kesmada berilgan $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun Lagranj teoremasining hamma shartlari bajarilsa, u holda teorema shartiga ko'ra shunday c $(0<c<x)$ nuqta topiladiki

$$f(x)-f(0)=\ln(1+x)=\frac{1}{1+c}x<x$$

bo'ladi, chunki $\frac{1}{1+c}<1$.

b) $[x_1;x_2]$ kesmada berilgan $f(x)=\operatorname{arctg} x$ funksiya uchun Lagranj teoremasining hamma shartlari bajariladi, u holda

$$f(x_2)-f(x_1)=\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1=\frac{1}{1+c^2}(x_2-x_1);$$

bu ayirmani baholaymiz:

$$|\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1| \leq \frac{|x_2-x_1|}{1+c^2} \leq |x_2-x_1|,$$

chunki $0<\frac{1}{1+c^2}\leq 1$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x)=3x^2-1$ funksiya uchun $[1;2]$ kesmada Ferma teoremasining shartlari bajariladimi?

2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya uchun $[-1;1]$ kesmada Ferma teoremasining shartlari bajariladimi?

3. $f(x)=\ln\sin x$ funksiya uchun $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ kesmada Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

4. $f(x)=1-[x]$ funksiya uchun $[-1;1]$ kesmada Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

5. $f(x)=\sin x$ funksiya uchun $[1;2]$ kesmada Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

Lagranj teoremasidan foydalanib quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

6. $e^x>e\cdot x,\quad x>1.$

7. $\sin x-\sin y\le x-y$.

8. $e^x\ge 1+x,\ x\in R^1$

9. $f(x)=x^2$ funksiya uchun $[3;4]$ kesmada Lagranj teoremasining shartlarini tekshiring.

10. $f(x)=x^2-2x+3$ va $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ funksiyalar uchun $[1;4]$ kesmada Koshi teoremasining shartlarini tekshiring.

11. $f(x)=e^x$ va $g(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ funksiyalar uchun $[-3;3]$ kesmada Koshi teoremasi o'rinlimi?

12. $f(x)=x^2$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar uchun $[-1;1]$ kesmada Koshi teoremasi o'rinlimi?

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. Bajarilmaydi. **2.** Bajarilmaydi. **3.** Bajariladi.

4. Bajarilmaydi. **5.** Bajariladi. **9.** $c=\frac{7}{2}$.

10. $c=2$. **11.** Bajarilmaydi.

12. Bajarilmaydi.

22- §. TENGLAMASI OSHKOR SHAKLDA BERILGAN FUNKSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH

1. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlash. Biz I bobda funksiyaning monotonligi, ya'ni o'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi(qat'iy kamayuvchi) bo'lishi ta'riflarini keltirgan edik. Endi hosila yordamida funksiyaning monotonligini aniqlash mumkinligini ko'rsatamiz. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

1-teorema. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Funksiyaning shu oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun

$$f'(x)\geq 0 \ \ (f'(x)\leq 0),\ x\in(a;b)$$

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

2- teorema. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda chekli hosilaga ega bo'lib, $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda qat'iy o'suvchi(qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.

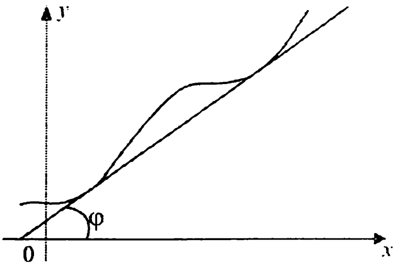
3- teorema. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning $(a;b)$ oraliqda o'zgarmas bo'lishi uchun

$$f'(x)=0,\ x\in(a;b)$$

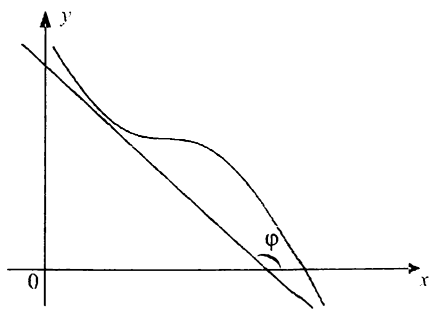
bo'lishi zarur va yetarli.

2- teoremaning geometrik ma'nosi quyidagicha:

1) $f'(x)>0$ ($\mathrm{tg}\alpha>0$) shart funksiya grafigining har bir nuqtasiga o'tkazilgan urinma abssissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan



22.1- chizma.

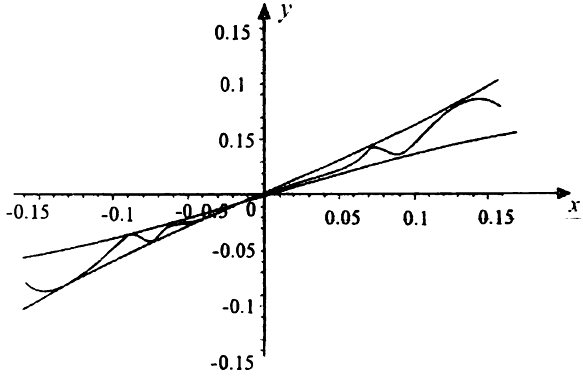


22.2- chizma.

o'tkir burchak tashkil qilishini (22.1- chizma);

2) $f'(x)<0$ shart esa o'tmas burchak tashkil etishini anglatadi (22.2-chizma).

Esiatma. Agar $f'(a)>0$ bo'lsa, $U_\varepsilon(a)$ da $f(x)$ funksiya o'suvchi deb xulosa chiqarish mumkin emas. Masalan, 22.3- chizmada tasvirlangan $f(x)=\frac{x}{2}+x^2\sin x$ funksiya $a=0$ nuqtada musbat hosilaga ega, lekin $U_\varepsilon(a)$ da funksiya monoton emas.



22.3- chizma.

Esiatma. Funksiya hosilasining $(a;b)$ oraliqda musbat (manfiy) bo'lishi funksiyaning qat'iy monoton bo'lishi uchun zaruriy shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^3$ funksiya (—1, 1) oraliqda o'suvchi bo'lgani bilan uning $y'=3x^2$ hosilasi hamma joyda musbat emas, $x=0$ da esa nolga aylanadi.

Funksiyani monotonlikka tekshirganda avvalo uning hosilasini topish kerak (*u* mavjud bo'lgan joyda), so'ngra hosila musbat (manfiy) bo'ladigan oraliqlarini aniqlash kerak. Hosilasi musbat (manfiy) bo'lgan oraliqlarda funksiya monoton o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

1-misol. Ushbu funksiyani monotonlikka tekshiring:

$$f(x)=x^2\ln x.$$

Yechilishi. Berilgan funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda aniqlangan. Uning hosilasi

$$f'(x)=2x\ln x+x$$

bo'ladi. Endi 1- teoremaga ko'ra

$$f'(x)\geq 0,\ \text{ya'ni}\ 2x\ln x+x\geq 0$$

yoki

$$f'(x)\leq 0,\ \text{ya'ni}\ 2x\ln x+x\leq 0$$

bo'ladigan nuqtalar to'plamini topamiz:

$$a)\ x(2\ln x+1)\geq 0 \Rightarrow 2\ln x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq e^{-\frac{1}{2}}, [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty),$$

$$b)\ x(2\ln x+1)\leq 0 \Leftrightarrow 2\ln x+1\leq 0 \Rightarrow x\leq e^{-\frac{1}{2}}, \left[0; e^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Bundan berilgan funksiya uchun $[e^{-1/2};+\infty]$ da $f'(x)\geq 0$, $\left[0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$ da $f'(x)\leq 0$ bo'lishini olamiz. Demak, berilgan funksiya $\left[0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$ da kamayuvchi, $[e^{-1/2};+\infty)$ da esa o'suvchi ekan.

2- misol. Ushbu funksiyani monotonlikka tekshiring:

$$f(x)=x^3-\frac{1}{x}.$$

Yechilishi. Berilgan funksiya uchun $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ Uning hosilasi $f'(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}$ bo'ladi. Ravshanki, $(-\infty;0)$ va $(0;+\infty)$ oraliqlarda $f'(x)>0$.

Demak, 2- teoremaga ko'ra berilgan funksiya $(-\infty;0)$ va $(0;+\infty)$ oraliqlarda qat'iy o'suvchidir.

2. Funksiyaning ekstremum qiymatlari. Qaralayotgan oraliqlarda funksiyaning hosilasini aniqlash uning shu oraliqda ekstremum qiymatlar beruvchi nuqtalarini va ularni topish imkoniyatini beradi.

4-teorema (Funksiya ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti).

Agar $f(x)$ funksiya $x_0(x_0\in(a;b))$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, u shu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa,

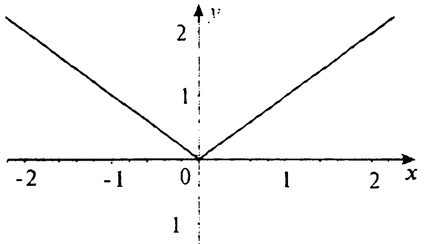
$$f'(x_0)=0$$

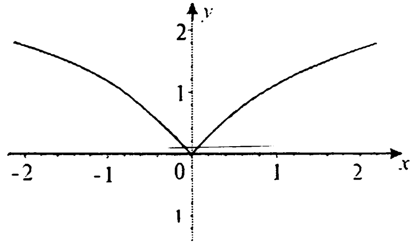
bo'ladi.

Bu shart funksiya ekstremumga ega bo'lishi uchun yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^3$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasi nolga teng, ya'ni $y'(0)=0$, lekin funksiya bu nuqtada ekstremumga ega emas.

Odatda, funksiyaning hosilasi nolga aylanadigan nuqtalar statsionar (turg'un, kritik) nuqtalar deb ataladi.

x_0 nuqtada funksiya hosilaga ega bo'lmasa ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin. Masalan, 1) $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasi mavjud emas, lekin funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega (22.4-chizma). 2) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasi cheksiz, lekin funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega (22.5- chizma).





Demak, funksiyaning hosilasi cheksiz yoki hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalarda ham ekstremum mavjud bo'lishi mumkin ekan.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqtalarni funksiyaning statsionar nuqtalari, funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar, funksiyaning hosilasi cheksiz bo'lgan nuqtalar orasidan izlash kerak ekan. Odatda bunday nuqtalar *ekstremumga shubhali nuqtalar* deb ataladi.

a) **Ekstremum mavjud bo'lishining birinchi yetarli sharti.** $x_0 \in (a;b)$ nuqtaning

$$u_\delta^-(x_0)=\{x \in R: x_0-\delta<x<x_0;\ \delta>0\},$$

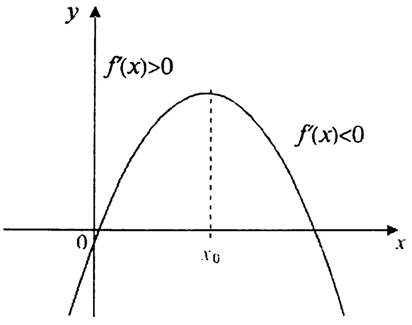
$$u_\delta^+(x_0)=\{x \in R: x_0<x<x_0+\delta;\ \delta>0\}$$

chap va o'ng atroflarini qaraymiz.

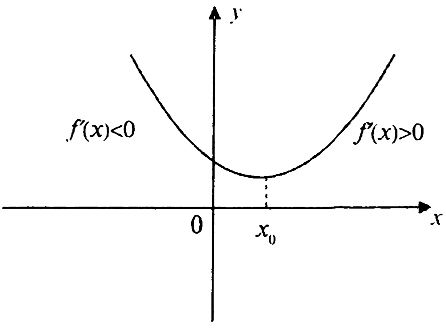
Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $u_\delta(x_0)$ da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin (x_0 nuqtada hosila mavjud bo'lmasligi ham mumkin).

1. Agar $\forall x \in u_\delta^-(x_0)$ uchun, $f'(x)>0$, $\forall x \in u_\delta^+(x_0)$ uchun $f'(x)<0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi (22.6- chizma).

Agar $\forall x \in u_\delta^-(x_0)$ uchun $f'(x)<0$, $\forall x \in u_\delta^+(x_0)$ uchun $f'(x)>0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi (22.7- chizma)



22.6- chizma.



22.7- chizma.

$$\forall x \in u_\delta^-(x_0) \text{ uchun } f'(x)>0,$$

$$\forall x \in u_\delta^+(x_0) \text{ uchun } f'(x)>0$$

yoki

$$\forall x \in u_\delta^-(x_0) \text{ uchun } f'(x)<0,$$

$$\forall x \in u_\delta^+(x_0) \text{ uchun } f'(x)<0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

$y=f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqtalarni birinchi tartibli hosila yordamida topish qoidasi:

1. $f'(x)$ hosila topiladi.

2. $y=f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari, ya'ni $f'(x)$ hosila nolga aylanadigan yoki uzilishga ega bo'lgan nuqtalar topiladi.

3. Topilgan kritik nuqtalar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini oraliqlarga ajratadi, shu oraliqlarda $f'(x)$ hosilaning ishorasi tekshiriladi.

4. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

1-misol. Ushbu $f(x)=x^4-4x^3$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechilishi. 1. $f'(x)=4x^3-12x^2$.

2. $4x^3(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=3.$

3. Intervallar usuli bilan $f'(x)=4x^2(x-3)$ hosila $x>3$ da musbat, $x<0$ va $0<x<3$ da manfiy bo'lishini aniqlaymiz:

$x_1=0$ nuqtadan o'tishda hosilaning ishorasi o'zgarmaganligi uchun bu nuqta ekstremum nuqtasi bo'lmaydi.

$x_2=3$ nuqtadan o'tishda hosila ishorasini „—" dan „+" ga o'zgartirdi. Demak, ekstremumning birinchi yetarli shartiga ko'ra $x_2=3$ minimum nuqtasidir.

4. $f_{min}(3)=-27$.

2- misol. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-5)$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechilishi. 1. $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-5)+\sqrt[3]{x^2}=\frac{5}{2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$.

$x=0$ (bu nuqtada hosila uzilishga ega) va $x=2$ (bu nuqtada hosila nolga aylanadi) nuqtalar kritik nuqtalardir.

Quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	Mavjud emas	—	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f_{max}(0)=0$	$\searrow$	$f_{min}(2)=-3\sqrt[3]{4}\approx-4,8$	$\nearrow$

4. $f_{max}(0)=0$, $f_{min}(2)=-3\sqrt[3]{4}\approx-4,8$.

3- misol. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechilishi. 1. $f'(x)=x^3$.

2. $f'(x)=0,\ 3x^2=0\Rightarrow\ x=0$ nuqta statsionar nuqta bo'ladi.

1. Ravshanki, $\forall x\in u_\delta^-(0)$ uchun $f'(x)=3x^2<0\Rightarrow x<0$, $\forall x\in u_\delta^+(0)$ uchun $f'(x)=3x^2>0\Rightarrow x>0$ bo'ladi.

2. Demak, funksiyaning hosilasi $x=0$ nuqtadan o'tishda o'z ishorasini manfiy „—" dan musbat („+") ga o'zgartirar ekan. Berilgan funksiyaning o'zi $x=0$ nuqtada uzluksiz.

Shunday qilib, berilgan funksiya ekstremumning birinchi yetarli shartiga ko'ra $x=0$ nuqtada minimumga erishadi. Uning minimum qiymati $f_{min}(x)=\frac{1}{4}\cdot0+2=2$.

b) Ekstremum mavjud bo'lishining ikkinchi yetarli sharti. x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni $f'(x_0)=0$ bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi.

$y=f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqtani ikkinchi tartibli hosila yordamida topish qoidasi:

1. $f'(x)$ hosila topiladi.

2. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalari, ya'ni $f'(x)=0$ bo'ladigan nuqtalar topiladi.

3. Ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ topiladi.

4. Ikkinchi tartibli hosilaning ishorasi har bir kritik nuqtada tekshiriladi. Bunda agar ikkinchi tartibli hosila manfiy bo'lsa, u holda funksiya bunday nuqtada maksimumga, musbat bo'lsa, minimumga ega bo'ladi. Agar ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo'lsa, u holda funksiyaning ekstremumini birinchi yetarli shart bo'yicha tekshirish kerak.

5. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

1-misol. Ushbu funksiyaning ekstremumini ikkinchi tartibli hosila yordamida tekshiring:

$$f(x)=x^3-9x^2+24x-12.$$

Yechilishi. 1. $f'(x)=3x^3-18x+24.$

2. $x^2-6x+8=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=4$ — statsionar nuqtalar.

3. $f''(x)=6x-18.$

4. $f''(2)=6\cdot 2-18<0$ bo'lgani uchun $x=2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi; $f''(4)=6\cdot 2-18>0$ bo'lgani uchun $x=4$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

5. $f_{max}(2)=f(2)=2^3-9\cdot 2^2+24\cdot 2-12=8,$

$f_{max}(4)=f(4)=4^3-9\cdot 4^2+24\cdot 2-12=4.$

2-misol. $f(x)=x^3-6x^2$ funksiyaning ekstremumini ikkinchi tartibli hosila yordamida tekshiring.

Yechilishi. 1. $f'(x)=3x^2-12x.$

2. $3x^2-18x=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=4$ — statsionar nuqtalar.

3. $f''(x)=6x-12$.

4. $f''(0)=-12<0$ bo‘lgani uchun $x=0$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo‘ladi; $f''(4)=12>0$ bo‘lgani uchun $x=4$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

5. $f_{max}(0)=f(0)=0$,

$f_{max}(4)=f(4)=-32$.

3-misol. $f(x)=(x-2)^4$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechilishi.

1. $f'(x)=4(x-2)^3$.

2. $(x-2)^3=0 \Rightarrow x=2$ — statsionar nuqtadir.

3. $f''(x)=12(x-2)^2$.

4. Ikkinchi tartibli hosila $x=2$ nuqtada nolga aylanadi, shuning uchun ekstremumning birinchi yetarli sharti bo‘yicha berilgan funksiyani ekstremumga tekshiramiz.

Ravshanki, $\forall x \in u_\delta^-(2)$ uchun $f'(x)=4(x-2)^3<0$; $\forall x \in u_\delta^+(2)$ uchun $f'(x)=4(x-2)^3>0 \Rightarrow x>2$ bo‘ladi.

Demak, berilgan funksiya, ekstremumning birinchi yetarli shartiga ko‘ra, $x=2$ nuqtada minimumga erishadi.

5. $f_{min}(2)=f(2)=0$.

d) Ekstremum mavjud bo‘lishining uchinchi yetarli sharti. $f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a;b)$ nuqtada $f'(x_0)$, $f''(x_0)$,..., $f^{(n)}(x_0)$ hosilalari mavjud bo‘lib, biror $n>2$ son uchun $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo‘lsin.

Agar: *a*) n juft son bo‘lib ($n=2m$, $m\in N$), $f^{(n)}(x_0)=f^{(2m)}(x_0)<0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga; $f^{(n)}(x_0)=f^{(2m)}(x_0)>0$ tengsizlik o‘r inli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya nuqtada x_0 minimumga ega bo‘ladi.

b) n toq son bo‘lsa ($n=2m+1$, $m\in N$), $f(x)$ funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

1- misol. $f(x)=(x-c)^n$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechilishi. Ravshanki, $f'(c)=f^{(2)}(c)=...=f^{(n-1)}(c)=0$, $f^{(n)}(c)=n!>0$ bo‘ladi. Ekstremumning uchinchi yetarli shartiga ko'ra, n juft bo'lganda funksiya $x=c$ nuqtada minimumga ega bo'ladi, n toq bo'lganda esa ekstremumga ega bo'lmaydi.

2- misol. $f(x)=2\text{ch}\,x+2\cos x$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechilishi. Berilgan funksiya uchun $f'(x)=2\text{sh}\,x-2\sin x$ bo'lib, $f'(x)$ hosila $x=0$ nuqtada nolga aylanadi.

Demak, $x=0$ statsionar nuqta. Berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topib, ularning $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} &f''(x)=2\text{ch}x-2\cos x, && f''(0)=0,\\ &f'''(x)=2\text{ch}x+2\sin x, && f'''(0)=0,\\ &f^{\text{IV}}(x)=2\text{ch}x+2\cos x, && f^{\text{IV}}(0)=4>0, \end{aligned}$$

juft tartibli hosila $x=0$ nuqtada noldan farqli bo'lib, u musbat bo'lgani uchun berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. Shu nuqtada funksiyaning qiymatini hisoblaymiz: $f_{\min}(0)=4$.

3. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiyaning $]a;b]$ da eng katta hamda eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi va bu qiymatlarga segmentning nuqtalarida erishadi.

Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi. Funksiyaning $(a;b)$ dagi hamma maksimum qiymatlaridan iborat to'plam $\{\max f(x)\}$ bo'lsin;

2) funksiyaning $[a;b]$ segmentning chegarasidagi, ya'ni $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi. So'ngra $\{\max f(x)\}$ to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi eng katta qiymati bo'ladi. Xuddi shu usulda funksiyaning eng kichik qiymati ham topiladi.

Biror oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

1) bu oraliqda funksiyaning tegishli statsionar nuqtalarini topish, bu topilgan statsionar nuqtalarni ekstremumga tekshirish va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblash;

2) funksiyaning oraliqning chetki nuqtalaridagi qiymatlarini topish;

3) topilgan qiymatlarni oraliqning ichidagi funksiyaning ekstremum qiymatlari bilan solishtirish kerak; bu qiymatlarning eng kichigi va eng kattasi, mos ravishda, funksiyaning qaralayotgan oraliqdagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'ladi.

1-misol. $f(x)=x^2-4x+3$ funksiyaning [0;3] oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechilishi. 1) $f'(x)=2x-4$, $2x-4=0 \Rightarrow x=2\in[0;3]$ ctatsionar nuqta, $f(2)=-1$.

2) $f(0)=3$, $f(3)=0$.

3) Shunday qilib, funksiyaning eng kichik qiymati -1 ga teng bo'lib, funksiya unga oraliqning ichki nuqtasida erishadi, eng katta qiymati esa 3 ga teng bo'lib, funksiya unga oraliqning chap chetida erishadi:

$$f_{\text{eng kichik}}=f(2)=-1,\ f_{\text{eng katta}}=f(0)=3.$$

2-misol. Konserva bankasi radiusi r va balandligi h bo'lgan silindrdan iborat. r va h lar orasidagi munosabat qanday bo'lganda to'la sirti o'zgarmas bo'lgan konserva bankasi eng katta hajmga ega bo'ladi?

Yechilishi. Konserva bankasining to'la sirtini S bilan belgilaymiz. Ma'lumki,

$$S=2\pi r^2+2\pi rh,\ h=\text{const}, \qquad (1)$$

bundan $h=\dfrac{S}{2\pi r}-r$. Konserva bankasining hajmi $V=\pi r^2h=\dfrac{S}{2}r-\pi r^3$.

Demak, masala $V(r)=\dfrac{S}{2}r-\pi r^3$ funksiyaning eng katta qiymatini topishga keltirildi. Shuning uchun bu funksiyani maksimumga tekshiramiz. $V'(r)=\dfrac{S}{\pi r}r-\pi r^2$, $r>0$ ekanligini e'tiborga olib,

$$r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}} \qquad (2)$$

bo'lishini topamiz.

Funksiya ekstremumga ega bo'lsa, faqat $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ nuqtada ega bo'lishi mumkin. $r<\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ bo'lganda $V'(r)=3\pi\left(\dfrac{S}{6\pi}-r^2\right)>0$, $r>\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ bo'lganda esa $V'(r)<0$ bo'ladi.

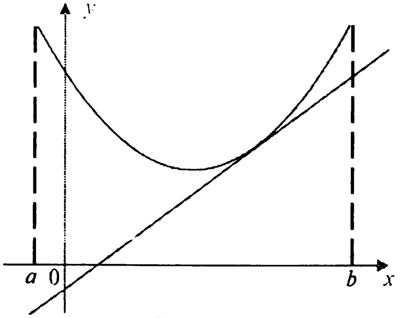
Demak, funksiya ekstremumga ega bo'lishining birinchi yetarli shartiga asosan, $V(r)$ funksiya $r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ nuqtada maksimumga erishadi. Endi konserva bankasi eng katta hajmga ega bo'lishi uchun r bilan h orasida qanday bog'lanish borligini aniqlaymiz.

(1) bilan (2) dan $\frac{h}{r}=2$,, $h=2r$. Demak, eng katta hajmga ega bo'lgan konserva bankasini yasashda uning balandligini diametrga teng qilib olish kerak bo'ladi.

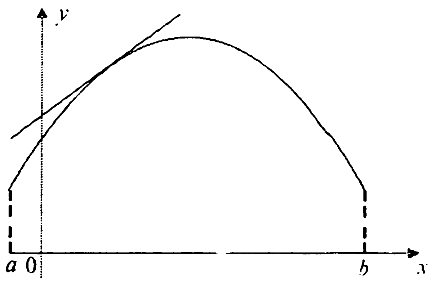
4. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda berilgan bo'lsin. Agar funksiyaning grafigi $(a;b)$ oraliqning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan yuqorida (pastda) yotsa, bu funksiya grafigi qavariq (botiq) deyiladi (22.8, 22.9- chizmalar).

Hosila yordamida funksiya grafigining qavariqligi va botiqligini tekshirish mumkin.

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.



22.8- chizma.



22.9- chizma.

5-teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $(a;b)$ oraliqda qavariq(qat'iy qavariq) bo'lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasining shu oraliqda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

6-teorema. $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ oraliqda botiq (qat'iy botiq) bo'lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasining shu oraliqda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin.

7-teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $(a;b)$ oraliqda qavariq (botiq) bo‘lishi uchun $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$ tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

1- misol. $f(x)=x^4-2x^3+6x-4$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping.

Yechilishi. $f'(x)=4x^3-6x^2+6$, $f''(x)=12x^2-12x=12(x^2-x)=$ $=12x(x-1)$ larni topamiz. Ravshanki, $(-\infty;0)$ va $(1;+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)>0$ tengsizlik o‘rinli, ya‘ni bu oraliqlarda funksiya grafigi qavariq bo‘ladi, $(0;1)$ oraliqda esa $f''(x)<0$ tengsizlik o‘rinli, ya‘ni bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo‘ladi.

5. Funksiya grafigining egilish nuqtalari. Funksiyaning hosilasi yordamida uning egilish nuqtalarini topish mumkin. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $u_\delta(x_0)$ $(\delta>0)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin.

1-ta‘rif. Agar $f(x)$ funksiya $u_\delta^-(x_0)$ oraliqda botiq (qavariq) bo‘lib, $u_\delta^+(x_0)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo‘lsa, $(x_0, f(x_0))$ nuqta (funksiya grafigining) *egilish nuqtasi* deb ataladi.

Agar $x_0 \in (a;b)$ $f(x)$ funksiya grafigi egilish nuqtasining abssissasi bo‘lsa, bunda ikkinchi tartibli hosila mavjud bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi nolga aylanadigan yoki mavjud bo‘lmaydigan nuqtalar II *tur kritik nuqtalar* deyiladi. Bu nuqtalarda egilish mavjud bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $x=0$ nuqta $y=x^3$ va $y=x^{1/3}$ funksiyalar uchun egilish nuqtasi bo‘lib, $y=x^3$ funksiyaning $x=0$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilasi mavjud, $y=x^{1/3}$ funksiyaning esa ikkinchi tartibli hosilasi mavjud emas.

8- teorema (egilish nuqtasi bo‘lishning zaruriy sharti). Agar $f(x)$ funksiyaning grafigi $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsa, $f''(x_0)=0$ bo‘ladi.

9- teorema (egilish nuqtasi bo‘lishning yetarli sharti). $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, bu nuqtada chekli yoki cheksiz hosilaga ega bo‘lib, x_0 nuqtaning biror atrofida, ya‘ni

$$\forall x \in u_\delta^-(x_0) \quad \text{uchun} \quad f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0);$$
$$\forall x \in u_\delta^+(x_0) \quad \text{uchun} \quad f'(x) \leq 0 \quad (f'(x) \geq 0)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, $(x_0, f(x_0))$ nuqta $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo‘ladi.

10- teorema (egilish nuqtasi bo'lishning ikkinchi yetarli sharti). Agar $f^{(2)}(x_0)=0$ bo'lib, $f^{(3)}(x_0)\neq 0$ bo'lsa, $(x_0, f(x_0))$ nuqta $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi.

Masalan, $y=x^3-3x^2-4$ funksiya uchun $(1,-6)$ nuqta egilish nuqtasidir. Haqiqatan ham, $f^{(2)}(x)=6(x-1)$, $f^{(2)}(1)=0$, $f^{(3)}(1)=6\neq 0$.

Demak, 10- teoremaga asosan, $M(1,-6)$ nuqta berilgan funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

$y=f(x)$ **funksiya grafigining egilish nuqtalarini topish qoidasi:**

1. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ topiladi;

2. $y=f(x)$ funksiyaning II tur kritik nuqtalari, ya'ni $f''(x)$ hosila nolga aylanadigan yoki uzilishga ega bo'lgan nuqtalar topiladi;

3. Topilgan kritik nuqtalar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini oraliqlarga ajratadi. Bu oraliqlarda ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaning ishorasi tekshiriladi. Agar bunda x_0 kritik nuqta qavariqlik va botiqlik oraliqlarini ajratib tursa, x_0 nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi abssissasidan iborat bo'ladi;

4. Funksiyaning egilish nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

1- misol. $f(x)=6x^2-x^3$ funksiya grafigining egilish nuqtalarini toping.

Yechilishi. 1. $f'(x)=12x-3x^2$, $f''(x)=12-6x$.

2. $12-6x=0$, ya'ni $x=2$ yagona kritik nuqta.

3. $(-\infty;2)$ oraliqda $f''(x)>0$, $(2;+\infty)$ oraliqda esa $f''(x)<0$ bo'lgani uchun 9-teoremaga ko'ra $x=2$ nuqta funksiya grafigi egilish nuqtasining abssissasidir.

4. Bu nuqtaning ordinatasini topamiz: $f(2)=16$. Shunday qilib, $(2;16)$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'lar ekan.

6. Funksiyalarni to'liq tekshirish va ularning grafiklarini chizish. Biz III bobning yuqoridagi paragraflarida funksiyalarning o'zgarish xarakterini hosilalar yordamida o'rgandik. Funksiyaning o'zgarish xarakterini hosila yordamida o'rganish funksiya grafigini aniqroq yasashda muhim rol o'ynaydi.

Funksiyalarni to'liq tekshirish va ularning grafiklarini yasashni quyidagi sxema bo'yicha olib borish maqsadga muvofiq bo'ladi:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;

2. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;

3. Funksiyaning juft, toqligi hamda davriyligini aniqlash;

4. Funksiya grafigining o'qlar bilan kesishish nuqtalarini topish;

5. Funksiyaning ishorasi saqlanadigan oraliqlarni aniqlash;

6. Funksiya grafigining asimptotalarini topish;

7. Funksiyani monotonlik oraliqlarini topish va ekstremumga tekshirish;

8. Funksiya grafigining qavariqligi hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini topish;

9. Funksiya grafigini chizish.

1- misol. $f(x) = \frac{x^3}{6(3-x)^2}$ funksiyani to'liq tekshiring va uning grafigini chizing.

Yechilishi. 1 Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f) = (-\infty;3) \cup \cup(3;+\infty)$.

2. $x=3$ funksiyaning 2- tur uzilish nuqtasi:

$$\lim_{x\to 3\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 3\pm 0} \frac{x^3}{6(3-x)^2} = +\infty .$$

3. Shuningdek, funksiya davriy ham emas, juft ham emas, toq ham emas, chunki $f(-x) = \frac{(-x^3)}{6(3+x)^2} = \frac{x^3}{4(3+x)^2} \neq \begin{cases} f(x), \\ -f(x). \end{cases}$

4. Funksiyaning koordinata o'qlari bilan kesishishi:

Oy o'qi bilan: $x=0$ da $y=0$ bo'ladi;

Ox o'qi bilan: $y=0$ bo'lganda $x=0$ bo'ladi.

Shunday qilib, bitta $O(0;0)$ nuqtada kesishadi.

5. Funksiyaning ishorasi saqlanadigan intervallarni aniqlaymiz, aniqlanish sohasini nuqtalar yordamida funksiya nolga teng bo'ladigan intervallarga ajratamiz. Bu intervallarning har birida funksiyaning ishorasini tekshiramiz. Jadval tuzamiz:

X	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
sign$y$	—	0	+	∞	+
joylanishi	Ox o'qi ostida		Ox o'qi ustida		Ox o'qi ustida

6. Funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

a) *Ox* o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar — vertikal asimptotalar bo'ladi.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{6(3-x)^2}=+\infty$$

bo'lgani uchun $x=3$ to'g'ri chiziq — vertikal asimptota.

d) *Ox* o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar — gorizontal asimptotalar bo'ladi. Funksiya grafigi gorizontal asimptotaga ega emas.

g) *Ox* va *Oy* o'qlariga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar og'ma asimptotalar bo'ladi, ya'ni $y=kx+b$ og'ma asimptotaning formulasidan k va b larni hisoblaymiz:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{6x(3-x)^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6\left(\frac{3}{x}-1\right)^2}=\frac{1}{6}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{6(3-x)^2}-\frac{1}{6}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(3-x)^2}{6(3-x)^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-9x}{(3-x)^2}=1.$$

Demak, $y=\frac{1}{6}x+1$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'ladi.

6. Funksiyaning monotonlik oraliqlari va ekstremum qiymatlarini topamiz:

$$y'=\frac{x^2(x-9)}{6(3-x)^3}.$$

a) $x=0$, $x=9$ larda $y'=0$ bo'ladi.

b) $x=3$ da $y'=+\infty$ bo'ladi.

$$y'\geq 0,\ \frac{x^2(x-9)}{6(x-9)^3}\geq 0\Rightarrow (x-3)(x-9)\geq 0\Rightarrow (-\infty;3)\cup[9;+\infty);$$

$$y'\leq 0,\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+9)\leq 0\Rightarrow & x\in(-3;9],\\ x\neq 3.\end{cases}$$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;9)$	9	$(9;+\infty)$
sign y'	+	0	+	∞	—	0	+
Funksiyaning o'zgarishi	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞	$\searrow$	$\frac{27}{8}$	$\nearrow$

$$y_{\min} = y\ (9) = \frac{27}{8}.$$

$A(9;\ \frac{27}{8})$ berilgan funksiya grafigining minimum nuqtasi bo'ladi.

7. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini topamiz, buning uchun ikkinchi tartibli hosilani topamiz:

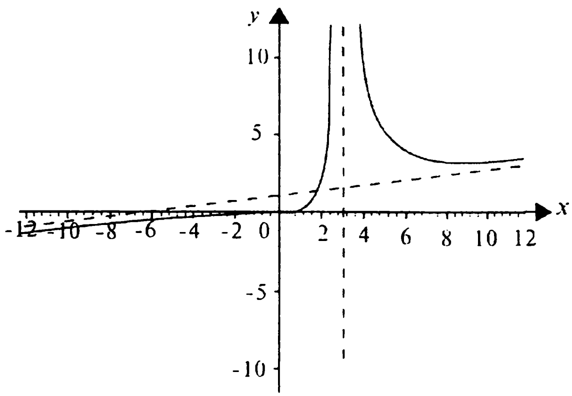
$$y'' = \frac{9x}{(x-3)^4}.$$

x=0 va x=3 berilgan funksiyaning 2-tur kritik nuqtalari bo'ladi. x=0 bo'lganda $y''(0) = 0$, x=3 bo'lganda esa $y''(3) = \infty$ bo'ladi.

Jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
sign y''	—	0	+	∞	0
Funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi	↑	0	↓	∞	↓

Funksiyaning grafigi 22.10- chizmada tasvirlangan



22.10- chizma.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarni monotonlikka tekshiring:

1. $y=3x-x^2$. **2.** $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x \geq 0)$.

3. $y=x+\sin x$. **4.** $y=x^2-\ln x^2$. **5.** $y=x^2e^{-x}$.

Funksiyalarni ekstremumga tekshiring:

6. $y=2+x-x^2$. **7.** $y=(x-1)^3$. **8.** $y=\frac{3}{4}x^4+x^3-9x^2+7$.

9. $y=x^4e^{-x^2}$. **10.** $y=2\sin x+\cos 2x$.

Funksiyalarning ko‘rsatilgan oraliqlarda eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

11. $y=2x^3-3x^{25}-12x+1$, $x\in[-2;2,5]$. **12.** $y=xe^{-x}$, $x\in[0;+\infty)$.

13. $y=x+\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$. **14.** $y=x^3-3x^2+1$, $x\in[-1;4]$.

15. $y=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x$ funksiyaning $x\in[-1;1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari yig‘indisini hisoblang.

Funksiyalar grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping:

16. $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12$. **17.** $y=x+x^{5/3}$. **18.** $y=x+\sin x$.

19. $y=2-|x^5-1|$ **20.** $y=3x^4-4x^3+1$.

Funksiyalar grafigining egilish nuqtalarini toping:

21. $y=\cos x$. **22.** $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$. **23.** $y=3x^4-8x^3+6x^2-12$.

24. $y=\frac{x+1}{x^2+1}$.

Funksiyalarni to‘liq tekshiring va ularning grafigini chizing.

25. $y=x^6-3x^4+3x^2-5$. **26.** $y=x^2e^{1/x}$.

27. $y=x^2e^{-x}$. **28.** $y=\frac{x^3}{x-1}$. **29.** $y=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

30. $y=\ln x-x+1$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ da funksiya o‘suvchi, $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ da esa funksiya kamayuvchi.

2. $(0;100)$ da funksiya o‘suvchi, $(100;+\infty)$ da esa funksiya kamayuvchi.

3. R^1 da funksiya o‘suvchi.

4. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ da funksiya kamayuvchi, $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ da esa funksiya o'suvchi.

5. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ da funksiya kamayuvchi, $(0;2)$ da funksiya o'suvchi.

6. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}$.

7. Ekstremumga ega emas.

8. $y_{\min}(-2)=-9$, $y_{\min}(3)=-40{,}5$, $y_{\max}(0)=7$.

9. $y_{\max}\left(\pm\sqrt{2}\right)=4e^{-2}$, $y_{\min}(0)=0$.

10. $y_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $y_{\min}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $y_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,

$y_{\max}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y_{\min}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$.

11. $y_{\text{eng katta}}(-1)=8$, $y_{\text{eng kichik}}(2)=-19$.

12. $y_{\text{eng katta}}(-1)=e^{-1}$, $y_{\text{eng kichik}}(0)=0$.

13. $y_{\text{eng katta}}(4)=6$, $y_{\text{eng kichik}}(0)=0$.

14. $y_{\text{eng katta}}(4)=17$, $y_{\text{eng kichik}}(2)=y(-1)=-3$.

15. 0.

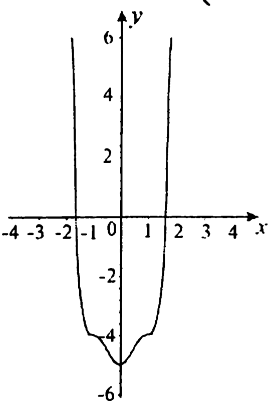
16. $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ da qavariq; $\left(-2;\frac{3}{2}\right)$ da botiq.

17. $(-\infty;0)$ da botiq; $(0;+\infty)$ da qavariq.

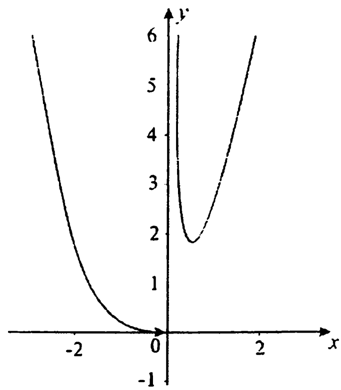
18. $(2\pi k,(2k+1)\pi)$ da botiq; $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$ da qavariq, $k\in Z$.

19. $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ da botiq; $(0;1)$ da qavariq.

20. $(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ da qavariq; $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ da botiq.



1- chizma.



2- chizma.

21. $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;0\right), k\in Z.$ **22.** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{23}{18}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{23}{18}\right).$

23. $\left(\frac{1}{3};12\frac{11}{27}\right),(1;13).$

24. $\left(-2-\sqrt{3};\frac{-\sqrt{3}-1}{4}\right), \left(-2+\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right), (1;1).$

25. Aniqlanish sohasi: R^1; juft funksiya; asimptotaga ega emas; $(-\infty;0)$ da kamayadi, $(0;+\infty)$ da o'sadi; $y_{min}(0)=-5$; egilish nuqtalari: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};-4,51\right)$, $(1;-4)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-4,51\right)$, $(-1;-4)$; $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup(1;+\infty)$ da qavariq, $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}};1\right)$ da botiq; 1-chizma.

26. Aniqlanish sohasi: $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$; $x=0$ funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi; asimptota: $x=0$; $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)\approx 1,87$; $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ da qavariq; 2-chizma.

27. Aniqlanish sohasi: R^1; koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtasi: $O(0;0)$; asimptota: $x\to+\infty$ da $y=0$; $y_{min}(0)=0$, $y_{max}(2)=4e^{-2}\approx0,54$; egilish nuqtalari: $(\sqrt{3}-1;0,3)$, $(\sqrt{3}+1;0,47)$; $(\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+1)$ da botiq; $(-\infty;\sqrt{3}-1)$ da qavariq; 3-chizma.

28. Aniqlanish sohasi: $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; $x=1$ funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi; koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtasi: $O(0;0)$; asimptota: $x=1$; $y_{\max}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}$; egilish nuqtalari $O(0;0)$; $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ da qavariq; $(0;1)$ da botiq; 4- chizma.

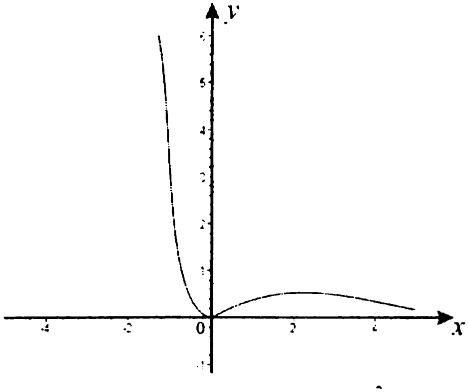
29. Aniqlanish sohasi: R^1; davriy funksiya: $T=2\pi$; koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari: $(0;1)$, $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2};0\right)$; asimptotaga ega emas;

$$y_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4},\quad y_{\min}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4};$$

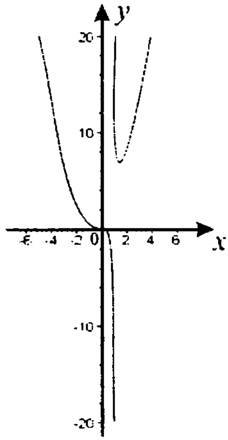
egilish nuqtalari:

$\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\pi+\arcsin\frac{1}{4};\frac{-3\sqrt{15}}{16}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2};0\right)$, $\left(2\pi-\arcsin\frac{1}{4};\frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$; 5-chizma.

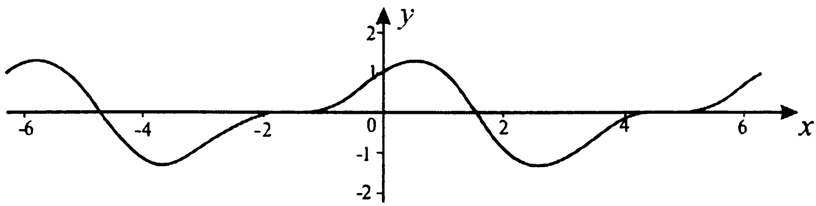
30. Aniqlanish sohasi: $(0;+\infty)$; koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari: $(1;0)$; asimptota: $x=0$; $y_{max}(1)=0$; $(0;+\infty)$ da botiq; 6-chizma.



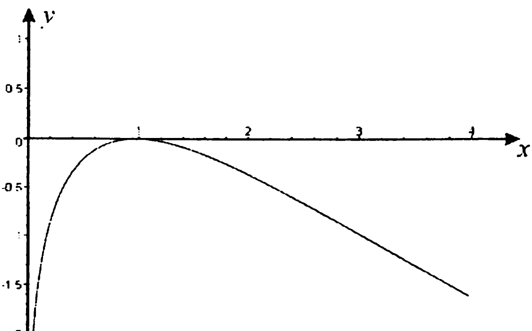
3- chizma.



4- chizma.



5- chizma.



6- chizma.

23-§. TENGLAMASI PARAMETRIK SHAKLDA, QUTB KOORDINATALARIDA VA OSHKORMAS SHAKLDA BERILGAN FUNKSIYALARNI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH

1. Tenglamasi parametrik shaklda berilgan funksiyaning grafigini chizish.

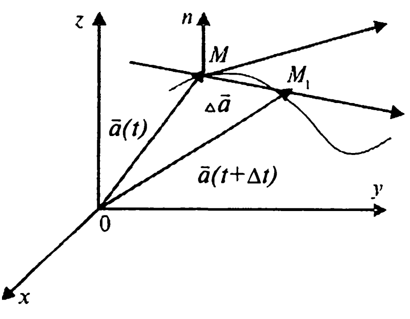
Ckalar argumentli vektor funksiya tushunchasi. Funksiya tenglamasi parametrik shaklda berilganda va uni tekshirish jarayonida yangi obyekt — skalar argumentli vektor funksiya tushunchasidan foydalanish ancha qulay bo'ladi. t o'zgaruvchi biror $\{t\}\in R^1$ to'plamda o'zgarsin.

1- ta'rif. Agar biror qonun yoki qoida bo'yicha $\forall t\in\{t\}$ uchun $\bar{a}$ vektor mos qo'yilgan bo'lsa, u vaqtda $\{t\}$ to'plamda $\bar{a}=\bar{a}(t)$ *skalar argumentli vektor* funksiya aniqlangan deyiladi.

Biror $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ bazisli fazoda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Bu koordinatalar sistemasida har bir skalar argumentli vektor funksiya $\bar{a}(t)=x(t)\bar{e}_1+y(t)\bar{e}_2+z(t)\bar{e}_3$ shaklda tasvirlanadi, bunda $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ $(t\in\{t\})$ funksiyalar $\bar{a}(t)$ vektorning mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlardagi proyeksiyalari (komponentalari). Demak, har bir skalar argumentli vektor funksiyaning berilishi uchta skalar $x(t)$, $y(x)$, $z(t)$ funksiyaning berilishiga teng kuchli.

Koordinatalar boshiga qo'yilgan $\bar{a}=\bar{a}(t)$ vektorning uchi bo'lgan M nuqta t argument $\{t\}$ to'plamda uzluksiz o'zgara borganida fazoda qandaydir geometrik o'rin hosil qiladi. Bu geometrik o'rin biror chiziqdan iborat bo'ladi; ana shu chiziq skalar argumentli vektor funksiyaning *godografi* deyiladi (23.1- chizma).

2- ta'rif. Agar $\bar{a}(t)$ vektor funksiyaning komponentalari bo'lgan $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ skalar funksiyalar $\{t\}$ to'plamda chegaralangan bo'lsa, u $\{t\}$ to'plamda *chegaralangan* deyiladi.



23.1- chizma

$\bar{a}(t)$ vektor funksiya $\{t\}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, t_0 nuqta $\{t\}$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3- ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun $\exists\delta(\varepsilon)>0$ topilib, argument t ning $0<|t-t_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\left|\vec{a}(t) - \vec{a}_0\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\vec{a}$ o‘zgarmas vektor $\vec{a}(t)$ *vektor-funksiyaning* t_0 *nuqtadagi* ($t \to t_0$ dagi) *limiti* deyiladi va $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}_0$ kabi yoziladi.

3- ta‘rif quyidagi ta‘rifga ekvivalent.

3′-ta‘rif. Agar $\vec{a}(t) - \vec{a}_0$ vektorning uzunligi $t \to t_0$ da nolga intilsa, ya‘ni

$$\lim_{t\to t_0} \left|\vec{a}(t) - \vec{a}_0\right| = 0$$

bo‘lsa, u holda $\vec{a}_0$ o‘zgarmas vektor $\vec{a}(t)$ *vektor-funksiyaning* t_0 *nuqtadagi limiti* deyiladi.

Esiatma. Skalar argumentli vektor-funksiya limitining geometrik ma‘nosi quyidagicha: $t \to t_0$ da $\vec{a}(t)$ vektor-funksiya $\vec{a}_0$ o‘zgarmas vektorga ham uzunlik bo‘yicha, ham yo‘nalish bo‘yicha intiladi.

4- ta‘rif. Agar $t \to t_0$ da $\vec{a}(t)$ vektor-funksiyaning limiti nolga teng, ya‘ni $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t) = 0$ bo‘lsa, $\vec{a}(t)$ vektor-funksiya t_0 *nuqtada* ($t \to t_0$ da) *cheksiz kichik vektor-funksiya* deyiladi.

1- misol. $\vec{a}(t) = t\vec{e}_1 + \sin t\vec{e}_2$ vektor-funksiya $t \to 0$ da cheksiz kichik vektor-funksiya bo‘lishini ko‘rsating.

Yechilishi. $\forall \varepsilon > 0$ berilgan bo‘lsin. Bu songa ko‘ra $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ deb olinsa, t ning $0 < |t - 0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$\left|\vec{a}(t) - \vec{0}\right| = \left|t\vec{e}_1 + \sin t\vec{e}_2\right| \le |t| + |\sin t| \le 2|t| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa $t \to 0$ da $\vec{a}(t) = t\vec{e}_1 + \sin t\vec{e}_2$ vektor-funksiyaning cheksiz kichik funksiya ekanligini bildiradi, ya‘ni

$$\lim_{t\to 0} \vec{a}(t) = \lim_{t\to 0} \left(t\vec{e}_1 + \sin t\vec{e}_2\right) = \vec{0}.$$

$\vec{a}(t)$ vektor-funksiya $\{t\}$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $t_0 \in \{t\}$ bo‘lsin.

5- ta‘rif. Agar $t \to t_0$ da $\vec{a}(t)$ vektor-funksiyaning limiti mavjud va u $\vec{a}(t_0)$ ga teng, ya‘ni

$$\lim_{t\to t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)$$

bo‘lsa, u holda $\vec{a}(t)$ *vektor-funksiya* $t = t_0$ *nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

t ning $\{t\}=(a;b)$ intervaldagi har bir qiymatida $\vec{a}(t)$ vektor-funksiya uzluksiz bo'lsa, $\vec{a}(t)$ funksiya shu *intervalda uzluksiz* deyiladi.

5- ta'rifni quyidagicha ham aytish mumkin:

5'-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ son topilib, t argumentning $t - t_0 < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\vec{a}(t)$ vektor-funksiya $t=t_0$ *nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

Agar $\vec{a}(t)$ vektor-funksiya

$$\vec{a}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$$

shaklda tasvirlangan bo'lsa, $\vec{a}(t)$ vektor-funksiyaning $t=t_0$ nuqtada uzluksizligi uning komponentalari: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ skalar funksiyalarning $t=t_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishiga teng kuchli bo'ladi.

$\vec{a}(t)$ vektor-funksiya $\{t\}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. t ni belgilab, unga Δt ($\Delta t > 0$ yoki $\Delta t<0$) orttirma beramiz ($t+\Delta t\in\{t\}$), natijada $\vec{a}(t)$ vektor-funksiya ham $\Delta\vec{a} = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)$ orttirma oladi.

6-ta'rif. Agar $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} = \frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}$ nisbatning $t\to 0$ dagi limiti, ya'ni $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ mavjud bo'lsa, bu limit $\vec{a}(t)$ vektor-funksiyaning t nuqtadagi *hosilasi* deyiladi va u $\vec{a}'(t)$ yoki $\frac{d}{dt}\vec{a}(t)$ kabi belgilanadi.

$\vec{a}(t)$ vektor-funksiya komponentalari bilan berilganda,

$$\Delta\vec{a}(t) = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t) = [x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{e}_1 + [y(t+\Delta t) - y(t)]\vec{e}_2 +$$
$$+[z(t+\Delta t) - z(t)]\vec{e}_3$$

bo'ladi.

Shu sababli

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\vec{e}_1 + \lim_{t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\vec{e}_2 +$$

$$+\lim_{t\to 0}\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\vec{e}_3$$

bo'ladi. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalarning har biri t nuqtada hosilalarga ega bo'lsa, $\vec{a}(t)$ funksiyaning t nuqtadagi hosilasi

$$\vec{a}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=x'(t)\vec{e}_1+y'(t)\vec{e}_2+z'(t)\vec{e}_3$$

kabi belgilanadi.

Vektor-funksiyaning geometrik tasviri egri chiziqdan iborat ekanligini ko'rib o'tdik. Endi argumentning t va $t+\Delta t$ qiymatlariga chiziqning M va M_1 nuqtalari mos kelsin (23.1- chizma). U holda ayirma vektor $\Delta\vec{a}=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)=\overline{MM_1}$ bo'ladi. $\overline{MM_1}$ vektorni Δt skalar songa bo'lib, $\dfrac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ vektorni hosil qilamiz. $\overline{MM_1}$ va $\dfrac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ vektorlar chiziqni kesuvchi MM_1 to'g'ri chiziq ustida yotadi.

$t\to 0$ da M_1 nuqta chiziq bo'ylab M ga intiladi. Natijada MM_1 to'g'ri chiziq M nuqta atrofida aylanib, urinma vaziyatini oladi. Shartga ko'ra, $\vec{a}(t)$ vektor-funksiya t nuqtada hosilaga ega bo'lgani uchun $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}=\vec{a}'(t)$ mavjud bo'lib, bu hosila urinma chiziq bo'ylab yo'naladi, ya'ni $\vec{a}'(t)$ urinma vektorni ifodalaydi.

7- ta'rif. Chiziqning berilgan nuqtasidagi urinma vektori bo'ylab yo'nalgan to'g'ri chiziq chiziqning shu nuqtasidagi *urinmasi* deyiladi (23.1- chizma).

8- ta'rif. Chiziqning M nuqtasidagi urinmaga perpendikular bo'lib, M nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq berilgan chiziqning M nuqtasidagi *normali* deyiladi (23.1- chizma).

$\vec{a}(t)$ vektor-funksiya R^2 da berilgan bo'lib, uning komponentalari $x(t)$ va $y(t)$ bo'lsin. U holda

$$\vec{a}=\vec{a}(t) \qquad (1)$$

tenglama

$$x=x(t);\quad y=y(t) \qquad (2)$$

tenglamalarga teng kuchli. Bu holda chiziq tenglamasi *parametrik shaklda berilgan* deb aytiladi. Xususiy holda, chiziq tenglamasi

$$y=f(x) \qquad (3)$$

ko'rinishda berilganda chiziq tenglamasi *oshkor shaklda berilgan* deyiladi.

Chiziq tenglamasi

$$F(x,y)=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda berilganda esa chiziq tenglamasi *oshkormas shaklda berilgan* deyiladi.

Chiziq tenglamasi (1)—(4) ko'rinishlarda berilganda unga o'tkazilgan urinma tenglamasi, mos ravishda,

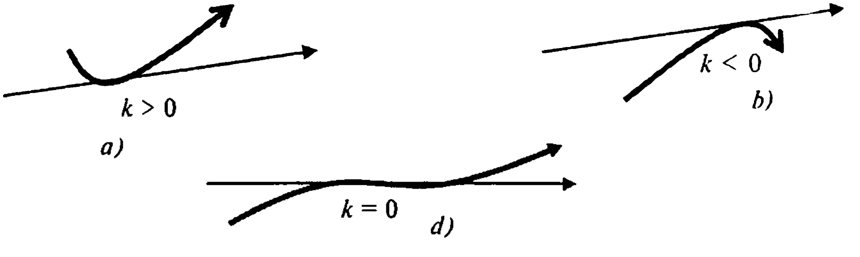
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \lambda \vec{a}_0',$$
$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'},$$
$$Y-y=f'(x)\ (X-x),$$
$$(X-x)\,F_x' + (Y-y)\,F_y' = 0$$

ko'rinishlarda bo'ladi, bunda X, Y — egri chiziq o'zgaruvchi nuqtasining koordinatalari, $\vec{a}$ — bu nuqtaning radius-vektori, x, y lar esa urinish nuqtasining koordinatalari.

Normalning tenglamalari mos ravishda

$$\left(\vec{a} - \vec{a}_0\right)\vec{a}_0' = 0,$$
$$\left(X - x\right)x' + \left(Y - y\right)y' = 0,$$
$$\left(X - x\right) + \left(Y - y\right)f'(x) = 0,$$
$$\frac{X-x}{F_x'} = \frac{Y-y}{F_y'}$$

ko'rinishda bo'ladi. Egri chiziqning tenglamasi oshkor shaklda berilganda uning M



23.2- chizma.

nuqtasidagi *egriligi*

$$k = \frac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}}$$

formula orqali topiladi. Egri chiziq tenglamasi parametrik shaklda berilganda esa uning *egriligi*

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

formula orqali topiladi, bunda

$$x' = x'(t), \quad y' = y'(t), \quad x'' = x''(t), \quad y'' = y''(t).$$

Agar $k>0$ bo'lsa, egri chiziq M nuqta atrofida urinmadan chapda joylashgan bo'ladi (23.2 *a*- chizma).

$k<0$ bo'lganda esa egri chiziq M nuqta atrofida urinmadan o'ngda joylashgan bo'ladi (23.2 *b* - chizma).

$k=0$ bo'lib, M nuqtada ishorasini o'zgartirganda, M nuqta egilish nuqtasi bo'ladi (23.2 *d*- chizma). Bu holda egilish nuqtasini topish uchun

$$x'y'' + x''y' = 0 \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

tenglamani yechish kerak, ya'ni egrilikni nolga aylantiradigan nuqtani topib, so'ngra bu nuqtadan o'tishda k ning ishorasi o'zgarishini tekshirib ko'rish kerak. Egri chiziqning egriligi k ekstremum (maksimum yoki minimum)ga ega bo'lgan nuqtalarni egri chiziqning *uchlari* deb ataladi.

Egri chiziqni tekshirish — uni aniq chizish uchun kerak bo'ladigan uning asosiy muhim xossalarini aniqlashdan iborat. Egri chiziqning muhim xossalariga quyidagilarni kiritish mumkin: egri chiziqning maxsus nuqtalari, egilish nuqtalari, asimptotalari, o'zaro kesishish nuqtalari, o'qlar bilan kesishish nuqtalari, urinmasi koordinatalar o'qlariga parallel bo'lgan nuqtalar.

Endi tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \le t \le \beta) \tag{5}$$

parametrik shaklda berilgan funksiyani qaraymiz.

Simmetrikligi. Agar $\varphi(t)$ — juft, $\psi(t)$ esa toq funksiyalar bo'lsa, berilgan (5) shakldagi funksiyaning grafigi abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Agar $\varphi(t)$ — toq, $\psi(t)$ esa juft bo'lsa, berilgan (5) shakldagi funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Agar $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalarning ikkalasi ham toq bo'lsa, (5) shakldagi funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Bu shartlar yetarli shartlar bo'lib, zaruriy shart emas.

Koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari. t ning $\psi(t)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan qiymatlari berilgan egri chiziqning abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaydi.

t ning $\varphi(t)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan qiymatlari berilgan egri chiziqning ordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaydi.

Maxsus nuqtalar. Egri chiziq parametrik tenglamasi bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ yoki $\bar{r}=\bar{r}(t)=\varphi(t)\bar{i}+\psi(t)\bar{j}$, $\alpha\leq t\leq\beta$.

Agar $t=t_0$ da $\varphi'(t_0)=\psi'(t_0)=0$ yoki $\bar{r}(t_0)=0$ bo'lsa, u holda $M_0(x_0;y_0)$ nuqta berilgan egri chiziqning *maxsus nuqtasi* deb ataladi.

Egri chiziqning maxsus nuqtalaridan boshqa hamma nuqtalarini (t ning $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ funksiyalarning hech bo'lmaganda birortasini nolga aylantirmaydigan qiymatlariga mos kelgan nuqtalarni) *oddiy* yoki *regular nuqtalar* deyiladi.

Har qanday oddiy $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tkazilgan urinma chiziq tenglamasi

$$y-y_0=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x-x_0),\quad \varphi'(t_0)\neq 0 \text{ bo'lganda}$$

yoki

$$x-x_0=\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(y-y_0),\quad \psi'(t_0)\neq 0 \text{ bo'lganda}$$

ko'rinishda bo'ladi.

M nuqta maxsus nuqta bo'lsin. Faraz qilaylik $\bar{r}^{(p)}(t_0)=0$ va $\bar{r}^{(q)}(t_0)$ vektor $\bar{r}^{(p)}(t_0)$ vektorga kollinear bo'lmasin. Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) p — toq, q — juft; 2) p — toq, q — toq; 3) p — juft, q — toq; 4) p — juft, q — juft.

Birinchi holda M nuqtaning atrofida egri chiziqning holati oddiy nuqtalarning atrofidagi holati kabi bo'ladi.

Ikkinchi holda M nuqta egri chiziqning egilish nuqtasi bo'ladi.

Uchinchi holda M nuqta birinchi turdagi qaytish nuqtasi bo'ladi.

To'rtinchi holda esa M nuqta ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi bo'ladi

Xususiy holda egri chiziqning qaytish nuqtasida

$$\varphi'(t)=0,\quad \psi'(t)=0\quad (x_t'''y_t''-y_t'''x_t''\neq 0)$$

shartlar bajariladi, ya'ni bu nuqtadagi urinmaning burchak koeffitsiyenti aniqmas bo'ladi.

Egri chiziq urinmasining koordinata o'qlariga parallel bo'lish shartlari.

a) ma'lumki, egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning abssissalar o'qiga parallel bo'lishi uchun $y'_x = 0$, ya'ni $y'_t = 0$, $x'_t \neq 0$ shart bajarilishi kerak

b) egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning ordinata o'qiga parallel bo'lishi uchun $x'_t = 0$, $y'_t \neq 0$ shart bajarilishi kerak.

Egilish nuqtasi. Funksiya grafigining egilish nuqtasini topish uchun $x'_t \neq 0$ shartda t ning $x'_t y''_{t^2} - y'_t x''_{t^2} = 0$ tenglamani qanoatlantiradigan qiymatlarini topish yetarli.

Egri chiziqning karrali nuqtalari. Har xil urinmaga ega bo'lgan egri chiziq ikkita shoxining kesishish nuqtasi egri chiziqning *karrali nuqtasi* deyiladi.

Agar $M_1(x_1;y_1)$ nuqta egri chiziqning karrali nuqtasi bo'lsa, t parametrning shunday ikkita har xil t_1 va t_2 qiymatlari mavjud bo'lib, ular uchun

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t_2), \\ y_1 = \psi(t_1) = \psi(t_2) \end{cases}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu sistemani yechib, t parametrning topilgan t_1 va t_2 qiymatlariga mos kelgan egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentlari

$$k_1 = \frac{\psi'(t_1)}{\varphi'(t_1)} \quad \text{va} \quad k_2 = \frac{\psi'(t_2)}{\varphi'(t_2)}$$

formulalar yordamida topiladi.

Egri chiziqning qaytish nuqtalari. Egri chiziqning qaytish nuqtasida $\varphi'(t) = 0$, $\psi'(t) = 0$ $(x'''_t y''_t - y'''_t x''_t \neq 0)$ shartlar bajariladi, ya'ni bu nuqtadagi urinmaning burchak koeffitsiyenti aniqmas bo'ladi.

Egri chiziqning asimptotalari.

Agar:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = a$ tengliklar bir vaqtda bajarilsa, egri chiziq $x=a$ vertikal asimptotaga ega;

2) $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = b$ tengliklar bir vaqtda bajarilsa, egri chiziq $y = b$ gorizontal asimptotaga ega bo'ladi.

Egri chiziqning og‘ma asimptotasini, ya‘ni $y=kx+b$ ni topish uchun t ning bir vaqtda $x(t_0)=\infty$, $y(t_0)=\infty$ munosabatlarni qanoatlantiradigan $t=t_0$ qiymatini topish kerak. Agar t ning shunday qiymati topilsa, u holda k va b lar

$$k=\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)},\quad b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-k\varphi(t)]$$

formulalar orqali topiladi.

Shunday qilib, tenglamasi parametrik shaklda berilgan funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishni quyidagi tartibda olib borish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

1. Funksiyaning oddiy (regular) nuqtalari va maxsus nuqtalarini topish.
2. Funksiyaning karrali nuqtalarini aniqlash.
3. Funksiyaning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topish.
4. Egri chiziqning koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan urinmalarini topish.
5. Egri chiziqning egilish nuqtasini aniqlash.
6. Egri chiziqning asimptotalarini topish.
7. Egri chiziqning o‘qlarga nisbatan simmetrikligini aniqlash.

1-misol. Ushbu $x=3t-t^3$, $y=2t^2-t^4$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. 1. Berilgan funksiyalar $-\infty<t<+\infty$ da aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi.

$t=\pm1$ da $x_t'=3-3t^2$ va $y_t'=4t-4t^3$ hosilalar bir vaqtda nolga aylanadi, ya‘ni $\overline{r}'(\pm1)=0$. $M_1(2;1)$ va $M_2(-2;1)$ nuqtalar egri chiziqning maxsus nuqtalari bo‘ladi. $\overline{r}''(\pm1)\neq 0$, $\overline{r}'''(\pm1)\neq 0$ bo‘lganligi uchun mos ravishda $p=2$, $q=3$. Demak, $M_1(2;1)$, $M_2(-2;1)$ nuqtalar, maxsus nuqtalar turlarining 3) - bandiga asosan, birinchi tur qaytish nuqtalari bo‘ladi.

2. Egri chiziqning karrali nuqtalarini topish uchun t ning har xil t_1 va t_2 qiymatlarini olib,

$$\begin{cases}\varphi(t_1)=\varphi(t_2),\\ \psi(t_1)=\psi(t_2)\end{cases}$$

munosabatni e‘tiborga olgan holda,

$$\begin{cases}3t_1-t_1^3=3t_2-t_2^3,\\ 2t_1^2-t_1^4=2t_2^2-t_2^4\end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Shartga ko'ra, t_1 va t_2 lar har xil bo'lganligi uchun, keyingi sistemaning ikkinchisidan $\left(t_1^2-t_2^2\right)\left(2-t_1^2-t_2^2\right)=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan $t_1^2-t_2^2=0$, $2=t_1^2+t_2^2$, yoki $t_1=$ $=-t_2$ bo'ladi. Bu qiymatni tenglamalar sistemasining birinchisiga qo'yib, $t_1(3-t_1^2)=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bunda, agar $t_1=0$ bo'lsa, $t_2=0$ bo'ladi, buning bo'lishi mumkin emas, faqat $3-t_1^2=0$ hol o'rinli bo'ladi. Keyingi tenglamadan $t_1=\pm\sqrt{3}$, $t_2=\mp\sqrt{3}$ ildizlarga ega bo'lamiz. t ning bu qiymatlariga egri chiziqning $M_3(0;-3)$ nuqtasi mos keladi, lekin bu nuqtadan o'tgan urinmaning burchak koeffitsiyentlari har xil bo'ladi:

$$k_1=y'_x{}_{t_1=\sqrt{3}}=\frac{4t}{3}{}_{t_1=\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}},\quad k_2=y'_x\Big|_{t_1=-\sqrt{3}}=-\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Shunday qilib, egri chiziq $M_3(0;-3)$ nuqtadan ikki marta o'tadi.

3. t ning $2t^2-t^4=0$, $3t-t^3=0$ tenglamalarni qanoatlantiradigan qiymatlari, mos ravishda, egri chiziqning abssissa va ordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari koordinatalarini topish imkonini beradi. Bu tenglamallarini yechib, egri chiziq koordinata o'qlarini $M_0(0;0)$, $M_3(0;-3)$, $M_4(\sqrt{2};0)$, $M_5(-\sqrt{2};0)$ nuqtalarda kesib o'tishini aniqlaymiz.

4. $t=0$ da $y'_x=0$, ya'ni $y'_t(0)=0$, $x'_t(0)\neq 0$ bo'lganligi uchun $M_0(0;0)$ nuqtadan o'tgan urinma abssissalar o'qi bilan ustma-ust tushadi.

$-\infty<t<-1$, $-1<t<0$ da $y'_x=\frac{4t}{3}<0$ bo'lganligi uchun berilgan funksiya kamayuvchi, $0<t<1$, $1<t<+\infty$ da $y'_x=\frac{4t}{3}>0$ bo'lganligi uchun berilgan funksiya o'suvchi. Demak, $t=0$ da, ya'ni $M_0(0;0$ nuqtada berilgan funksiya minimum $y_{\min}(0)=0$ qiymatga ega bo'ladi. $t=\pm1$ bo'lganda $x=\pm2$ bo'ladi, ya'ni $M_1(2;1)$ va $M_2(-2;1)$ nuqtalarda berilgan funksiya maksimum $y_{\max}(\pm2)=4$ qiymatga ega bo'ladi.

5. y'_x fnuksiyadan yana bir marta x bo'yicha hosila olamiz:

$$y''_{x^2}=\frac{y''_{t^2}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^3}=\frac{4}{9(1-t^2)}.$$

t ning $-t<t<1$ qiyatlarida $y''_{x^2}>0$, shuning uchun egri chiziqning qavariqligi ordinatalar o'qining manfiy tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi. t ning $|t|>1$ qiymatlarida $y''_{x^2}<0$, bo'ladi va demak, berilgan egri chiziqning qavariqligi koordinatalar boshiga qarab yo'nalgan bo'ladi. Shunday qilib, $M_1(2;1)$ va $M_2(-2;1)$ nuqtalar egri chiziqning egilish nuqtalari bo'ladi.

6. $t\to-\infty$ da $x\to+\infty$, $y\to-\infty$ va $t\to+\infty$ da $x\to-\infty$, $y\to-\infty$ bo'ladi. $t\to\infty$ da $\frac{y}{x}=\frac{2t^2-t^4}{3t-t^3}\to\infty$ bo'lganligi uchun egri chiziq asimptotaga ega emas.

$$t\to\pm\infty \text{ da } x=3t-t^3\sim -t^3\to\mp\infty,\quad y\sim -t^4\to-\infty.$$

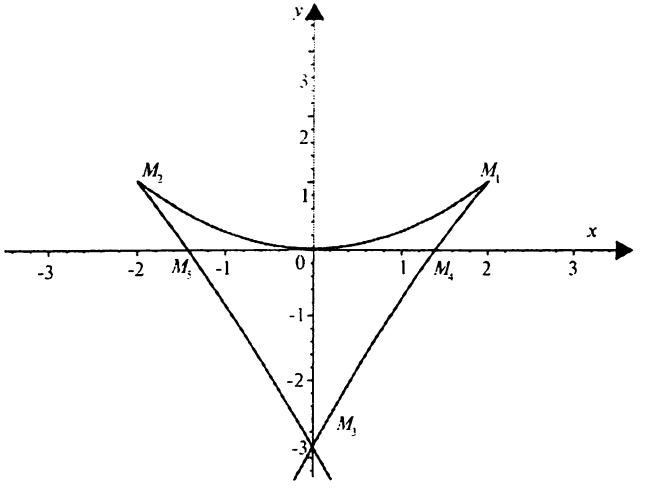
Bunda $x\to\pm\infty$ da $y\sim -x^{4/3}$ bo'ladi. Shunday qilib, egri chiziqning holati $-x^{4/3}$ chiziqning holati kabi bo'ladi. $t\to 0$ da $x=3t-t^3\sim 3t\to 0$, $y\sim 2t^2\to 0$ $y\sim\frac{2}{9}x^2\to 0$. Demak, $M_0(0;0)$ nuqtaning atrofida egri chiziqning holati $y=\frac{2}{9}x^2$ chiziqning holati kabi bo'ladi.

7. $x(t)$ — toq, $y(t)$ — juft funksiya bo'lganligi uchun egri chiziq ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

Berilgan chiziqning grafigi 23.3 - chizmada tasvirlangan.

2- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$x=t^4,\quad y=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3.$$



23.3- rasm.

Yechilishi. 1. Berilgan funksiyalar $-\infty < t < +\infty$ da aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi. t ning bu qiymatlarida $-\infty < x < 0$, $-\infty < y < +\infty$. $t=0$ da $x'_t = 4t^3$, $y'_t = t^4 - t^2$ funksiya bir vaqtda nolga aylanganligi uchun $M_0(0;0)$ nuqta egri chiziqning maxsus nuqtasi bo'ladi. $\bar{r}'''(0) = \{0;-2\} \neq \bar{0}$, $\bar{r}^{IV}(0) = \{24;0\} \neq \bar{0}$ bo'ganligi uchun $p=3$, $q=4$ bo'ladi. Demak, maxsus nuqtalar turlarining birinchi bandiga asosan, egri chiziqning $M_0(0;0)$ nuqta atrofidagi holati uning oddiy (regular) nuqta atrofidagi holati kabi bo'ladi.

2. Egri chiziqning kesishish (karrali) nuqtalarida, ya'ni t ning har xil t_1 va t_2 qiymatlariga mos kelgan nuqtaning abssissasi x va ordinatasi y lar bir-biriga teng bo'lganligi uchun

$$\begin{cases} t_1^4 = t_2^4, \\ \frac{1}{5}t_1^5 - \frac{1}{3}t_1^3 = \frac{1}{5}t_2^5 - \frac{1}{3}t_2^3 \end{cases}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. t_1 va t_1 lar har xil bo'lganligi uchun sistemaning birinchi tenglamasidan $t_2=-t_2$ ekanligi kelib chiqadi. Bu topilgan qiymatni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib,

$$t_1^3(3t_1^3 - 5) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan $t_1=0$ bo'lsa, $t_2=0$ bo'ladi, bunday bo'lishi mumkin emas. Shartga ko'ra, t_1 va t_2 lar har xil edi. Shuning uchun faqat $3t_1^2 - 5 = 0$ hol o'rinli bo'ladi. Bundan $t_1 = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$, $t_2 = \mp\sqrt{\frac{5}{3}}$ qiymatlarni topamiz. t ning bu qiymatlariga egri chiziqning bitta $M_1\left(\frac{25}{9};0\right)$ nuqtasi mos keladi, lekin bu nuqtadagi urinmaning burchak koeffitsiyentlari har xil bo'ladi:

$$k_1 = y'_x \Big|_{t_1=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}} = \left(\frac{t^2-1}{4t}\right)\Big|_{t_1=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{15}},$$

$$k_2 = y'_x \Big|_{t_2=\mp\sqrt{\frac{5}{3}}} = \left(\frac{t^2? 1}{4t}\right)\Big|_{t_2=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}} = \mp\frac{1}{2\sqrt{15}}.$$

Demak, egri chiziq $M_1\left(\frac{25}{9};0\right)$ nuqtadan ikki marta o'tar ekan, ya'ni $M_1\left(\frac{25}{9};0\right)$ nuqta egri chiziqning karrali nuqtasi bo'lar ekan.

3. t ning $\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^3 = 0$ tenglamalarni qanoatlantiradigan qiymatlari berilgan egri chiziqning abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtasini aniqlaydi, $t^4=0$ tenglamani qanoatlantiradigan qiymatlari esa uning ordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtasini aniqlaydi. Bu tenglamalarni yechib, egri chiziqning koordinata o'qlarini $M_0(0;0)$ va $M_1\left(\frac{25}{9};0\right)$ nuqtalarda kesib o'tishiga ishonch hosil qilamiz.

4. $t=\pm 1$ da $y'_x = \frac{t^2-1}{4t^3}$, ya'ni $y'_t(\pm 1)=0$, $x_t(\pm 1)\neq 0$ bo'lgani uchun $M_2\left(1;-\frac{2}{15}\right)$ va $M_3\left(1;\frac{2}{15}\right)$ nuqtalardan o'tgan urinmalar abssissalar o'qiga parallel bo'ladi. $t=0$ da esa $M_0(0;0)$ nuqtadan o'tgan urinma ordinatalar o'qi bilan ustma-ust tushadi.

$t\in[-1;0)$ da $y'_x \geq 0$ bo'lganda uchun berilgan funksiya o'suvchi, $t\in[-\infty;-1)$ da $y'_x(x)\leq 0$ bo'lganligi uchun berilgan funksiya kamayuvchi, $t=-1$ da $x=1$ bo'ladi, $y_{\max}(1) = \frac{2}{25}$; $t\in(0;1]$ da $y'_x \leq 0$ bo'lganligi uchun berilgan funksiya kamayuvchi, $t\in[1;+\infty)$ da $y'_x \geq 0$ bo'lganligi uchun berilgan funksiya o'suvchi, $t=1$ da $x=-1$ bo'ladi, $y_{\min}(-1) = -\frac{2}{25}$.

5. $y'_x = \frac{t^2-1}{4t^3}$ dan yana x bo'yicha hosila olamiz:

$$y''_{x^2} = \frac{x'_t\cdot y''_{t^2} - x''_{t^2}\cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{t^2+1}{16t^5}, \quad \text{shuningdek,} \quad x''_{y^2} = -\frac{4(t^2+1)}{t^2(t^2-1)^3}.$$

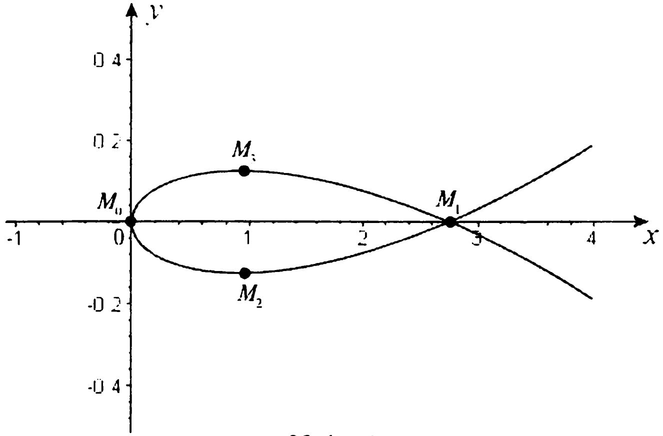
Bundan egri chiziqning egilish nuqtasiga ega emasligini ko'rish qiyin emas. Agar $t>0$ bo'lsa, $y''_{x^2} > 0$, demak, [0;3] da egri chiziqning qavariqligi ordinatalar o'qining manfiy tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi, $t<0$ bo'lganda esa $y''_{x^2} < 0$ bo'lib, egri chiziqning qavariqligi ordinatalar o'qining musbat tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi. $t=0$ da egri chiziqning qavariqligi yo'nalishi o'zgaradi, lekin koordinatalar boshida egilish nuqtasi yo'q. $t=0$ ning atrofida $x''_{y^2} = -\frac{4(t^2+1)}{t^2(t^2-1)^3} > 0$ bo'lgani uchun egri chiziqning qavariqligi abssissalar o'qining manfiy tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi.

6. $t\to\infty$ da $x\to\infty$ va $y\to\infty$, ya'ni $t\to\infty$ da egri chiziqning nuqtalari cheksizlikka intiladi. $t\to\infty$ da $\frac{y}{x} = \frac{3t^2-5}{t} \to \infty$ bo'lganligi uchun egri

chiziq faqat ordinatalar o'qiga parallel bo'lgan asimptotaga ega bo'lishi mumkin, lekin $t \to \infty$ da $x \to \infty$, shuning uchun egri chiziq asimptotaga ega emas. $t \to \infty$ da $x = t^4 \to +\infty$, $y \sim \frac{1}{5}t^5 \to +\infty$, bundan $x \to \infty$ da $y \sim \frac{1}{5}t^{\frac{5}{4}}$ bo'ladi. Shunday qilib, cheksizlikda egri chiziqning holati $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{4}}$ chiziqning holati kabi bo'ladi. $t \to 0$ da $x = t^4 \to 0$, $y \sim -\frac{1}{3}t^3 \to 0$, $y \sim -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} \to 0$. Koordinatalar boshida egri chiziqning holati $(3y)^3 = x$ chiziqning holati kabi bo'ladi.

7. $x(t)$ — juft, $y(t)$ — toq bo'lganligi uchun egri chiziq abssissalar o'qiga simmetrik joylashgan bo'ladi. t ning ishorasi o'zgarganda nuqta abssissasining ishorasi o'zgarmaydi, faqat nuqta ordinatasining ishorasi o'zgaradi. Shuning uchun egri chiziqni t ning musbat qiymatlari uchun chizish yetarli.

Berilgan egri chiziqning grafigi 23.4- chizmada tasvirlangan.



23.4- chizma.

3- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$x = 3t - e^{-3t}, \quad y = 2t + e^{-2t}$$

Yechilishi. 1. Berilgan funksiyalar $-\infty < t < +\infty$ da aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi. $t = 0$ da $x'_t = 3 - 3e^{-3t}$ va $y'_t = 2 - 2e^{-2t}$ funksiyalar bir vaqtda nolga aylanadi. $M_1(1;1)$ nuqta egri chiziqning maxsus nuqtasi bo'ladi.

$\vec{r}''(0)=\{9;4\}\neq\bar{0}$, $\vec{r}'''(0)=\{-27;-8\}\neq\bar{0}$ bo'lganligi uchun $p=2$, $q=3$ bo'ladi. Demak, $M_1(1;1)$ nuqta egri chiziq uchun birinchi tur qaytish nuqtasi bo'alidi.

2. Egri chiziqning karrali nuqtalari yo'q.

3. Egri chiziq koordinata o'qlari bilan kesishmaydi.

4. $y'_x=\frac{2(1+e^{-t})}{3(1+e^{-t}+e^{-2t})}$, $\forall t\in(-\infty,+\infty)$ da $y'_x\neq 0$, $y'_x\neq\infty$ emas. Demak, egri chiziq koordinata o'qlariga parallel urinmalarga ega emas. $\forall t\in(-\infty,+\infty)$ uchun $y'_x>0$, berilgan funksiya o'suvchi. $x=1$ da $y_{\max}(1)=1$ ga ega.

5. y'_x funksiyadan x bo'yicha hosilasini topamiz:

$y''_{x^2}=\frac{2e^{-2t}(2+e^{-t})}{9(1-e^{-t})(1+e^{-t}+e^{-2t})^3}$. $t>0$ da $y''_{x^2}>0$, egri chiziqning qavariqliq yo'nalishi pastga, ya'ni ordinatalar o'qining manfiy tomoniga, $t<0$ da esa $y''_{x^2}<0$, qavariqlik ordinatalar o'qining musbat tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi.

6. Egri chiziq $y=\frac{2}{3}x$ asimptotaga ega. $t\to+\infty$ da $x=3t\left(1+\frac{1}{3+e^{3t}}\right)\sim 3t$, $t\sim\frac{x}{3}$, $t\to\infty$ da $y=2t\left(1+\frac{1}{2+e^{2t}}\right)\sim 2t$, $y\sim\frac{2}{3}x$. Demak, cheksizlikda egri chiziqning holati $y=\frac{2}{3}x$ chiziqning holati kabi bo'ladi.

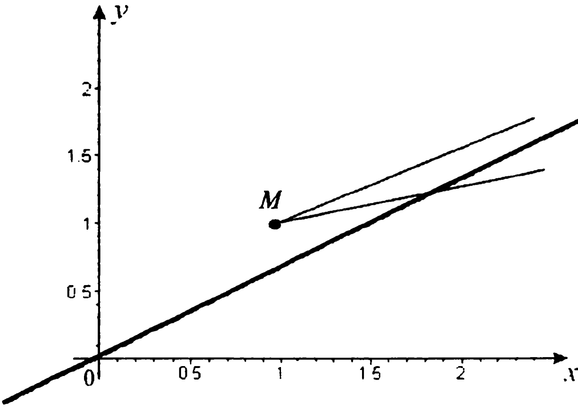
7. Egri chiziq koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik emas. Berilgan egri chiziqning grafigi 23.5- chizmada tasvirlangan.

4- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$x=\frac{t^3}{1+t^4},\quad y=\frac{t^5}{1+t^4}.$$

Yechilishi. 1. Berilgan funksiyalar t ning $-\infty<t<+\infty$ qiymatlarida aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi. Berilgan funksiyalarning hosilalarini topamiz:

$$x'_t=-\frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2},\quad y'_t=\frac{t^4(5+t^4)}{(1+t^4)^2}.$$



23.5- chizma.

$t=0$ da $x_t'=0$, $y_t'=0$ bo'lganligi uchun, $M_0(0;0)$ nuqta egri chiziqning maxsus nuqtasi bo'ladi.

$$\bar{r}'''(0)=\{6;0\}\neq\bar{0},\quad \bar{r}^{V}(0)=\{0;120\}\neq\bar{0}$$

bo'lganligi uchun $p=3$, $q=5$. Demak, $M_0(0;0)$ nuqta berilgan egri chiziqning egilish nuqtasi bo'lar ekan.

2. Berilgan egri chiziqning karrali nuqtasi yo'q.

3. $M_0(0;0)$ nuqta egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtasi bo'ladi.

4. $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{t^2(5+t^4)}{3-t^4}$ funksiya $t=0$ da $y_x'=0$ bo'ladi. $M_0(0;0)$ nuqtadan o'tgan urinma abssissalar o'qi bilan ustma-ust tushadi.

$t=\pm\sqrt[4]{3}$ da $M_1\left(3^{\frac{4}{3}};3^{\frac{5}{3}}\right)$ va $M_2\left(-3^{\frac{4}{3}};-3^{\frac{5}{3}}\right)$ nuqtalardan o'tgan urinmalar ordinatalar o'qiga parallel bo'ladi. $-\sqrt[4]{3}<t<\sqrt[4]{3}$ va $y_x'=\frac{t^2(5+t^4)}{3-t^4}\geq 0$ bo'lgani uchun funksiya o'suvchi, $-\infty<t<\sqrt[4]{3}$ va $\sqrt[4]{3}<t<+\infty$ da esa $y'_x<0$ bo'lgani uchun bu holda berilgan funksiya kamayuvchi bo'ladi.

5. Ma'lumki, $M_0(0;0)$ nuqta egri chiziqning egilish nuqtasi ekanligini birinchi bandda aniqladik. $t>0$ da, $y''_{x^2}=\frac{30t^5+58t^9-22t^{13}-2t^{17}}{(1+t^4)(3t^2-t^6)}>0$

bo'lganligi uchun egri chiziq qavariqligi yo'nalishi pastga (Ox o'qining musbat tomoniga) qaragan bo'ladi, $t<0$ da esa $y''_{x^2}<0$ bo'lganligi uchun qavariqlik yo'nalishi yuqoriga (Ox o'qining manfiy tomoniga) qaragan bo'ladi.

6. $t\to\infty$ da $\frac{y}{x}=\frac{t^5}{t^3}=t^2\to\infty$. Egri chiziq asimptotaga ega emas. $t\to\pm\infty$ da $y\to\pm\infty$. $t\to\infty$ da $x(t)\sim t^{3}$, $t\sim x^{\frac{1}{3}}\to 0$ $t\to 0$ da. $y\sim t^5$, bundan $y\sim x^{\frac{5}{3}}$ bo'ladi. Egri chiziqning $M_0(0;0)$ nuqta atrofidagi holati $y=x^{\frac{5}{3}}$ funksiya holati kabi bo'ladi.

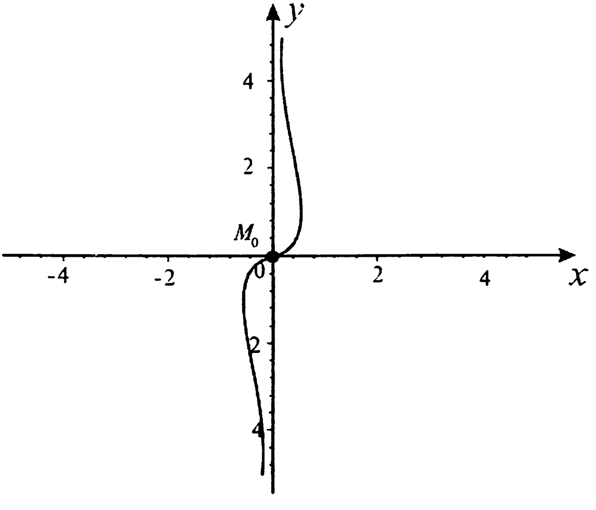
7. $x=\frac{t^3}{1+t^4}$, $y=\frac{t^5}{1+t^4}$ funksiyalarning ikkalasi ham toq funksiyalar bo'lganligi uchun berilgan egri chiziqning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Berilgan egri chiziqning grafigi 23.6- chizmada tasvirlangan.

5- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$x=\frac{t}{t-2},\quad y=\frac{t}{t+2}.$$

Yechilishi 1. Berilgan funksiyalar t ning $t=\pm 2$ dan boshqa hamma qiymatlarida aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi. Berilgan



23.6- chizma.

funksiyalarning x'_t va y'_t xosilalarini topamiz:

$$x'_t = -\frac{2}{(t-2)^2}, \quad y'_t = \frac{2}{(t+2)^2};$$

$x'_t \neq 0$, $y'_t \neq 0$ bo'lgani uchun egri chiziq maxsus nuqtaga ega emas.

2. Karrali nuqtalar yo'q.

3. $t=0$ da $x(0)=0$, $y(0)=0$ bo'lganligi uchun egri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi.

4. y'_x ni hisoblaymiz: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{(t-2)^2}{(t+2)^2}$. $y'_x \neq 0$, demak egri chiziq koordinata o'qlariga parallel bo'lgan urinmalarga ega emas. t ning $t=-2$ dan tashqari boshqa hamma qiymatlarida $y'_x = -\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2 \leq 0$ bo'lganligi uchun berilgan funksiya kamayuvchi bo'ladi.

5. Egri chiziq egilish nuqtasiga ega emas. y''_{x^2} hosilani hisoblaymiz:

$$y''_{x^2} = 4\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^3.$$

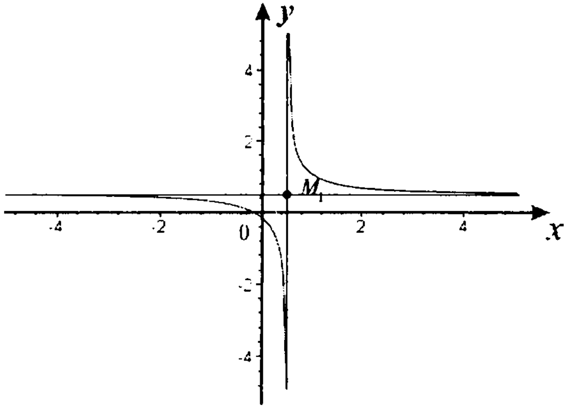
t ning $|t| > 2$qiymatlarida $y''_{x^2} > 0$ bo'lganligi uchun egri chiziq qavariqligini yo'nalishi pastga, ya'ni koordinatalar tekisligining uchinchi choragiga qarab yo'nalgan bo'ladi. t ning $|t| < 2$ qiymatlarida $y''_{x^2} < 0$ bo'lganligi uchun qavariqligining yo'nalishi yuqoriga, ya'ni koordinitalar tekisligining birinchi choragiga qarab yo'nalgan bo'ladi.

6. $t \to -2 \pm 0$ da $x \to \pm\infty$, $y \to \frac{1}{2}$; $t \to -2 \pm 0$ da $x \to \frac{1}{2}$, $y \to \mp\infty$.

Demak, egri chiziq uchun $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ to'g'ri chiziqlar mos ravishda vertikal va gorizontal assimptotalari bo'ladi. Berilgan funksiyalarni bir vaqtda cheksizlikka aylantiradigan t ning shunday qiymatlari mavjud bo'lmaganligi uchun egri chiziq og'ma asimptotaga ega emas.

7. Berilgan egri chiziqning grafigi uning asimptotalar kesishish nuqtasi $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

Yuqoridagi bandlardagi mulohazalarga asosan berilgan



23.7- chizma.

funksiyaning grafigi 23.7- chizmada tasvirlangan.

2. Tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida berilgan funksiyaning grafigini chizish. Qutb koordinatalar sistemasida funksiyani tekshirish va uning grafigini chizish sxemasi II bob, 16- § da berilgan edi. Biz bu yerda funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishda oldingi tekshirishlarga qo'shimcha ravishda differensial hisob kursining tushunchalaridan foydalanamiz.

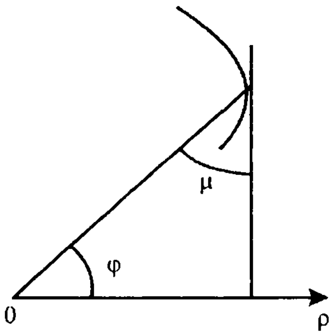
Ushbu $\rho=f(\varphi)$, $-\infty<\varphi<+\infty$ funksiyani qaraymiz.

Agar $\rho=f(\varphi)$ funksiya chegaralangan, ya'ni $\rho\leq a$ bo'lsa, u holda egri chiziq aylananing ichida joylashadi.

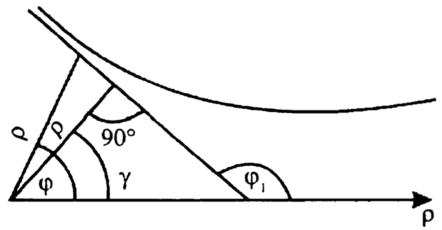
Agar $\rho=f(-\varphi)=f(\varphi)$ bo'lsa, egri chiziq qutb o'qiga nisbatan simmetrik; agar $f(\pi-\varphi)=f(\varphi)$ bo'lsa, egri chiziq qutb o'qiga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik va nihoyat, agar $f(\pi+\varphi)=f(\varphi)$ bo'lsa, egri chiziq qutbga nisbatan simmetrik bo'ladi.

$\rho=f(\varphi)$ funksiyani ekstremumga tekshirish odatdagi tartibda olib boriladi: $f'(\varphi)$ hosila topilib, u nolga tenglashtiriladi, ya'ni $f'(\varphi)=0$ tenglamaning ildizlari(funksiyaning kritik nuqtalari) topiladi. Agar $\varphi=\varphi_1$ kritik nuqtaning chap tomonida $f'(\varphi)>0$ bo'lib, o'ng tomonida esa $f'(\varphi)<0$ bo'lsa, $\rho_{max}=f(\varphi_1)$ bo'ladi. Agar $\varphi=\varphi_1$ kritik nuqtaning chap tomonida $f'(\varphi)<0$, o'ng tomonida esa $f'(\varphi)>0$ bo'lsa, $\rho_{min}=f(\varphi_1)$ bo'ladi.

Egri chiziqning ρ_{max} va ρ_{min} nuqtalariga o'tkazilgan urinma urinish nuqtasining radius-vektoriga perpendikular bo'ladi. $\rho=f(\varphi)$



23.8- chizma.



23.9- chizma.

egri chiziqda urinmasi qutb o'qiga perpendikulyar bo'lgan nuqtalar (23.8- chizma)

$$tg\mu=\frac{\rho}{\rho'} \qquad (1)$$

formula bo'yicha topiladi, bunda $\mu=k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$.

μ ning bu qiymatini (1) ga qo'yib, hosil bo'lgan tenglamani φ ga nisbatan yechsak, φ ning topilgan qiymati izlanayotgan nuqtani aniqlaydi.

Egri chiziqning egriligi qutb koordinatalar sistemasida

$$k=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2)$$

formula orqali topiladi. Agar egri chiziq egilish nuqtasiga ega bo'lsa, φ ning unga mos kelgan qiymati (2) ga asosan, $\rho^2+2\rho'^2-\rho'\rho''=0$ tenglamaning toq karrali ildizlaridan iborat bo'ladi.

$\rho=f(\varphi)$ egri chiziqning qutb koordinatalar sistemasidagi asimptotasining tenglamasi

$$\rho=\frac{P}{\cos(\varphi-\gamma)} \tag{3}$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda γ — qutbdan asimptotaga o'tkazilgan perpendikular bilan qutb o'qi orasidagi burchak, P— perpendikular uzunligi (23.9- chizma). γ ni topish uchun $\rho=f(\varphi)$ tenglamada φ ning p ni ∞ ga aylantiradigan $\varphi=\varphi_1$ qiymatini topish kerak. Agar φ ning shunday qiymati topilsa, egri chiziq ko'p shoxobchalarga ega bo'ladi. P quyidagi

$$P=\lim_{\varphi\to\varphi_1}\frac{\rho^2}{|\rho'|} \tag{4}$$

formula orqali topiladi. Agar bu limit mavjud bo'lsa, egri chiziqning asimptotasi cheksiz ko'p shoxobchalarga ega bo'ladi. Agar bu limit mavjud bo'lmasa, egri chiziqning cheksiz ko'p shoxobchalari asimptotaga ega bo'lmaydi (yoki egri chiziqning shoxobchalari parabolik tipda bo'ladi).

Agar $P>0$ bo'lsa, egri chiziqning asimptotasi radius-vektoridan o'ngda joylashadi, $P<0$ bo'lganda esa chapda joylashgan bo'ladi.

1-misol. Usi.bu funksiyaning grafigini chizing:

$$\rho=\frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Yechilishi. Ravshanki, berilgan egri chiziq cheksiz ko'p shoxobchalarga ega bo'lib, qutb o'qiga simmetrik va qutb boshiga perpendikular joylashgan. Berilgan funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri $\omega=2\pi$.

Bu funksiyani ekstremumga tekshiramiz:

$\rho'=\dfrac{2a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\rho'=0$, bundan $\sin\varphi=0$. $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$ nuqtalar berilgan funksiya uchun kritik nuqtalar bo'ladi. Bunda $\rho'(0-0)<0$, $\rho'(0+0)>0$ bo'lgani uchun $\varphi_1=0$ nuqtada funksiya minimumga ega bo'ladi, ya'ni $\rho_{min}(0)=a$. $\rho'(\pi-0)<0$, $\rho'(\pi+0)>0$ bo'lgani uchun $\varphi_2=\pi$ nuqta ham funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi, ya'ni

$\rho_{min}(\pi)=a$. Egri chiziqning urinmasi qutb o'qiga parallel bo'lgan nuqtalarini topamiz: (1) formulada $\mu=k\pi-\varphi$ deb olib, $\operatorname{tg}(k\pi-\varphi)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi$ ga ega bo'lamiz, bundan $\operatorname{tg}^2\varphi=-\frac{1}{2}$ ni hosil qilamiz. Bu tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas.

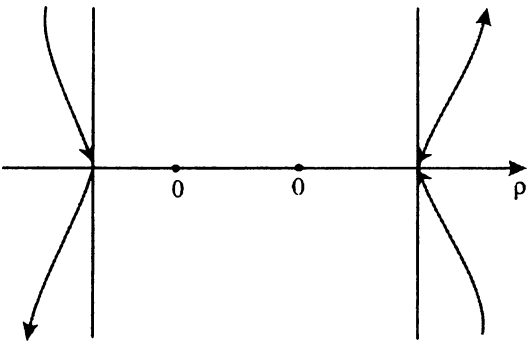
Egri chiziqning urinmasi qutb o'qiga perpendikular bo'lgan nuqtalarini topamiz: (1) formulada $\mu=k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$ deb olsak, $\operatorname{tg}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi$, bundan $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$. Demak, egri chiziqning $(a;0)$ va $(a;\pi)$ nuqtalarida urinma qutb o'qiga perpendikular bo'ladi.

Egri chiziqning egilish nuqtalarini topish uchun $\rho^2+2\rho'^2-\rho'\cdot\rho''=0$ tenglamani yechib, $\cos\varphi=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ ga ega bo'lamiz. $[0;2\pi]$ kesmada berilgan egri chiziq to'rtta egilish nuqtasiga ega bo'ladi.

$\varphi=\frac{\pi}{2}$ da $\rho=\infty$ bo'ladi, ya'ni egri chiziq asimptotaga ega bo'lishi mumkin, lekin

$$\rho=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\frac{a}{\sin 2\varphi}=\infty$$

bo'lgani uchun egri chiziq asimptotaga ega emas.



23.10- chizma.

Berilgan funksiyaning grafigi 23.10- chizmada tasvirlangan.

2- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$\varphi=\arccos\frac{\rho-1}{\rho^2}.$$

Yechilishi. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi: $\left|\frac{\rho-1}{\rho^2}\right|\le 1$ bo'ladi, bundan $-\rho^2\le\rho-1\le\rho^2$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le\rho+\infty$. $\lim\limits_{\rho\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+0}\varphi(\rho)=$

$=\lim\limits_{\rho\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+0}\arccos\frac{\rho-1}{\rho^2}=\pi.$

$$\lim_{\rho\to+\infty}\varphi(\rho)=\lim_{\rho\to+\infty}\arccos\frac{\rho-1}{\rho^2}=\frac{\pi}{2};\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Berilgan funksiyani ekstremumga tekshiramiz:

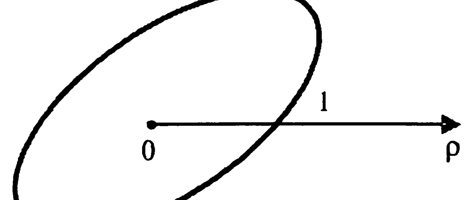
$\frac{d\varphi}{d\rho}=\frac{\rho-2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\right)^2}}$, bunda $\rho=2$ bo'lganda $\frac{d\varphi}{d\rho}=0$ bo'ladi, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<\rho<2$

oraliqda $\frac{d\varphi}{d\rho}<0$, $\rho>2$ bo'lganda esa $\frac{d\varphi}{d\rho}>0$ bo'ladi.

Demak, $\rho=2$ da funksiya minimumga ega $\left(\varphi=\arccos\frac{1}{4}\right)$. $\rho=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ nuqtada hosila mavjud emas, bunda funksiya π qiymatga (maksimum qiymat) ega bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi 23.11-chizmada tasvirlangan.

Quyidagi spirallarning grafigini chizing

1. Arximed spirali $\rho-a\varphi$, $a>0$. $\rho=a\varphi$, $a>0$ qutb atrofida tekis aylanayotgan to'g'ri chiziq bo'ylab ilgarilama tekis harakat qiluvchi nuqtaning trayektoriyasi *Arximed spirali* deb ataladi. Aylanayotgan to'g'ri chiziqning dastlabki vaziyatini qutb o'qi deb qabul qilib,



23.11- chizma.

o‘zgarmas tezlanishni ω, o‘zgarmas tezlikni v bilan belgilasak, shartga ko‘ra $v=a\omega$ bo‘ladi, bunda a — o‘zgarmas, qutb-radius φ burchakka burilsa, M nuqta $OM=a$ masofani bosadi. $OM=\rho$ bo‘lgani uchun $\rho=a\varphi$.

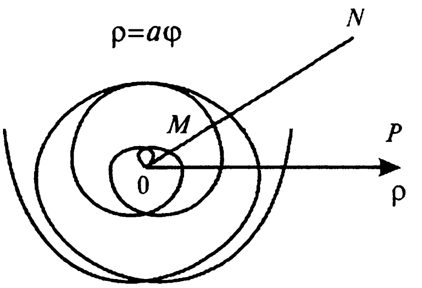
Arximed spiralining grafigini avvalo $a=1$ bo‘lgan holda chizamiz: $\rho=\varphi$ chiziqni $\varphi>0$ bo‘lganda chizish uchun quyidagi tayanch nuqtalar yordamida jadval tuzamiz:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

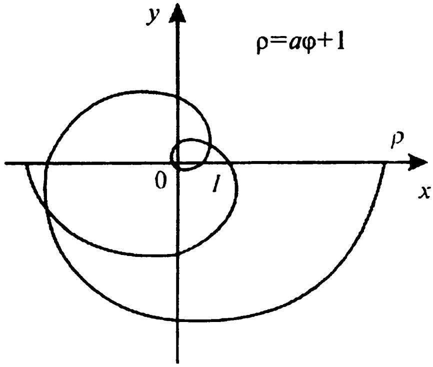
Bu jadvalga ko‘ra tekislikdagi $M(\rho;\varphi)$ nuqtalarning o‘rnini topib, ularni birlashtirish natijasida $\rho=\varphi$ funksiyaning grafigini hosil qilamiz (23.12- chizma).

φ ni $-\varphi$ ga almashtirganda ρ endi $-\rho$ ga almashadi, ya‘ni $-\infty<\varphi<0$ bo‘lganda, $-\infty<\rho<0$ bo‘ladi. Demak, Arximed spirali ikki shoxobchadan iborat bo‘lib, bular qutbdan o‘tuvchi va qutb o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi, ya‘ni ularning biri φ ning musbat qiymatlariga mos kelib, soat strelkasi yo‘nalishiga teskari ravishda tarqaladi; ikkinchisi esa φ ning manfiy qiymatlariga mos kelib, soat strelkasi yo‘nalishi bo‘yicha tarqaladi.

Qutb koordinatalar sistemasidan Dekart koordinatalar sistemasiga o‘tganda, Arximed spirali tenglamasining Dekart koordinatalar sistemasidagi ko‘rinishi



23.12- chizma.



23.13- chizma.

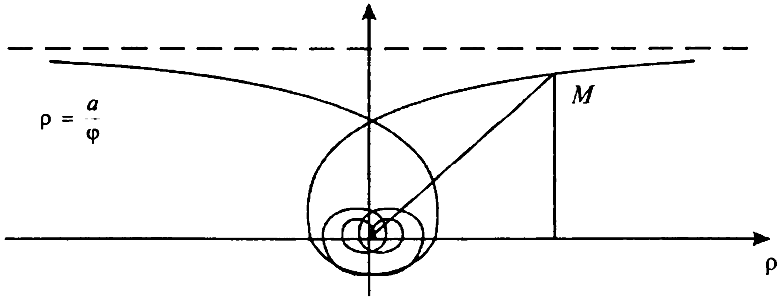
$$\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

shakldа bo'ladi. Bu tenglama, ravshanki, transsendent tenglamadan iborat. Arximed spirali cheksiz ko'p shoxobchalarga ega. Uning ketma-ket kelgan ikkita shoxobchasi orasidagi masofa l quyidagi $l=a(\varphi+2\pi)-a\varphi=2a\varphi$ formula orqali ifodalanadi va o'zgarmas bo'ladi. Arximed spiralining egriligi qutb koordinatalar sistemasida (2) formula orqali topiladi. Arximed spirali uchun φ ning hamma qiymatlarida $k>0$ bo'ladi. Shuning uchun uning grafigi egilish nuqtalariga ega bo'lmaydi.

Esiatma. $\rho=a\varphi+l$ tenglama ham Arximed spiralini ifodalaydi. Haqiqatan ham, qutb o'qini $\alpha=-\frac{l}{a}$ burchakka bursak, unda $\rho=\alpha\theta$ tenglama hosil bo'ladi (23.13- chizma).

2. Giperbolik spiral $\rho=\frac{a}{\varphi}$. Ravshanki, $\varphi\to\infty$ da $p\to 0$. Demak, qutb spirallari uchun asimptotik nuqta bo'ladi. $MP=\rho\sin\varphi=\frac{a\sin\varphi}{\rho}\xrightarrow[\varphi\to 0]{} a$ bo'lgani uchun $y=a$ to'g'ri chiziq to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida (bunda koordinatalar boshi qutbga mos, qutb o'qi esa absissalar o'qining musbat qismiga mos tushadi) giperbolik spiralning asimptotasi bo'ladi (23.14- chizma).

$\rho'=-\frac{a}{\varphi^2}$, $\rho''=-\frac{2a}{\varphi^3}$ bo'lgani uchun $0<|\varphi|<+\infty$ ni qanoatlantiruvchi φ ning hamma qiymatlarida $k>0$ bo'ladi. Shuning uchun giperbolik spiral egilish nuqtasiga ega emas. Giperbolik spiralning



23.14- chizma.

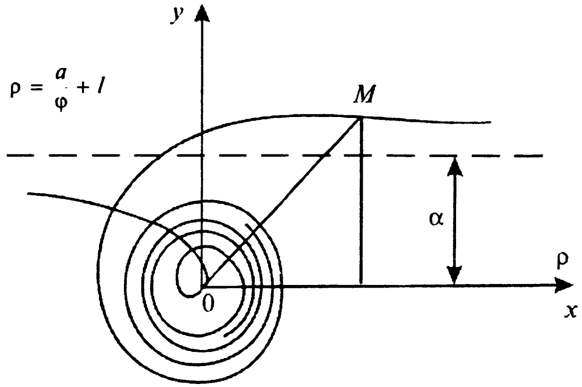
tenglamasidan ko'rinadiki, spiral ikki shoxobchadan iborat bo'lib, ular ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

3. $\rho=\frac{a}{\varphi}+l$. $\lim\limits_{\varphi\to0}\rho\sin\varphi=\lim\limits_{\varphi\to0}\left(\frac{a}{\varphi}+l\right)\sin\varphi=a$ bo'lgani uchun $y=a$ to'g'ri chiziq spiral uchun asimptota bo'ladi.

$\rho'=-\frac{a}{\varphi^2}$, $\rho''=-\frac{2a}{\varphi^3}$ bo'lgani uchun $\varphi(a+b\varphi)^2-2ab=0$ bo'lganda $k=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+2\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}=0$ bo'ladi. $\varphi(a+l\varphi)^2-2al=0$ tenglama bitta $\varphi=\varphi_1(0<\varphi_1<1)$ yechimga ega, agar $\varphi\geq1$ bo'lsa, $\varphi(a+l\varphi)^2-2al=0$, agar $\varphi\leq0$ bo'lsa, $\varphi(a+l\varphi)^2-2al<0$ bo'ladi. Shunday qilib, egri chiziq $\varphi=\varphi_1$ da bitta egilish nuqtasiga ega bo'ladi.

Agar φ orgument 0 dan $+\infty$ gacha o'zgarganda ρ ning qiymati $\rho\to l$, ya'ni egri chiziq soat strelkasi yo'nalishiga teskari ravishda aylanadi, asimptotik ravishda $\rho=l$ aylanaga yaqinlashadi. Agar φ o'zgaruvchi 0 dan $-\infty$ gacha o'zgarsa, ρ ning qiymati $-\infty$ dan 0 gacha o'zgaradi, $\varphi=\frac{l}{a}$ da qiymat nolga aylanadi, bunda ρ qarama-qarshi yo'nalishda olinadi. Shuning uchun spiralning ikkinchi shoxobchasi o'z-o'zini kesib o'tib, ichki tomondan asimptotik ravishda aylanaga yaqinlashadi (23.15- chizma).

4. Galiley spirali $\rho=a\varphi^2-l$ $(l\geq0)$. Galiley spirali qutb o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi. Agar $\varphi=0$ bo'lsa, $\rho=-l$. Agar $\varphi=\pm\sqrt{\frac{l}{a}}$ bo'lsa, $\rho=0$ bo'ladi. Shunday qilib, egri chiziq qutbda



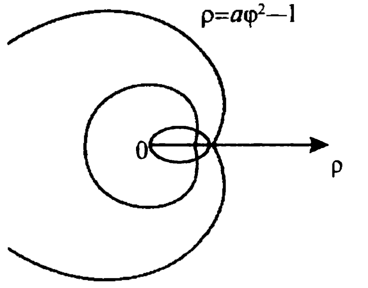
23.15- chizma.

ikkilangan nuqtaga ega bo‘ladi (23.16- chizma). Egri chiziq qutb o‘qida cheksiz ko‘p ikkilangan nuqtalarga ega bo‘ladi, $\rho=a\varphi_k^2-l$, $\varphi_k=\pm\pi k$, $k=1,2,3,...$; $l=0$ bo‘lganda $\rho=a\varphi^2$ (23.17- chizma) spiral hosil bo‘ladi, bunda qutb maxsus nuqta bo‘ladi. (Agar $\varphi=0$ bo‘lsa, $\rho=0$, $\rho'=0$ bo‘ladi).

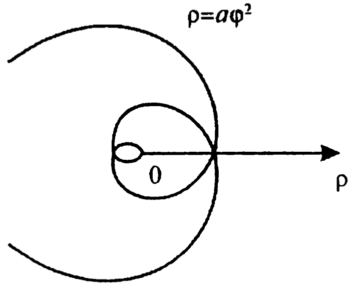
5. $\rho=\frac{a}{\varphi^2}$. Agar $\varphi\to0$ bo‘lsa, $\rho\to\infty$ bo‘ladi, agar $\varphi\to\infty$ bo‘lganda esa $\rho\to0$ bo‘ladi. Egri chiziq parabola shoxobchasiga o‘xshagan ikkita cheksiz shoxobchadan iborat bo‘lib, koordinata boshida asiptotik ikkilangan nuqtaga ega bo‘ladi (23.18- chizma).

6. **Ferma spirali** $\rho^2=a^2\varphi$. Spiral markaziy simmetriyaga ega bo‘lib, $\varphi\to\infty$ da $\rho\to\infty$. Egri chiziq ikkita shoxobchadan iborat bo‘lib, bulardan biri ρ ning musbat qiymati $\rho=a\sqrt{\varphi}$ ga mos keladi, ikkinchisi esa ρ ning manfiy qiymati $\rho=-a\sqrt{\varphi}$ ga (23.19- chizma) mos keladi. Ikkala shoxobcha ham qutbdan boshlanadi, qutb, o‘z navbatida, egri chiziqning egilish nuqtasi ham bo‘ladi. Har bir shoxobcha qutbdan cheksiz ko‘p marta aylanib cheksizlikka ketadi. Bunda ikkita qo‘shni shoxobcha orasidagi masofa kamayadi, ya‘ni $\lim\limits_{\varphi\to\infty}\left(a\sqrt{\varphi+2\pi}-a\sqrt{\varphi}\right)=0$ (23.19-chizmaga qarang).

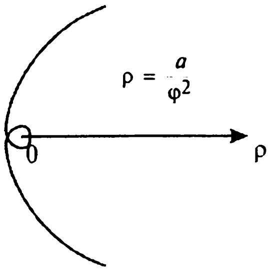
7. **Parabolik spiral** $(\rho-l)^2=a^2\varphi\,(l>0)$. Spiral ikkita $\rho=a\sqrt{\varphi}+l$ va $\rho=-a\sqrt{\varphi}+l$ shoxobchalardan iborat. Bulardan ikkinchisi



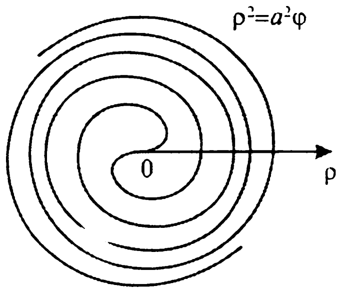
23.16- chizma.



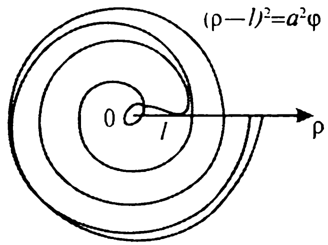
23.17- chizma.



23.18- chizma.



23.19- chizma.



23.20- chizma.

birinchisi bilan cheksiz ko'p ikkilangan nuqtalarga ega (23.20-chizma). Haqiqatan ham, $\varphi=0$ nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma qutb o'qiga mos tushadi, egriligi

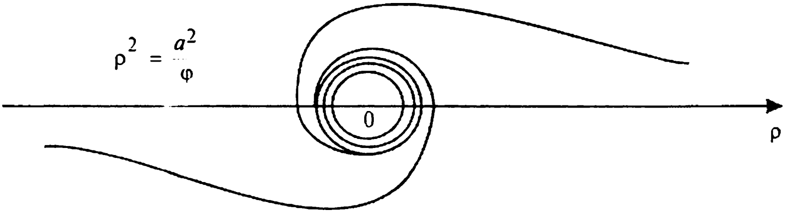
$$k=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+2\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

esa $\varphi=\varphi_1(\varphi_1>0)$ da nolga aylanadi, bunda φ_1 ushbu tenglamaning yechimi: $4\,\varphi\sqrt{\varphi}\left(l-a\sqrt{\varphi}\right)^2+3a^2\sqrt{\varphi}-al=0.$

8. Jezl $\rho^2=\frac{a^2}{\varphi}$ $(a>0)$. Egri chiziq markaziy simmetriyaga ega bo'lib, ikkita $\rho=\frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ va $\rho=-\frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ shoxobchalardan iborat, ularning har biri qutbga yaqinlashadi (23.21- chizma). $\varphi\to 0$ da $\rho\to\infty$, chunki

$$\lim_{\varphi\to 0}\rho\sin\varphi=\lim_{\varphi\to 0}\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}=0,$$

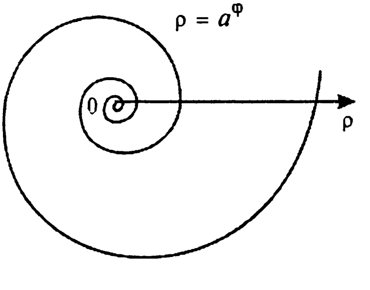
qutb berilgan chiziqqa asimptota bo'ladi. $\varphi=\frac{1}{2}$ da $k=0$, $\varphi>\frac{1}{2}$ da, $k>0$, $0<\varphi<\frac{1}{2}$ da esa $k<0$ bo'ladi. Shuning uchun $\left(\frac{1}{2};a\sqrt{2}\right)$ nuqta egri chiziq uchun egilish nuqtasi bo'ladi.



23.21- chizma.

9. Logarifmik spiral $\rho=a^{\varphi}$. $\varphi=0$ da $\rho=1$ bo'ladi.

Agar $a>1$ bo'lsa, u holda $\varphi\to+\infty$ da $\rho\to+\infty$ va spiral soat strelkasiga teskari yo'nalishda tarqaladi; $\varphi\to-\infty$ da $\rho\to 0$ va spiral soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha yopiladi, o'zining asimptotik nuqtasi qutbga asimptotik intiladi (23.22- chizma).



23.22- chizma.

Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, u holda $\varphi \to +\infty$ da $\rho \to 0$ va spiral qutb atrofida soat strelkasiga teskari yo'nalishda yopiladi, $\varphi \to +\infty$ da $\rho \to +\infty$ va spiral soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha tarqaladi.

$\rho = ca^{\varphi}$ ko'rinishdagi logarifmik spiralni qaraylik. Qutb o'qini biror φ_1 burchakka burish bilan koeffitsiyent c ni $c=1$ deb olish mumkin. Haqiqatan ham, qutb o'qini φ_1 burchakka burish natijasida $\rho = ca^{\varphi + \varphi_1} = ca^{\varphi_1} a^{\varphi}$; $ca^{\varphi_1} = 1$ shartidan $\varphi_1 = \log_a c$ burish burchagini topamiz.

Har bir logarifmik spiral o'zining hamma radius-vektorlarini bir xil μ burchak ostida kesib o'tadi. Haqiqatan ham,

$$y'_x = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi + \rho\sin\varphi}, \quad \mu = \alpha - \varphi$$

bo'lgani uchun

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\varphi}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\varphi},$$ bundan $\mathrm{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}$, ko'rilayotgan hol uchun

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{a^{\varphi}}{a^{\varphi}\ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

Ixtiyoriy nuqtadagi spiralning egrilik radiusi bu nuqtaning radius-vektoriga proporsional bo'ladi:

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{\left(a^{2\varphi} + 2a^{2\varphi}\ln^2 a\right)^{\frac{3}{2}}}{a^{2\varphi} + 2a^{2\varphi}\ln^2 a - a^{2\varphi}\rho'^2\ln^2 a} = \rho\sqrt{1 + \ln^2 a}.$$

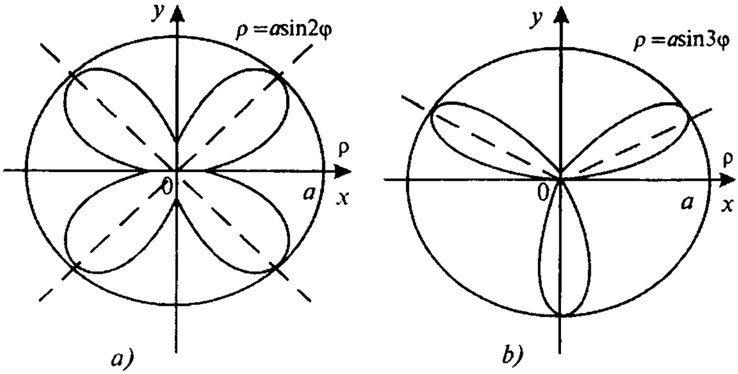
Logarifmik spiralni $\rho = ce^{k_1\varphi}$ tenglama ko'rinishida berish qulay bo'ladi, bunda

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{1}{k_1}, \quad k_1 = \ln a.$$

U holda $R = \rho\sqrt{1 + k_1^2}$. $k_1 = 0$ bo'lganda $\rho = c$ aylana hosil bo'ladi.

Qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamaning tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan chiziqlar.

1. Uch yaproqli va to'rt yaproqli atirgullar. Ularning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamalari, mos ravishda, $\rho = a\sin 3\varphi$ va $\rho = a\sin 2\varphi$ $(a > 0)$ kabi ifodalanadi.



23.23- chizma.

Berilgan fuknsiyalarning grafiklarini chizish uchun φ ga 0 dan 2π gacha qiymatlar berib, bu qiymatlarga mos kelgan nuqtalar yordamida ham chizish mumkin.

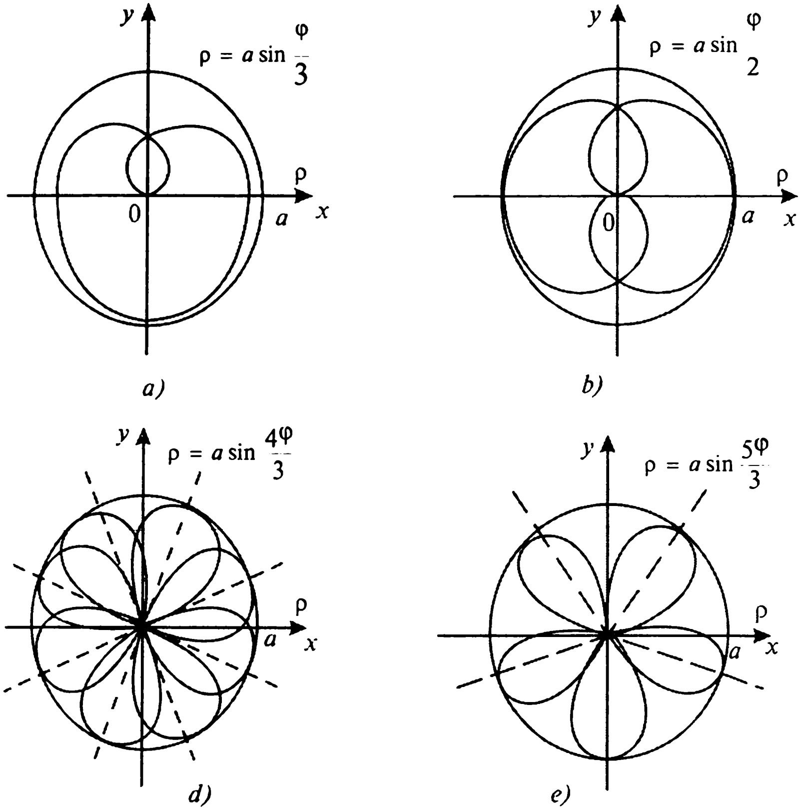
Umumiy holda tenglamasi ρ=$a$sin$r$φ yoki ρ=$a$cos rφ ko'rinishda bo'lgan egri chiziqlar oilasi *atirgulsimon chiziqlar* deyiladi.

$a\sin r\varphi \leq 1$, $a\cos r\varphi \leq 1$ munosabatlardan oilaning barcha chiziqlari radiusi a ga teng bo'lgan doiraning ichida yotishi kelib chiqadi. sin$r$ φ va cos$r$ φ funksiyalar davriy bo'lganligidan gullarning har biri a ga teng bo'lgan radiuslarning eng kattasiga nisbatan immetrik bo'lgan kongruent yaproqlardan tashkil topadi.

Agar $|r|$ — butun son bo'lib, r — juft bo'lsa, gul $2r$ ta yaproqdan (23.23 *a*- chizma), r — toq bo'lganda esa, r ta yaproqdan iborat bo'ladi (23.23 *b*- chizma).

Agar $r=\frac{m}{n}$ — ratsional son bo'lib m va n larning ikkalasi ham toq bo'lsa, gul m ta yaproqdan (23.24 *d* va *e*- chizmalar), m va n larning biri juft bo'lganda $2m$ ta yaproqdan tashkil topgan bo'ladi (23.25 *b* va *d*- chizmalar), bunda yaproqlar qisman bir-birini yopadi.

2. Paskal chig'anog'i ρ $=2r\cos\varphi+l$. Berilgan chiziqning *konxoidasi* deb, bu chiziqdagi har bir nuqtaning qutb-radiusini berilgan l kesmaga o'zgartirish, cho'zish yoki siqish natijasida hosil qilingan chiziqqa aytiladi. Chiziqning tenglamasi ρ=f(φ) shaklda berilgan bo'lsa, uning konxoidasi: ρ=f(φ) ± l tenglama bilan ifodalanib, u ikki qismdan iborat bo'ladi. Qutb sifatida aylanadagi nuqta qabul qilinsa, bu aylananing konxoidasi *Paskal chig'anog'i* (*ulitkasi*) deyiladi. Uning tenglamasi

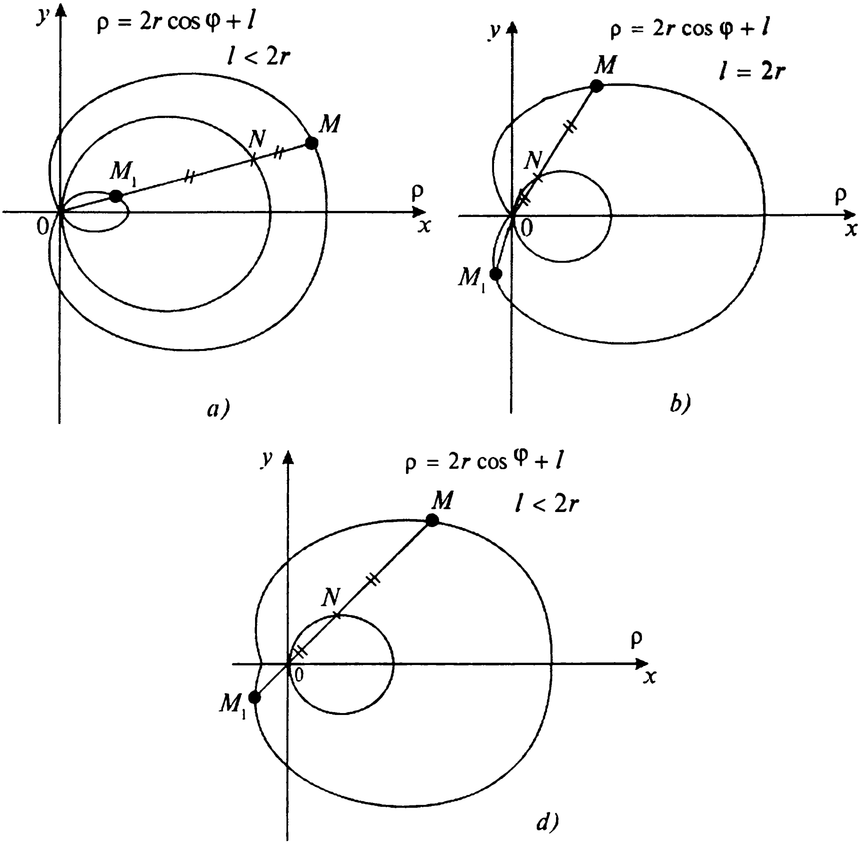


23.24- chizma.

$$\rho = 2r\cos\varphi + l$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $l=0$ bo'lsa, $\rho = 2r\cos\varphi$ bo'ladi, bundan keyingi $\sqrt{x^2+y^2} = 2r\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ yoki $x^2+y^2-2rx=0$ tenglama markazi $(r;0)$ nuqtada, radiusi esa r ga teng bo'lgan aylanani ifodalaydi. Bundan Paskal chig'anog'iga tegishli nuqtalarni qurish uchun radius-vektorining har bir holatiga qarab l kesmani qurish kerakligi kelib chiqadi. 23.25 *a*, *b*, *d*- chizmalarda buning uchta $l < 2r$, $l=2r$, $l>2r$ holati ko'rsatilgan.

$l=2r$ bo'lgan holatda Paskal chig'anog'ining tenglamasi $\rho=2r(1+\cos\varphi)$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda koordinatalar boshi qaytish nuqtasi bo'lib hisoblanadi (23.25 *b*- chizma).



23.25- chizma.

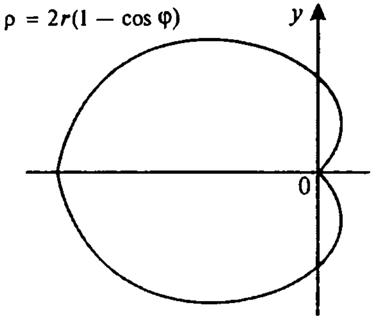
$l<2r$ bo'lgan holatda koordinatalar boshi o'zaro kesishish nuqtasi bo'ladi (23.25 *a*- chizma).

$l>2r$ bo'lganda koordinatalar boshi ajralgan maxsus nuqta bo'ladi (23.25 *d*- chizma).

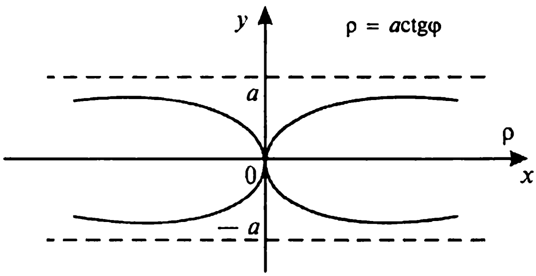
3. Kardioida $\rho=2r(1-\cos\varphi)$. Uning tenglamasi $\rho=2r(1-$ $-\cos\varphi)$ ko'rinishda bo'ladi. Kardioida tenglamasidan uning Paskal chig'anoqlari sinfiga qarashli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas (23.26- chizma). To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida kardioida tenglamasi

$$(x^2+y^2+2rx)^2==4r^2(x^2+y^2)$$

4-tartibli algebraik egri chiziqni ifodalashi kelib chiqadi.



23.26- chizma.



23.27- chizma.

4. Kappa. Uning tenglamasi $\rho=a\text{ctg}\varphi$ ko'rinishda bo'lib, to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasiga o'tilganda $(x^2+y^2)y^2=a^2x^2$ tenglama hosil bo'ladi. Bundan Kappa koordinata o'qlariga simmetrik bo'lgan 4-tartibli algebraik egri chiziqni ifodalashi kelib chiqadi:

$F(x,y)=(x^2+y^2)y^2-a^2x^2$ va $F'_x(x,y)=2xy-2a^2x$, $F'_y(x,y)=2x^2y-4y^3$ bo'lganligidan $x=0$, $y=0$ bo'lganda $F'_x(0;0)=0$, $F'_y(0;0)=0$ bo'ladi. Demak, koordinatalar boshi uning uchun maxsus nuqta bo'lar ekan.

$$F'_{xx}=2y^2-2a^2$$

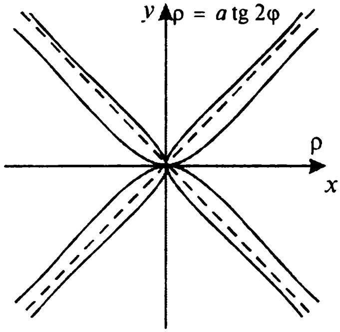
bo'lgani uchun $x=0$, $y=0$ bo'lganda $F''_{xx}\neq 0$, demak, koordinatalar boshi ikkilangan maxsus nuqta bo'lar ekan.

$x=0$, $y=0$ bo'lganda $F''_{xy}-F''_{xx}F''_{yy}=0$ bo'ladi. Bundan esa koordinatalar boshi o'zaro urinish nuqtasi bo'lishi kelib chiqadi.

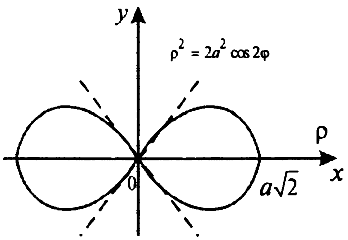
$\lim\limits_{\varphi \to 0} \rho \sin \varphi = a$ bo'lgani sababli $y = \pm a$ to'g'ri chiziqlar berilgan egri chiziq uchun asimptotalar bo'lishi kelib chiqadi.

$\varphi \to \frac{\pi}{2}$ da $y'_x \to \infty$, bundan ordinatalar o'qi egri chiziqqa o'zaro urinish nuqtasida (koordinatalar boshida) urinma chiziq bo'lishi kelib chiqadi. Kappa chiziqning umumiy ko'rinishi 23.27-chizmada tasvirlangan.

Kappa $\rho = a\text{ctg}r\varphi$ tenglamasi bilan ifodalanadigan egri chiziqlar oilasining vakilidir. Umuman, tenglamalari $\rho = a\text{ctg}2\varphi$ yoki $\rho = a\text{tg}2\varphi$ ko'rinishda bo'lgan egri chiziqlar *tugunlar* deyiladi. Bu egri chiziqlar uchun koordinatalar boshi maxsus nuqtadan iborat. $r = 2$ bo'lganda „*shamol tegirmoni*" deb ataladigan egri chiziq hosil bo'ladi (23.28-chizma).



23.28- chizma.



23.29- chizma.

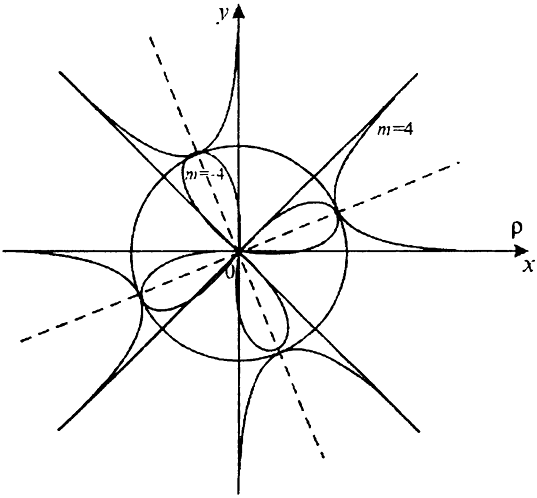
5. Bernulli lemniskatasi. Uning tenglamasi $\rho = 2a^2\cos 2\varphi$ ko'rinishda bo'ladi.

Ta'rif. Berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha olingan masofalarning ko'paytmasi o'zgarmas va $\frac{1}{4}(F_1F_2)^2$ ga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni *lemniskata* deyiladi.

Bernulli lemniskatasining tenglamasidan egri chiziqning $y=\pm x$ to'g'ri chiziqlar orasida simmetrik joylashgan ikkita yaproqdan tashkil topganligini ko'rish mumkin. Bunda koordinatalar boshi ikkilangan maxsus nuqta bo'ladi.

Bernulli lemniskatasining grafigi 23.29- chizmada tasvirlangan. Bernulli lemniskatasi tenglamalari qutb koordinatalar sistemasida $\rho^m=a^m \sin m\varphi$ yoki $\rho^m=a^m \cos m\varphi$ ko'rinishda bo'lganda, *sinusoidali spirallar* deb atalgan egri chiziqlar oilasining vakili bo'lib hisoblanadi.

23.30- chizmada $m=4$ va $m=-4$ bo'lgan hollarda sinusoidal spirallar tasvirlangan.



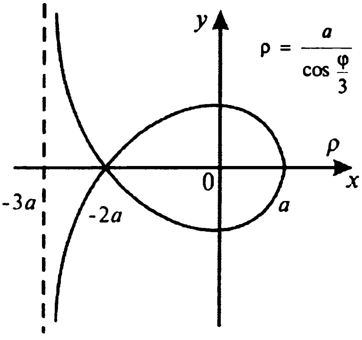
23.30- chizma.

6. Makloren trisektrisasi. Uning tenglamasi

$$\rho=\frac{a}{\cos\frac{\varphi}{3}}$$

ko'rinishda bo'lib, uning grafigi abssissalar o'qini $(a;0)$ va $(-2a;0)$ nuqtalarda kesadi.

$\varphi\to\frac{3\pi}{2}$ da $\rho\to\infty$ va $\rho\cos\varphi\to-3a$. Shuning uchun $y=-3a$ to'g'ri chiziq berilgan egri chiziq uchun asimptota bo'ladi. $\cos\frac{\varphi}{3}$ juft funksiya bo'lganligidan, egri chiziq abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (23.31- chizma).



23.31- chizma.

7. Nikomeda konxoidasi. Uning tenglamasi

$$\rho=\frac{a}{\sin\varphi}+l \quad (a>0,\ l>0)$$

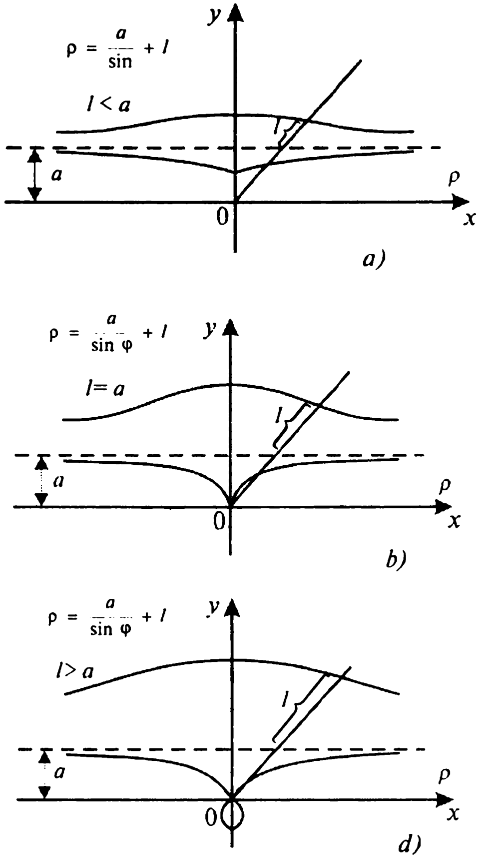
ko'rinishda bo'ladi.

Nikomeda konxoidasi uchun $y=a$ to'g'ri chiziq asimptota bo'ladi, chunki $\lim\limits_{\varphi\to 0}\rho\sin\varphi=a$. Agar $0\le\varphi\le\pi$ bo'lsa, $\rho\ge l$, bu egri chiziqning birinchi shoxobchasini beradi, agar $\pi\le\varphi\le 2\pi$ bo'lsa, $\rho\le l$ bo'ladi, bu esa egri chiziqning ikkinchi shoxobchasini beradi. Egri chiziqning shakli a va l parametrlarga bog'liq. Bunda $l<a$, $l=a$, $l>a$ bo'lishi mumkin. Uchala holda ham uning uchun koordinatalar boshi maxsus nuqta bo'ladi. $l<a$ bo'lganda egri chiziqning ko'rinishi 23.32 *a*- chizmada tasvirlangan. $l=a$ bo'lganda egri chiziq koordinatalar boshida qaytish nuqtasiga ega (23.32, *b*- chizma), $l>a$ bo'lganda esa o'zaro kesishish nuqtasiga (tugunga) ega (23.32 *d*- chizma). Egilish nuqtasini

$$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=0, \quad \rho=\frac{\left(\rho''\pm\sqrt{\rho''^2-8\rho'^2}\right)}{2}$$

shartdan topamiz.

$\rho'=-\dfrac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, $\rho''=\dfrac{a(1+\cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi}$ bo'lgani uchun $\rho=\dfrac{2a\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}$ yoki $\rho^3\sin^3\varphi=2ap^2\cos^2\varphi$, demak, $y^3=2ax^2$ bo'ladi, ya'ni egilish nuqtasi $y=\pm\sqrt[3]{2ax^2}$ parabolada yotar ekan.



23.32- chizma.

Shunday qilib, $l < a$ bo‘lganda egri chiziq to‘rtta, $l \geq a$ bo‘lganda esa faqat ikkita egilish nuqtasiga ega bo‘lar ekan.

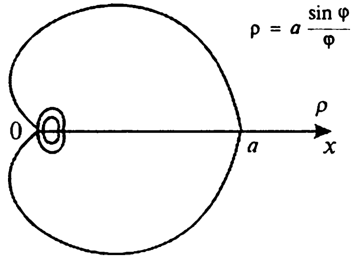
8. Koxleoida. Uning tenglamasi

$$\rho = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar $\varphi=0$ bo‘lsa, $\rho=a$; agar $\varphi=k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm,\ldots$) bo‘lsa, u vaqtda $\rho=0$ bo‘ladi. $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ — juft funksiya bo‘lgani uchun egri chiziq qutb o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (23.33- chizma).

$\varphi\to\infty$ da $\rho\to0$, bunda radius-vektor ketma-ket sinuvchi (nolga aylanuvchi) yaproqlarni chizadi. Yaproqlar o‘zlarining yuqori



23.33- chizma.

cho'qqisiga φ ning $\operatorname{tg}\varphi=\varphi$ tenglamani qanoatlantiruvchi qiymatlarida erishadi (23.33- chizma).

3. Tenglamasi oshkormas shaklda berilgan funksiyaning grafigini chizish. 16- § da tenglamasi oshkormas shaklda berilgan funksiyalarning grafigini hosiladan foydalanmasdan (elementar usullar yordamida) chizish usuli berilgan edi. Endi bu paragrafda tenglamasi oshkormas shaklda berilgan funksiyalarning grafigini hosilaladan foydalanib chizish uchun 16- § ga qo'shimcha quyidagi ba'zi bir ma'lumotlarni keltirib o'tamiz.

Biror $E\subset R^2$ to'plamda $F(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

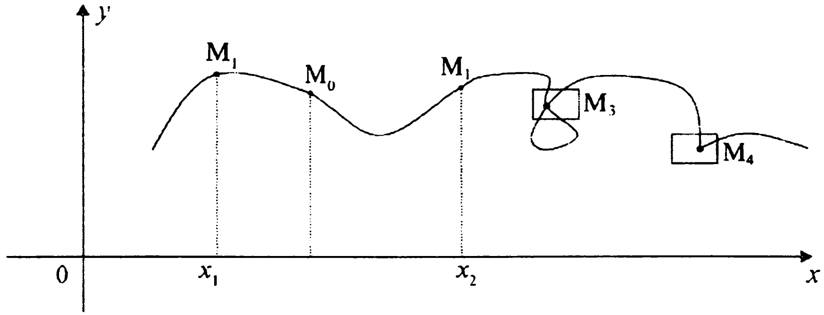
chiziqning regular yoyi deb shunday nuqtalar to'plamiga aytiladiki, agarda ular Dekart koordinatalar sistemasida

$$y=f(x), \quad a\le x\le b \tag{2}$$

(1) tenglamani qanoatlantirib, $f(x)$ funksiya quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa: 1) u bir qiymatli, 2) uzluksiz, 3) tegishli tartibdagi uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa.

(1) chiziqdagi nuqtaning yetarli kichik atrofi regular yoy bo'lsa, biz bunday nuqtani shu chiziqning *oddiy nuqtasi* deb ataymiz. Chiziqning oddiy bo'lmagan barcha nuqtalari uning *maxsus nuqtalari* deyiladi.

Agar $M_0(x_0;y_0)$ nuqta (1) chiziqning oddiy nuqtasi bo'lsa, uning yetarli kichik atrofida (1) bilan (2) tenglamalar ekvivalent bo'ladi (23.34- chizma), chunki $\overset{\smile}{M_1M_2}$ — regular yoy bo'ladi (unig



23.34- chizma.

hamma nuqtalarida $f(x)$ funksiya yuqoridagi uchala shartni ham qanoatlantiradi). $f(x)$ funksiyaga qo'yilgan shartlar yoyning silliqligini, ya'ni uning har bir nuqtasida urinma ($f'(x)$ — uzluksiz) mavjudligini bildiradi. 23.34- chizmada M_3 va M_4 nuqtalar maxsus nuqtalar bo'ladi, chunki M_3 nuqtada $f(x)$ funksiyaning bir qiymatliligi buziladi, M_4 nuqtada esa urinma ($f'(x)$ — hosila) mavjud emas (bir tomonlama hosilalar mavjud). M_3 va M_4 nuqtalarni qanchalik kichik atrof bilan o'rasak ham, regular yoy hosil bo'lmaydi.

Agar $F(x,y)$ funksiya $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalar $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada birdaniga nolga aylanmasa, ya'ni $F_x'^2(x_0,y_0)+F_y'^2(x_0,y_0)\neq 0$ bo'lsa, $M_0(x_0;y_0)$ nuqta oddiy nuqta bo'ladi. E to'plamning

$$F(x,y)=0,\quad F_x'(x,y)=0,\quad F_y'(x,y)=0 \qquad (3)$$

tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalari (1) chiziqning maxsus nuqtalari bo'ladi.

Agar $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada, funksiyaning o'zidan tashqari, uning birinchi tartibli xususiy hosilalari ham nolga teng bo'lib, ikkinchi tartibli xususiy hosilalaridan biri noldan farqli bo'lsa, u holda $M_0(x_0;y_0)$ nuqta (1) chiziqning *ikki karrali maxsus nuqtasi* deyiladi.

(3) bilan birgalikda $F''_{xx}(x,y)=F''_{yy}(x,y)=F''_{xy}(x,y)$ o'rinli bo'lib, uchinchi tartibli xususiy hosilalarning hech bo'lmaganda bittasi $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada noldan farqli bo'lsa, $M_0(x_0;y_0)$ nuqta (1) chiziqning *uch karrali maxsus nuqtasi* deyiladi.

Umumiy holda $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada $F(x,y)$ funksiyaning $n-1$-tartibgacha hamma xususiy hosilalari nolga teng bo'lib, n- tartibli hosilalaridan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, $M_0(x_0;y_0)$ nuqta (1) chiziqning *n- karrali maxsus nuqtasi* deyiladi.

Ikki karrali M_0 maxsus nuqta uchun bu nuqtadagi urinmalarning burchak koeffisiyentlari

$$F''_{xx}+2F''_{xy}y'+F''_{xy}y'^2=0 \quad (x=x_0, y=y_0) \qquad (4)$$

kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil bo'lganda M_0 tugun maxsus nuqta yoki o'zaro kesishish maxsus nuqtasi; o'zaro teng bo'lganda M_0 nuqta qaytish maxsus nuqtasi; mavhum bo'lganda esa M_0 nuqta yakkalangan maxsus bo'ladi.

M_0 nuqta uch karrali maxsus nuqta bo'lganda M_0 nuqtadagi uchta urinmaning burchak koeffisiyentlari

$$F'''_{xxx}+3F'''_{xxy}y'+F'''_{xyy}y'^2+F'''_{yyy}y'^3=0 \quad (x=x_0, y=y_0)$$

kub tenglamaning ildizlari bo'ladi.

Tenglamasi $F(x,y)=0$ shaklda berilgan egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidagi urinmaning burchak koefftisiyenti $k=-\frac{F'_x}{F'_y}$ formula bilan topiladi.

Egri chiziqning abssissalar o'qiga parallel bo'lgan urinmasini topish uchun

$$\begin{cases} F'_x(x,y)=0, \\ F(x,y)=0 \end{cases}$$

sistemani yechish kerak. Agar x_1 va y_1 lar bu sistemaning yechimi bo'lib, $F'_y(x_1,y_1)\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$F''_{xx}(x_1,y_1)\cdot F'_y(x_1,y_1)>0$$

bo'lganda $M(x_1;y_1)$ nuqta egri chiziqning maksimum y_{max} nuqtasi, $F''_{xx}(x_1,y_1)\cdot F'_y(x_1,y_1)<0$ bo'lganda esa minimum y_{min} nuqtasi bo'ladi.

Egri chiziqning ordinatalar o‘qiga parallel bo‘lgan urinmasini topish uchun

$$\begin{cases} F'_y(x,y)=0, \\ F(x,y)=0 \end{cases}$$

sistemani yechish kerak. Agar x_1 va y_1 lar bu sistemaning yechimi bo‘lib, $F'_x(x_1,y_1)\neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$F''_{yy}(x_1,y_1)\cdot F'_y(x_1,y_1)>0$$

bo‘lganda $M(x_1;y_1)$ nuqta egri chiziqning maksimum x_{max} nuqtasi, $F''_{yy}(x_1,y_1)\cdot F'_x(x_1,y_1)<0$ bo‘lganda esa minimum x_{min} nuqtasi bo‘ladi.

$F(x, y)=0$ tenglama bilan berilgan chiziq egilish nuqtasining koordinatalari

$$F''_{xx}F_y'^2-2F''F'_xF'_y+F''_{yy}F_x'^2=0 \qquad (5)$$

tenglamaning ildizlari bo‘ladi.

1- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$F(x,y)=x^3+y^3+3xy=0.$$

Yechilishi. 1. Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$F'_x=3x^2+3y, \quad F'_y=3y^2+3x.$$

$x=0$ va $y=0$ da $F(0;0)=0$, $F'_x(0;0)=0$, $F'_y(0;0)=0$ bo‘lganligi uchun koordinatalar boshi, ya‘ni $M_0(0;0)$ nuqta egri chiziq uchun maxsus nuqta bo‘ladi.

2. Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$F''_{xx}=6x, \quad F''_{xy}=3, \quad F''_{yy}=6y, \quad F''_{xy}=3\neq 0.$$

$x=0$ va $y=0$ da $F''_{xy}\neq 0$ bo‘lgani uchun $M_0(0;0)$ ikki karrali maxsus nuqta bo‘ladi. Bu nuqtadan o‘tgan urinmaning burchak koeffitsiyenti k ni

$$F''_{xx}+2F''_{xy}k+F''_{yy}k^2=0$$

tenglamadan topamiz: $F''_{xx}=0$, $F''_{xy}(0,0)=3$, $F''_{yy}(0,0)=0$ bo‘lganligi sababli $6k=0$, $k=0$. Demak, $M_0(0;0)$ egri chiziq uchun tugun yoki karrali nuqta bo‘ladi.

3. Ushbu

$$\begin{cases} x^3=0, \\ x^3+y^3+3xy=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^3=0, \\ x^3+y^3+3xy=0 \end{cases}$$

sistemalarning yechimlari, mos ravishda, egri chiziqning abssissalar va ordinatalar o'qlari bilan kesishish nuqtalarini ifodalaydi. Bu sistemaning yechimlari $x = 0$, $y = 0$ bo'ladi. Demak, egri chiziq koordinatalar o'qlarini $M_0(0;0)$ nuqtada kesib o'tadi.

4. Ushbu

$$\begin{cases} x^3+y^3+3xy=0, \\ 3x^2+3y=0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x^3+y^3+3xy=0, \\ 3y^2+3x=0 \end{cases} \qquad (2)$$

sistemalarni yechib, mos ravishda egri chiziqning abssissalar va ordinatalar o'qlariga parallel bo'lgan urinmalarini topamiz.

$M_0(0;0)$, $M_1(-\sqrt[3]{2}; -\sqrt[3]{4})$ nuqtalarning koordinatalari (1) sistemani qanoatlantirganligi uchun M_0 nuqtadan o'tgan urinma abssissalar o'qi bilan ustma-ust tushadi. M_1 nuqtadan o'tgan urinma esa abssissalar o'qiga parallel va bu nuqtada y_{min} ga ega bo'ladi. $M_0(0;0)$, $M_2(-\sqrt[3]{4}; -\sqrt[3]{2})$ nuqtalarning koordinatalari (2) sistemaning qanoatlantirganligi uchun $M_0(0;0)$ nuqtadan o'tgan urinma ordinatalar o'qi bilan ustma-ust tushadi. M_2 nuqtadan o'tgan urinma esa ordinatalar o'qiga parallel va bu nuqtada x_{min} ga ega bo'ladi.

5. y'_x funksiyaning x bo'yicha hosilasini topamiz:

$$y''_{x^2} = \frac{2F'_xF'_y - F''_{xy} - F'^2_y \cdot F''_{x^2} - F'^2_x F''_{y^2}}{(F'_y)^3} = \frac{2xy}{(y^2+x)^3}.$$

y''_{x^2} funksiyaning ishorasini tekshirish uchun egri chiziqdan bir nechta tayanch nuqtalarni olib, ushbu jadvalni tuzamiz:

Nuqtalar	x	y	y''
M_1	$-\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{4}$	0
M_2	$-\sqrt[3]{4}$	$-\sqrt[3]{2}$	∞
A	-1	$\approx 1,88$	$-$
B	-1	$\approx -1,53$	$+$
C	-1	$\approx -0,35$	$-$
D	$-0,5$	$\approx -1,26$	$-$
E	$-0,5$	$\approx -1,18$	$+$
F	$-0,5$	$\approx -0,084$	$-$
K	1	$\approx -0,35$	$-$

y''_{x^2} ning ishorasi M_2, C, F va K nuqtalarda manfiy bo'lganligi uchun egri chiziq qavariqligining yo'nalishi yuqoriga qaragan bo'ladi. M_1, B va E nuqtalarda y''_{x^2} ning ishorasi musbat bo'lganligi uchun egri chiziq qavariqligining yo'nalishi pastga (ordinatalar o'qining manfiy tomoniga qarab) yo'nalgan bo'ladi. y''_{x^2} ning ishorasi D va A nuqtalarda manfiy bo'lganligi uchun qavariqlikning yo'nalishi yuqoriga (ordinatalar o'qining musbat tomoniga) yo'nalgan bo'ladi.

6. $F(x,y)\equiv x^3+y^3+3xy=0$ tenglama tarkibidagi x ning eng yuqori darajasi oldidagi koeffitsiyent o'zgarmas son bo'lganligi uchun egri chiziq gorizontal asimptotaga ega emas. Xuddi shunday, vertikal asimptotaga ham ega emas.

Berilgan egri chiziqning og'ma asimptotasini topish uchun $F(x,y)\equiv x^3+y^3+3xy=0$ tenglamadagi y ni $kx+b$ ga almashtirib, hosil bo'lgan tenglamadagi x ning ikkita eng yuqori darajasi oldidagi koeffitsiyentlarini nolga tenglashtirib, ushbu

$$\begin{cases} 1+k^3=0, \\ 3k^2b+3k=0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Sistemadan $k=-1$, $b=1$ bo‘ladi. Demak, egri chiziq $y=1-x$ og‘ma asimptotaga ega bo‘ladi

$$y=x\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{4}}}\right)$$

bo‘lganligi uchun $x\to-\infty$ da $y\to+\infty$; $x\to+\infty$ da esa $y\to-\infty$ bo‘ladi.

7. $F(x,y)\equiv x^3+y^3+3xy=0$ tenglamada x ni y ga, y ni x ga almashtirganda tenglama o‘zgarmaganligi uchun berilgan egri chiziq $y=x$ bissektrisaga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Egri chiziq $y=x$ to‘g‘ri chiziq bilan $M_0(0;0)$ va $M_3(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$ nuqtalarda kesishadigan sirtmoqqa ega bo‘ladi.

Berilgan funksiyaning grafigi 23.35- chizmada tasvirlangan.

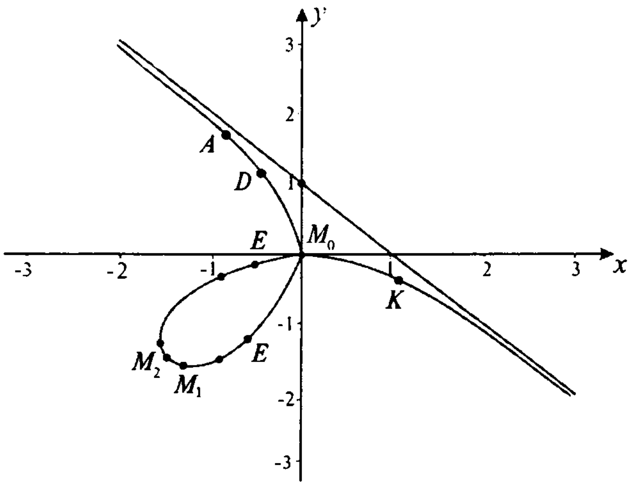
2- misol. Ushbu funksiyaning grafigini chizing:

$$F(x,y)\equiv y^2-x^3+2x^2=0.$$

Yechilishi. 1 Berilgan funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$F'_x=-3x^2+4x,\quad F'_y=2y.$$

$F(0,0)=0$, $F'_x(0;0)=0$, $F'_y(0;0)=0$ bo‘lganligi uchun $M_0(0;0)$ nuqta berilgan egri chiziqning maxsus nuqtasi bo‘ladi.



23.35- chizma.

2. Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$F''_{xx}=-6x+4,\ F''_{xy}=0,\ F''_{yy}=2,\ F''_{xx}(0;0)=4\neq0,\ F''_{yy}(0;0)=2\neq0$$

bo'lgani uchun $M_0(0;0)$ nuqta ikki karrali maxsus nuqta bo'ladi.

$$F''_{xx}+2F''_{xy}k+F''_{xy}k^2=0$$

tenglamadan $M_0(0;0)$ nuqtadan o'tgan urinmaning burchak koeffitsiyenti k ni topamiz:

$$2k^2+4=0,\ k_{1,2}=\pm\sqrt{2}i.$$

Tenglamaning ildizi mavhum bo'lganligi uchun $M_0(0;0)$ yakkalangan maxsus nuqta bo'ladi. Egri chiziq karrali nuqtalarga ega emas.

3. Egri chiziqning abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtasini topish uchun

$$\begin{cases} x^3-2x=0, \\ y^3-x^3+2x^2=0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Bu sistemaning yechimi $x=0$, $y=0$; $x=2$, $y=0$ dan iborat. Demak, egri chiziq $M_1(2;0)$ nuqtada abssissalar o'qini kesadi.

$F''_{xy}-F''_{xx}\cdot F''_{yy}$ ning ishorasi $M_1(2;0)$ nuqtada musbat bo'lganligi uchun, bu nuqta egri chiziqning tugun nuqtasi bo'ladi. Egri chiziq ordinatalar o'qi bilan kesishmaydi.

4. Berilgan egri chiziqning koordinata o'qlariga parallel bo'lgan urinmalarini topish uchun quyidagi sistemalarni yechamiz:

$$\begin{cases} F'_x(x,y)=0, \\ F(x,y)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2+4x=0, \\ y^2-x^3+2x^2=0. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} F'_y(x,y)=0, \\ F(x,y)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=0, \\ y^2-x^3+2x^2=0. \end{cases} \tag{2}$$

(1) sistema yechimga ega bo'lmaganligi uchun egri chiziq abssissalar o'qiga parallel urinmaga ega emas. (2) sistema (2;0) yechimga ega bo'lganligi uchun $M_2(2;0)$ nuqtadan o'tgan urinma ordinatalar o'qiga parallel bo'ladi.

5. $F''_{xx}F'^2_y-F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}F'^2_x=0$ tenglamaning ildizlari $\left(\frac{8}{3};\frac{8}{9}\sqrt{6}\right)$

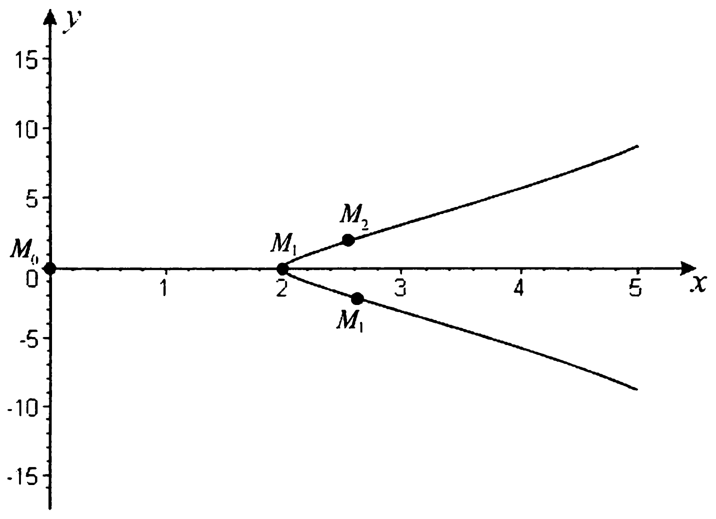
$\left(\frac{8}{3};-\frac{8}{9}\sqrt{6}\right)$ bo'lganligi uchun $M_2\left(\frac{8}{3};\frac{8}{9}\sqrt{6}\right)$, va $M_3\left(\frac{8}{3};-\frac{8}{9}\sqrt{6}\right)$ nuqtalar egri chiziq uchun egilish nuqtalari bo'ladi.

y''_{xx} ni topamiz: $y''_{xx}=\frac{3x-8}{4(x-2)^{3/2}}$ $\left(y''_{xx}=-\frac{3x+8}{4(x-2)^{3/2}}\right)$, $x\in(2;\frac{8}{3})$ da $y''_{xx}\le 0$, $(y''_{xx}\ge 0)$ bo'lganligi uchun egri chiziq qavariqligining yo'nalishi yuqoriga (pastga) qaragan bo'ladi, $x\in[\frac{8}{3};+\infty)$ da $y''_{xx}\ge 0$ $(y''_{xx}\le 0)$ bo'ladi, egri chiziq qavariqligining yo'nalishi pastga (yuqoriga) qaragan bo'ladi.

6. $F(x,y)\equiv y^2-x^3+2x^2=0$ tenglama tarkibidagi x (y) ning eng katta darajasi oldidagi koeffitsiyent o'zgarmas bo'lganligi uchun egri chiziq gorizontal (vertikal) asimptotaga ega emas. $y^2-x^3+2x^2=0$ tenglamada y ni $y=kx+b$ ga almashtirganda k va b larga nisbatan hosil bo'lgan tenglama yechimga ega bo'lmaganligi sababli og'ma asimptota mavjud emas. $x\to+\infty$ da $y=\pm\sqrt{x^3-2x^2}\to\pm\infty$.

7. $F(x,y)\equiv y^2-x^3+2x^2=0$ tenglamada y ni $-y$ ga almashtirganda tenglama o'zgarmaganligi uchun egri chiziq abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

Berilgan funksiyaning grafigi 23.36- chizmada tasvirlangan.



23.36- chizma.

Mustaqil yechish uchun misollar

Tenglamalari parametrik shaklda berilgan funksiyalarning grafiklarini chizing:

1. $x=t^2-2t,\quad y=t^2+2t.$

2. $x=t^3+3t+1,\ y=t^3-3t+1.$

3. $x=\frac{4}{1-t^4},\ y=\frac{4t^2}{1-t^4}.$

4. $x=\frac{t}{1-t^2},\ y=\frac{t(1-2t)^2}{1-t^2}.$

5. $x=te^t,\ y=te^{-t}.$

6. $x=\frac{5t^2}{1+t^5},\ y=\frac{5t^3}{1+t^5}.$

7. $x=t^2,\ y=\frac{4t^2}{1-t^4}.$

8. $x=2t-t^2,\ y=3t-t^3.$

9. $x(t)=\frac{t^5}{10(1-t)},\ y(t)=t^3.$

10. $x(t)=\frac{t^2}{1+t^2},\ y(t)=\frac{t^3}{1+t^2}.$

11. $x(t)=\frac{(t+2)^2}{1+t},\ y=\frac{(t-2)^2}{t-1}.$

Tenglamalari qutb koordinatalar sistemasida berilgan funksiyalarning grafigini chizing:

12. $\rho=a\frac{\text{th}\varphi}{\varphi-1}.$ **13.** $\rho=\frac{\varphi}{\varphi-1}.$ **14.** $\rho=\frac{\varphi}{\varphi+1}.$

15. $\rho=10\sin 3\varphi.$ **16.** $\rho=10\cos 3\varphi.$

Tenglamalari oshkormas shaklda berilgan funksiyalarning grafigini chizing:

17. $F(x,y)=x^3-27(x-y)^2=0.$

18. $F(x,y)=x^4+x^2y^2-18x^2y+9y^2=0.$

19. $F(x,y)=x^4-x^2y+y^3=0.$

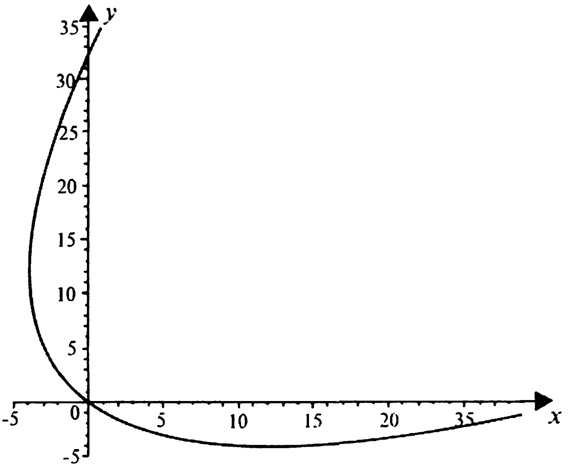
20. $F(x,y)=x^6-x^4+y^2=0.$

21. $F(x,y)=x^5-x^4+4x^2y-4y^2=0.$

22. $F(x,y)=x^3+y^3-x^2=0.$

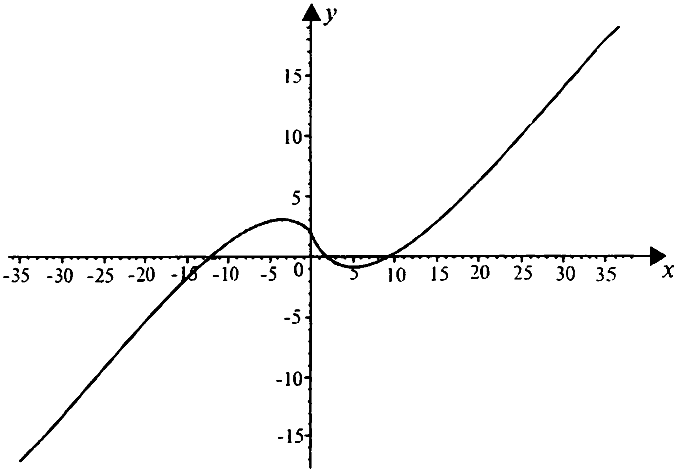
23. $F(x,y)=x^4-y^4+xy=0.$

1.



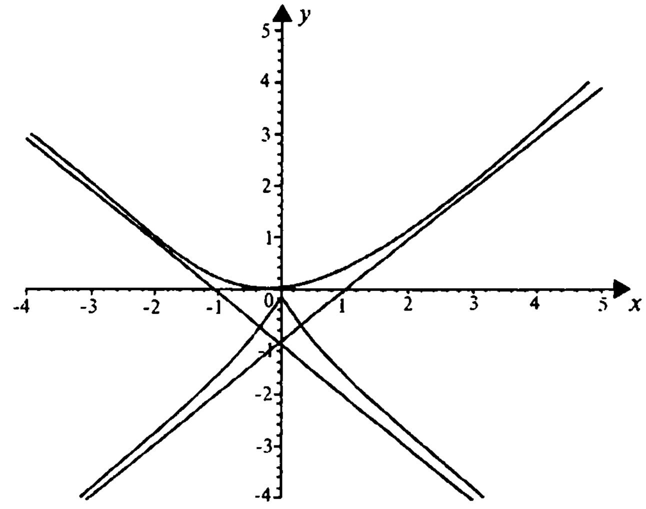
1- chizma.

2.



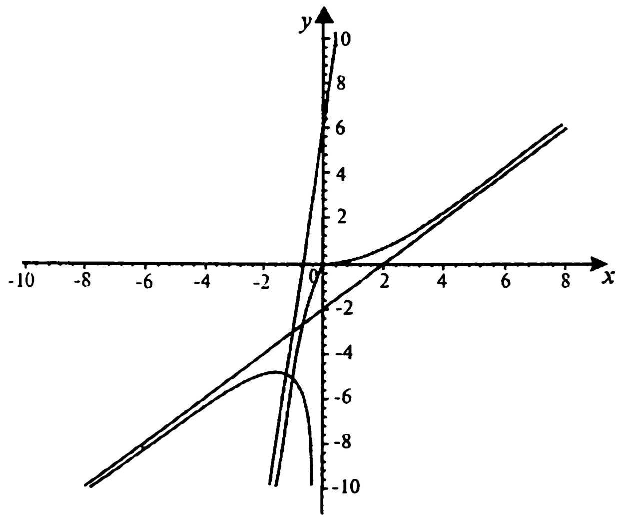
2- chizma.

3.



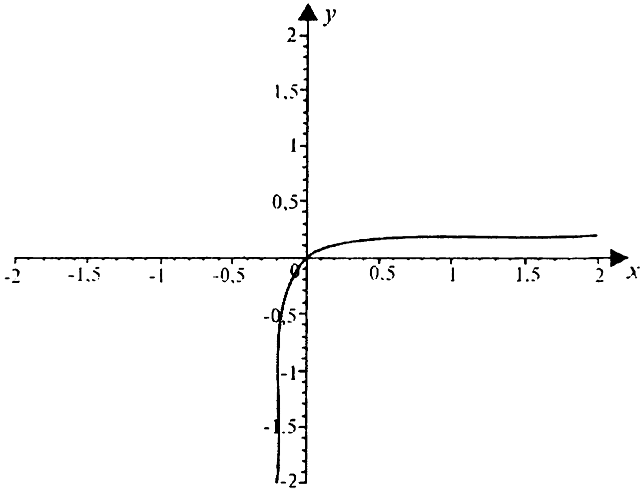
3- chizma.

4.



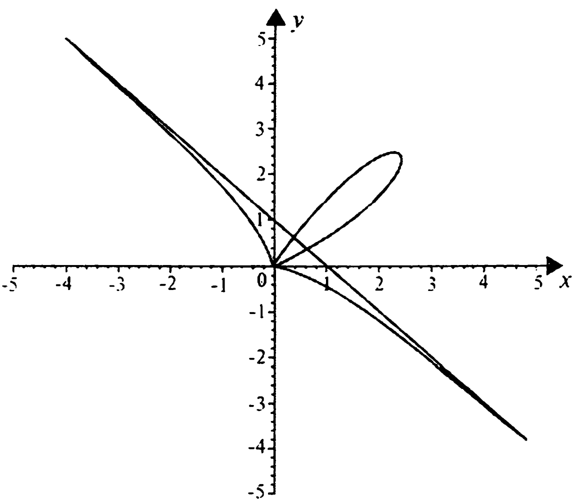
4- chizma.

5.



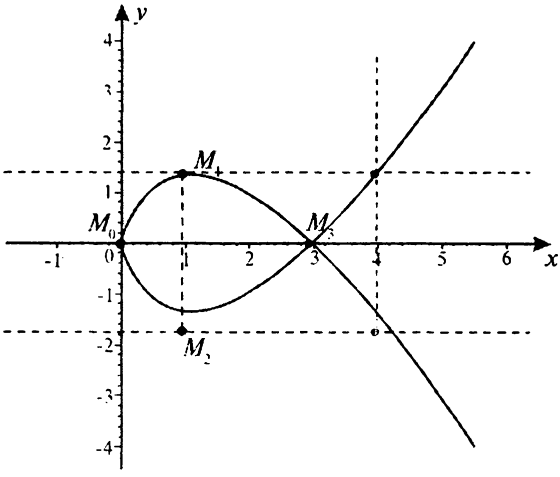
5- chizma.

6.



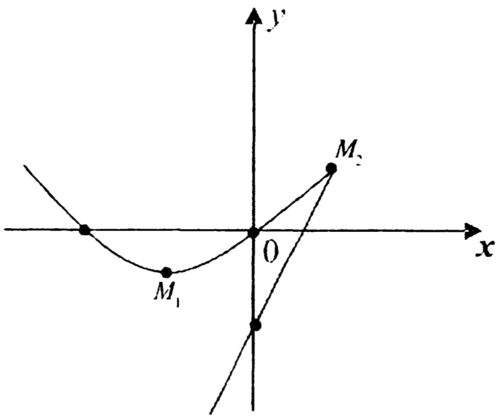
6- chizma.

7.



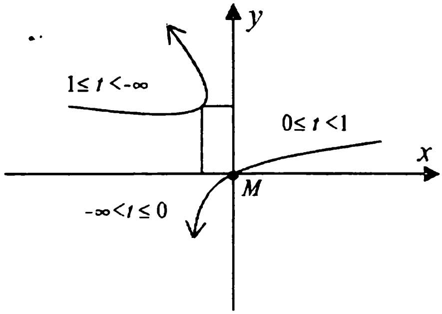
7- chizma.

8.



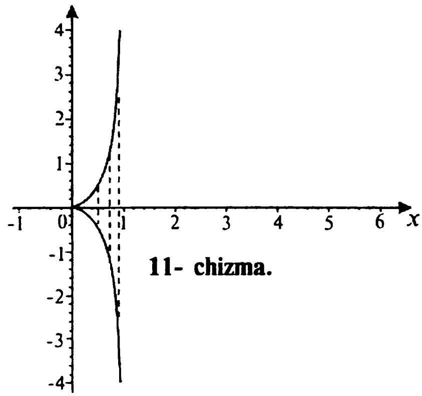
8- chizma.

9.



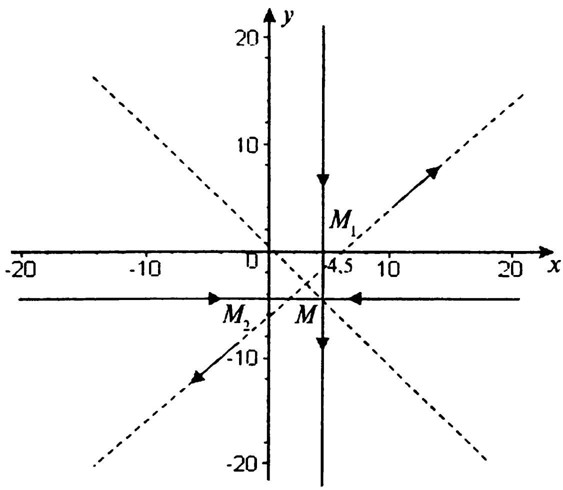
9- chizma.

10.



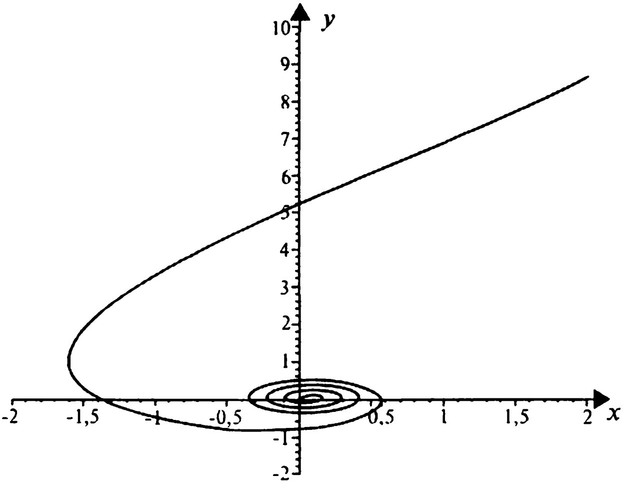
10- chizma.

11.



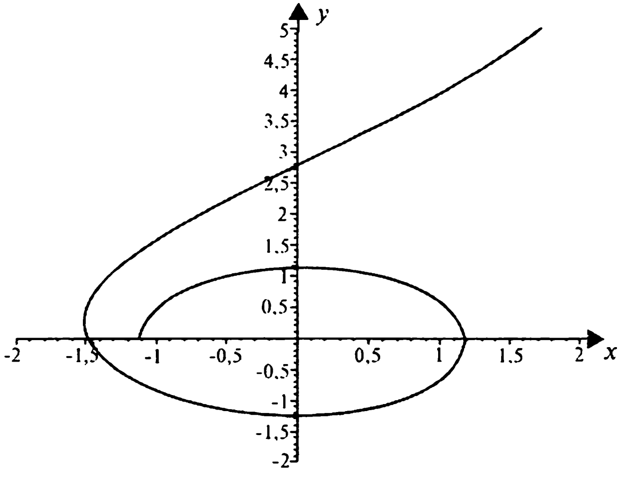
11- chizma.

12.



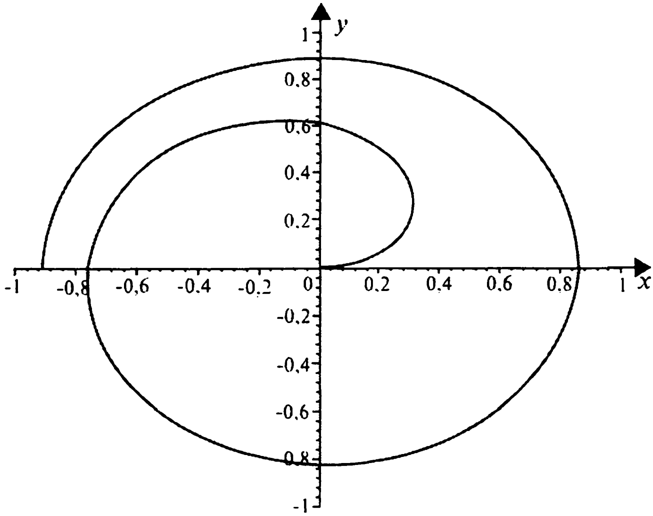
12- chizma.

13.



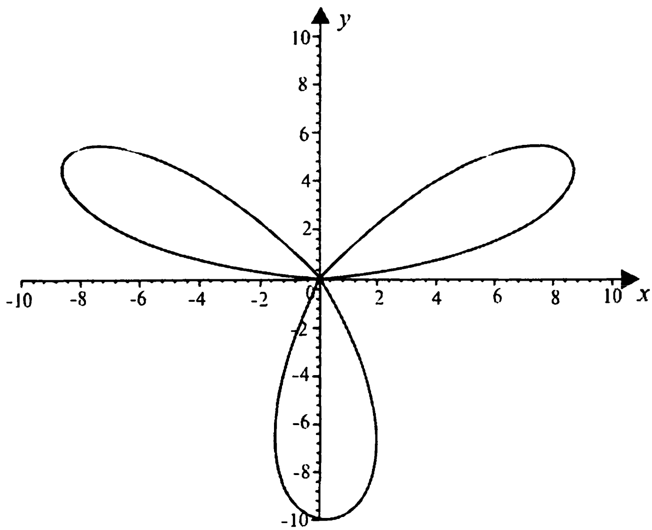
13- chizma.

14.



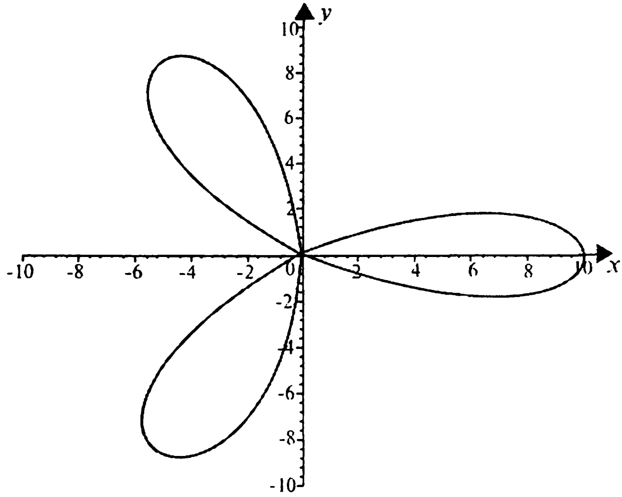
14- chizma.

15.



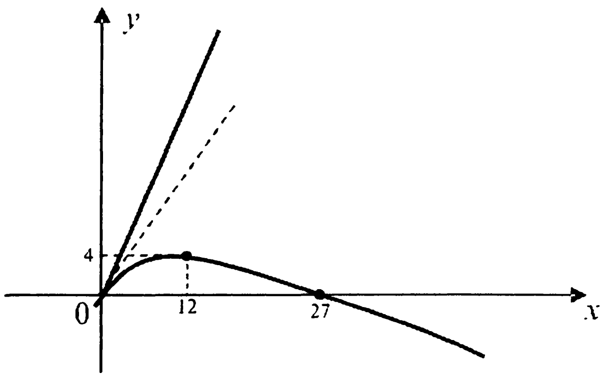
15- chizma.

16.



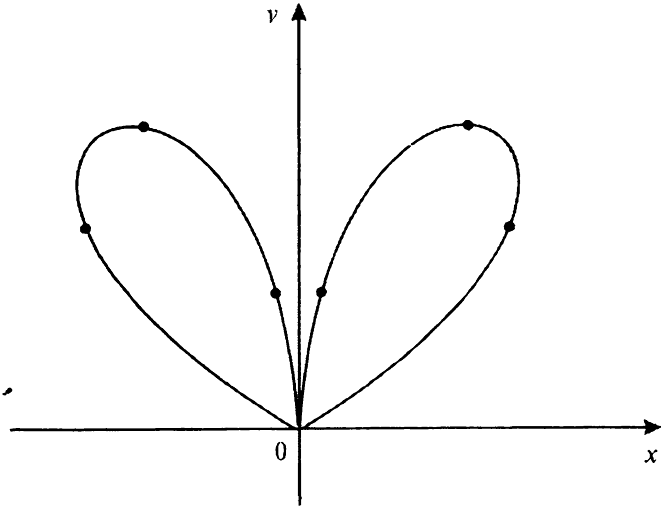
16- chizma.

17.



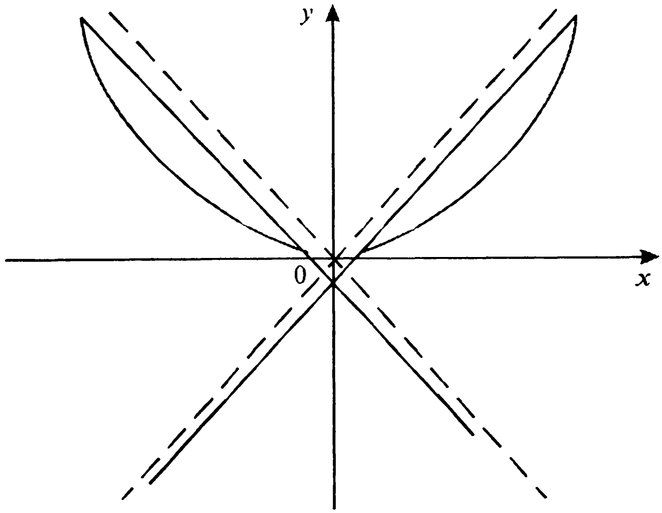
17- chizma.

18.



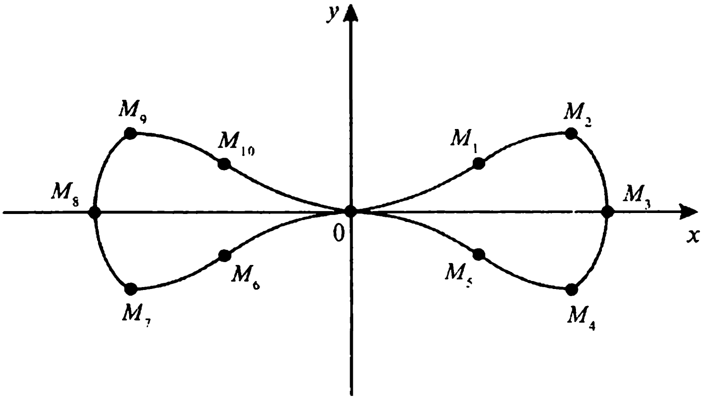
18- chizma.

19.



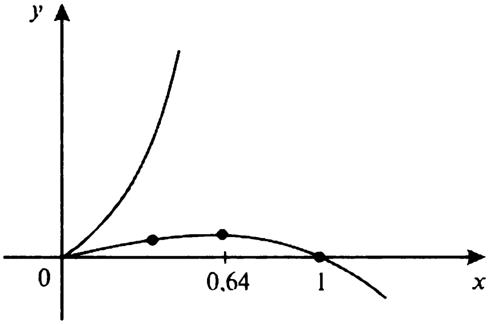
19- chizma.

20.



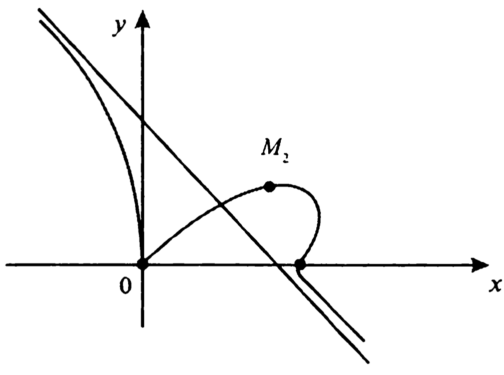
20- chizma.

21.



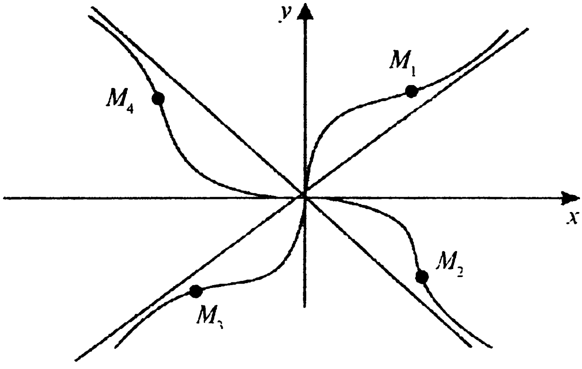
21- chizma.

22.



22- chizma.

23.



23- chizma.

IV bob. ELEMENTAR BO'LMAGAN SODDA FUNKSIYALARNING GRAFIKLARI

24- §. BO'LAKLI UZLUKSIZ FUNKSIYALAR

$f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $[a;b]$ da berilgan $f(x)$ funksiya $[a;b]$ ning chekli sondagi nuqtalaridan tashqari qolgan hamma joyida uzluksiz bo'lib, chekli sondagi nuqtalarida birinchi tur uzilishga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da *bo'lakli uzluksiz* deyiladi.

Xususiy holda zinapoyasimon funksiyalar bo'lakli uzluksiz funksiyalarga misol bo'la oladi.

1. Zinapoyasimon funksiyalar.

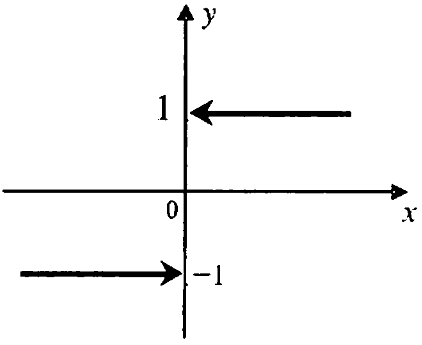
2- ta'rif. Agar $(a;b)$ oraliqni chekli sondagi oraliqlarga bo'lish mumkin bo'lib, bu oraliqlarning har birida $f(x)$ funksiya o'zgarmas qiymat qabul qilsa, u holda $f(x)$ funksiya *zinapoyasimon funksiya* deyiladi. Uzilish nuqtalarida funksiya aniqlangan yoki aniqlanmagan bo'lishi mumkin. Biz quyida eng ko'p qo'llaniladigan zinapoyasimon funksiyalarni qaraymiz.

Signum x. (Signum lotin so'zidan olingan bo'lib, ishora degan ma'noni bildiradi). Signum x funksiya ushbu formula yordamida beriladi.

$$y=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0 \text{ bo'lganda,}\\ 0, & x=0 \text{ bo'lganda,}\\ -1, & x<0 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 24.1- chizmada berilgan bo'lib, u ikkita yarim to'g'ri chiziqlardan va (0; 0) nuqtadan iborat. Bunda yo'nalish (0;1) va (0;—1) nuqtalarning funksiya grafigiga tegishli emasligini ko'rsatadi.

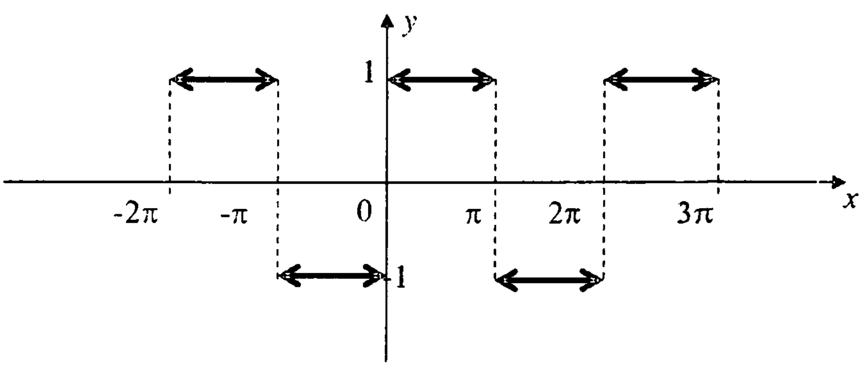
1-misol. $y=\operatorname{sign}\sin x$ funksiyaning grafigini chizing.



24.1- chizma.

Yechilishi. Agar $x\in(-\pi+2k\pi;\ 2k\pi)$ $(k\in Z)$ bo'lsa, u holda $\sin x<0$ bo'ladi. Shuning uchun signum$x$ funksiyaning ta'rifiga ko'ra, signsin $x=-1$. Agar $x\in(2k\pi;\pi+2k\pi;)$, $k\in Z$ bo'lsa, sin $x>0$ bo'ladi. Bundan esa signsin $x=1$ bo'ladi. Agar $x=k\pi$, $k\in Z$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra y=signsin $x=0$ bo'ladi. Shunday qilib, qaralayotgan funksiyaning grafigi 24.2- chizma ko'rinishida tasvirlanadi.

Eslatma. y =sign($f(x)$) funksiyaning grafigini quyidagi tartibda chizish kerak: avvalo $y=f(x)$ funksiya grafigi chizilib, so'ngra bu funksiya grafigining yuqori va pastki tekisliklarda yotgan qismlari aniqlanadi, ya'ni x ning $f(x)>0$, $f(x)<0$ va $f(x)=0$ bo'ladigan qiymatlari aniqlanadi. Undan so'ng, signum x ning ta'rifiga asosan, berilgan funksiya grafigi chiziladi. Bunda $y=\pm1$ to'g'ri chiziqlar



24.2- chizma.

bilan $y=f(x)$ funksiya grafigining kesishish nuqtalari o'zgarishsiz qoldiriladi, ya'ni bu nuqtalar berilgan funksiya grafigiga tegishli bo'ladi.

$y=f(\mathrm{sign}x)$ funksiyaning grafigini chizishda

$$f(\mathrm{sign}x)=\begin{cases} f(1),\ x>0 \text{ bo'lganda,} \\ f\ (0),\ x=0 \text{ bo'lganda,} \\ f(-1),\ x<0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

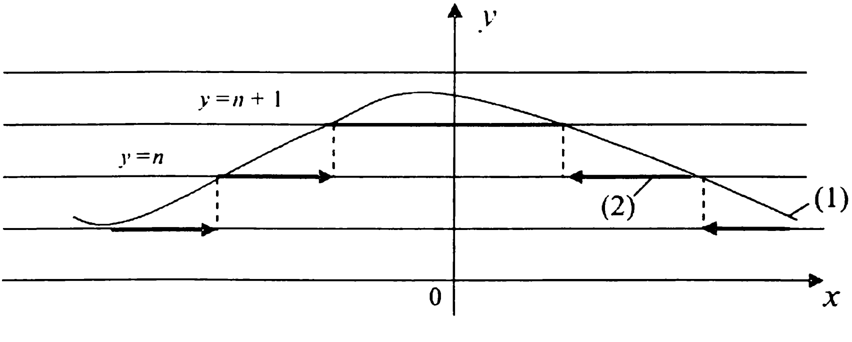
formula e'tiborga olinadi. Bunda -1, 0, 1 qiymatlar funksiyaning aniqlanish sohasiga qarashli ekanligini hisobga olish kerak bo'ladi.

2. $y=[f(x)]$ **ko'rinishdagi funksiyaning grafigini yasash.** $y=[f(x)]$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini chizish quyidagi tartibda bajariladi (24.3-chizma):

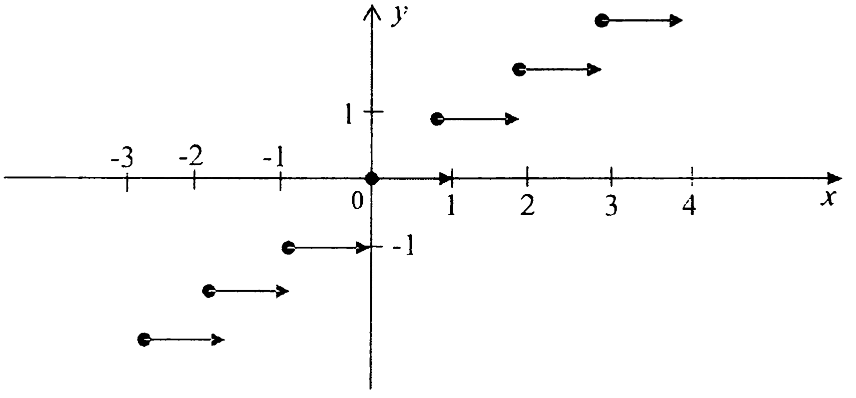
1) $y=f(x)$ funksiya grafigi chiziladi;

2) $y=n(n\in Z)$ to'g'ri chiziqlar chizilib, $y=n$ va $y=n+1$ to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan oraliqlardan biri qaraladi.

3) $y=n$, $y=n+1$ to'g'ri chiziqlar bilan $y=f(x)$ funksiya grafigining kesishish nuqtalari $y=[f(x)]$ funksiyani grafigiga kiradi, qaralayotgan oraliqdagi $y=[f(x)]$ funksiyaning boshqa nuqtalari esa shu oraliqdagi funksiya grafigining $y=n$ to'g'ri chiziqlarga proyeksiyasi sifatida olinadi, chunki bu oraliqda $y=f(x)$ grafigining ixtiyoriy M nuqtasining y_0 ordinatasi $n<y_0<n+1$ oraliqda bo'lib, uning butun qismi $\lfloor y_0\rfloor=n$ teng bo'ladi.



24.3- chizma. (1) $y=f(x)$; (2) $y=[f(x)]$.



24.4- chizma.

$y=f(x)$ funksiya grafigi joylashgan boshqa oraliqlardagi $y=[f(x)]$ funksiya grafigi ham xuddi 3) banddagi singari chiziladi.

2-misol. $y=[x]$($[x]$ ifoda —x ning butun qismi) funksiyaning grafigini chizing.

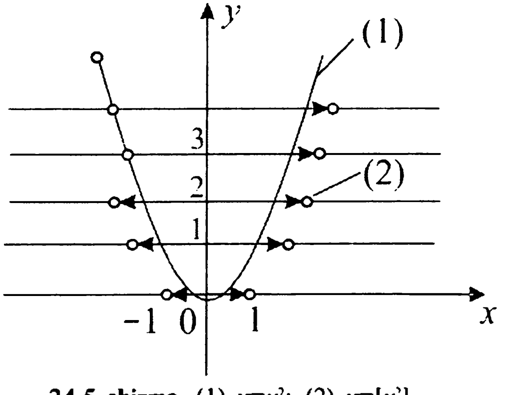
Yechilishi. Agar $x=n+r$ (bunda n—butun son, $0\leq r\leq 1$) bo'lsa, u holda $[x]=n$, ya'ni u x dan oshmaydigan eng katta butun songa teng bo'ladi. Bu funksiya $x=n$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki:

$$\lim_{x\to n-0} f(x)=\lim_{x\to n-0}[x]=n-1,\quad \lim_{x\to n+0} f(x)=\lim_{x\to n+0}[x]=n.$$

Bu funksiyaning grafigi 24.4- chizmada tasvirlangan.

$y=[f(x)]$ ko'rinishdagi funksiyalarning grafigini yasashga doir misollar keltiramiz.

3- misol. $y=[x^2]$ funksiyaning grafigi 24.5-chizmada tasvirlangan.



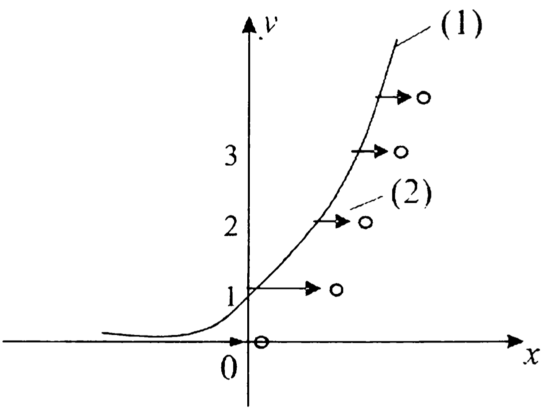
24.5-chizma. (1) $y=x^2$; (2) $y=[x^2]$.

4-misol. $y=[2^x]$ funksiyaning grafigi 24.6- chizmada tasvirlangan.

3. $y=f([x])$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini yasash. $y=f([x])$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini chizish quyidagi tartibda bajariladi (24.7- chizma): 1) $y=f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi;

2) $x=n$ $(n\in Z)$to'g'ri chiziqlar chizilib, $x=n$, $x=n+1$to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan oraliqlardan biri qaraladi;

3) $y=f(x)$ funksiya grafigining $x=n$, $x=n+1$ to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari $y=f([x])$ funksiya grafigiga kiradi, chunki ularning abssissalari butun sonlardan iborat, qaralayotgan



24.6- chizma. (1) $y=2^x$. (2) $y=[2^x]$.

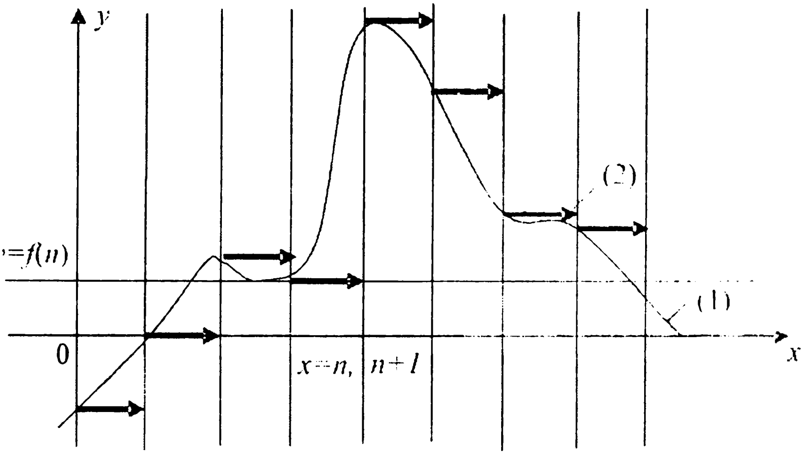
oraliqdagi $y=f([x])$ funksiya grafigining boshqa nuqtalari esa shu oraliqdagi funksiya grafigining $y=f(n)$ to'g'ri chiziqqa proyeksiyasi sifatida olinadi, chunki bu oraliqdagi ixtiyoriy N nuqtaning x_0 abssissasi $n<x_0<n+1$ da bo'lib uning butun qismi $[x_0]=n$ bo'ladi.

4) $y=f(x)$ funksiya grafigi joylashgan boshqa oraliqlardagi $y=f([x])$ funksiya grafigi xuddi 3) bandidagi singari chiziladi.

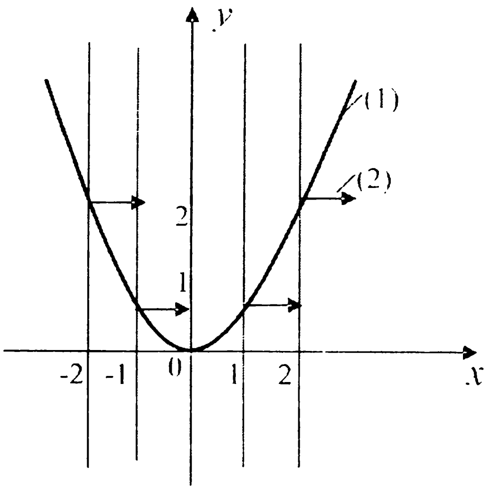
$y=f([x])$ ko'rinishdagi funksiyalarning grafigini yasashga doir misollar keltiramiz.

5-misol. $y=[x]^2$ funksiyaning grafigi 24.8 - chizmada tasvirlangan.

6-misol. $y=2^{[x]}$ funksiyaning grafigi 24.9- chizmada tasvirlangan.



24.7- chizma. (1) $y=f(x)$. (2) $y=f([x])$.



24.8- chizma. (1) $y=x^2$; (2) $y=[x]^2$.

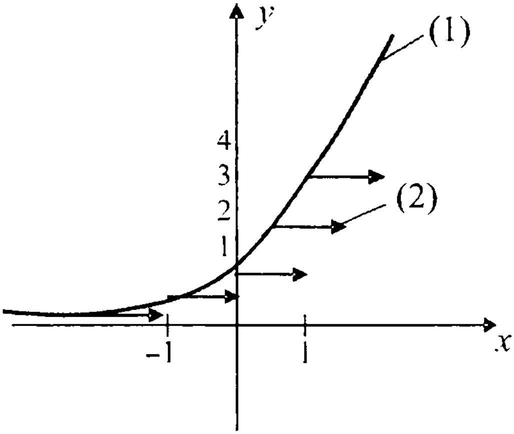
4. $y=\{f(x)\}$ ko'rinishdagi funksiyalarning grafigini yasash.

$\{f(x)\}=f(x)-[f(x)]$ bo'lgani uchun $y=\{f(x)\}$ funksiya grafigini chizish $y=f(x)$ va $y=[f(x)]$ funksiyalar ayirmasining grafigini chizishga keltiriladi.

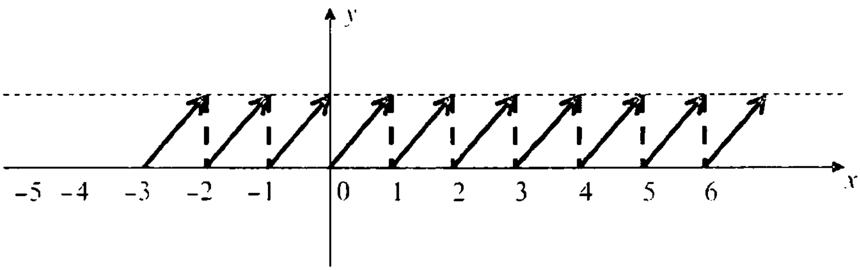
Amaliyotda $y=\{f(x)\}$ funksiyaning grafigini chizish quyidagi tartibda bajariladi:

1) $y=f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi;

2) $y=n$ $(n\in Z)$ to'g'ri chiziqlar chiziladi;



24.9- chizma. (1) $y=2^x$; (2) $y=[2^x]$



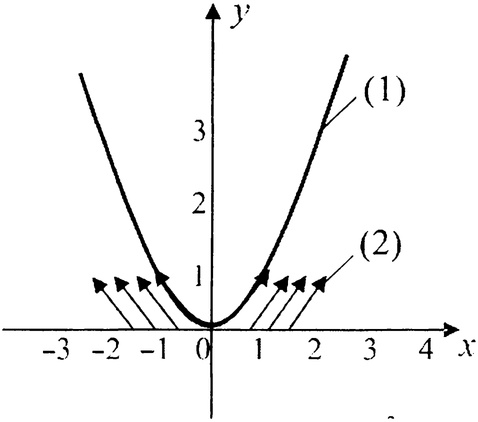
24.10- chizma.

3) $y=n$ to‘g‘ri chiziqlar bilan $y=f(x)$ funksiya grafigining kesishgan nuqtalaridan ordinatalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi, natijada funksiyaning $y=f\{(x)\}$ qiymatlari hosil bo‘lgan to‘rtburchakka tushadi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi yuqori yarim tekislikdagi to‘rtburchakka tushgan qismini n masofa pastga, pastki tekislikdagi to‘rtburchakka tushgan $|n|+1$ qismini masofagacha yuqoriga ko‘chiriladi.

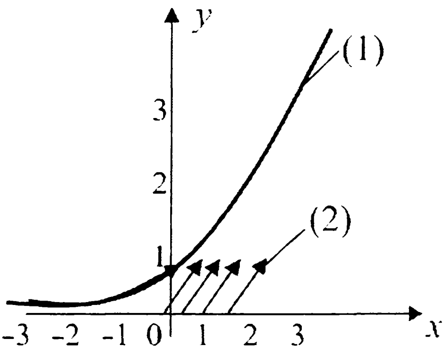
$y=\{f(x)\}$ ko‘rinishdagi funksiyalarning grafigini yasashga doir misollar keltiramiz.

7-misol. $y=\{x\}=x-[x]$ ($\{x\}$ ifoda x ning kasr qismi) funksiyaning grafigi 24.10- chizmada tasvirlangan.

8- misol. $y=\{x^2\}$ funksiyaning grafigi 24.11- chizmada tasvirlangan.



24.11- chizma. (1) $y=x^2$; (2) $y=\{x^2\}$.



24.12- chizma. (1) $y=2^x$; (2) $y=\{2^x\}$.

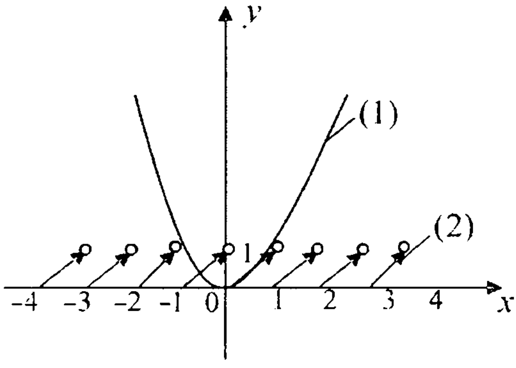
9- misol. $y=\{2^x\}$ funksiyaning grafigi 24.12- chizmada tasvirlangan.

5. $y=f(\{x\})$ **ko'rinishdagi funksiyaning grafigini yasash.** $y=f(\{x\})$ davriy funkiya bo'lib, uning davri $\omega=1$ ga teng. $y=f(\{x\})=f(x)$, $0\leq x\leq 1$ funksiyaning bu xususiyatlarini e'tiborga olgan holda, uning grafigi quyidagi tartibda chiziladi:

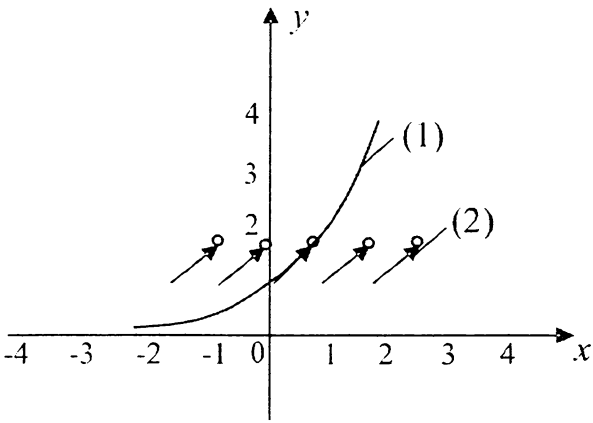
1) $[0;1]$ da $y=f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi;

2) $y=f(\{x\})$ funksiyaning davriyligini e'tiborga olib, $y=f(x)$ funksiya grafigi davriy davom ettiriladi.

$y=f(\{x\})$ ko'rinishdagi funksiyalarning grafigini yasashga doir misollar keltiramiz.



24.13- chima. (1) $y=x^2$; (2) $y=\{x\}^2$.



24.14- chizma. (1) $y=2^x$; (2) $y=2^{\{x\}}$.

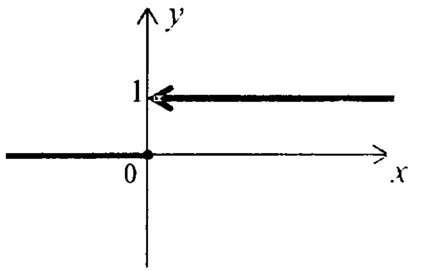
10- misol. $y=\{x\}^2$ funksiyaning grafigi 24.13- chizmada tasvirlangan.

11- misol. $y=2^{\{x\}}$ funksiyaning grafigi 24.14- chizmada tasvirlangan.

Xevisaydning birlik funksiyasi. Bu funksiya ushbu ko‘rinishda aniqlanadi:

$$y=\eta(t)=\begin{cases} 1, \ t>0 \ \text{bo‘lganda}, \\ 0, \ t<0 \ \text{bo‘lganda}. \end{cases}$$

Uning grafigi 24.15- chizmada tasvirlangan.



24.15- chizma.

$y=A\{\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+...\}$ **ko'rinishdagi funksiya.** Bunda A=const,

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau \text{ bo'lganda,}\\ 1, & t>\tau \text{ bo'lganda.}\end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigini quyidagi tartibda chizish qulay bo'ladi. Avvalo birinchi ikki qo'shiluvchining, ya'ni

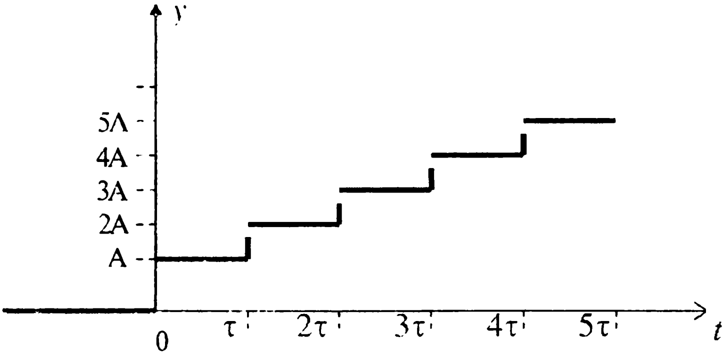
$$\eta(t)+\eta(t-\tau)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ bo'lganda,}\\ 1, & 0<t<\tau \text{ bo'lganda,}\\ 2, & \tau<t<2\tau \text{ bo'lganda}\end{cases}$$

funksiyaning grafigi chiziladi, so'ngra birinchi uch qo'shiluvchi

$$\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ bo'lganda,}\\ 1, & 0<t<\tau \text{ bo'lganda,}\\ 2, & \tau<t<2\tau \text{ bo'lganda,}\\ 3, & \tau<t<2\tau \text{ bo'lganda}\end{cases}$$

funksiyaning grafigi chiziladi va hokazo. Bu jarayon shunday davom ettiriladi. Berilgan funksiyaning grafigi 24.16- chizmada tasvirlangan.

To'g'ri burchakli impulsning davriy takrorlanishi quyidagi ko'rinishdagi



24.16- chizma.

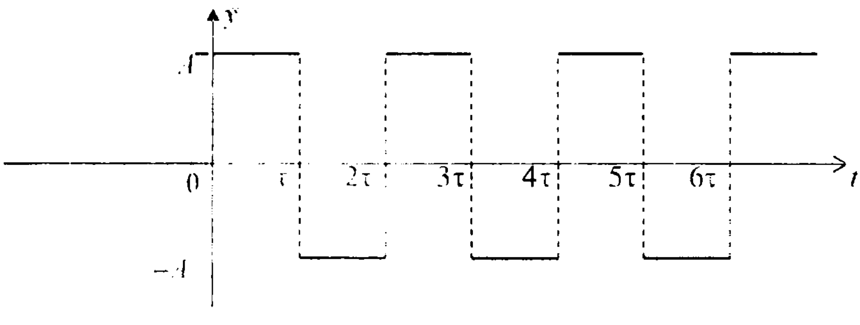
$$y=A\{\eta(t)-2\eta(t-\tau)+2\eta(t-2\tau)+\ldots\}$$

funksiya bilan ifodalanadi (24.17- chizma).

„π- tasvirdagi“ impulslar ketma-ketligi.

„π-tasvirdagi“ impulslar ketma-ketligi quyidagi

$$y=A\{\eta(t)-\eta(t-\tau)+\eta(t-T)-\eta(t-T-\tau)+\eta(t-2T)-\ldots\}$$



24.17- chizma.

ko‘rinishda bo‘ladi. Uning grafigi 24.18- chizmada tasvirlangan

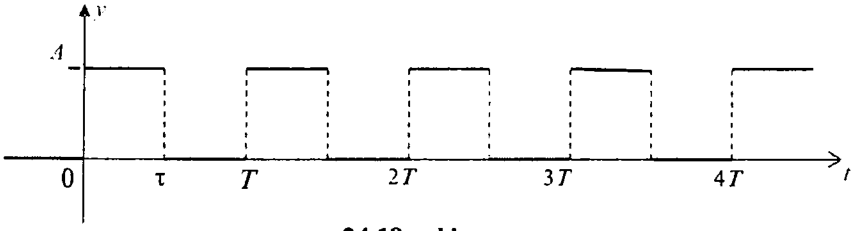
6. Arrasimon funksiya. Arrasimon funksiyaning analitik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$y=E\{(t-t\eta(t-\tau)+(t-T)\eta(t-T)-(t-T)\eta(t-T-\tau)+$$

$$+(t-2T)\eta(t-2T-\tau)-\ldots\},$$

bunda $E=\text{const}$, $T>\tau$.

Arrasimon funksiyaning grafigi quyidagi tartibda chiziladi: Avvalo



24.18- chizma.

$$E\{t - t\eta(t-\tau)\} = \begin{cases} 0, & t<0 \text{ bo? lganda}, \\ Et, & 0<t<\tau \text{ bo? lganda}, \\ 0, & t>T \text{ bo? lganda}, \end{cases}$$

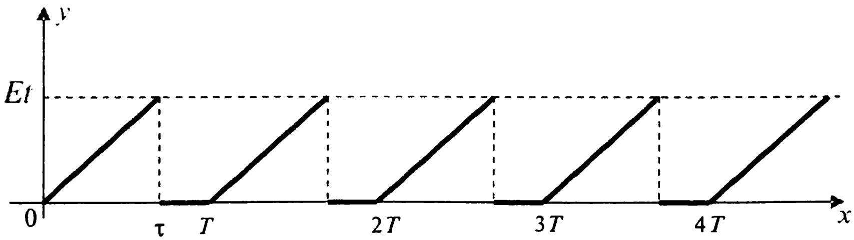
bunda

$$t\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t<\tau \text{ bo‘lganda}, \\ t, & t>\tau \text{ bo‘lganda} \end{cases}$$

funksiya qaraladi. So‘ngra

$$E\{t - t\eta(t-\tau) + (t-T)\eta(t-T)\} = \begin{cases} 0, & t<0 \text{ bo‘lganda}, \\ Et, & 0<t<\tau \text{ bo‘lganda}, \\ 0, & \tau<t<T \text{ bo‘lganda}, \\ E\,(t-T), & t>T \text{ bo‘lganda} \end{cases}$$

funksiya qaraladi. Bu funksiyaning grafigi 24.19- chizmada tasvirlangan.



24.19- chizma.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi funksiyalarning grafiklarini chizing:

1. $y=x[x]$. **2.** $y=[\frac{1}{x}]$. **3.** $y=(-1)^{[x^2]}$.

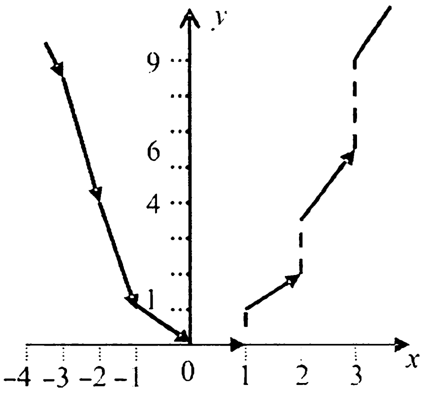
4. $y=[\sin x]$. **5.** $y=\sin[x]$. **6.** $y=[\lg x]$.

7. $y=\arccos[x]$. **8.** $y=\{\lg x\}$ **9.** $y=\frac{1}{\{x\}}$.

10. $y=\cos\{x\}$.

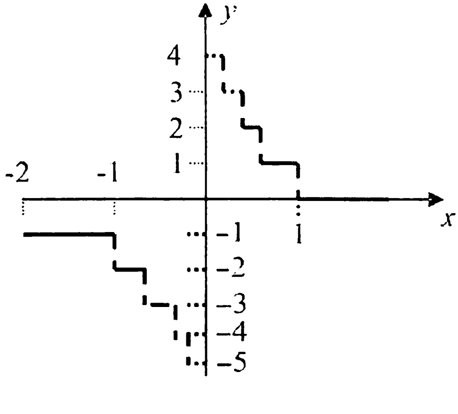
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



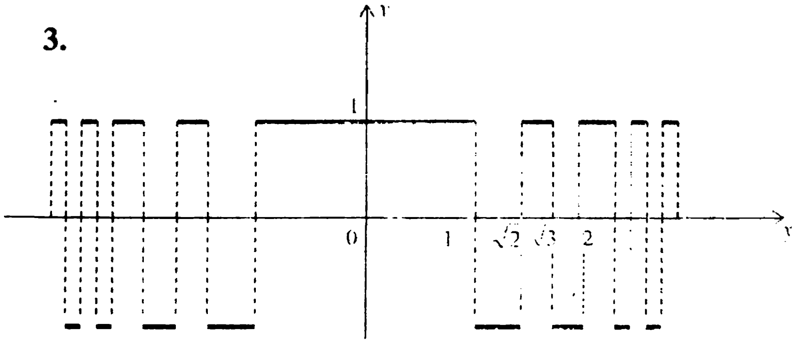
1- chizma.

2.



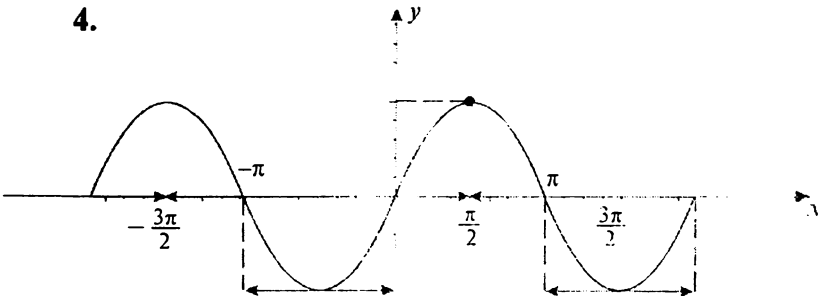
2- chizma.

3.



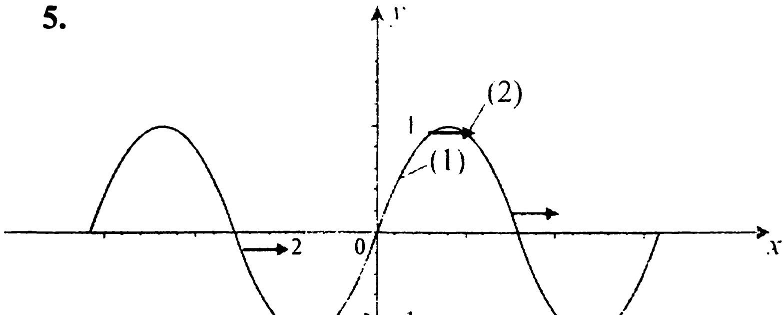
3- chizma.

4.



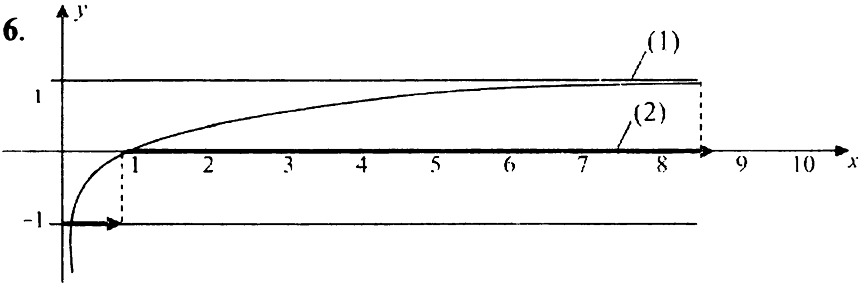
4- chizma.

5.



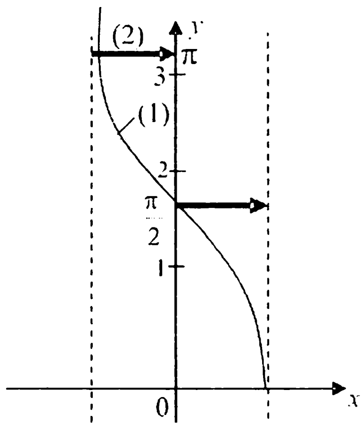
5- chizma. (1) $y = \sin x$; (2) $y = \sin [x]$.

6.



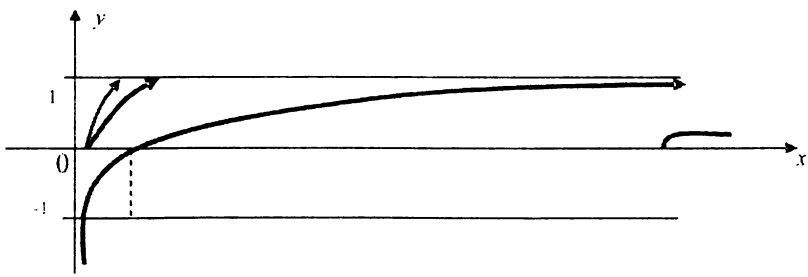
6- chizma. (1) $y = \lg x$; (2) $y = [\lg x]$.

7.



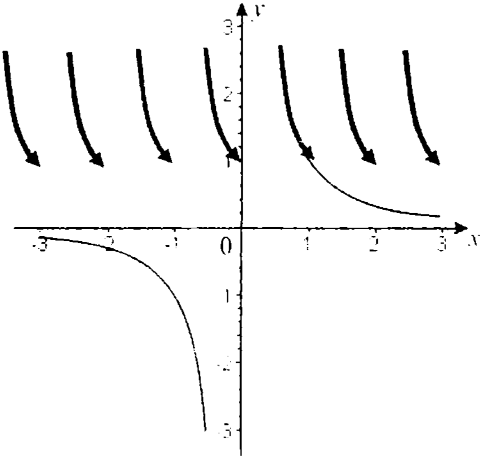
7- chizma. (1) $y = \arccos x$; (2) $y = \arccos[x]$.

8.



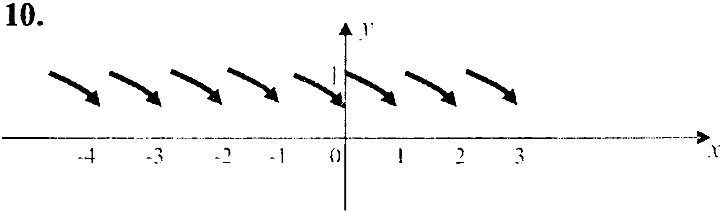
8- chizma.

9.



9- chizma.

10.



10- chizma.

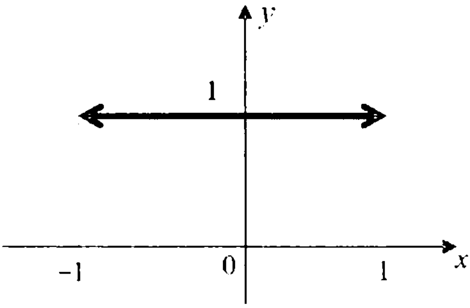
25-§. LIMIT ORQALI BERILGAN FUNKSIYALAR

1. Limit orqali berilgan funksiyalar. Limit orqali berilgan funksiyalarning grafigini chizishda avvalo limit hisoblanib, so‘ngra uning grafigi chiziladi.

1- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x)^{2n}$, $x\leq 1$.

Agar $|x|=1$ bo‘lsa, u holda $y=0$, agar $x=0$ bo‘lsa, $y=1$ bo‘ladi. Agar $|x|<1$ bo‘lsa, u holda $n\to\infty$ da $|x|^n\to 0$. Shunday qilib, $y=1$ bo‘lib, $x=-1$, $x=1$ nuqtalarda funksiya uzilishga ega bo‘lar ekan. Bu funksiyaning grafigi 25.1- chizmada tasvirlangan.

2- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$, $x\geq 0$.



25.1- chizma.

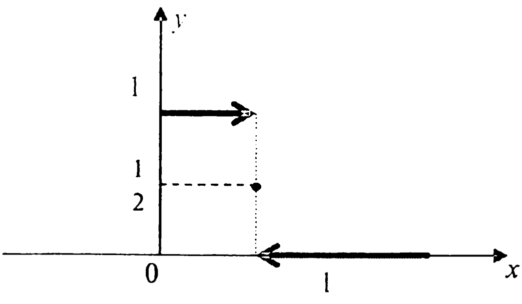
Agar $x=0$ bo'lsa, $y=1$ bo'ladi, $0 < x < 1$ bo'lganda esa $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$. Demak, $y=1$. Agar $x>1$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\infty$. Bu holda $y=0$ bo'ladi. Agar $x=1$ bo'lsa, $y=\frac{1}{2}$ bo'ladi.

Shunday qilib

$$y=\begin{cases} 1, & 0\le x<1 \text{ bo'lganda}, \\ \frac{1}{2}, & x=1 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x>1 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

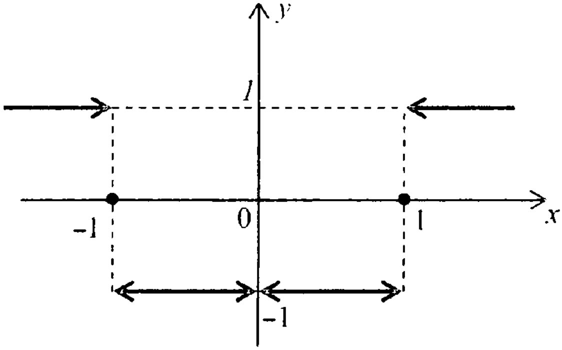
Bu funksiyaning grafigi 25.2- chizmada tasvirlangan.

3- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$, $x\neq 0$.



25.2- chizma.

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, u holda $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. Bundan agar $|x|=1$ bo'lsa, $y=0$ bo'ladi; agar $0<|x|<1$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y=-1$ bo'ladi. $|x|>1$ bo'lganda, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$ bo'ladi. Shunday qilib, $x=\pm 1$ va $x=0$ nuqtalarda funksiya uzilishga ega bo'lar ekan. Bu funksiyaning grafigi 25.3- chizmada tasvirlangan.



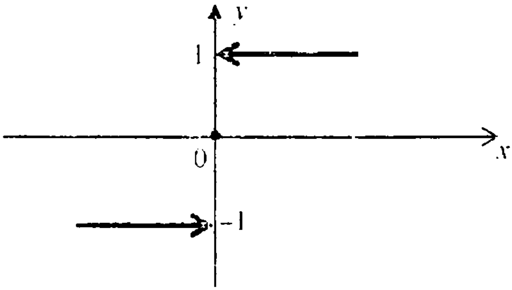
25.3- chizma.

4- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$. Agar $x=0$ bo'lsa, $y=0$ bo'ladi; agar $x>0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-x}=0$ bo'ladi. Demak, $y=1$. Agar $x<0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-x}=0$ bo'lib, $y=-1$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$y=\begin{cases} 1, & x>0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x=0 \text{ bo'lganda}, \\ -1, & x<0 \text{ bo'lganda}, \end{cases}$$

Bu funksiya $y=\operatorname{sign} x$ ni ifodalar ekan. Bu funksiyaning grafigi 25.4- chizmada tasvirlangan.

5- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$, $x\geq 0$. $x=0$ va $x=1$ bo'lganda, $y=1$ bo'ladi. $0<x<1$ bo'lganda, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$ bo'ladi, u holda $y=1$. Agar



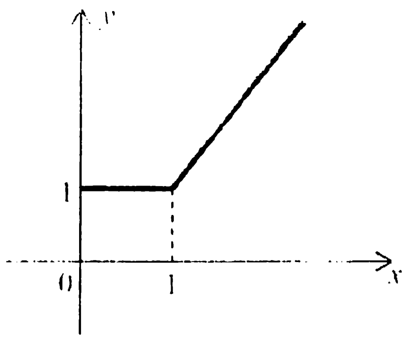
25.4- chizma.

$x>1$ bo'lganda esa $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\infty$, bundan $y=x$ bo'ladi. Bu limitni boshqacha usul bilan ham hisoblash mumkin:

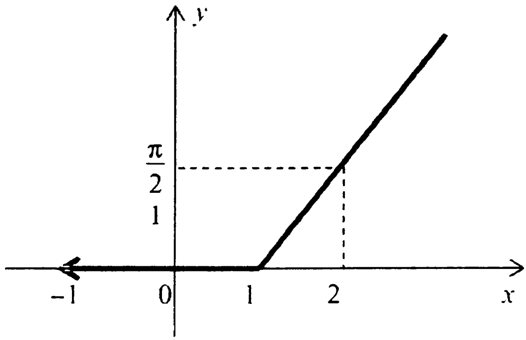
$$\lim_{n\to\infty}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}=x\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}x\left(1+\frac{1}{nx^n}+\ldots\right)=x.$$

Bu funksiyaning grafigi 25.5- chizmada tasvirlangan.

6- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[(x-1)\operatorname{arctg}x^n]$. $x=0$ bo'lganda, $y=0$ bo'ladi, agar $|x|<1$ bo'lganda ham $y=0$, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$. $x\leq-1$ bo'lganda, funksiya mavjud emas. Agar $x>1$ bo'lganda esa $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\infty$. Demak, $y=\frac{\pi}{2}(x-1)$ bo'lar ekan. $x=1$ bo'lganda, $y=0$.



25.5- chizma.



25.6- chizma.

Shunday qilib,

$$y=\begin{cases}0, -1<x<1 \text{ bo‘lganda} \\ \frac{\pi}{2}(x-1), \ x\geq 1 \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$$

Berilgan funksiyaning grafigi 25.6- chizmada tasvirlangan.

7- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+e^{n(x+1}})$.

Agar $x+1>0$ bo‘lsa,

$$\lim_{n\to\infty}(1+e^{n(x+1)})^{\frac{1}{n}}=e^{x+1}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{e^{n(x+1)}})^{\frac{1}{n}}-e^{x+1}.$$

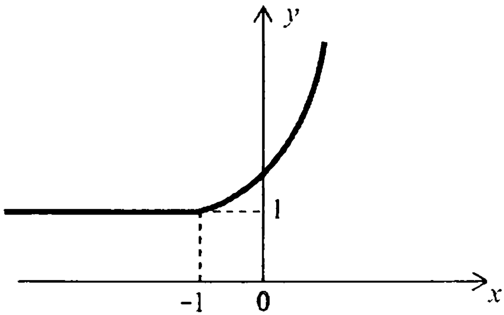
Agar $x+1<0$ bo‘lsa, $y=1$, chunki $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x+1)}=0$.

Shunday qilib,

$$y=\begin{cases}1, \ x\leq -1 \text{ bo‘lganda,} \\ e^{x+1}, \ x>-1 \text{ bo‘lganda.}\end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 25.7- chizmada tasvirlangan.

8- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}, \quad x\geq 0.$



25.7- chizma.

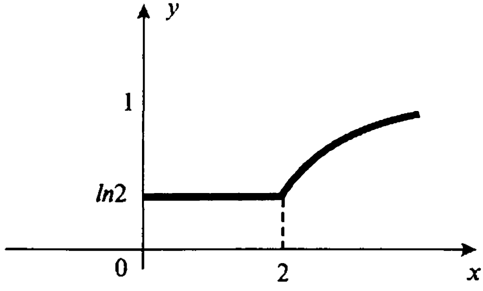
$x=0$ va $x=1$ bo'lganda, $y=\ln 2$ bo'ladi. Agar $0<x<1$ bo'lganda, $y=\ln 2$, $1<x<2$ bo'lganda esa

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln 2+\ln(1+(\frac{x}{2})^n)}{n}=\ln 2.$$

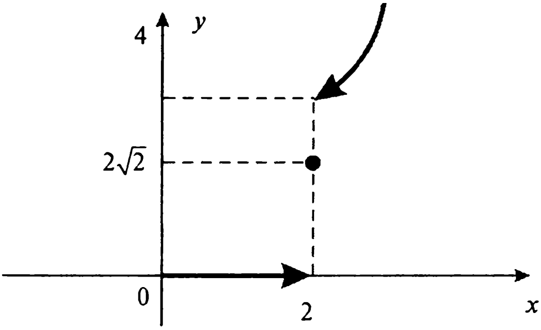
Agar $x=2$ da, $y=\ln 2$ bo'ladi, agar $x>2$ bo'lganda esa $y=\ln x$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$y=\begin{cases}\ln 2, & 0\le x\le 2 \text{ bo'lganda,}\\ \ln x, & x>2 \text{ bo'lganda}\end{cases}$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiyaning grafigi 25.8- chizmada tasvirlangan.



25.8- chizma.



25.9- chizma.

9- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$, $x\geq 0$. $x=0$ va $x=1$ bo‘lganda, $y=0$.

Agar $0<x<1$ bo‘lganda, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1}=0$ bo‘lgani uchun $y=0$ bo‘ladi. $1<x<2$ bo‘lganda esa

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{2^n\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

Agar $x=2$ bo‘lsa, $y=2\sqrt{2}$. $x>2$ bo‘lganda esa

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}},=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}}=x^2.$$

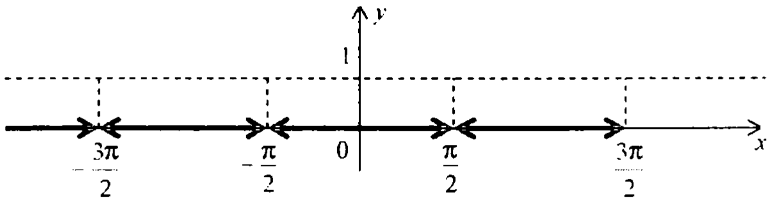
Shunday qilib,

$$y=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq 2 \text{ bo‘lganda},\\ 2\sqrt{2}, & x=2 \text{ bo‘lganda},\\ x^2, & x>2 \text{ bo‘lganda}\end{cases}$$

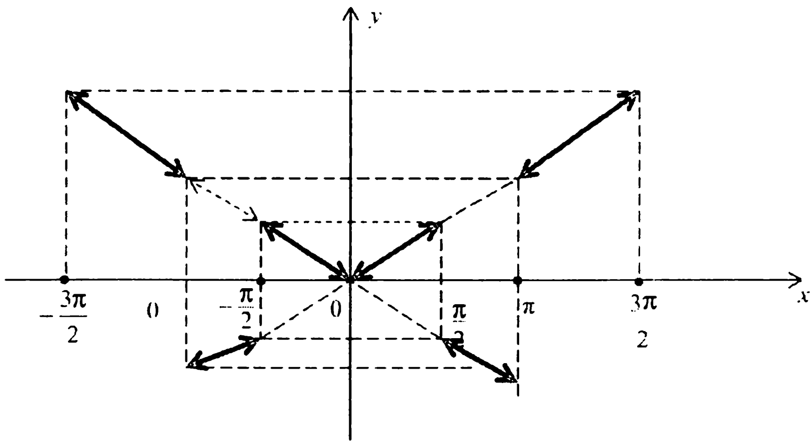
funksiyaga ega bo‘lamiz.Bu funksiyaning grafigi 25.9- chizmada tasvirlangan.

10- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$.

Agar $|\sin x|<1$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x=0$ bo'ladi, Demak, $y=0$. $|\sin x|=1$ bo'lganda, $y=1$ bo'ladi. Shunday qilib,



25.10- chizma.



25.11- chizma.

$$y=\begin{cases}0, & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{bo'lganda,}\\ 1, & x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ (k\in Z)\ \text{bo'lganda}\end{cases}$$

funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi 25.10- chizmada tasvirlangan.

11- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\cdot\operatorname{ctg}x)]$.

Agar $\operatorname{ctg}x=0$ bo'lsa, $y=0$. Agar $\operatorname{ctg}x>0$, u holda $y=\frac{\pi}{2}x$; agar

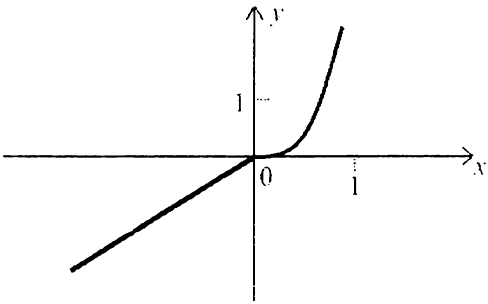
$\operatorname{ctg} x<0$ bo‘lsa, $y=-\frac{\pi}{2}x$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$y=\begin{cases} 0, \ x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{bo‘lganda}, \\ \frac{\pi}{2}x, \ \pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k \ \text{bo‘lganda}, \\ -\frac{\pi}{2}x, \ \frac{\pi}{2}+\pi k<x<\pi+\pi k; \ k\in Z \ \text{bo‘lganda} \end{cases}$$

funksiyaga ega bo‘lamiz. Berilgan funksiya juft. Uning grafigi 25.11- chizmada tasvirlangan.

12- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Agar $x=0$ bo‘lsa, $y=0$ bo‘ladi; agar $x>0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\infty$ bo‘lgani uchun $y=x^2$ bo‘ladi; agar $x<0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=0$ bo‘lgani uchun $y=x$ bo‘ladi.



25.12- chizma.

Demak,

$$y=\begin{cases} x^2, \ x\leq 0 \ \text{bo‘lganda}, \\ 0, \ x=0 \ \text{bo‘lganda}, \\ x, \ x<0 \ \text{bo‘lganda} \end{cases}$$

funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiyaning grafigi 25.12- chizmada tasvirlangan.

13- misol. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}\lambda x.$

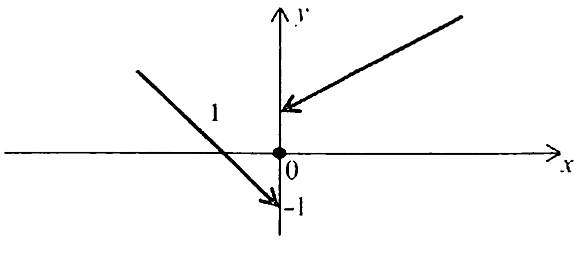
Agar $x=0$ bo‘lsa, $y=0$; agar $x>0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\operatorname{th}\lambda x=1$ bo‘lgani uchun $y=1+x$ bo‘ladi. Agar $x<0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\operatorname{th}\lambda x=-1$ bo‘lgani uchun $y=-(1+x)$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$y=\begin{cases}1+x, & x>0 \text{ bo‘lganda,}\\ 0, & x=0 \text{ bo‘lganda,}\\ -x-1, & x<0 \text{ bo‘lganda}\end{cases}$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiyaning grafigi 25.13- chizmada tasvirlangan.

14- misol. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}+1},\ x\geq 0.$

Agar $0\leq x\leq 1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}=0$ bo‘ladi, bundan $y=\sqrt{x}$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}<1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}=0$, bundan $-\frac{\pi}{k}+\pi k<x<\frac{\pi x}{4}<\frac{\pi}{4}+\pi k$ yoki $4k-1<x<4k+1$ bo‘lganda $y=\sqrt{x}$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}>1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}=\infty$ bo‘ladi, bundan esa $-\frac{\pi}{2}+\pi k<\frac{\pi x}{4}<-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\frac{3\pi}{2}+\pi k<\frac{\pi x}{4}<-\frac{\pi}{2}+\pi k$, ya‘ni $4k-2<x<4k-1$, $4k-3<x<4k-2$ bo‘lganda $y=x$ bo‘ladi. Agar

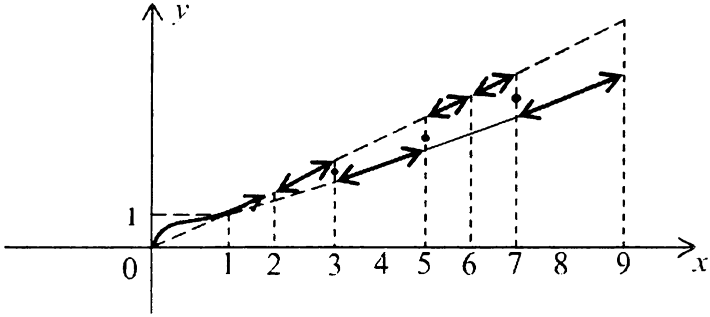


25.13- chizma.

$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=1$ bo‘lsa, $\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, ya‘ni $x=2k+1$ lar uchun $y=\frac{x+\sqrt{x}}{2}$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$y=\begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}}{2}, \ x=2k+1 \text{ bo‘lganda}, \\ \sqrt{x}, \ 4k-1<x<4k+1; \ 0\le x<1 \text{ bo‘lganda}, \\ x, \ 4k-2<x<4k-1 \text{ va } 4k-3<x<4k-2, \ k\in Z \text{ bo‘lganda}. \end{cases}$$

funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiyaning grafigi 25.14- chizmada asvirlangan.



25.14- chizma.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Limitlar orqali berilgan funksiyalarning grafiklarini chizing.

1. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$, $x\ge 0$.

2. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

3. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x\ge 0$.

4. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

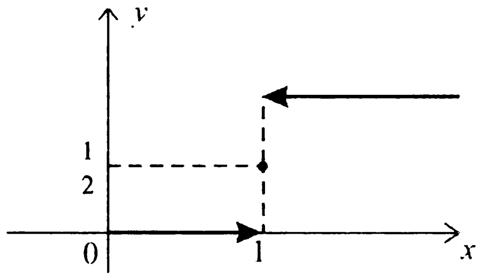
5. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

6. $y=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

7. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{xt}}{1+e^{tx}}$. **8.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2}+x^{2}}{x^{2n}+1}$.

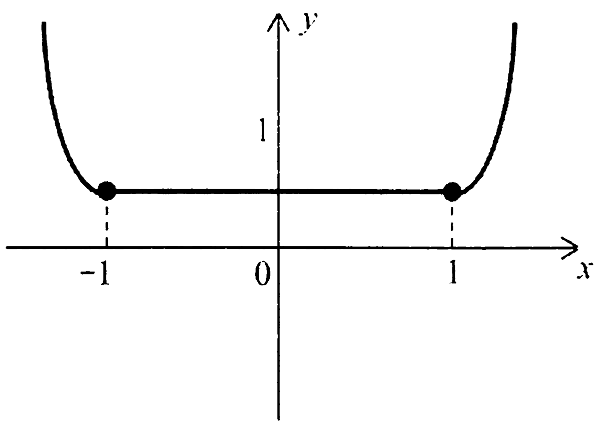
Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1.



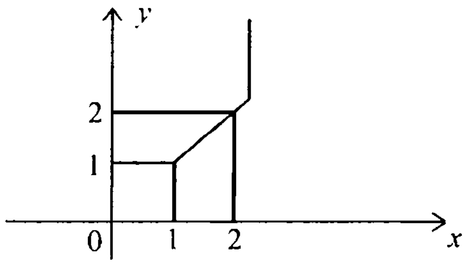
1- chizma.

2.



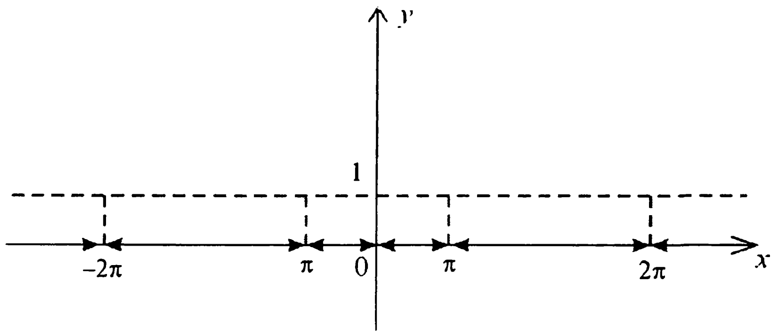
2- chizma.

3.



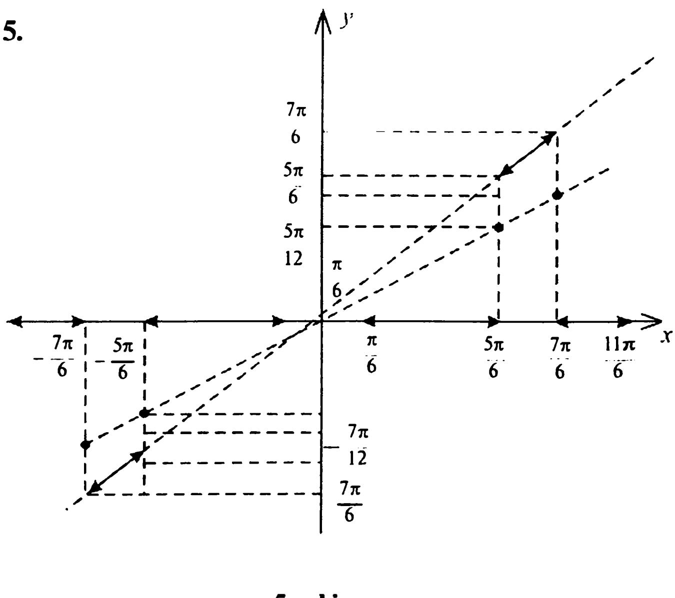
3- chizma.

4.



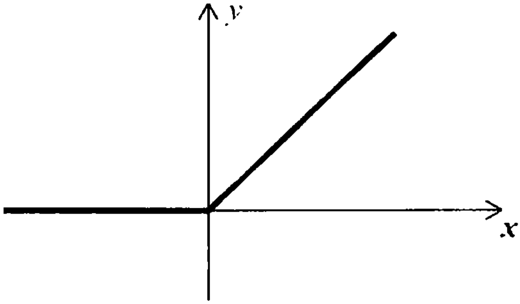
4- chizma.

5.



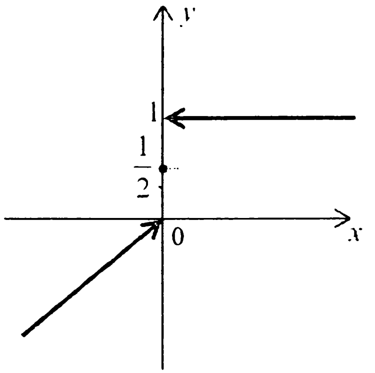
5- chizma.

6.



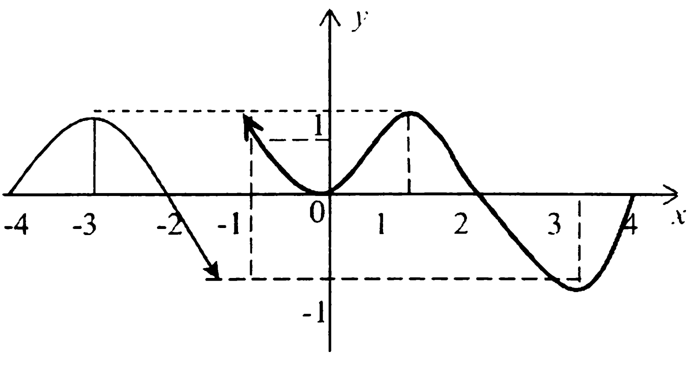
6- chizma.

7.



7- chizma.

8.



8- chizma.

Umumiy holda elementar funksiyalar bilan ifoda qilinmaydigan funksiyalar *maxsus funksiyalar* deyiladi. Bularning ko'pchiligi maxsus ko'rinishdagi differensial tenglamalarning yechimlari bo'lib, ular integrallar orqali ifoda qilinadi.

1. Ko'rsatkichli integral funksiya. Ko'rsatkichli integral funksiyaning ko'rinishi

$$E_n(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{t^n}\,dt \quad (n = 0,1,2,...; x > 0)$$

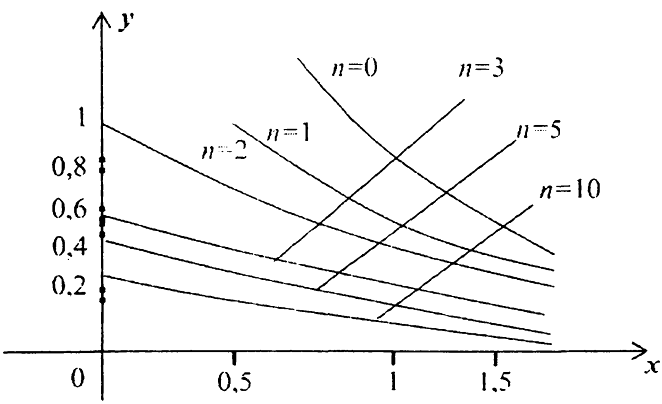
shaklida bo'ladi. Bu funksiya quyidagi rekurrent formula orqali hisoblanadi: $E_{n+1}(x) = \frac{1}{4}\left[e^{-x} - xE_n(x)\right]$, $n = 1,2,3,...$. Xususiy holda, $E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, $E_1(x) = -C - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k \cdot k!}$, bunda C=0, 57721156647 — Eyler o'zgarmasi. Bu funksiyaning grafigi 26.1-chizmada tasvirlangan.

2. Integral sinus funksiya. Ushbu

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

integral *integral sinus funksiya* deb ataladi va uni

$$\mathrm{Si}x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$



26.1- chizma.

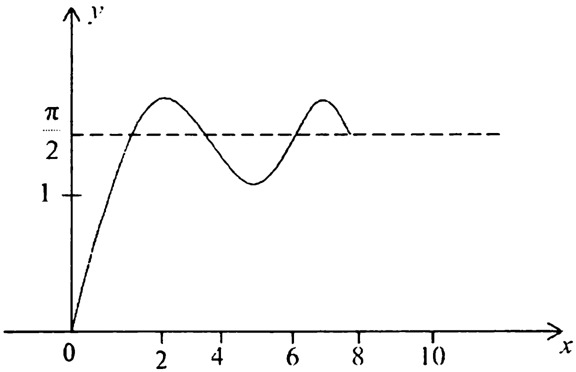
kabi belgilanadi. Bu funksiya qatorga yoyish bilan hisoblanadi:

$$\mathrm{Si}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

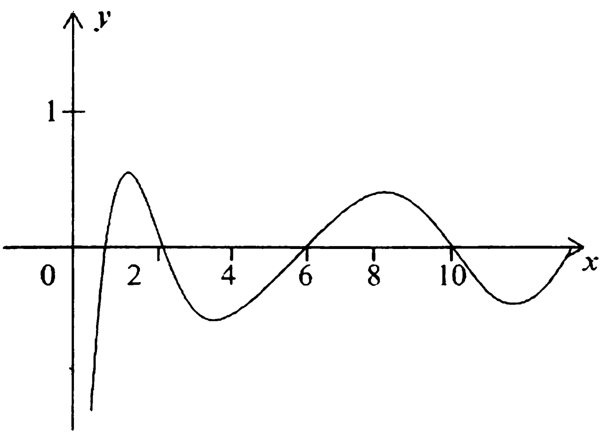
Bu funksiya $y = \frac{\pi}{2}$ gorizontal asimptotaga ega bo'lib, uning grafigi 26.2- chizmada tasvirlangan.

3. Integral kosinus funksiya. Ushbu

$$C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$$



26.2- chizma.



26.3- chizma.

funksiya *integral kosinus funksiya* deyiladi va u qatorga yoyish bilan hisoblanadi:

$$\mathrm{Si}x = C + \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}.$$

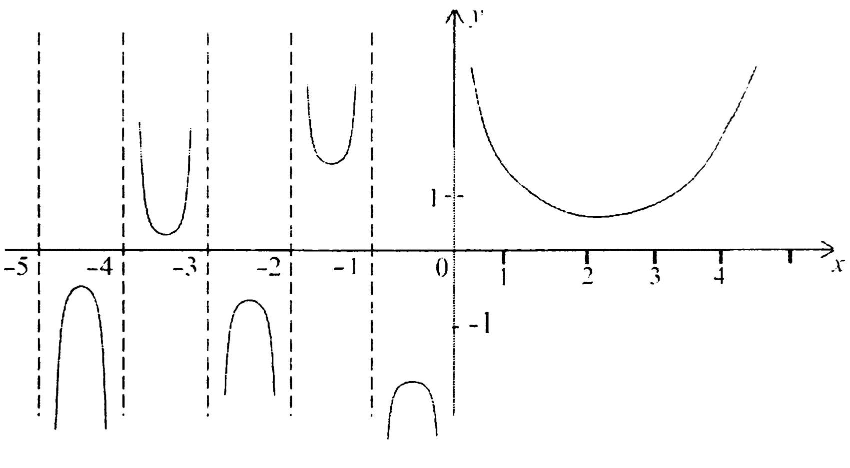
Bu funksiya uchun Ox o‘qi gorizontal asimptota bo‘lib hisoblanadi. Kosinus integral funksiyaning grafigi 26.3- chizmada tasvirlangan.

4. Gamma funksiya. Ushbu

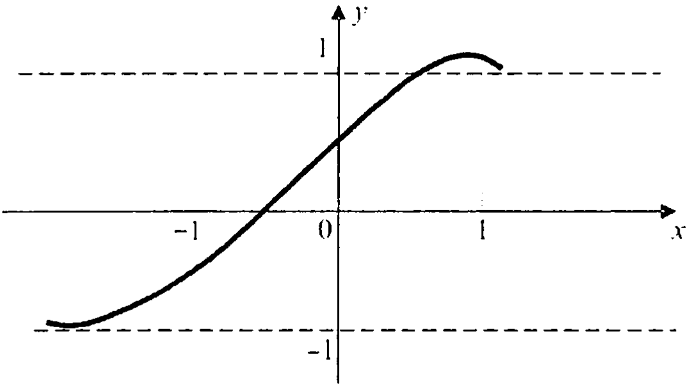
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

ko‘rinishdagi integral *gamma funksiya* (*Eyler integrali*) deb ataladi. Bu funksiya $x=-n$ ($n=0,12,..$) nuqtalarda uzilishlarga ega bo‘lib, ularga mos ravishda vertikal o‘q asimptota bo‘ladi. Gamma funksiyaning grafigi 26.4- chizmada tasvirlangan.

5. Ehtimollar integrali. Quyidagi $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ integralga *ehtimollar integrali* deyiladi va u $\mathrm{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ kabi belgilanadi.



26.4- chizma.



26.5- chizma.

Bu funksiya qatorga yoyish bilan hisoblanadi:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Ehtimollar integral funksiyasining grafigi 26.5- chizmada tasvirlangan.

6. Elliptik integrallar. Quyidagi integrallar mos ravishda *birinchi* va *ikkinchi tur elliptik integrallar* deyiladi:

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}},$$

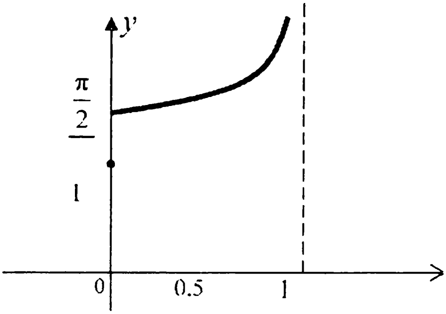
$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\sin^2\theta}\, d\theta.$$

Bu integrallar ham qatorga yoyish bilan hisoblanadi:

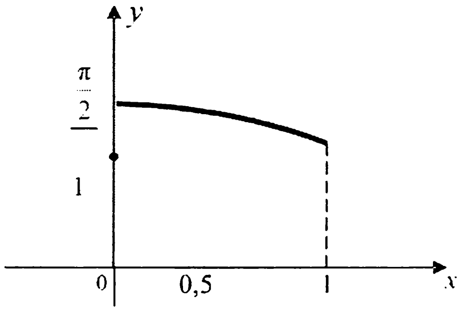
$$K(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \ldots\right],$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} - \ldots\right].$$

Bu funksiyalarning grafiklari mos ravishda 26.6 va 26.7- chizmalarda tasvirlangan.



26.6- chizma.



26.7- chizma.

27-§. BA'ZI BIR STATISTIK FUNKSIYALAR

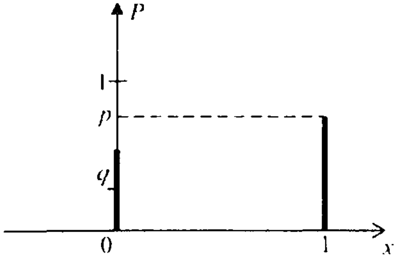
Asosiy statistik funksiyalar tarkibiga ehtimollar zichligi va har xil taqsimot qonunlari uchun taqsimot funksiyalari kiradi.

1. Uziluvchan taqsimotlar.

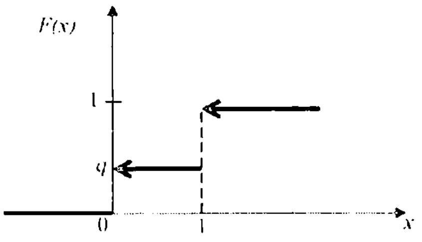
1) *Bernulli taqsimoti.* Agar $P\{\xi=1\}=$p, $P\{\xi=0\}=1-p=q$ bo'lsa, u holda ξ tasodifiy o'zgaruvchi p- parametrli ($0<p<1$) Bernulli taqsimotiga ega bo'ladi (27.1- chizma). Bu taqsimot funksiyasi ushbu

$$P(x)=P\{\xi<x\}=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ bo'lganda},\\ 1-p, & 0<x\le 1 \text{ bo'lganda};\\ 1, & x>1 \text{ bo'lganda}\end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Taqsimot funksiyasining grafigi 27.2- chizmada tasvirlangan.

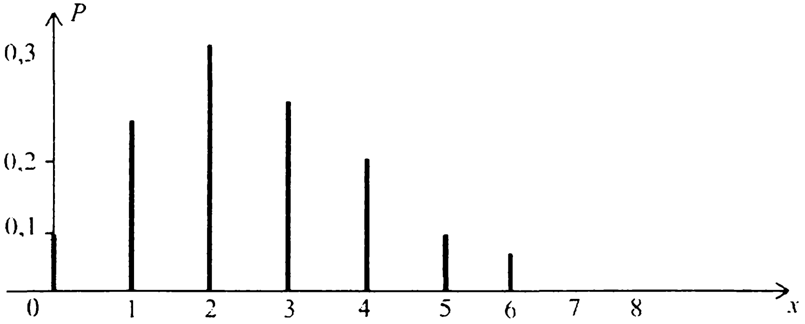


27.1- chizma.



27.2- chizma.

2) *Binomial taqsimot.* Agar $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ (k =0,1,2,.., n) bo‘lsa, u holda ξ tasodifiy o‘zgaruvchi n,p *parametrli binomial taqsimotga* ega bo‘ladi (27.3- chizma). Bu holda taqsimot funksiyasi quyidagi

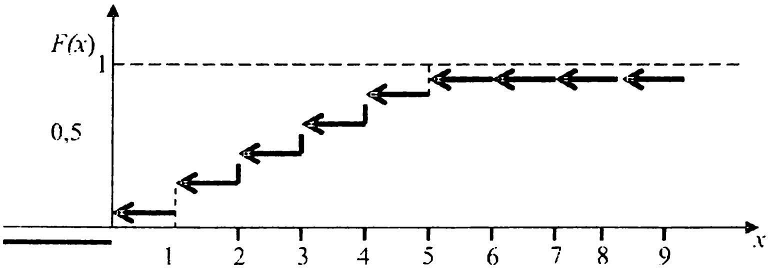


27.3- chizma. n = 10, p = 0.25.

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{l} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, & l < x \le l + 1 \text{ bo? lganda}, \\ 1, \quad x < n & \text{bo‘lganda}, \\ 0, \quad x \le 0 & \text{bo‘lganda} \end{cases}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu funksiyaning grafigi 27.4- chizmada tasvirlangan

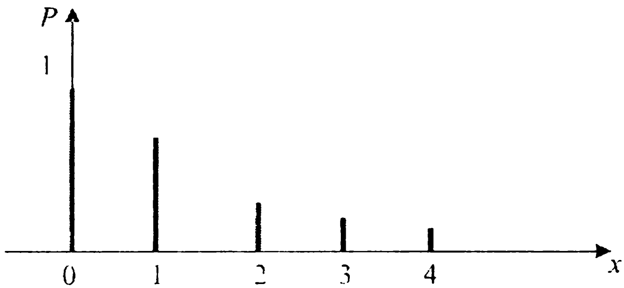
3) *Puasson taqsimoti.* Agar $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e{-}\lambda}{k!}$, k=0,1,2... bo‘lsa, u holda ξ tasodifiy o‘zgaruvchi λ *parametrli* (λ>0) *Puasson taqsimotiga* ega bo‘ladi (27.5- chizma). Bunda taqsimot funksiyasi



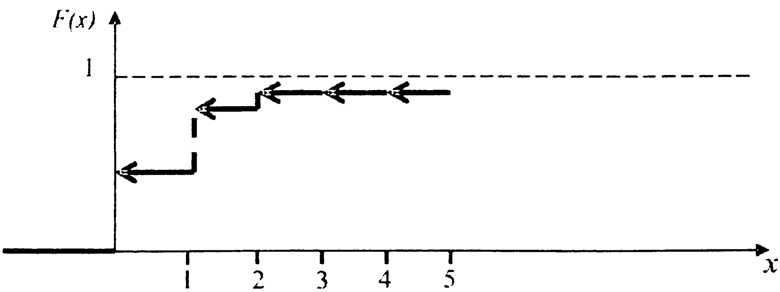
27.4- chizma. $n = 10,\ p = 0{,}25$.

$$y=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ bo‘lganda},\\ \sum\limits_{m=0}^{l}\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, & l<x\le l+1 \text{ bo‘lganda}\end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu taqsimot funksiyaning grafigi 27.6-chizmada tasvirlangan.



27.5- chizma. $\lambda = 0{,}6$.

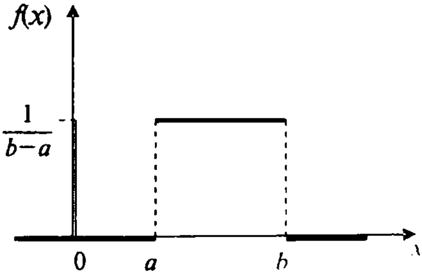


27.6- chizma. $\lambda = 0{,}6$.

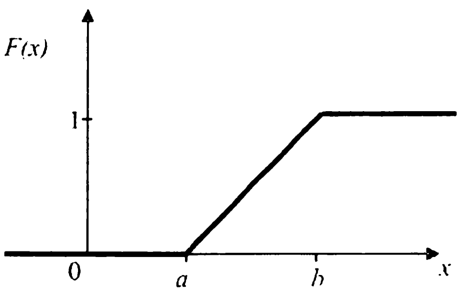
2. Uzluksiz taqsimot. 1) *Tekis taqsimot.* Agar

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x\in[a;b] \text{ bo‘lganda,} \\ 0, \ x\notin[a;b] & \text{bo‘lganda,} \end{cases}$$

bunda $f(x)$ tasodifiy o‘zgaruvchiga mos kelgan ehtimollik zichligi, u holda ξ tasodifiy o‘zgaruvchi $[a;b]$ $(a<b)$ oraliqda tekis taqsimotga ega bo‘ladi (27.7- chizma). Bunday taqsimot funksiyaning grafigi 27.8- chizmada tasvirlangan.



27.7- chizma.

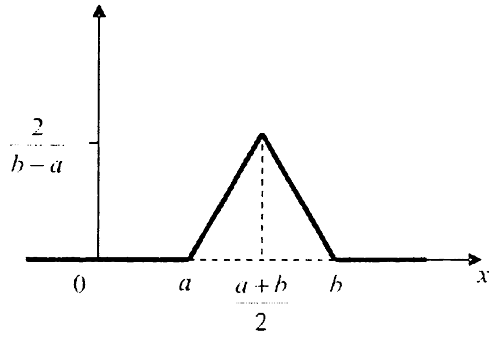


27.8- chizma.

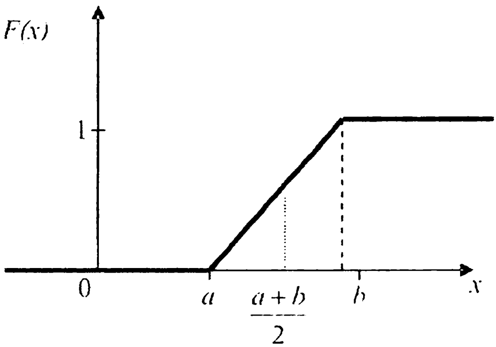
2) *Simpson taqsimoti.* Agar

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{b-a}-\dfrac{2}{(b-a)^2}[a+b-2x], & x\in[a;b] \text{ bo‘lganda,} \\ 0, \ x\in[a;b] \text{ bo‘lganda} \end{cases}$$

bo‘lsa, u holda ξ tasodifiy o‘zgaruvchi $[a;b]$ oraliqda Simpson taqsimotiga (uchburchak taqsimotiga) ega bo‘ladi (27.9- chizma). Taqsimot funksiyasining grafigi 27.10- chizmada tasvirlangan.



27.9- chizma.



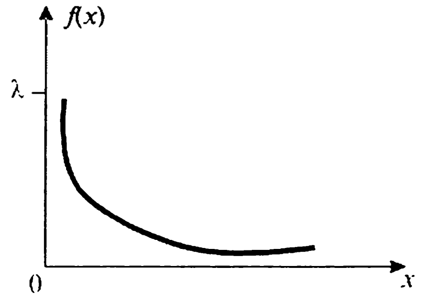
27.10- chizma.

3) *Ko'rsatkichli taqsimot.* Agar

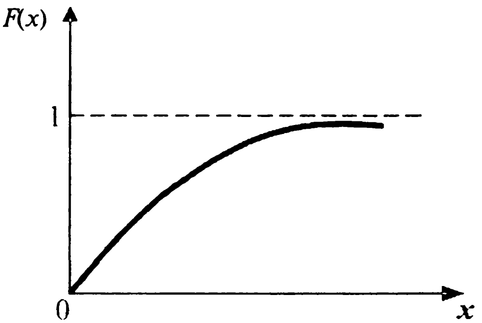
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \text{ bo'lganda,}\\ 0, & x<0 \text{ bo'lganda}\end{cases}$$

bo'lsa, u holda ξ tasodifiy o'zgaruvchi $\lambda>0$ parametrli ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimotga ega bo'ladi (27.11- chizma). Taqsimot funksiyasining grafigi 27.12- chizmada tasvirlangan.

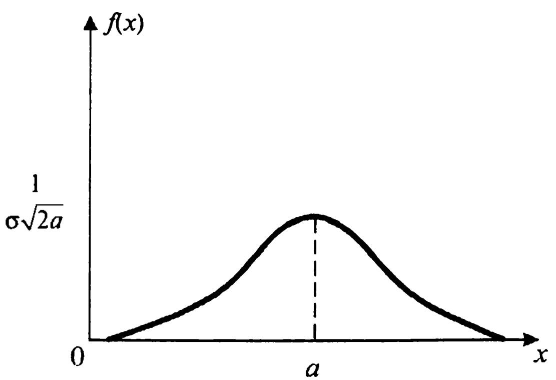
4) *Normal taqsimot.* Agar $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}}$, $x\in(-\infty;+\infty)$ bo'lsa, ξ tasodifiy o'zgaruvchi α va σ parametrli normal taqsimotga ega bo'ladi (27.13-chizma). Taqsimot funksiyaning grafigi 27.14-chizmada tasvirlangan.



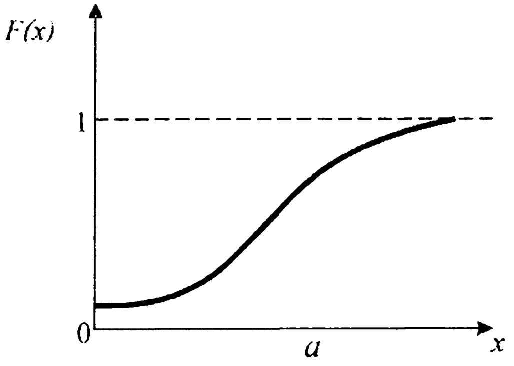
27.11-chizma.



27.12- chizma.



27.13- chizma.

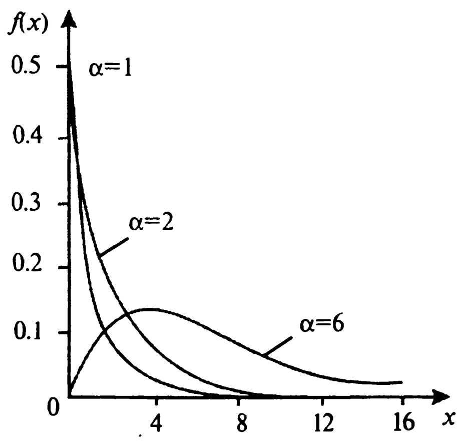


27.14- chizma.

5) χ^2 - *taqsimot.* Agar

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x\le 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

bo'lsa, ξ tasodifiy o'zgaruvchi α ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'ladi (27.15- chizma).



27.15- chizma.

6) *St'yudent taqsimoti.* Agar

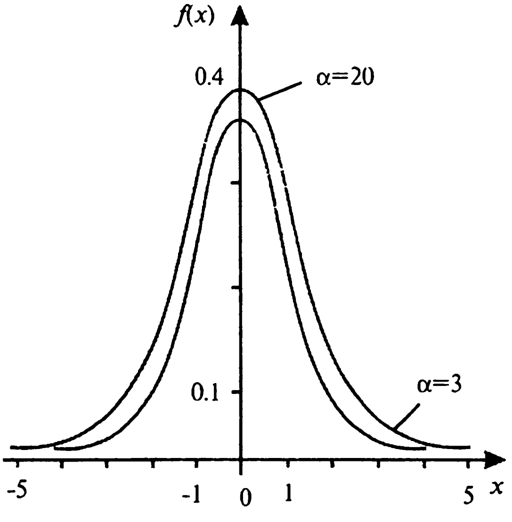
$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\alpha\pi}}\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \quad x\in(-\infty;+\infty)$$

bo'lsa,ξ tasodifiy o'zgaruvchi α ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'ladi. (27.16-chizma).

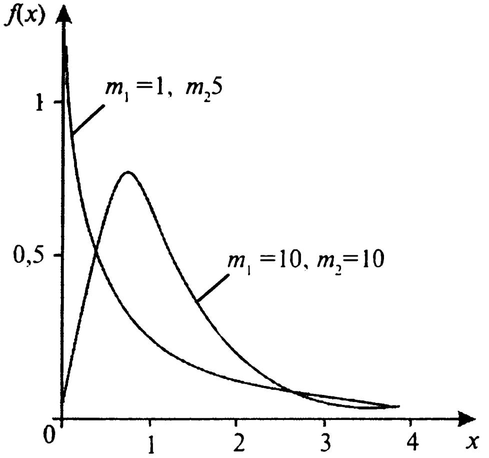
7) *F-taqsimot (Fisher taqsimoti).* Agar

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x\leq 0, \\ \dfrac{\Gamma(\frac{m_1+m_2}{2})m_1^{\frac{m_1}{2}}m_2^{\frac{m_2}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m_1}{2})\Gamma(\frac{m_2}{2})}(m_2+m_1x)^{\frac{m_1+m_2}{2}}, \quad x>0 \end{cases}$$

bo'lsa, ξ tasodifiy o'zgaruvchi m_1 va m_2 darajali F- taqsimotga ega bo'ladi (27.17-chizma).



27.16- chizma.



27.17- chizma.

28-§. ENG MUHIM CHIZIQLAR

Bu paragrafda fan va texnikaning ko'p sohalarida uchraydigan va amaliyotda ko'plab ishlatiladigan ba'zi chiziqlar to'g'risida ma'lumotlar keltiriladi.

1. Ikkinchi tartibli chiziqlar.

Ellips. 1-ta'rif. *Ellips* deb, $\forall M(x;y)$ nuqtadan ikkita berilgan (*fokuslar* deb ataluvchi) o'zgarmas F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas va $2a$ ga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

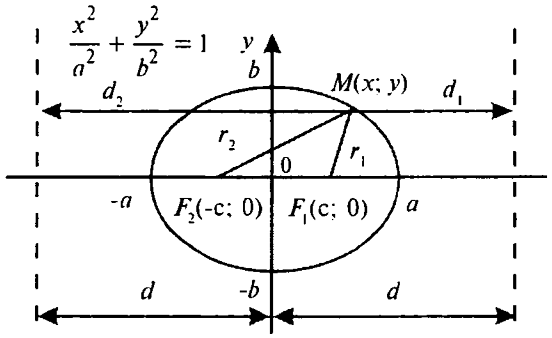
Ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda a va b lar mos ravishda ellipsning *katta* va *kichik yarim o'qlari*; $F_1(c;0)$ va $F_2(-c;0)$ — fokuslari, bunda $c=\sqrt{a^2-b^2}$; $l=\frac{c}{a}$ $(l<1)$ — *ekssentrisiteti* deb ataladi (28.1-chizma).

$r_1=F_1M$ va $r_2=F_2M$ masofalar $r_1=a-lx$, $r_2=a+lx$ formulalar orqali aniqlanadi (28.1-chizma).

Ellipsning direktrisalari kichik o'qqa parallel bo'lib, undan $d=\frac{a}{l}$ masofada joylashgan to'g'ri chiziqlar bo'ladi. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasi uchun $\frac{r_1}{d}=\frac{r_2}{d}=l$ munosabat o'rinli.



28.1- chizma.

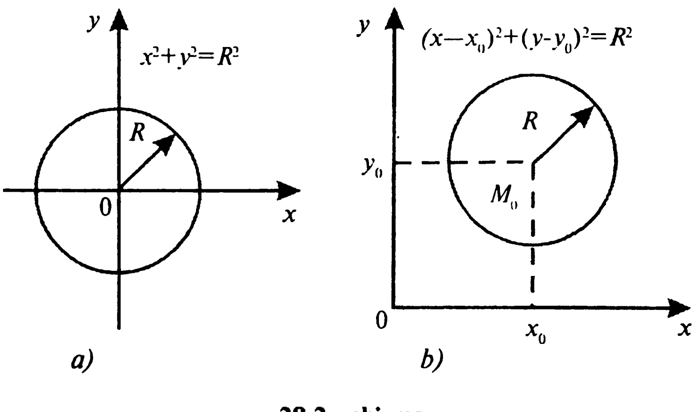
Ellipsning parametrik tenglamasi

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$a=b$ bo‘lganda ellips aylana shakliga keladi.

Markazi koordinata boshida va radiusi R ga teng bo‘lgan aylananing tenglamasi $x^2+y^2=R^2$ ko‘rinishda bo‘ladi (28.2 *a*- chizma). Markazi $M_0(x_0;y_0)$nuqtada, radiusi R ga teng bo‘lgan aylananing tenglamasi $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ shaklda bo‘ladi (28.2 b- chizma).

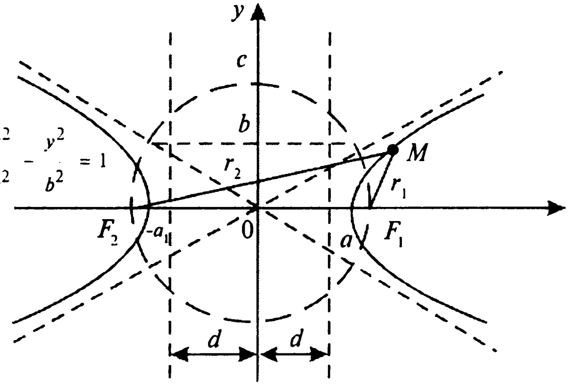


28.2- chizma.

Giperbola. 2-ta‘rif. *Giperbola* deb, $\forall M(x;y)$ nuqtadan ikkita berilgan (*fokuslar* deb ataluvchi) o‘zgarmas F_1 va F_2 nuqtalargacha bo‘lgan masofalar ayirmasining absolut qiymati o‘zgarmas va $2a$ ga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi. Giperbolaning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda a va b lar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari; $F_1(c;0)$ va $F_2(-c;0)$ — uning fokuslari, bunda $c=\sqrt{a^2+b^2}$; $l=\frac{x}{a}>1$ — *ekssentrisiteti* deb ataladi (28.3- chizma).



28.3- chizma.

$r_1=F_1M$ va $r_2=F_2M$ masofalar $r_1=\pm(lx-a)$, $r_2=\pm(lx+a)$ formulalar orqali aniqlanadi. Bunda yuqoridagi ishora giperbolaning o'ng shoxobchasi. Pastki ishora esa chap shoxobchasiga mos keladi.

Giperbola $y=\pm\frac{b}{a}x$ asimptotalarga ega.

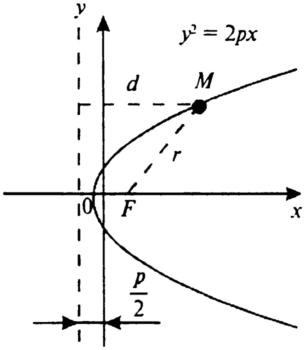
Giperbolaning direktrisalari mavhum o'qqa parallel bo'lib, undan $d=\frac{a}{c}$ masofada joylashgan to'g'ri chiziqlar bo'ladi. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi uchun $\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=l$ munosabat o'rinli. Giperbolaning parametrik tenglamasi $x=a\operatorname{ch}t$, $y=a\operatorname{sh}t$, $-\infty<t<+\infty$ ko'rinishda bo'ladi. $a=b$ bo'lganda giperbola teng yonli bo'ladi.

Parabola. 3-ta'rif. *Parabola* deb, berilgan o'zgarmas $F(\frac{p}{2};0)$ (*fokus*) nuqtadan va berilgan (*direktrisa*) to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Parabolaning kanonik tenglamasi

$$y^2=2px$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda p — fokal parametr; $F(\frac{p}{2};0)$ — fokus (28.4- chizma). Parabolaning direktrisasi Ox o'qiga perpendikular bo'lgan $x=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqdan iborat.



28.4- chizma.

Parabolaning ekssentrisiteti $l=1$ ga teng.

2. Uchinchi tartibli algebraik chiziqlar

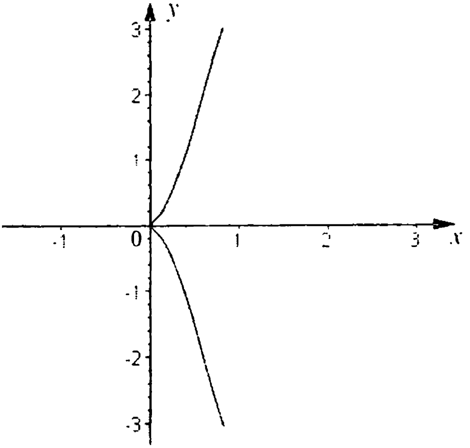
Yarim kubik parabola. Yarim kubik parabolaning tenglamasi $a^2x^3—y^2=0$ ko'rinishda bo'ladi. Uning parametrik shakldagi tenglamasi $x=t^2$, $y=at^3$, $-\infty < t < +\infty$, oshkor shakldagi tenglamasi esa $y=\pm ax^{\frac{3}{2}}$ ko'rinishda bo'ladi (28.5-chizma).

Anyezi gajagi. Bu chiziqning tenglamasi $(x^2+a^2)y—a^3=0$ ko'rinishda bo'lib, uning asimptotasi $y=0$ to'g'ri chiziqdan iborat. Uning oshkor shakldagi tenglamasi:

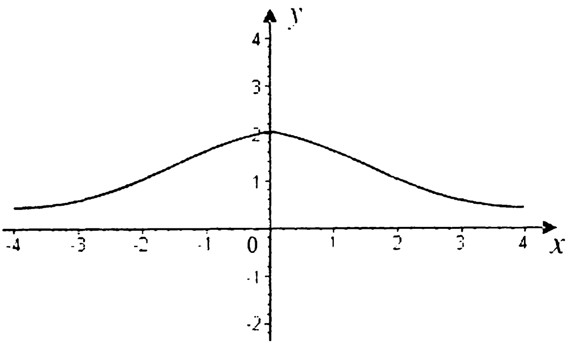
$$y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$$

ko'rinishda bo'ladi (28.6- chizma).

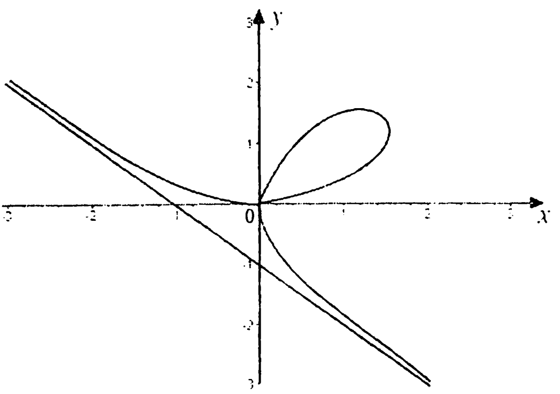
Dekart yaprog'i. Dekart yaprog'ining oshkormas shakldagi tenglamasi $x^3+y^3—ax=0$, $a>0$, uning parametrik shakldagi tenglamasi esa



28.5- chizma.



28.6- chizma.



28.7- chizma.

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^3}{1+t^3},\quad 1<|t|<+\infty$$

ko'rinishda bo'ladi.

Egri chiziq uchun koordinatalar boshi maxsus nuqtadan iborat va u chiziq grafikning o'zaro kesishish nuqtasi ham bo'ladi. Ya'ni chiziqqa $t=\sqrt[3]{2}$ da, ya'ni $(a\sqrt[3]{2};a\sqrt[3]{4})$ nuqtada hamda $t=0$ da, ya'ni (0;0) nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma abssissalar o'qiga parallel bo'ladi (28.7- chizma).

$t>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ da egri chiziq botiq, $t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ da esa qavariq bo'ladi, lekin $t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ nuqtada egilish yo'q. Egri chiziq $x+y+a=0$ og'ma asimptotaga ega.

Egri chiziq I va II koordinata burchaklari bissektrisasiga simmetrik bo'ladi.

Sissoida. Sissoidaning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi:

$$x^3+(x-a)y^2=0,\quad a>0,$$

parametrik tenglamasi:

$$x=\frac{at^2}{1+t^2},\quad y=\frac{at^3}{1+t^2},\quad -\infty<t<+\infty,$$

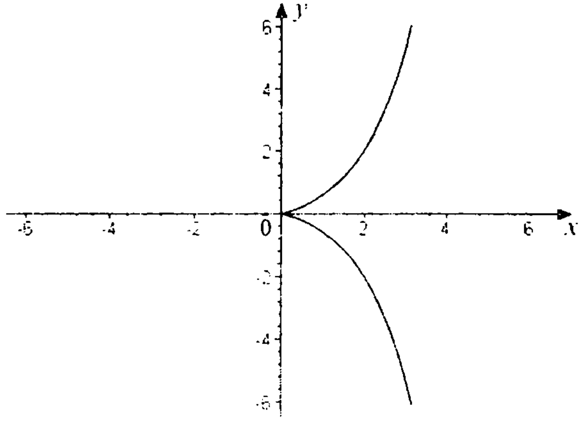
qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi

$$\rho=\frac{2a\sin 2\varphi}{\cos\varphi}$$

ko'rinishda bo'ladi. Sissoidaning grafigi uchun (0;0) nuqta birinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi. Uning grafigi o'zaro kesishish nuqtasiga ega emas (28.8- chizma). $t=0$ da, $y_x=0$ bo'lgani uchun egri chiziqqa o'tkazilgan urinma koordinatalar boshida abssissalar o'qiga parallel bo'ladi. Egri chiziq egilish nuqtasiga ega emas. $t\to\infty$ da $x\to\infty$, $y\to\infty$ bo'ladi. U holda $\frac{y}{x}=t\to\infty$. Shunday qilib, egri chiziq $x=1$ vertikal asimptotaga ega.

Strofoida. Strofoidaning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi: $(x+a)x^2+(x-a)y^2=0$, $a>0$, parametrik shakldagi tenglamasi:

$$x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1},\quad y=\frac{at(t^2-1)}{t^2+1},\quad -\infty<t<+\infty,$$



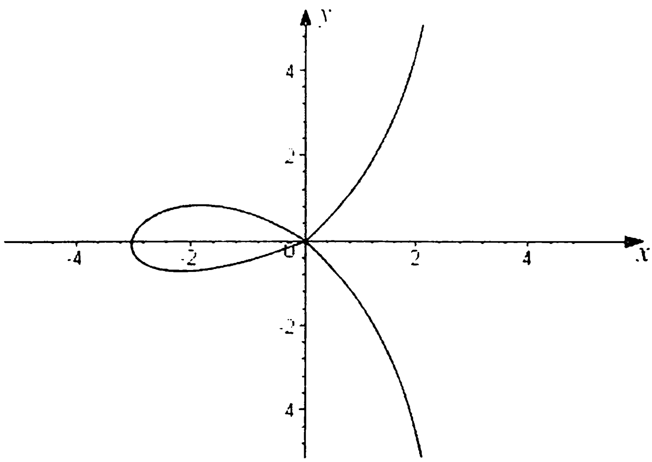
28.8- chizma. $a = 2$.

qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi:

$$\rho=-a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi},$$

($O(0;0)$ — qutb, Ox — qutb o‘qi) ko‘rinishda bo‘ladi.

Koordinatalar boshi o‘zaro kesishish nuqtasi; $y=\pm x$ to‘g‘ri chiziqlar egri chiziqqa (0;0) nuqtada urinma bo‘ladi; $x=a$ to‘g‘ri chiziq asimptota bo‘ladi. Egri chiziq abssissa o‘qiga simmetrik (28.9-chizma).



28.9- chizma. $a = 2$.

3. To'rtinchi va undan yuqori tartibli algebraik chiziqlar.

Nikomeda konxoidasi. Nikomeda konxoidasining ba'zi xossalari bilan biz yuqorida tanishgan edik (III bob, 23- § ga qarang). Ularga qo'shimcha ravishda quyidagilarni ko'rsatish mumkin. Uning tenglamasi Dekart koordinatalar sistemasida

$$(y-a)^2(x^2+y^2)-b^2y^2=0, \quad a>0, \quad b>0$$

ko'rinishda bo'ladi (23.32- chizmaga qarang). Agar egri chiziq tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida $\rho=f(\varphi)$ ko'rinishda bo'lsa, konxoida tenglamasi $\rho=f(\varphi)+b$ shaklida bo'ladi.

Paskal chig'anog'i. Paskal chig'anog'i haqida ham ma'lumotlarga egamiz (III bob, 23- § ga qarang). Ularga qo'shimcha ravishda, Paskal chig'anog'ining tenglamasi Dekart koordinatalar sistemasida

$$(x^2+y^2-ax)^2-l^2(x^2+y^2)=0, \quad a>0, \quad l>0;$$

parametrik tenglamasi

$$\begin{aligned} x &= a\cos^2 t+b\cos t, \\ & \qquad\qquad\qquad 0\le y\le 2\pi; \\ y &= a\cos t\sin t+b\sin t, \end{aligned}$$

qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi

$$\rho=a\cos\varphi+l$$

ko'rinishda bo'ladi (23.25- chizmaga qarang).

Kardioida. Kardioida (III bob, 23- § ga qarang) tenglamasining Dekart koordinatalar sistemasidagi ko'rinishi:

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax)-a^2y^2=0;$$

parametrik shakldagi tenglamasining ko'rinishi

$$x=a\cos t\,(1+\cos t), \quad y=a\sin t(1+\cos t), \quad 0\le t\le 2\pi;$$

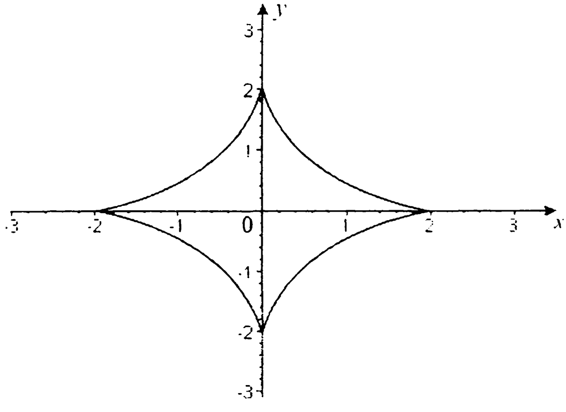
qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasining ko'rinishi $\rho=a(1+\cos\varphi)$ bo'ladi (23.26- chizma qarang).

Bernulli lemniskatasi. Bernulli lemniskatasi (III bob, 23-§ ga qarang) tenglamasi Dekart koordinatalar sistemasida $(x^2+y^2)-$ $-2a^2(x^2-y^2)=0$, $a>0$; qutb koordinatalar sistemasida $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ ko'rinishda bo'ladi (23.29- chizmaga qarang).

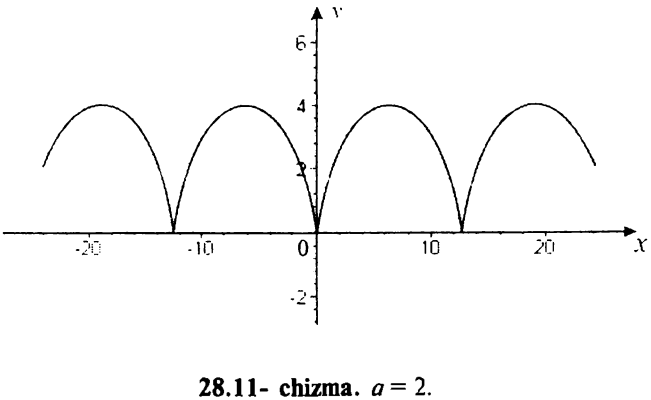
Astroida. Astroida tenglamasining Dekart koordinatalar sistemasidagi ko'rinishi: $(x^2+y^2-R^2)^3-27R^2x^2y^2=0$, parametrik shakldagi tenglamasining ko‘rinishi

$$x = R\cos^3\frac{t}{4}, \quad y = R\sin^3\frac{t}{4}$$

bo‘lib, uning oshkormas shakldagi tenglamasi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ ko‘rinishda bo‘ladi (28.10- chizma). U 6- tartibli algebraik egri chiziqdir.



28.10- chizma. $R = 2$.



28.11- chizma. $a = 2$.

4. Transsendent chiziqlar.

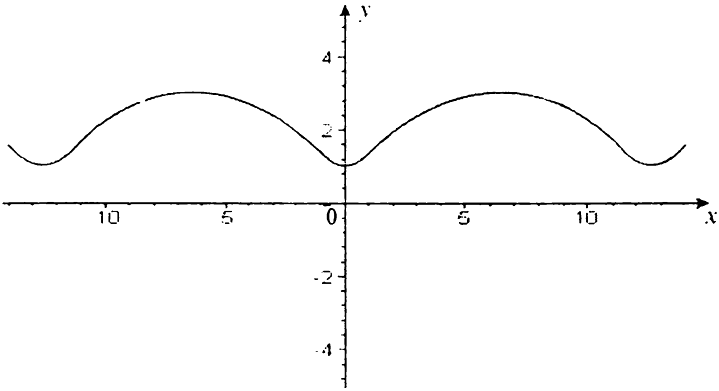
Sikloida. Sikloida tenglamasining Dekart koordinatalar sistemasidagi ko‘rinishi:

$$a\cos\frac{x+\sqrt{y(2a-y)}}{a} = a - y, \quad a > 0;$$

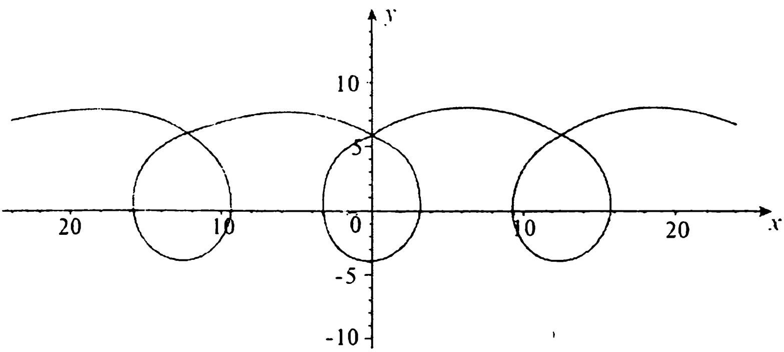
parametrik shakldagi ko'rinishi (28.11-chizma)

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t),\qquad -\infty<t<+\infty.$$

Troxoida. Troxoidaning parametrik tenglamasi: $x=a(t-\lambda\sin t)$, $y=a(1-\lambda\cos t)$; $-\infty<t<+\infty$, $\lambda<1$ bo'lganda troxoidaning grafigi 28.12- chizmada; $\lambda>1$ bo'lganda esa 28.13- chizmada tasvirlangan.



28.12- chizma. $a=2$, $\lambda=0{,}5$.



28.13- chizma. $a=2$, $\lambda=3$.

ADABIYOTLAR

1. **Azlarov T., Mansurov X.** Matematik analiz, I т., — T.: „O'qituvchi", 1986. — 405 bet.

2. **Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.** Задачи по математике. Начала анализа: Справочное пособие. — М.: „Наука", 1990. — 608 с.

3. **Вирченко Н.А. Ляшко И.И. Швецов К.И.** График функции: Справочник. — Киев: „Наука думка", 1979. — 320 с.

4. **Волков В.А. Григорьева А.Н., Ефимова, Т.А. Коломийцева З.Д., Марданов А.М.** Задачник — практикум по высшей математике: Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная: Учеб. Пособие. — Л.: Изд. „ЛГУ", 1988. — 224 с.

5. **Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э.** Функции и графики. — М.: „Наука", 1968. — 95 с.

6. **Гурский И.П.** Функции и построение графиков. Пособие для учителей. — М.: „Просвещение", 1968. — 215 с.

7. **Новосёлов С.И.** Algebra va elementar funfsiyalar. — T.: „O'ZDav o'quvped nashr. 1954. — 430 с.

8. **Райхмист Р. Б.** Графики функций: Справочник. Задачи и упражнения. — М.: „Школа - Пресс", 1991. — 384 с.

10. **Saxaev M.** Maktabda funksiya va grafiklarni o'rganish. — T.: „O'qituvchi", 1967. — 238 bet.

11. **Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G., Vorisov A., G'ulomov R.** Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. I qism. — T.: „O'zbekiston", 1993. — 317 bet.

12. **Sobirov M., Yusupov A.E.** Differensial geometriya kursi. — T.: „O'zDav o'quv ped nashr". 1959. — 422 bet.

13. **Tolipov A.** Elementar funksiyalar. — T.: „O'qituvchi", 1992. — 80 bet.

14. **Фельдман Я.С., Жаржевский Ф.Я.** Математика. Решение задач с модулями. — Санкт-Петербург.: „Оракул", 1997. — 304 с.

15. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1. — М.: „Наука", 1969.

16. **Яремчук Ф.П., Рудченко П.А.** Алгебра и элементарные функции: Справочник. — Киев.: „Наукова думка". 1987. — 648 с.

MUNDARIJA

II BOB. FUNKSIYALARNING GRAFIKLARINI HOSILADAN FOYDALANMASDAN CHIZISH

III BOB. FUNKSIYANING GRAFIGINI HOSILADAN FOYDALANIB CHIZISH

G14

Gaziyev A.

Funksiyalar va grafiklar: Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma. / A.Gaziyev, I.Israilov, M.Yaxshiboyev. —T.:

«Voris nashriyot» MCHJ, 2006.

I. Israilov I. II. Yaxshiboyev M.

BBK 22.16ya722

Gaziyev Abdurasul, Israilov Ismoil,
Yaxshiboyev Maxmadiyor Umirovish

FUNKSIYALAR VA GRAFIKLAR

Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma

«Voris-nashriyot» MChJ
Toshkent — 2006

Muharrir *O'. Husanov*
Badiiy muharrir *Sh. Xo'jayev*
Kompyuterda sahifalovchi *D. Hamidullayev*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 18.12.2006. Bichimi $60\times90^1/_{16}$.
Ofset bosma usulida chop etildi. Shartli bosma tabog'i 28,5.
Nashr tabog'i 31,0. Adadi: 1000 nusxa. Buyurtma № 207

«Voris-nashriyot» MChJ.
Toshkent sh., Shiroq ko'chasi, 100.

«Sano-Standart» MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Shiroq ko'chasi, 100.