М. РАҲМАТУЛЛАЕВ

УМУМИЙ ФИЗИКА КУРСИ

МЕХАНИКА

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги педагогика
институтларининг физика ихтисослиги талабалари учун ўқув
қўлланмаси сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1995

Тақризчилар: Физика-математика фанлари
доктори, профессор ***Б. Отақулов***
ТошДУ профессори ***А. Тешабоев***

Ушбу қўлланмада умумий физика курсининг «Механика» бўлими баён қилинган. У бўлажак физика ўқитувчиларининг эҳтиёжларини ҳисобга олган ҳолда талабаларнинг ўрта мактабда физика ва математикадан олган билимларига таяниб ёзилган бўлиб, кейинги вақтларда бу фанлардаги ўзгаришлар ҳисобга олинди. Қўлланмадаги материал Халқаро бирликлар системаси (СИ) асосида берилди.

Қўлланма педагогика институтларининг физика ихтисослиги учун мўлжалланган. Ундан умумий физика курсини ўрганадиган бошқа ихтисослик талабалари ҳамда ўрта мактаб физика ўқитувчилари муваффақият билан фойдаланишлари мумкин.

22.314
Р 33

Раҳматуллаев М.
Умумий физика курси. Механика: Пе
гогика ин-ти талабалари учун ўқув қўлла
ма.— Т.: Ўқитувчи, 1995—352 б.

22.314я73

Р $\frac{1603010000-67}{353 (04) - 95}$ 38—94

ISBN 5—645—02122—3

СЎЗ БОШИ

Ҳозирги кунда педагогика институтларида физика ихтисослиги бўйича таҳсил олаётган талабалар университетлар ва техника олий ўқув юртларига мўлжаллаб рус тилида ёзилган ўқув қўлланмаларининг ўзбек тилига таржима қилинган нашрларидан фойдаланиб келмоқдалар. Кейинги йилларда Е. М. Гершензон ва бошқа муаллифлар томонидан мазкур ихтисослик учун ёзилган қўлланма эса танлаб олинган ўқув материали ҳамда уни баён этиш услуби билан бўлғуси физика муаллимлари эҳтиёжларини қондира олмайди.

Ҳозирги кун талабларини ҳисобга олиб олий ўқув юртидаги кўп йиллик педагогик тажрибасига таянган ҳолда муаллиф ушбу қўлланмани тайёрлашга жазм қилди.

Қўлланмадаги ўқув материалининг баён этилиш услублари Фарғона давлат педагогика институтининг физика факультетида синовдан ўтди.

Қўлланмадаги материал Халқаро бирликлар системаси асосида берилган. Керакли жойларда амалда кенг қўлланиладиган аммо системага кирмаган бошқа баъзи бирликлар ҳам эслатиб ўтилган. Ўқувчига қулай бўлиши учун асосий тушунчалар ва физик атамалар ажратиб кўрсатилган.

Қўлланма педагогика институтларининг физика ихтисослигидаги талабаларига мўлжалланган бўлиб, ундан университетлар ва бошқа олий ўқув юртларининг физика бўйича ихтисослик олаётган талабалари ҳамда ўрта мактабларнинг ўқитувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Қўлланмани тайёрлаш жараёнида унинг сифатини ошириш мақсадида берган маслаҳатлари учун муаллиф Андижон давлат университетининг доцентлари У. Абдубоқиев ва Э. Мусаевга ҳамда Фарғона давлат университетининг доценти А. Ҳакимовга миннатдорчилик билдиради.

Шунингдек, муаллиф, қўлланма қўлёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, унинг камчиликларини кўрсатган ҳамда бир қатор тавсиялар берган профессорлар: Б. Отақулов ва А. Тешабоевга ташаккур изҳор қилади.

Бундай қўлланма ўзбек тилида биринчи марта чоп этилаётгани сабабли унда баъзи камчиликлар бўлиши эҳтимолдан ҳоли эмас. Шунинг учун қўлланмани яхшилаш ниятида ўз фикр ва мулоҳазаларини юборадиган ҳамкасбларга муаллиф олдиндан миннатдорчилик билдиради. Ўз фикр ва мулоҳазаларингизни қуйидаги манзилга юборишингизни сўраймиз:

Тошкент —700129, Навоий кўчаси, 30. «Ўқитувчи» нашриёти, Физика-математика адабиёти таҳририяти.

ҚИРИШ

1-§. Физика ва унинг бошқа фанлар билан алоқаси

Физика бизни ўраб турган ниҳоятда улкан ва мураккаб оламнинг энг умумий хоссаларини, унинг энг умумий ҳаракати турларини, бу ҳаракатларни тавсифловчи қонунларни ҳамда ҳодисалар орасидаги муносабатларни ўрганади. Ҳаракатнинг физика ўрганадиган энг содда ва умумий турлари (механик ҳаракат, иссиқлик ҳаракати, электромагнитик ҳаракат, атом ва ядро ҳаракати ва бошқалар) унинг мураккаброқ ва олий турлари (кимёвий ва биологик ҳаракат) билан чамбарчас боғлаган. Бинобарин, ҳаракатнинг бошқа ҳамма турлари, уларнинг хусусиятларидан қатъи назар, физика қонунларига бўйсунади. Масалан, электромагнитик ўзаро таъсир қонуниятлари физик жараёнларни ҳам, кимёвий жараёнларни ҳам бошқариб туради. Физикадаги энергиянинг сақланиши қонуни эса ҳаракатнинг барча турларига тааллуқли бўлади. Шунинг учун физика табиатшунослик фанлари орасида алоҳида ўрин тутиб, уларнинг тараққиёти учун асос бўлиб хизмат қилади.

Моддий дунёда юз бераётган хилма-хил ўзгаришлар табиат ҳодисаларини ташкил этади. Физика табиат ҳодисаларини ўрганиш ва бу ҳодисаларни тавсифловчи қонунларни ҳамда ҳодисалар орасидаги муносабатларни аниқлаш учун зарур бўлган маълумотларни кузатишлар ва тажрибалар асосида олади.

Ҳодисани бошқа ҳодисалар билан ўзаро боғланишлар тўласича сақланиб қоладиган табиий шароитларда ўрганиш *кузатиш* деб аталади. Масалан, ёмғир томчисининг тушиши, спортчининг парашютда тушиши ёки юқорига отилган тошнинг қайтиб тушиши каби ҳодисаларда Ернинг тортиш кучи намоён бўлади. Равшанки, мазкур ҳодисаларда Ернинг тортиш кучидан бошқа кучлар (масалан, ҳавонинг қаршилик кучи) ҳам ўз таъсирини кўрсатади. Ҳодисани бошқа, халақит берадиган таъсирлардан ҳоли бўлган шароитда кузатиш учун тажриба ўтказиш керак бўлади.

Ўрганилаётган физик ҳодисани асосий бўлмаган боғланишлардан ажратиб олиб, назорат қилиб туриладиган сунъий шароитларда (лабораторияда) қайтадан такрорлаб кузатиш *тажриба* деб аталади. Тажриба давомида асосий бўлмаган боғланишларни ҳисобга олиш турлича йўллар билан амалга оширилади. Масалан, жисмнинг Ер тортиш кучи майдонидаги тушишини ўрганишда ҳаво қаршилиги юзага келтирадиган таъсирни икки хил йўл билан камайтириш мумкин: биринчи ҳолда жисм ўлчамларини кичрайтириш ҳаво қаршилигининг ҳам кескин камайишига олиб келади. Иккинчи ҳолда эса ҳар хил ўлчамларга эга бўлган жисмларнинг ҳавосиз бўшлиқда тушиши текширилади. Ҳар иккала ҳолда ҳам жисмларнинг Ер тортиш кучи таъсиридаги эркин тушиши ҳодисасини «соф» ҳолда ўрганишга шароит яратилади.

Физик тажрибанинг юксак аниқликдаги такрорланувчанлиги унинг энг муҳим хусусиятларидан биридир. Яъни, физик тажрибани бошқа жойда, бошқа ўлчов асбоблари билан айнан аввалги шароитларда қайта такрорлаганда илгари олинган натижалар муайян аниқликда такрорланиши зарур.

Ҳар қандай физик ҳодисани ҳам тажрибада қайта амалга ошириб бўлавермайди. Масалан, юлдузлар қаъридаги шароитларни ёки ўта юқори энергияли космик нурларни тажрибада (лабораторияда) ҳосил қилиб бўлмайди. Шу сабабли бундай ҳодисаларни фақат кузатишлар орқалигина ўрганилади. Иккинчи томондан, табиатда учрамайдиган ҳодисаларни ҳам лаборатория шароитида амалга ошириш мумкин. Масалан, кремний ёки германий монокристалига бошқа элементларни аралашма сифатида оз миқдорда киритиб, табиатда учрамайдиган ярим ўтказгич моддалар олинади.

Физик ҳодисаларни миқдорий тавсифлаш учун физик катталиклардан фойдаланилади. Жисмларнинг ўлчашлар ёрдамида миқдорий аниқланиши мумкин бўлган хоссалари ёки жараёнлар характеристикалари *физик катталик* деб аталади. Ҳар бир физик катталик аниқ таърифланиши зарур. Физик катталикнинг таърифи мазкур катталикни аниқлаш усулини бериши ёки шу катталикни бошқа катталиклар орқали ифодалашга имкон бериши талаб қилинади.

Физик катталикларни тўғри ва аниқ ўлчаш физик ҳодисаларни ўрганишда алоҳида аҳамиятга эга. Физик ўлчашлар тажриба шароитларига қараб бирор аниқлик билан амалга оширилади. Бирор катталикни ўлчаганимизда, биз унинг ҳақиқий қийматини эмас, балки ўлчов асбоблари ва кузатувчининг шахсий сезги аъзолари етарлича мукаммал бўлмаслиги туфайли бирор хатолик кириб қолган қийматини оламиз.

Ўлчашлар аниқлигини ошириш учун тажрибани «покиза» ўтказиш, яъни халақит берувчи таъсирларни йўқотиш, ўлчов асбобларини такомиллаштириш ва ўлчаш услубини синчковлик билан ишлаб чиқиш зарур. Одатда физик катталикларнинг қиймати билан бир қаторда уларни ўлчашда йўл қўйилган хатоликлар ҳам кўрсатилади. Бирор катталикнинг тажрибаларда олинган қийматларини таққослашни ўлчашлар аниқлиги чегарасидагина ўтказиш мумкин.

Физик тажрибалар ва кузатишлар ёрдамида турли физик катталиклар орасидаги муайян миқдорий боғланишлар аниқланади. Мазкур боғланишлар ва олинган натижаларни тушунтириш учун муайян *гипотеза* (илмий фараз) илгари сурилади. Ҳар қандай гипотеза тажрибалар асосида текширилиши ҳамда тасдиқланиши лозим. Ҳали ўрганилмаган ҳодисаларни муайян нуқтаи назар асосида тушунтириб берган ёки ҳали номаълум бўлган ҳодисаларни олдиндан айтиб берган гипотеза қонунга айланади. Тажриба натижалари томонидан тасдиқланмаган ва хато хулосаларга олиб келадиган гипотезалар (масалан, иссиқлик назариясидаги теплород гипотезаси, электромагнит тўлқин назариясидаги эфир гипотезаси ва ҳ. к.) кейинчалик қўлланилмай, ташлаб юборилади.

Табиат ҳодисаларининг характери ҳақидаги энг умумий ва ихчам қоидалар *қонун* деб аталади. Масалан, моддий нуқталарнинг берк системасида қандай ўзгаришлар бўлишидан қатъи назар, система импульси ўзгармайди. Мазкур қоида импульснинг сақланиши қонуни деб аталади. Қонун физик катталиклар орасидаги миқдорий боғланиш тарзида ҳам ифодаланади. Бундай боғланишга $F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$ кўринишдаги Кулон қонунини мисол қилиб кўрсатиш мумкин. Физик қонун тажрибадан олинган маълумотларга мос келиши ва маълум даражада янги тажрибалар натижаларини ва ҳатто янги физик ҳодисаларни ҳам олдиндан айтиб бера олиши зарур.

Ҳар қандай физик қонун муайян қўлланилиш чегарасига эга бўлади, чунки ҳар бир қонуннинг кашф қилинишида амалга оширилган тажрибалар ҳодисаларнинг чекли мажмуинигина қамраб олади. Масалан, эластик деформация учун кашф қилинган Гук қонуни жисмларнинг эластиклиги сақланадиган чўзилишлар ёки сиқилишлар оралиғидагина ўринли бўлади. Бутун олам тортишиш қонуни эса ҳар қандай масофаларда ҳам бажарилаверади. Қўлланилиш чегаралари етарлича катта бўлган қонунлар *фундаментал (бош) қонунлар* деб юритилади. Фундаментал қонунлар қаторига энергиянинг ҳамда импульснинг сақланиши қонунлари, термодинамика қонунлари, Ньютон қонунлари, Кулон қонуни ва бошқа қонунларни киритиш мумкин.

Муайян ҳодисалар тўпламини тушунтириш учун физикада модель тушунчасидан фойдаланилади. Ўрганилаётган ҳодисанинг аввалдан маълум бўлган тушунчалар ёрдамида яратилган кўргазмали манзараси *модель* деб аталади. Бу ўринда ёруғликнинг тўлқин моделини, атомнинг планетар моделини ва ҳоказоларни айтиб ўтиш мумкин. Атомдаги электронларнинг ядро атрофидаги ҳаракатини бевосита кўз билан кўриб бўлмайди, лекин планетар модель ёрдамида атомнинг қатор хоссаларини муваффақият билан тушунтириш мумкин.

Тадқиқотлар давомида бир моделдан бошқа мукаммалроқ моделга ўтиб борилади. Модда тузилишини ўрганишда даставвал атомнинг планетар моделидан, сўнгра элементар зарралар моделидан ва ниҳоят, кварклар моделидан фойдаланилгани маълум. Моделнинг қўлланилиш чегараси қанчалик кенг бўлса, у ҳодисаларни шунчалик аниқ тушунтиришга имкон беради.

Кенг миқёсдаги ҳодисалар тўпламига қўлланилиб, тажриба натижаларига етарлича аниқлик билан мос келиб қолган модель назарияга айланади. Тажриба натижаларини умумлаштирувчи ва табиатнинг объектив қонуниятларини акс эттирувчи асосий ғоялар системаси *физик назария* деб аталади. Физик назария табиатдаги ҳодисаларнинг кенг соҳасини қамраб олади ва уларни ягона нуқтаи назар асосида тушунтириб беради. XIX асрнинг иккинчи ярмида бунёдга келган модда тузилишининг молекуляр-кинетик назариясида барча жисмлар жуда ҳам майда бўлинмас зарралар (атомлар) дан иборат ва бу атомлар тинимсиз ҳаракатда бўлади, деб ҳисобланган. Кейинчалик ўтказилган тажрибаларда атомнинг ўзи ҳам мураккаб тузилганлиги маълум бўлди, яъни тажрибалардан олинган маълумотлар асосида атом тузилиши назарияси яратилди. Асримизнинг 30—80-йиллари мобайнида бир неча юздан ортиқ турдаги элементар зарралар кашф қилинди ҳамда уларнинг бир-бирига айлана олиши аниқланди. Ҳар бир янги кашфиёт модда тузилиши ҳақидаги билимларни кенгайтириб ва чуқурлаштириб боради, натижада янги гипотезалар ва назарияларга эҳтиёж туғилади. Янги назария қуруқ ерда пайдо бўлмайди, у муқаррар равишда эски назариядан ўсиб чиқади. Бунинг учун баъзан онгимизга сингиб кетган тушунчалардан воз кечишга ва дастлаб маъносиз бўлиб туюлган гипотезалардан ҳам фойдаланишга тўғри келади. Лекин, шуни таъкидлаш кераки, янги назария аввалги, эскириб қолган назарияни бутунлай рад қилмайди. Аксинча, жуда кўп ҳолларда эски назария янги назариянинг хусусий ҳоли бўлиб қолади, яъни янги назария масалага кенгроқ ва чуқурроқ ёндашади. Модда тузилиши ҳақидаги кварк назариясининг тараққиёт йўли фикримизнинг далили ҳисобланади. Заряди элементар заряднинг улушларини ташкил қилган бу тахминий зарраларга дастлаб катта шубҳа билан қаралган эди. Кварк назарияси ёрдамида янги зарра бўлган «мафтун» кварк мавжудлигининг олдиндан айтиб берилиши ва сўнгра бу зарраларнинг тажрибада кашф қилинганлиги мазкур назариянинг тўғрилигини яна бир карра тасдиқлади. Зеро, физика фанининг асрлар давомидаги тараққиёти ҳам хилма-хил назариялар кураши ва алмашишларидан иборат.

Физиканинг бошланғич асослари юнон файласуфи Аристотелнинг (милоддан аввалги 384—322 йиллар) «Физика» асарида биринчи марта изчил таълимот кўринишида баён қилинган эди. Оламнинг тузилиши ва хоссалари ҳақидаги фалсафий фикрларни мужассамлаштирган мазкур таълимот фанда XVI асргача ҳукмронлик қилиб келди. Шу давр ичида Аристотель таълимоти қадимги дунёнинг кўпгина йирик мутафаккирлари (Демокрит, Эпикур, Лукреций) томонидан муайян даражада ривожлантириб борилди. Бу ўринда Ўрта Осиё мутафаккир олимларининг, шу жумладан Абу Райҳон Беруний, Абу Али ибн Сино, Ал-Хоразмий, Аҳмад Фарғоний ва Улуғбек каби фан алломаларининг фалсафа ва табиатшунослик фанларига қўшган муносиб ҳиссаларини таъкидлаб ўтамиз.

Италия олими Г. Галилей (1564—1642) ва инглиз олими И. Ньютон (1643—1727) нинг инқилобий илмий ишларидан бошлаб тажрибага таяна бошлаган физика фани уч аср мобайнида жадал ривожланиш йўлини босиб ўтди. XIX асрнинг иккинчи ярмида ёруғлик электромагнитик назариясининг яратилиши билан физика фани муайян даражада якунланган ва *классик физика* деб ном олган даражасига эришди.

Ўтган асрнинг 90-йилларидаёқ классик физика қонунлари атомнинг ички тузилишини ва жуда катта тезликларда юз берадиган ҳодисаларни тушунтиришга ожиз эканлиги кўриниб қолди. XX аср бошида А. Эйнштейн (1879—1955) томонидан яратилган махсус ва умумий нисбийлик назарияларига таянган ва ёруғликнинг квант назарияси ҳамда микрозарраларнинг квант механикасига асосланган ***замонавий физика*** вужудга келди. Квант назариясига таянган ҳолда XX аср физикаси модда ва майдон хоссалари, кристалларнинг тузилиши ва хоссалари, атом, молекулалар, атом ядроси ва элементар зарралар таркиби ва хоссаларини ўрганишда улкан натижаларга эришди. Физиканинг элементар зарралар физикаси, квант хромодинамикаси, плазма физикаси, ядро физикаси, қаттиқ жисмлар физикаси ва бошқа янги соҳалари вужудга келди. Физиканинг айрим йўналишларида эса янги соҳалар, жумладан квант оптикаси, ночизиғий оптика, голография, квант электроникаси ва бошқалар пайдо бўлди.

Физиканинг тараққиёти бошқа табиатшунослик фанлари, математика ва техника тараққиёти билан узвий боғланган. Физика ҳодисаларини ўрганишда, ҳаракат қонунларини аниқлашда математик аппаратдан кенг фойдаланилади. Математика фанининг тараққиётига назар солсак, унинг ривожи асосан физика фанининг ривожи билан чамбарчас боғлиқлигини кўриш мумкин. Масалан, махсус ва умумий нисбийлик назариясининг ишлаб чиқилиши ноэвклид геометрия (Риман геометрияси) нинг тараққий қилишига сабаб бўлди. Электрон-ҳисоблаш машиналари (ЭҲМ) нинг кашф қилиниши эса тақрибий ҳисоблаш назарияси ва бутунлай янги соҳа бўлган программалаштириш фанини вужудга келтирди. Ўз навбатида математика фани физик олимларни қудратли тадқиқ усуллари билан қуроллантириб бормоқда.

Табиат ҳодисаларининг энг умумий қонунларини ва ҳаракатнинг энг умумий хоссаларини ўрганганн туфайли физика фани бошқа табиатшунослик фанлари учун илмий асос бўлиб хизмат қилади ва табиий фанлар ичида етакчи ўрин тутади. Масалан, квант механикаси тасаввурлари асосида квант кимёси вужудга келди, мазкур фан тушунчалари кимёвий бирикмаларнинг электрон тузилишини ва жуда катта бўлган оқсил молекулаларининг тузилишини аниқлашга имкон яратди. Физикадаги кашфиётлар айрим табиий фанлар тараққиёти учун жуда катта туртки берди. Масалан, микроскоп ва телескопнинг яратилиши биология ва астрономия фанлари тараққиётини кескин жадаллаштирди. Замонавий радиотелескоплар эса коинот ҳақидаги ахборот ҳажмини мислсиз даражада орттириб юборди.

Физика ва бошқа табиий фанлар чегарасида янги фанлар вужудга келди. Булар жумласига биофизика, физикавий кимё, астрофизика, геофизика, агрофизика, психофизика ва бошқаларни киритиш мумкин. Физик тадқиқотлар услубини такомиллаштириш ва энг замонавий ўлчов асбобларининг, жумладан ЭҲМ ларнинг ўлчашларга татбиқ этилиши барча фанларнинг илмий имкониятларини янада орттиришга ва фанлар тараққиётини жадаллаштиришга ёрдам беради.

2- §. Физика ва техника

Фан ва техниканинг ривожланиш суръати жамиятнинг иқтисодий эҳтиёжлари билан белгиланади. Тараққиётнинг ҳамма босқичларида ҳам ишлаб чиқаришнинг техник даражаси табиий фанлар, биринчи ўринда физика фани эришган ютуқлар билан узвий боғлиқ бўлади. Физик тадқиқотлар бир томондан моддий дунё ҳақидаги билимлар доирасини кенгайтириб борса, иккинчи томондан ишлаб чиқариш жараёнларининг самарадорлигини оширишга, янги технологияларни ишлаб чиқишга ва янада такомиллашган механизмлар ва қурилмалар яратишга асос бўлиб хизмат қилади.

Физикадаги йирик кашфиётлар эртами-кечми техниканинг инқилобий ўзгаришларига сабаб бўлади, натижада физика билан чамбарчас боғланган техникавий фанлар ва техниканинг янги соҳалари вужудга келади. Масалан, XIX асрда Фарадей, Ампер, Эрстед, Ленц, Максвелл, Герц, Попов ва бошқа физик олимлар яратган электромагнетизм назарияси асосида электротехника ва радиотехника бунёдга келди. Иссиқлик машиналарини такомиллаштириш мақсадида иссиқлик ҳодисаларини ўрганиш термодинамика фанининг шаклланишига олиб келди.

Замонавий техника яратган қудратли тезлаткичлар ва ўта сезгир қайд қилувчи қурилмалар ёрдамида физика фани модданинг негизигача кириб борди ва ҳатто элементар зарралар таркибини ҳам аниқлашга муваффақ бўлди. Инсон заковатининг маҳсули бўлган мураккаб космик учиш аппаратларининг сайёралараро фазода бир неча ўн миллион километр масофалардан Ерга коинот ҳақидаги маълумотларни узатиши физика ва техниканинг ҳамкорлигисиз амалга ошмаган бўлур эди.

Ярим ўтказгичлар физикасининг ривожланиши ўта соф материаллар олиш ва ярим ўтказгич модда кристалидаги аралашмалар концентрациясини молекуляр даражада бошқариш вазифасини қўйди. Физик назариялар ва замонавий тадқиқот усуллари билан қуролланган ярим ўтказгичлар техникаси бу мураккаб вазифани муваффақиятли равишда бажарди, яъни ўта кичик ҳажмли интеграл схемалар олиш технологияси ишлаб чиқилди. Мазкур технология ёрдамида кейинги 20—30 йил ичида электрон ҳисоблаш машиналарининг бир неча авлоди яратилди, ҳозирги вақтда эса мустақил фикрлай оладиган ЭҲМ лар яратиш устида изланишлар олиб борилмоқда.

Қаттиқ жисмлар физикаси ва газ разряди физикасида эришилган ютуқлар, модда билан нурланишнинг ўзаро таъсирини ҳар томонлама тадқиқ қилиш яна бир муҳим илмий-техник йўналиш — лазер техникасининг ривожланишига асос бўлди. Техниканинг лазерлар кириб борган барча соҳалари сифат жиҳатдан янги даражага кўтарилмоқда. Яқин келажакда лазерлар ёрдамида оптикавий алоқа ва ахборотни оптикавий қайта ишлаш, кимёвий жараёнларни бошқариш ва бошқарилувчи термоядро синтезни амалга ошириш вазифалари ҳал бўлиш арафасида турипти.

Келтирилган мисоллардан кўринадики, физика ва техниканинг ўзаро сермаҳсул алоқаси ва бир-бирини ривожлантира бориши инсоният тараққиётининг муҳим омилларидан биридир.

3- §. Ўлчов бирликлари. СИ бирликлар системаси

Физикада жуда кўп физик катталиклар билан иш кўрилади. Ҳар бир катталик эса ўз бирлигига эга бўлиши зарур. Бу эса, жуда кўп сонли бирликлар билан муомала қилишни талаб қилади. Бироқ, бирликлар сонини қисқартиришнинг имкони бор. Гап шундаки, физик катталиклар орасида муайян муносабатлар мавжуд бўлиб, баъзи физик катталикларни бошқалари орқали ифодалаш, бир нечта физик катталиклар билан чекланиб, қолган катталиклар бирликларини мазкур катталиклар бирликлари орқали ифодалаш мумкин. Бу бирликлар *асосий бирликлар,* қолганлари эса *ҳосилавий бирликлар* деб юритилади.

Физик катталиклар бирликларининг мажмуаси *бирликлар системаси* деб аталади. Умуман олганда, барча бирликлар системалари тенг ҳуқуқлидир. Улар бир-биридан фақат амалий жиҳатдан мақсадга мувофиқлиги ҳамда муайян ҳолда қўлланилишининг қулайлиги билангина фарқ қилади.

Ҳозирги пайтда кўпчилик мамлакатларда, жумладан республикамизда ҳам қўлланилиши қулай бўлган *Халқаро бирликлар системаси (СИ)* қабул қилинган. Мазкур бирликлар системасида асосий бирликлар сифатида тўққизта бирлик — метр (узунлик бирлиги), килограмм (масса бирлиги), секунд (вақт бирлиги), ампер (ток кучи бирлиги), кельвин (температура бирлиги), моль (модда миқдори бирлиги), кандела (ёруғлик кучи бирлиги), радиан (ясси бурчак бирлиги) ва стерадиан (фазовий бурчак бирлиги) қабул қилинган.

Узоқ давр мобайнида вақт бирлигини юлдузларнинг кўринма ҳаракати орқали ифодалаб юрилган. Кейинчалик, ўлчаш аниқлиги орта бориши билан вақт бирлиги сифатида 1 секунд қабул қилиниб, бунда Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши давридан фойдаланилган. Бунда ўлчаш аниқлиги 10^{-8} дан кам бўлмаган. Бироқ, 60-йилларга келиб, вақтни ўлчашда атом жараёнлари яхшироқ қўл келиши аниқ бўлиб қолди. 1967 йилда Халқаро ўлчамлар ва тарозилар қўмитаси томонидан секунднинг янги эталони қабул қилинди: **1 секунд** — цезий-133 атоми асосий ҳолатининг икки ўта ингичка сатҳлари орасидаги ўтишга мос келган нурланиш (ёруғлик) нинг 9192631770 та даврига тенг вақт оралиғидир.

Қадимдан узунликни ўлчашда кишилар ўзлари билан боғлиқ бўлган бирликлардан фойдаланишган: қадам, қарич, бўғин ва ҳ. к. Кейинчалик, ягона ва турғун масштаб танлаш талаб қилингач, бирлик сифатида 1 метр қабул қилинган. У Ер меридиональ айланаси чорагининг 10^{-7} қисмига тенг деб қабул қилинган ва шу асосда платинадан эталон тайёрланган. Кейинчалик, янада турғунроқ эталон (90% платина, 10% иридий) тайёрланди. Бироқ, вақт ўтиши билан бу эталоннинг ҳам ўлчамлари ўзгара бориши (қисқариши) сезиб қолинди. Ҳозирги пайтда узунликни ўлчаш ёруғлик тезлигининг доимийлигига асосланган (тортишиш майдонидан ташқарида, ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги 299792458 м/с деб қабул илинган): **1 метр** вакуумда ясси электромагнит тўлқиннинг 1/299792458 секундда босиб ўтган йўлига тенг.

Массанинг бирлиги сифатида **1 килограмм** қабул қилинган бўлиб, ҳозирги пайтда у Париж ёнида жойлашган Севрда Халқаро ўлчамлар ва тарозилар бюросида сақланаётган, диаметри ва баландлиги 39 мм дан бўлган цилиндр шаклида платина (90%) ва иридий (10%) қотишмасидан тайёрланган эталон массасига тенг.

Асосий бирликларнинг қолганларига умумий физика курсининг бошқа бўлимларида тўхталиб ўтамиз.

Кўриб ўтилган вақт, узунлик ва масса бирликларидан бошқа механик бирликлар ҳосила бирликлар ҳисобланади. Ҳосила бирликлар билан асосий бирликлар орасидаги муносабатни ифодаловчи шартли формулалар *ўлчамлик формуласи* деб юритилади.

СИ системадаги асосий катталикларни шартли белгилар билан белгилайлик: узунлик —L, вақт — T, масса — M. Ўлчамлик формулаларида қавслар ишлатилади. У ҳолда тезлик, тезланиш ва куч учун ушбу формулаларни ёзиш мумкин:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = [LT^{-1}];$$

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = [LT^{-2}];$$

$$[F] = [ma] = [LT^{-2}M].$$

Ҳар қандай физик қонунни ёки катталиклар орасидаги муносабатни ифодаловчи тенгламада ҳар иккала қисм ўлчамликлари албатта бир хил бўлиши шарт. Бу қоида, физик ҳисобларни олиб бораётган ёки масала ечаётган пайтда ҳосил бўлган муносабатларнинг тўғри эканлигини текшириб бориш имконини беради.

I боб

МОДДИЙ НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

Ҳаракатнинг энг содда шакли механик ҳаракат ҳисобланади. *Механик ҳаракат* деб, жисм ва зарралар ўзаро вазиятларининг вақт ўтиши билан ўзгариши тушунилади. Механик ҳаракат ҳаракатнинг бошқа барча турларида мавжуд бўлади. Механик ҳаракат қонунлари физиканинг *механика* бўлимида ўрганилади.

Кинематика механиканинг мустақил бўлими бўлиб, у жисмлар ҳаракатини улар орасидаги ўзаро таъсирни ҳисобга олмасдан ўрганади, бунда жисм ҳаракатини юзага келтирувчи ёки ўзгартирувчи сабаблар текширилмайди. Кинематика қонунлари жисмлар ҳаракатини тавсифлайди, бироқ улар ҳаракатнинг юзага келиши ва ўзгариши сабабларини акс эттирмайди.

4- §. Жисмнинг кўчиши. Саноқ системалари

Кундалик ҳаётда ва табиатда учрайдиган ҳодисаларни кузатар эканмиз, атрофимизда турли жисмларнинг бирор йўсинда ҳаракат қилаётганининг гувоҳи бўламиз. Қуёш ва Ойнинг суткалик кўринма ҳаракати, кўчадаги автомобиль ёки йўловчилар ҳаракати, ёмғир томчиларининг ерга тушиши, футбол тўпининг юмалаши ва бошқа сон-саноқсиз ҳодисаларда механик ҳаракатнинг турли кўринишлари намоён бўлади. Жисмларнинг ҳаракати беихтиёр атрофдаги бошқа қўзғалмас ёки ҳаракатланаётган жисмларга нисбатан кузатилади. Волейбол ўйинчиси ўз ҳаракатларини учиб келаётган коптокка нисбатан мувофиқлаштирса, томошабинлар шу вақтдаги ўйинчи ҳаракатини кўпроқ майдончага ёки тўрга нисбатан кузатадилар.

Жисмнинг ҳаракати қайси жисмга нисбатан кузатилишига қараб турлича характерда қабул қилиниши мумкин. Масалан, шамолсиз ҳавода ёғаётган ёмғир томчилари бекатда тўхтаб турган йўловчига тик тушаётган бўлиб кўринса, шу вақтда бекат ёнидан ўтиб кетаётган автобусдаги йўловчиларга томчилар қия тушаётгандек туюлади. Шу сабабли механик ҳаракатни тавсифлаш учун берилган жисмнинг ҳаракати қайси жисм ёки ўзаро қўзғалмас жисмлар системасига нисбатан ўрганилишини аниқлаб олиш зарур. Бундай танлаб олинган жисм (ёки жисмлар) *саноқ жисми* деб аталади ва у билан бирор координаталар системаси боғланади.

Кундалик ҳаётда ва техник масалаларни ҳал қилишда саноқ жисми сифатида Ерга нисбатан қўзғалмас бўлган жисмлар (лаборатория столи, хона девори, йўл ёқасидаги дарахтлар, бино ва ҳ. к.) танлаб олинади. Бундай тарзда танлаб олинган жисмларнинг қўзғалмас деб олиниши шартлидир, чунки шу буюмлар жойлашган Ер ўз ўқи атрофида айланишидан ва Қуёш атрофида берк орбита бўйлаб жуда катта, яъни 29,3 км/с тезлик билан ҳаракатланишидан ташқари, галактикамиз бўйлаб Қуёш системаси таркибида «саёҳат» қилади.

Ҳаракатни тавсифлаш учун саноқ жисмига боғланган координаталар системасидан ташқари, вақтни ўлчаш учун соат ҳам зарур бўлади. Соат вазифасини бир хил жараённи даврий равишда такрорлаб турувчи ихтиёрий асбоб ҳам бажариши мумкин.

Саноқ жисми билан маҳкам боғланган координаталар системаси ва соатдан иборат тўплам *саноқ системаси* деб аталади. Саноқ системаси қуйидаги элементлардан ташкил топади: 1) саноқ жисми; 2) саноқ жисми билан маҳкам боғланган координаталар системаси; 3) масофаларни ўлчаш усули (масштаб); 4) масофаларнинг (координаталарнинг) ўлчов боши; 5) вақтни ўлчаш усули (соат); 6) вақтнинг ўлчов боши. Масофаларни ва вақтни ўлчаш усуллари қўзғалмас системалар ва бир-бирига нисбатан ҳаракатланувчи системалар учун ҳам баравар яроқли бўлиши керак.

Классик механикада тезликлари ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлган ҳаракатлар ўрганилади, шунинг учун масофалар ва вақтни ўлчаш усуллари жисмлар тезлигига боғлиқ бўлмайди деб ҳисоблаш мумкин. Жисмлар тезлиги ёруғлик тезлигига яқинлашиб борган ҳолларда ўлчов натижаларига тузатмалар киритилади. Кинематикада саноқ жисмини (демак, саноқ системасини ҳам) танлаб олиш мутлақо ихтиёрийдир. Аммо тўғри танлаб олинган саноқ системаси ҳаракатни тавсифлашни ва ҳисоблашларни анча осонлаштиради.

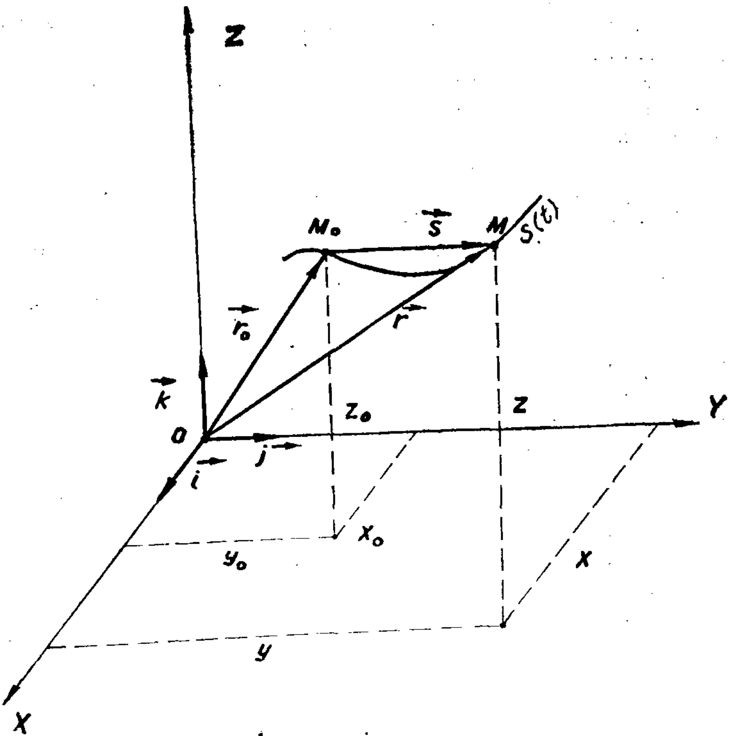
Бу ўринда астрономияга оид сабоқли мисолни келтириб ўтамиз. Қадимги юнон олими Птолемей Ер коинот марказида жойлашган бўлиб, барча осмон жисмлари (Қуёш, Ой, юлдузлар ва сайёралар) унинг атрофида айланади деб ҳисоблаган. Саноқ жисми сифатида Ер олинган бундай системада сайёраларнинг осмондаги мураккаб кўринма ҳаракатини тушунтириб беришнинг иложи бўлмаган. Поляк астрономи Н. Коперник (1473—1543) барча сайёралар, шу жумладан Ер ҳам Қуёш атрофида айланади, деган дадил ғояни майдонга ташлади. Бундай системада сайёралар ҳаракатининг орбиталари айланаларга яқин эканлиги маълум бўлди ва уларнинг мураккаб кўринма ҳаракатлари осон тушунтириб берилди. Марказида Қуёш жойлашган бундай саноқ системаси кейинчалик И. Кеплернинг (1571—1630) осмон механикаси қонунларини, И. Ньютоннинг (1643—1727) эса бутун олам тортишиш қонунини кашф қилишида муҳим роль ўйнади.

Лекин, шуни таъкидлаб ўтиш зарурки, Ер билан боғланган система баъзи ҳолларда Қуёш билан боғланган системадагига қараганда ечимни анча соддалаштириши мумкин, шу сабабли бу системадан кундалик ҳаётда, техникада, илмий тадқиқотларда кенг фойдаланилади.

Физик масалаларни ҳал қилишда муқаррар равишда турли модель ва абстракт тушунчалардан фойдаланилади. Берилган масала шароитида ўлчамларини ҳисобга олмаса ҳам бўладиган макроскопик жисм *моддий нуқта* дейилади. Моддий нуқта абстракт тушунча бўлиб, у мавжуд реал жисмларнинг идеаллаштирилган образидир. Бирор жисмни моддий нуқта деб ҳисоблаш мумкин ёки мумкин эмаслиги кўп жиҳатдан жисмнинг ўзига эмас, балки ҳаракатнинг характерига, масаланинг қўйилишига боғлиқ. Бунда жисмнинг ўлчамлари эмас, балки шу ўлчамларнинг ўрганилаётган ҳаракатдаги бошқа муайян ўлчамларга нисбати муҳимроқдир. Масалан, автомобилнинг икки шаҳар орасидаги йўлни босиб ўтишдаги ҳаракатини ўрганишда автомобилни жуда катта аниқлик билан моддий нуқта деб ҳисоблаш мумкин. Бунда ҳаракатни характерловчи масофа — ҳар икки шаҳар орасидаги масофа бўлиб, у автомобилнинг узунлигидан жуда катта. Шунга кўра, мазкур ҳаракатда автомобилнинг барча нуқталари амалда бир хил ҳаракатланади деб қараш ва битта нуқтанинг, масалан, автомобиль оғирлик марказининг ҳаракатини ўрганиш кифоя бўлиб, автомобилнинг массаси ана шу геометрик нуқтада тўпланган (мужассамланган) деб ҳисоблаш мумкин. Шуни таъкидлаш керакки, мазкур мисолда автомобиль ғилдирагининг айланишини ўрганишда моддий нуқта тушунчасини қўллаш ярамайди, чунки геометрик нуқтанинг у орқали ўтган ўқ атрофида айланиши физик маънога эга бўлмайди.

Ихтиёрий макроскопик жисмни фикран ўзаро таъсирлашадиган кичик макроскопик бўлакчаларга бўлиб, бу бўлакчаларнинг ҳар бирини моддий нуқта деб қараш мумкин. Шу мулоҳазаларга кўра, классик механикани ўрганишни битта моддий нуқта механикасидан бошлаб, сўнгра моддий нуқталар системасини ўрганишга ўтиш мумкин.

Моддий нуқта ҳаракатини ўрганишда координаталар



1-расм.

системаси сифатида одатда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасидан фойдаланилади. Баъзан, қулай бўлиши учун, қутб, цилиндрик ёки сферик координаталар системалари ҳам олиниши мумкин. Фазода кўчиши мобайнида моддий нуқта ўтган нуқталардан ташкил топган чизиқ *ҳаракат траекторияси* дейилади. Траектория шаклига қараб, ҳаракат тўғри чизиқли ёки эгри чизиқли бўлиши мумкин.

Моддий нуқтанинг фазодаги ҳаракатини тавсифлашнинг уч хил усули мавжуд. Улардан бири *табиий усул* деб аталади. Бунда траекторияда ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг берилган пайтдаги ўрнини аниқловчи s ёйли координатанинг саноқ боши бўлган M_0 нуқта белгиланади (1-расм). Ёйли координата траектория бўйлаб саноқ бошидан моддий нуқтанинг берилган пайтдаги вазиятигача бўлган масофа билан ўлчанади. Бундан ташқари, бир томонга йўналиш — мусбат, тескари йўналиш эса манфий деб белгилаб олинади. Бу усулда моддий нуқтанинг вазияти вақтга боғлиқ бўлган ягона координата билан ифодаланади:

$$s = s(t). \qquad (4.1)$$

Мазкур функция моддий нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракати қонуни дейилади.

Иккинчи усулда (*вектор усули*) моддий нуқтанинг фазодаги ўрни координаталар бошидан берилган нуқтага ўтказилган $\vec{r}$ радиус-вектор ёрдамида кўрсатилади (1-расм). Ҳаракат давомида моддий нуқта радиус-векторининг қиймати (катталиги) ва йўналиши ўзгариб боради, яъни, радиус-вектор вақтнинг функцияси ҳисобланади:

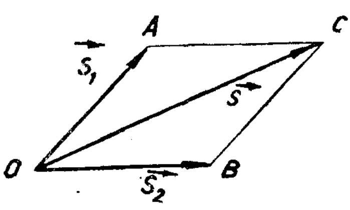
$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (4.2)$$

Учинчи усулда (*координаталар усули*) моддий нуқтанинг фазодаги ўрни унинг x, y, z координаталари орқали берилади (1-расм). Ҳаракат мобайнида моддий нуқта координаталари ўзгариб боради:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (4.3)$$

Бу функциялар *нуқта ҳаракатининг кинематик тенгламалари* деб аталиб, улар моддий нуқтанинг ихтиёрий пайтдаги ўрнини белгилайди. Моддий нуқта радиус-векторини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad (4.4)$$



2-расм.

бу ерда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — мос равишда X, Y ва Z ўқлар бўйлаб йўналган бирлик векторлар. Нуқта радиус-векторининг қиймати (модули) эса

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.5)$$

бўлади.

Фараз қилайлик, ҳаракатланаётган моддий нуқта бошланғич пайтда $\vec{r}_0$ радиус-вектор билан ифодаланадиган M_0 вазиятда бўлиб, t вақт ичида $\vec{r}$ радиус-векторли M вазиятга кўчган бўлсин. Ҳаракатланаётган нуқтанинг бошланғич вазиятидан муайян пайтдаги вазиятига томон ўтказилган $\vec{s}$ вектор *кўчиш вектори* дейилади. Чизмадан кўринишича (1-расм), кўчиш вектори нуқта радиус-векторининг орттирмасига тенг:

$$\vec{s} = \Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0, \quad (4.6)$$

унинг қиймати (модули) эса

$$|\vec{s}| = |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (4.7)$$

га тенг бўлади.

Агар моддий нуқта бир вақтнинг ўзида икки кўчишда иштирок этаётган бўлса, унинг охирги вазияти иккала кўчиш бараварига ёки ихтиёрий тартибда бирин-кетин амалга ошганига боғлиқ бўлмайди. Бу фикрни 2-расмдан тушуниб олиш мумкин. Бунда моддий нуқта O вазиятдан C вазиятга уч хил йўл билан кўча олади: 1) параллелограммнинг OA ва AC томонлари бўйлаб, 2) параллелограммнинг OB ва BC томонлари бўйлаб, 3) параллелограмм диагонали OC бўйлаб. Ҳаракат оқибати бир хил бўлиб, натижавий кўчиш вектори (кўчишларнинг вектор йиғиндиси) параллелограмм қоидаси билан топилади:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 . \quad (4.8)$$

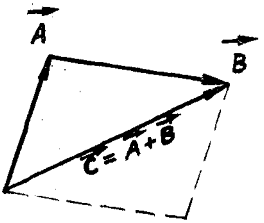
Бу формула *ҳаракатларнинг мустақиллик қонуни* деб аталади.

5-§. Векторлар ҳақида бошланғич маълумотлар

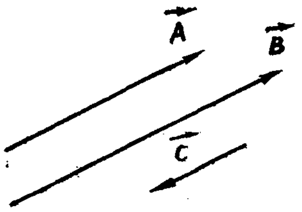
Сон қиймати ва йўналиши билан характерланадиган ҳамда параллелограмм қоидаси бўйича қўшиладиган катталиклар *векторлар* деб аталади. Векторлар устига стрелка белгиси қўйилган ҳарфлар билан белгиланади. Иккита $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ *векторларни қўшиш* учун (3-расм) $\vec{B}$ векторнинг боши $\vec{A}$ векторнинг учи билан устма-уст қўйилади ($\vec{B}$ вектор ўз-ўзига параллел ҳолда кўчирилади). $\vec{A}$ векторнинг бошидан $\vec{B}$ векторнинг учига ўтказилган $\vec{C}$ вектор $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторларнинг йиғиндиси ҳисобланади. У $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторлар устига қурилган параллелограмм диагонали билан мос келади.

Векторнинг сон қиймати унинг *модули* деб юритилади ва иккита ёнида параллел вертикал чизиқчалар бўлган вектор белгиси билан ёки стрелкасиз ҳарф билан белгиланади:

$$A = |\vec{A}|.$$



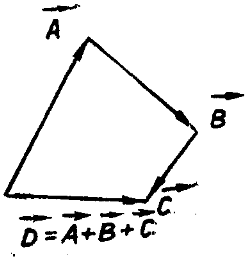
3-расм.



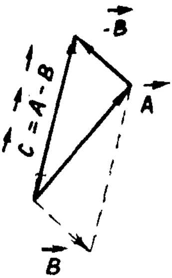
4-расм.

Шуни таъкидлаш керакки, векторнинг модули скаляр (фақат сон қиймати билан белгиланадиган катталик) бўлиб, ҳамма вақт мусбат бўлади.

Чизмада векторлар учида стрелкаси бўлган тўғри чизиқ кесмалари орқали тасвирланади (стрелка векторнинг йўналишини кўрсатади), кесманинг узунлиги сон қиймати жиҳатдан векторнинг модулига тенг. Ўзаро параллел тўғри чизиқлар ёки бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналган (бир хил ёки қарама-қарши йўналишли) векторлар *коллинеар векторлар* деб аталади (4-расм), ўзаро параллел текисликларда



5-расм.



6-расм.

ёки бир текисликда ётган векторлар эса, *компланар векторлар* деб юритилади.

Иккитадан ортиқ векторларни қўшишда навбатдаги векторнинг боши ўзидан илгариги векторнинг учи билан устма-уст қўйилади (5-расм). Натижада синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Биринчи векторнинг бошидан охирги вектор учига ўтказилган кесма натижавий йиғинди векторни ҳосил қилади. Натижавий вектор қўшишнинг қандай кетма-кетликда амалга оширилганига боғлиқ бўлмайди.

Иккита $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ *векторларнинг айирмаси* шундай $\vec{C}$ векторга тенгки, унинг $\vec{B}$ вектор билан йиғиндиси $\vec{A}$ векторга тенг бўлади (6-расм). Бунда $\vec{A}$ векторга $-\vec{B}$ вектор ($\vec{B}$ векторга қарама-қарши вектор) ни қўшиш ҳам мумкин.

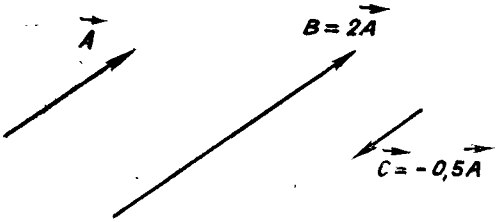
Йиғинди векторнинг модулини фақат $|\vec{A}+\vec{B}|$ кўринишда ёзиш мумкин, чунки $A+B$ ёзув иккала вектор модулларининг йиғиндисини кўрсатади. Айирма вектор модули ҳақида ҳам айнан шундай мулоҳазани айтиш мумкин.

$\vec{A}$ *векторнинг орттирмаси* деганда $\Delta\vec{A}=\vec{A}_2-\vec{A}_1$ вектор тушунилади. Унинг модули $|\Delta\vec{A}|$ кўринишда ёзилади, уни ΔA кўринишда ёзиб бўлмайди, чунки $\Delta A=A_2-A_1$ — мазкур вектор модулининг орттирмасидир. Умумий ҳолда $\Delta A\neq|\Delta\vec{A}|$.

Бирор $\vec{A}$ *векторнинг α скалярга кўпайтмаси* деганда модули $\vec{A}$ вектор модулидан $|\alpha|$ марта катта бўлган, α скаляр мусбат бўлганда йўналиши $\vec{A}$ йўналиши билан мос келиб, α манфий бўлганда эса $\vec{A}$ йўналишига қарама-қарши бўлган $\vec{B}$ векторга айтилади (7-расм).

Ҳар қандай векторни

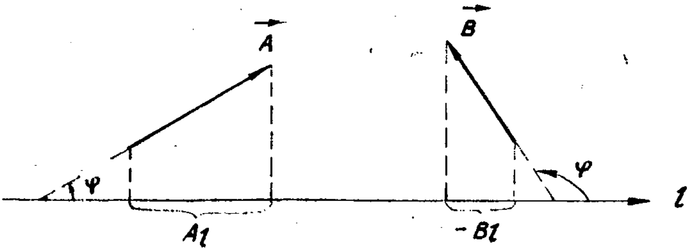
$$\vec{A}=A\cdot\vec{e}_A \qquad (5.1)$$



7-расм.

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $\vec e_A$ — $\vec A$ векторнинг *бирлик вектори* (ёки орти) деб аталади. Унинг модули бирга тенг бўлиб, йўналиши $\vec A$ вектор йўналиши билан мос келади. Фазовий йўналишлар ва координата ўқлари учун ҳам бирлик векторлар танлаш мумкин: $\vec e_x$, $\vec e_y$ ва $\vec e_z$ (кўпинча X, Y ва Z ўқларнинг бирлик векторлари $\vec i$, $\vec j$ ва $\vec k$ деб ҳам белгиланади).

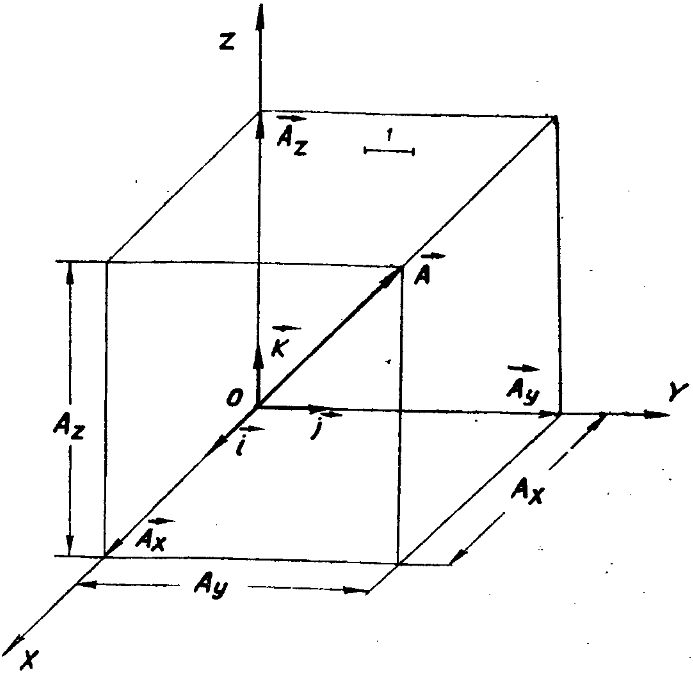
Векторнинг бирор ўққа проекцияси деб



8-расм.

$$A_l = A\cdot\cos\varphi \qquad (5.2)$$

катталикка айтилади, бу ерда A — векторнинг модули, φ — вектор ва ўқ йўналишлари орасидаги бурчак (8-расм). Векторнинг ўққа проекцияси унинг боши ва учининг мазкур ўққа проекциялари орасидаги кесма узунлигига тенг бўлиб, φ бурчак ўткир бўлганда проекция мусбат ишора билан, ўтмас бўлганда эса манфий ишора билан олинади. Агар $\vec A + \vec B + \vec C = \vec D$ бўлса, натижавий $\vec D$ векторнинг проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг:



9-расм.

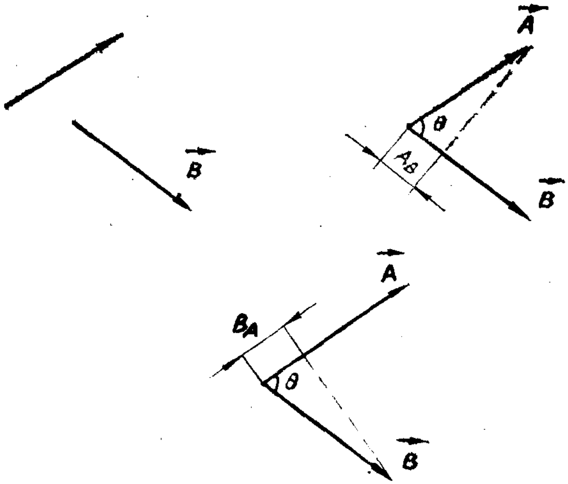
$$D_l = A_l + B_l + C_l. \qquad (5.3)$$

Ҳар қандай векторни унинг координата ўқларига проекциялари орқали ифодалаш мумкин (9-расм):

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}, \qquad (5.4)$$

бу ерда $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ — X, Y ва Z ўқларининг бирлик векторлари. Одатда, векторнинг координата ўқларига проекциялари (A_x, A_y, A_z) унинг *компонентлари* дейилади. Шуни таъкидлаш керакки, векторнинг координата ўқлари бўйича ташкил этувчилари ($\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$) вектор катталик, векторнинг компонентлари эса—скаляр катталикдир.

Иккита $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторлар модуллари ҳамда улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг сон иккала векторнинг *скаляр кўпайтмаси* дейилади (10-расм):



10-расм.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}), \qquad (5.5)$$

у скаляр катталик ҳисобланади.

Векторлар орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{3\pi}{2}$ оралиғида бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси манфий бўлади. Агар $\vec{A} = \vec{B}$ бўлса,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^2 = |\vec{A}|^2 \qquad (5.6)$$

га тенг бўлади.

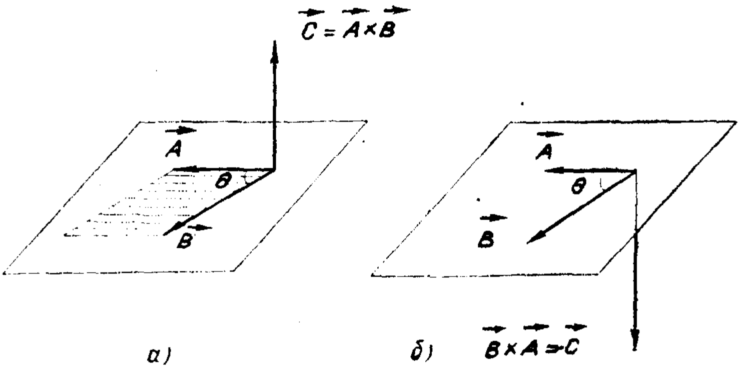
Иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ бўлса, векторлар ўзаро *ортогонал* (тик) деб аталади. Шаклдан (10-расм) кўринадики,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B_A = A_B\cdot B, \qquad (5.7)$$

бу ерда $B_A = B\cdot\cos\theta$, $A_B = A\cos\theta$ бўлиб, улар векторлардан бирининг иккинчи вектор йўналишига проекциясини ифодалайди.

Векторларнинг компонентлари орқали ифодаси (5.4) ни ҳисобга олиб, скаляр кўпайтмани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\cdot\vec{i} + A_y\cdot\vec{j} + A_z\cdot\vec{k})(B_x\cdot\vec{i} + B_y\cdot\vec{j} + B_z\cdot\vec{k}),$$



11-расм.

ёки

$$\vec A\cdot\vec B = A_xB_x + A_y\cdot B_y + A_zB_z. \qquad (5.8)$$

Бу формула ёрдамида векторнинг модулини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$|\vec A| = \sqrt{\vec A\cdot\vec A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \qquad (5.9)$$

Физикада скаляр кўпайтма билан бир қаторда векторларнинг вектор кўпайтмаси ҳам кенг қўлланилади. *Вектор кўпайтма* шундай векторки, у $\vec A$ ва $\vec B$ векторлар ётган текисликка перпендикуляр бўлиб, сон қиймати (модули) $A\cdot B\cdot|\sin(\widehat{\vec A, \vec B})|$ ифодага тенг бўлади (11-расм):

$$\vec C = \vec A\times\vec B = \vec e_C\cdot A\cdot B\left|\sin\left(\widehat{\vec A, \vec B}\right)\right|. \qquad (5.10)$$

Вектор кўпайтма $\vec A\times\vec B$ ёки $[\vec A\cdot\vec B]$ кўринишда ёзилиши мумкин. Кўпайтма $\vec C$ векторнинг йўналиши ўнг парма қоидаси ёрдамида топилади. Биринчи кўпайтувчи $\vec A$ векторни $\vec B$ йўналиши билан устма-уст тушгунча бурайлик, у ҳолда вектор кўпайтма $\vec C$ нинг йўналиши каллагининг буралиш йўналиши $\vec A$ вектор буралиши йўналиши билан мос келадиган парма учининг ҳаракат йўналиши билан мос келади (11-*а* ва *б*-расмлар). 11, *а*-расмдан кўринадики, $\vec C = \vec A\times\vec B$

вектор кўпайтманинг модули $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторлар устида қурилган параллелограмм юзасига тенг. 11- *а* ва *б* расмларни таққослаш шуни кўрсатадики, мазкур юзалар муайян йўналишга эга бўлади.

Вектор кўпайтма модулини топайлик:

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \left|\left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\times\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)\right|.$$

Бу ифодада $\vec{i}\times\vec{i} = 0$, $\vec{j}\times\vec{j} = 0$, $\vec{k}\times\vec{k} = 0$; $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j}\cdot\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k}, \qquad (5.11)$$

ёки $|\vec{A}\times\vec{B}| =$

$$= \sqrt{(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2} \qquad (5.12)$$

ифода келиб чиқади.

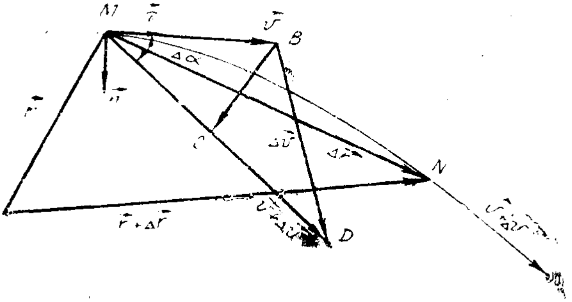
6-§. Тезлик

Моддий нуқта ҳаракатини тавсифлаш учун ҳаракатнинг муайян пайтдаги жадаллигини ҳамда йўналишини кўрсатадиган физик катталик—тезлик тушунчаси киритилади.

Фараз қилайлик, умумий ҳолда эгри чизиқли ҳаракат қилаётган ва t пайтда траекториянинг M нуқтасида бўлган моддий нуқта Δt вақт ичида N нуқтага кўчган бўлсин (12-расм). M ва N нуқталарнинг радиус-векторлари мос равишда $\vec{r}$ ва $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, MN ёйнинг узунлиги эса Δs га тенг. Моддий нуқта радиус-вектори $\Delta\vec{r}$ орттирмаси (кўчиши) нинг шу кўчиш учун сарфланган вақтнинг Δt қийматига нисбати билан ўлчанадиган катталик нуқтанинг t, $t + \Delta t$ вақт оралиғидаги *ўртача тезлиги* деб аталади:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (6.1)$$

Бу катталик $\Delta\vec{r}$ векторни скалярга бўлиб ҳосил қилингани учун вектор катталик ҳисобланади, унинг йўналиши эса MN ватар, яъни $\Delta\vec{r}$ нинг йўналиши билан мос тушади:



12-расм.

Δt вақт оралиғи чексиз кичиклаштириб борилганда ўртача тезлик интиладиган лимит ёки радиус-векторнинг вақт бўйича биринчи ҳосиласи

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (6.2)$$

моддий нуқтанинг t пайтда траекториянинг M нуқтасидаги тезлиги ёки *оний тезлиги* деб аталади. Вақт оралиғи кичиклаштириб борилганда N нуқта M нуқтага томон яқинлашиб боради, MN ватар эса M нуқтага ўтказилган уринма билан устма-уст тушади. Шу сабабли, $d\vec{r}$ вектор ва ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг тезлиги ҳаракат йўналишида траекторияга ўтказилган уринма бўйлаб йўналган бўлади. Ҳаракат йўналишида траекторияга уринма бўйлаб олинган бирлик вектордан фойдаланиб, тезлик векторини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\vec{v}_{\tau} = v \cdot \vec{\tau}, \qquad (6.3)$$

бу ерда $\vec{\tau}$ — уринма бўйлаб йўналган бирлик вектор.

Математика курсидан маълумки, ёй узунлиги чексиз кичрайиб борганда ёй ва уни тортиб турган ватар узунликларининг нисбати интиладиган лимит 1 та тенг. Шунинг учун $\Delta s \to 0$ да

$$|d\vec{r}| = ds.$$

тенглик ўринли бўлади. Бу муносабат ва (6.2) тенгламага асосланиб, моддий нуқта тезлигининг сон қиймати босиб ўтилган йўлдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг деган хулосага келамиз:

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

Бу ифодани интеграллаб, моддий нуқтанинг $\Delta t = t_2 - t_1$ вақт ичида босиб ўтган s йўлини аниқлаш мумкин:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt. \tag{6.4}$$

Моддий нуқтанинг тезлик векторини координата ўқлари бўйлаб йўналган ташкил этувчиларга ажратиш мумкин.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \tag{6.5}$$

бу ерда v_x, v_y ва v_z — тезлик векторининг мос координата ўқларига проекциялари. (6.2) ифодани ҳисобга олсак,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{6.6}$$

муносабатга эга бўламиз. (6.5) ва (6.6) ифодалардан, моддий нуқта тезлигининг координата ўқларига проекциялари нуқтанинг мос координаталаридан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилаларга тенг эканлиги келиб чиқади:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{6.7}$$

У ҳолда тезликнинг сон қиймати (модули)

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{6.8}$$

ифодадан топилиши мумкин.

Моддий нуқта бир вақтнинг ўзида бир нечта ҳаракатда иштирок этаётган бўлса, ҳаракатларнинг мустақиллиги қонунига кўра, унинг жуда қисқа вақт ичидаги натижавий кўчиши, алоҳида ҳаракатлар туфайли олган кўчишлари йиғиндисига тенг бўлади. Шу сабабли, натижавий ҳаракат тезлиги ҳам векторларни қўшиш қоидасига кўра топилади:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i, \tag{6.9}$$

бу ерда n — моддий нуқта иштирок этаётган ҳаракатлар сони.

7-§. Тезланиш

Кўп ҳолларда ҳаракат мобайнида тезлик векторининг сон қиймати ва йўналиши ўзгариб туради. Нотекис ҳаракат тезлигининг ўзгариш жадаллигини ифодалаш учун тезланиш тушунчаси киритилади.

Ҳаракатланаётган моддий нуқта Δt вақт ичида траекториянинг M нуқтасидан N нуқтасига кўчганида унинг $\vec{v}$ тезлиги $\vec{v}+\Delta\vec{v}$ гача ўзгарган бўлсин (12-расм). $\vec{v}+\Delta\vec{v}$ векторни ўзига параллел ҳолда M нуқтага кўчирамиз. Векторларни айириш қоидасига кўра, чизмадан BD кесманинг $\Delta\vec{v}$ га тенглигини аниқлаш мумкин. Нотекис ҳаракатнинг t, $t+\Delta t$ вақт оралиғидаги *ўртача тезланиши* деб, $\Delta\vec{v}$ тезлик ўзгаришининг шу ўзгариш юз берган вақт оралиғи Δt га нисбатига тенг бўлган векторга айтилади:

$$\langle\vec{a}\rangle=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (7.1)$$

Нуқтанинг t, $t+\Delta t$ вақт оралиғидаги ўртача тезланиши Δt вақт интервали чексиз кичрайтириб борилганда интиладиган лимитга тенг вектор катталик нуқтанинг t пайтдаги *тезланиши* ёки *оний тезланиши* деб аталади:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to0}\langle\vec{a}\rangle=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

(6.2) ифодадан фойдалансак,

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (7.2)$$

келиб чиқади. Демак, моддий нуқтанинг тезланиши унинг тезлигидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки радиус-векторидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг экан.

Моддий нуқта тезланиши векторини ҳам координата ўқлари бўйлаб йўналган учта ташкил этувчига ажратиш мумкин:

$$\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \qquad (7.3)$$

бу ерда a_x, a_y ва a_z — тезланиш векторининг мос координата ўқларига проекциялари. Тезлик вектори учун қўлланилган мулоҳазаларга асосан

$$\vec{a}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad (7.4)$$

эканлиги келиб чиқади, яъни моддий нуқта тезланишининг координата ўқларига проекциялари нуқта тезлигининг мос ўқларга проекцияларидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилаларга ёки унинг мос координаталаридан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилаларга тенг экан:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}. \quad (7.5)$$

Тезланишнинг сон қийматини

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad (7.6)$$

ифодадан топиш мумкин.

8-§. Эгри чизиқли ҳаракатда тезланиш

Моддий нуқта тезланиши тезлик векторининг ҳам сон қиймати бўйича, ҳам йўналиши бўйича ўзгариши суръатини характерлайди. Шу сабабли тезланиш векторини бири тезликнинг сон қиймати жиҳатидан, иккинчиси эса йўналиши жиҳатидан ўзгариш суръатини ифодалайдиган ташкил этувчиларга ажратиш мақбул. Бу ишни амалга ошириш мумкин эканлигини моддий нуқтанинг ясси (координата текислигидаги) ҳаракати мисолида кўриш мумкин (12-расм). *M* нуқтадаги тезланиш

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{BD}}{\Delta t}$$

бўлади. *MD* тўғри чизиқда *MB* га тенг бўлган *MC* кесма ажратамиз. У ҳолда $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$,

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{BC}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{CD}}{\Delta t}. \quad (8.1)$$

M нуқтада траектория текислигида ётган ўзаро перпендикуляр бўлган $\vec{\tau}$ ва $\vec{n}$ бирлик векторларни ўтказайлик. $\vec{\tau}$ вектор траекторияга ўтказилган уринма бўйлаб нуқта ҳаракати томонига йўналган, яъни тезлик вектори йўналишига мос келади, $\vec{n}$ вектор эса траекториянинг ботиқ томонига йўналган. $\vec{\tau}$ *бирлик уринма вектор*, $\vec{n}$ эса *бош нормал-*

нинг бирлик вектори дейилади. 12-расмдан кўринадики, $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторларнинг сон қийматлари ҳамда уларнинг уринма ва бош нормал йўналишидаги проекциялари

$$|\overrightarrow{BC}| = BC = 2v\sin\frac{\Delta\alpha}{2}, \quad |\overrightarrow{CD}| = CD = \Delta v;$$

$$BC_\tau = BC\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = 2v\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}, \quad BC_n = BC\cos\frac{\Delta\alpha}{2} = v\cdot\sin\Delta\alpha;$$

$$CD_\tau = CD\cos\Delta\alpha = \Delta v\cdot\cos\Delta\alpha, \quad CD_n = CD\cdot\sin\Delta\alpha = \Delta v\cdot\sin\Delta\alpha$$

га тенг бўлади. Бу ерда v—тезликнинг сон қиймати, Δv—тезлик сон қийматининг ўзгариши, $\Delta\alpha$—нуқта тезлигининг Δt вақт оралиғидаги бурилиш бурчаги. У ҳолда

$$\overrightarrow{BC} = \vec{\tau}\cdot 2v\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2} + \vec{n}\,v\sin\Delta\alpha,$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{\tau}\cdot\Delta v\cdot\cos\Delta\alpha + \vec{n}\,\Delta v\sin\Delta\alpha$$

деб ёзиш мумкин.

(8.1) лимитни ҳисоблаш пайтида M нуқтани қўзғалмас деб олинади, яъни Δt вақт оралиғи чексиз қисқариб борганда $\vec{v}$, $\vec{\tau}$ ва $\vec{n}$ катталикларнинг қийматлари ўзгармайди деб ҳисобланади. Иккинчи томондан эса, $\Delta t\to 0$ да $\Delta v\to 0$ ва $\Delta\alpha\to 0$. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{BC}}{\Delta t} = \vec{n}\,v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t} = \vec{n}\,v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v\frac{d\alpha}{dt}\vec{n},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{CD}}{\Delta t} = \vec{\tau}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\cos\Delta\alpha = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau}$$

деб ёзиш мумкин.

Шундай қилиб,

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (8.2)$$

ифода ҳосил бўлади, бу ерда $\vec{a}_\tau$ ва $\vec{a}_n$—тезланиш векторининг уринма ва нормал ташкил этувчилари:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = v\cdot\frac{d\alpha}{dt}\cdot\vec{n} \qquad (8.3)$$

бўлиб, уларни мос равишда *тангенциал* ва *нормал тезланиш* деб аталади.

(8.3) ифодадан кўринадики, тангенциал тезланиш моддий нуқта тезлигининг сон қиймати жиҳатидан ўзгариш суръатини характерлайди, чунки $\vec{a}_\tau$ векторнинг сон қиймати

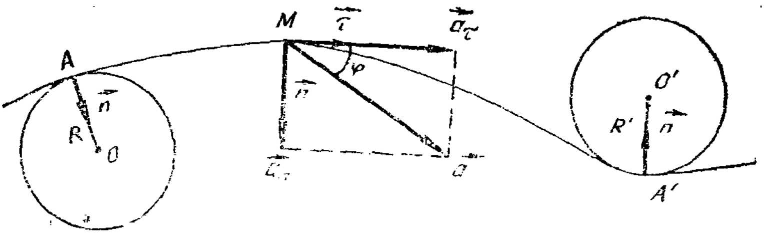
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \tag{8.4}$$

бўлади.

Текис ҳаракат учун $a_\tau = 0$. Агар $a_\tau > 0$ бўлса, ҳаракатни *тезланувчан ҳаракат*, $a_\tau < 0$ бўлганда эса *секинланувчан ҳаракат* дейилади. $a_\tau = \text{const}$ бўлиб, нолдан фарқли бўлса, ҳаракат *текис ўзгарувчан ҳаракат* дейилади. Бунда тенг вақт оралиқлари ичида тезликнинг сон қиймати бир хил миқдорда ўзгаради.

(8.3) ифодадаги $\frac{d\alpha}{dt}$ катталик моддий нуқта ҳаракати йўналишининг ўзгариш тезлигини ифодалайди. Шу сабабли, нормал тезланиш моддий нуқта тезлиги вектори йўналишининг ўзгариш тезлигини характерлайди, дейиш мумкин. Ҳаракат тўғри чизиқли бўлганда $a_n = 0$ бўлади.

Жуда қисқа dt вақт ичида моддий нуқта траектория бўйлаб M нуқтадан ds масофага кўчади. Траекториянинг жуда кичик ds қисмини R радиусли айлананинг марказий $d\alpha$ бурчакка мос келган ёйи деб қараш мумкин. Бу айланани *туташувчи айлана* деб аталади. Бу айлана M нуқта ва ундан чексиз кичик масофада, унинг ҳар икки томонида траекторияда жойлашган икки нуқта орқали ўтказилган айланага мос келади. Унинг радиуси ва маркази мос равишда траекториянинг M нуқтадаги *эгрилик радиуси* ва *эгрилик маркази* дейилади. Эгрилик маркази траекторияга M нуқтада ўтказилган бош нормаль устида жойлашган бўлиб,



13-расм.

бош нормаль вектори $\vec{n}$ M нуқтадан эгрилик маркази томон йўналган бўлади. 13-расмда траекториянинг икки A ва A' нуқтасидаги туташувчи айланалар, траекториянинг эгрилик радиуслари ва эгрилик марказлари тасвирланган.

Ёй узунлиги $ds = Rd\alpha$ бўлгани сабабли $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$, бундан эса нормал тезланиш учун

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} \tag{8.5}$$

ифода келиб чиқади. Нормал тезланишнинг сон қиймати

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{8.6}$$

га тенг. Бу катталик манфий бўлиши мумкин эмас. Бундан, нормал тезланиш бош нормаль бўйлаб траекториянинг эгрилик маркази томон йўналган, деган хулоса келиб чиқади. Шу сабабли, нормал тезланишни кўпинча *марказга интилма тезланиш* деб ҳам юритилади.

Тангенциал ва нормал тезланишлар ўзаро тик йўналган (13- расм), шу сабабли моддий нуқта тезланишининг сон қиймати

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \tag{8.7}$$

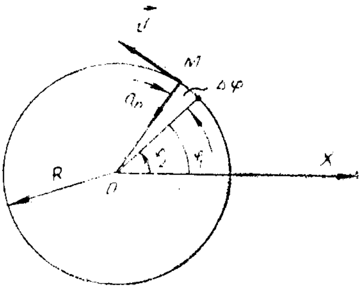
га тенг бўлади. Тезланишнинг йўналиши эса тангенциал ва нормал тезланишлар нисбатига боғлиқ: тезланиш векторининг траекторияга ўтказилган уринма билан ташкил қилган бурчагини

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} \tag{8.8}$$

ифодадан топиш мумкин.

9-§. Айланма ҳаракат кинематикаси

Моддий нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатларидан энг соддасини, яъни айлана бўйлаб ҳаракатини кўрайлик. Координаталар системасининг боши R радиусли айлана маркази билан устма-уст тушади ва айлана XOY текисликда жойлашган деб ҳисоблайлик (14-расм). У ҳолда ҳаракат қилаётган M моддий нуқтанинг ихтиёрий пайтдаги вазиятини φ бурчак орқали аниқлаш мумкин.



14-расм.

Нуқтанинг t_1 пайтдаги вазиятига φ_1, t_2 пайтдаги вазиятига эса φ_2 бурчак мос келсин. Моддий нуқтанинг радиус вектори бурилган $\Delta\varphi$ бурчакнинг шу бурилиш учун кетган вақт оралиғига нисбати мазкур вақт оралиғидаги *ўртача бурчак тезлик* дейилади:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (9.1)$$

Ўртача бурчак тезликнинг вақт оралиғи чексиз кичрайтириб борилгандаги интилган лимити *оний бурчак тезлик* дейилади:

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\omega\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (9.2)$$

Бурилиш бурчаги радианларда ифодаланса, бурчак тезлик рад/с ларда ўлчанади.

Моддий нуқта айлана бўйлаб текис ҳаркат қилаётган бўлса ($\omega = \text{const}$) ихтиёрий пайтдаги бурилиш бурчагини

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \qquad (9.3)$$

ифодадан топиш мумкин, бу ерда φ_0 — бошланғич $t = 0$ пайтдаги бурилиш бурчаги.

Нуқтанинг айлана бўйлаб тўла бир марта айланиш вақти (*айланиш даври*) T бўлса, унда 1 с даги айланишлар сони (*айланиш частотаси*)

$$\nu = \frac{1}{T}$$

ифодадан топилади. Айланиш частотаси бирлиги сифатида 1 Гц (герц) = 1 с^{-1} қабул қилинган.

Бир марта тўла айланишга 2π радиан бурчак мос келганидан

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (9.4)$$

эканлиги келиб чиқади. У ҳолда моддий нуқтанинг айлана бўйлаб текис ҳаракати тезлиги

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi\nu R = \omega R \qquad (9.5)$$

га тенг бўлади. Ихтиёрий пайтда тезлик вектори $\vec{v}$ айланага ўтказилган уринма бўйлаб йўналган бўлади (6- §). Бунда тезликнинг йўналиши узлуксиз ўзгариб туради, унинг сон қиймати эса ўзгармайди. Шунинг учун нуқта бу ҳолда фақат нормал тезланишга эга бўлади. Нуқтанинг нормал тезланиши ҳамма вақт айлана маркази томон йўналган бўлиб (14-расм), унинг сон қиймати

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

га тенг бўлади (8- §). Бу ифодани вектор кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}. \qquad (9.6)$$

Нуқтанинг айлана бўйлаб ҳаракати нотекис бўлса, тангенциал тезланиш ҳам юзага келади. Унинг йўналиши тезлик вектори $\vec{v}$ йўналиши билан мос келади, сон қиймати эса

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R$$

ифода билан аниқланади. Бу ифодадаги бурчак тезликнинг вақт ўтиши билан ўзгаришини характерловчи

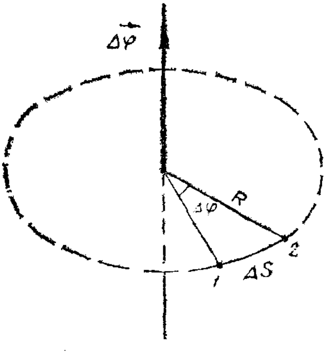
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

катталик *бурчак тезланиш* дейилади. Бурчак тезланиш рад/с^2 ларда ўлчанади.

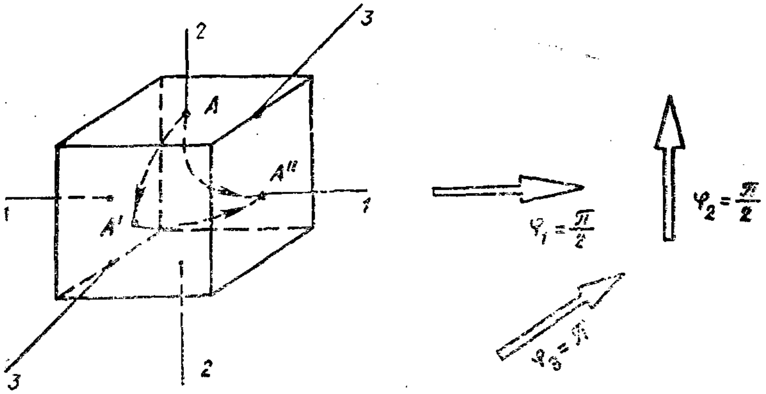
Айлана бўйлаб нотекис ҳаракатда нуқтанинг тўла тезланиши нормал ва тангенциал тезланишлардан ташкил топади:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Айланма ҳаракатдаги бурилиш бурчаги φ, бурчак тезлик ω ва бурчак тезланиш ε вектор характерига эга эканлигини кўрсатиш мумкин. Моддий нуқта ҳаракат қилаётган айлана маркази орқали унинг текислигига перпендикуляр бўлган ўқ ўтказайлик (15-расм). Мазкур ўқда, узунлиги сон жиҳатдан $\Delta\varphi$ бурилиш бурчагига тенг бўлиб, йўналиши нуқта



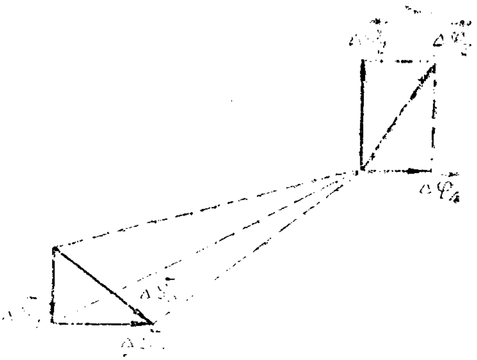
15-расм.



16-расм.

ҳаракати йўналиши билан ўзаро парма қоидаси бўйича боғланган $\Delta\vec{\varphi}$ кесмани олайлик. Бу катталик нуқтанинг ихтиёрий пайтдаги вазиятини тўла аниқлаб беради. Бундан кўринадики, бурилиш бурчагини вектор катталик деб ҳисоблаш мумкин экан. Бироқ, чекли бурилишлар бўлганда натижавий бурилиш векторларни қўшиш қоидаси бўйича топилган қийматга мос келмайди. Бу фикрга куб шаклидаги жисмни навбатма-навбат ўзаро перпендикуляр бўлган иккита ўқ атрофида 90° га буриб кўриш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин (16-расм). Аввал кубни *1 — 1* горизонтал ўқ атрофида $\varphi_1 = 90°$ га бурамиз, сўнгра, *A* нуқта *A'* вазиятга келгач, уни 2 — 2 вертикал ўқ атрофида $\varphi_2 = 90°$ га буриб, *A* нуқтани *A''* вазиятга ўтказамиз. Бу иккала бурилишдаги натижавий вазиятга кубни бирданига *3 — 3* ўқ атрофида $\varphi_3 = 180°$ бурчакка буриш билан ҳам келтириш мумкин. 16-расмдан кўринадики, φ_1 ва φ_2 ларнинг вектор йиғиндиси $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ га тенг бўлиши керак, аслида эса $\varphi_3 = \pi$ га тенг бўлиб чиқди $\left(\varphi_3 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right.$ бўлганда *A* нуқта *A''* нуқтага етиб бормайди$\left.\right)$. Бундан кўринадики, чекли бурилишларда φ бурилиш бурчагини вектор деб ҳисоблаш мумкин эмас.

Бурилиш бурчаги жуда кичик бўлганда $d\varphi$ катталикни вектор деб ҳисоблаш мумкин. Бурилишлар кичик бўлган ҳолларда нуқтанинг босиб ўтган йўлини тўғри чизиқли кес-



17-расм.

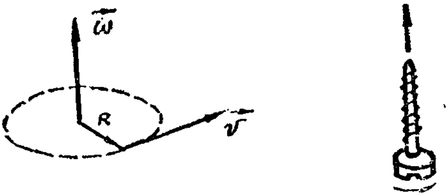
ма деб қараш мумкин (17-расм). Шу сабабли кетма-кет содир бўлган кичик $\Delta\varphi_1$ ва $\Delta\varphi_2$ бурилишлар туфайли нуқтанинг натижавий $\Delta\vec{s}$ кўчиши алоҳида бурилишларда содир бўлган $\Delta\vec{s}_1$ ва $\Delta\vec{s}_2$ кўчишларининг вектор йиғиндисига тенг:

$$\Delta\vec{s}_3 = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2.$$

Бундан кўринадики, жуда кичик $\Delta\vec{\varphi}$ (ёки $d\vec{\varphi}$) бурилиш бурчакларини вектор катталик деб ҳисоблаш мумкин.

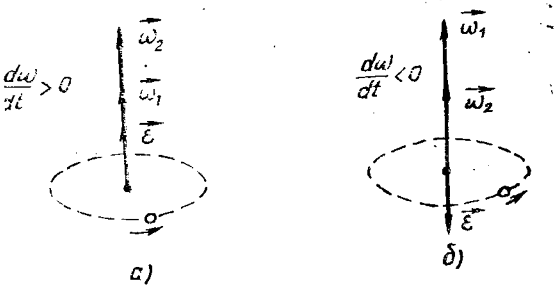
У ҳолда ω бурчак тезлик ва ε бурчак тезланишларни ҳам вектор катталик деб қараш мумкин:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (9.7)$$



18-расм.

Бурчак тезлик йўналишини парма қоидаси бўйича топилади (18-расм): парма дастасининг буралиш йўналиши айлана бўйлаб ҳаракат қилаётган нуқта ҳаракати йўналиши



19-расм.

билан мос келса, парма учининг илгариланма ҳаракати йўналиши $\vec{\omega}$ йўналишини кўрсатади.

Айланиш тезлашганда бурчак тезланиш $\vec{\varepsilon}$ йўналиши $\vec{\omega}$ йўналиши билан мос келади, айланиш секинлашганда эса $\vec{\omega}$ йўналишига тескари бўлади (19-расм).

Бурчак тезлик ва бурчак тезланишларнинг вектор характерга эга бўлганидан фойдаланиб, улар билан моддий нуқта ҳаракатини ифодалайдиган чизиқли катталиклар орасидаги вектор боғланишни аниқлаш мумкин. Бунда нуқтанинг радиус-вектори ҳамма вақт айлана марказидан ҳаракатланаётган нуқта томонга йўналган эканлигини ёдда тутиш зарур. 18-расмдан

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{R}] \tag{9.8}$$

эканлиги келиб чиқади.

Тангенциал тезланишни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\,\vec{R}]. \tag{9.9}$$

Нотекис айланма ҳаракат қилаётган нуқта тезланиши

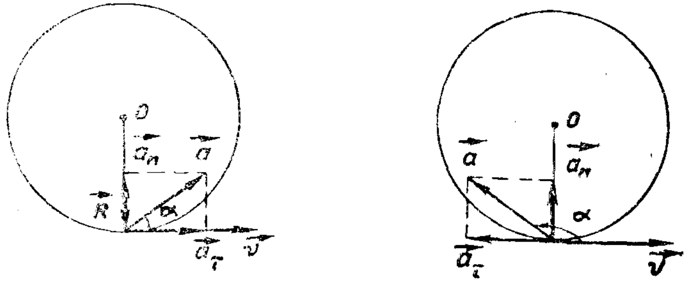
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

бўлиб, унинг сон қиймати

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{9.10}$$

бўлади.

Тезланиш векторининг тезлик вектори $\vec{v}$ билан (айланага ўтказилган уринма билан) ҳосил қилган бурчагини



20-расм.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}$$

ифодадан топиш мумкин (20-расм). Айланиш тезлашганда ($\varepsilon > 0$) α бурчак ўткир, текис айланиш бўлганда ($\varepsilon = 0$) α бурчак тўғри, айланиш секинлашганда ($\varepsilon < 0$) эса мазкур бурчак ўтмас бўлади.

Моддий нуқта бирданига бир нечта айланма ҳаракатда иштирок этганда бу ҳаракатларнинг бурчак тезликлари ва бурчак тезланишлари вектор тарзда қўшилади.

Айланма ҳаракат кинематикаси формулаларини топиш учун моддий нуқта илгариланма ҳаракати кинематикаси формулаларидаги *s йўлни φ бурилиш бурчаги билан, v* тезликни ω бурчак тезлик билан, тангенциал тезланишни эса ε бурчак тезланиш билан алмаштириш кифоя. 1- ва 2-жадвалларда илгариланма ва айланма ҳаракат кинематикаси формулалари таққосланади.

10-§. Кинематика масалалари

Моддий нуқта ҳаракатига оид кинематика масалалари асосан икки хил кўринишда бўлади. *Биринчи тур масалаларда* ҳаракат қонуни, яъни моддий нуқта радиус-векторининг вақтга боғланиши берилган бўлиб, унинг тезлиги ва тезланишини аниқлаш талаб қилинади. Бундай масалани дифференциаллаш йўли билан ечилади.

Ҳаракат қилаётган нуқтанинг радиус-вектори

$$\vec r = \vec i\, x + \vec j\, y + \vec k\, z$$

тенглама билан ифодаланган бўлсин. Бу тенглама қуйидаги учта скаляр тенгламаларга тенг кучлидир:

$$x = f_1\,(t),\ y = f_2\,(t),\ z = f_3\,(t).$$

1-жадвал

Чизиқли катталиклар	Бурчакли катталиклар	Чизиқли ва бурчакли катталиклар орасидаги муносабат
ёй s	бурилиш бурчаги φ	$s = R\cdot\varphi$
тезлик $v = \frac{ds}{dt}$	бурчак тезлик $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	$v = R\cdot\omega$
тангенциал тезланиш $a_\tau = \frac{dv}{dt}$	бурчак тезланиш $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	$a_\tau = R\cdot\varepsilon$
нормал тезланиш $a_n = \frac{v^2}{R}$		$a_n = \omega^2 R$

2-жадвал

Чизиқли катталиклар орасидаги муносабат	Бурчакли катталиклар орасидаги муносабат
Текис ҳаракат	
тезлик $v = \mathrm{const}$	бурчак тезлик $\omega = \mathrm{const}$
ҳаракат қонуни $s = s_0 + vt$	ҳаракат қонуни $\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Текис ўзгарувчан ҳаракат	
тезланиш $a = \mathrm{const}$	бурчак тезланиш $\varepsilon = \mathrm{const}$
тезлик $v = v_0 + a_\tau t$	бурчак тезлик $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
ҳаракат қонуни $s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$	ҳаракат қонуни $\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Бу функцияларни вақт бўйича бир марта дифференциаллаб, нуқта тезлигининг координата ўқларига проекцияларини топиш мумкин:

$$\dot{x} = \frac{df_1}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{df_2}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{df_3}{dt}.$$

Бу ерда координата белгилари устидаги нуқталар вақт бўйича олинган ҳосилани англатади. У ҳолда нуқтанинг тезлиги

$$v = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k}$$

кўринишга келади. Бу ифодани вақт бўйича яна бир марта дифференциаллаб, моддий нуқта тезланиши топилади:

$$\ddot{x} = \frac{d^2f_1}{dt^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2f_2}{dt^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2f_3}{dt^2}, \quad \vec{a} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k}.$$

Иккинчи тур масалаларда моддий нуқта тезланиши берилган бўлиб, тезлик ва кўчишнинг ўзгариши қонунини аниқлаш талаб қилинади. Бундай масалалар биринчи хил масалаларга тескари бўлиб, интеграллаш йўли билан ечилади. Бунда $\vec{a} = \vec{f}\,(t)$ шартдан фойдаланиб, $d\vec{v} = \vec{a}\cdot dt$ дифференциал ҳосил қилинади ва уни интеграллаб тезлик вектори аниқланади:

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt + \vec{C}_1 = \vec{\varphi}\,(t) + \vec{C}_1,$$

бу ерда $\vec{C}_1$ — интеграллаш доимийси бўлиб, уни аниқлаш учун бошланғич шарт (масалан, бошланғич тезлик ёки бирор пайтдаги тезлик) берилиши зарур.

Бундан сўнг $d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt$ ифодадан фойдаланиб, яна бир марта интеграллаш билан радиус-вектор ифодасини топилади:

$$\vec{r} = \int \vec{\varphi}\,(t)\,dt + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2.$$

Бу ерда $\vec{C}_2$ — янги интеграллаш доимийси бўлиб, уни аниқлаш учун яна битта бошланғич шарт (масалан, бирор пайтдаги радиус-вектор) берилган бўлиши зарур. Ҳисоблаш мобайнида вектор кўринишдаги функциялардан учта скаляр функцияларга ўтиб олиш мумкин. Бундан кўринадики, иккинчи турдаги масалаларни ечиш учун қўшимча равишда бошланғич шартлар берилиши зарур экан.

Кинематика масалаларидан баъзиларини кўриб чиқамиз.

1. Тўғри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат. Моддий нуқта тўғри чизиқ (масалан, OX ўқи) бўйлаб текис ҳаракат қилаётган бўлсин. Бундай ҳол учун $a_\tau = a_n = 0$ ва $\vec{a} = 0$ бўлади. $d\vec{v} = 0$ ифодани интеграллаб, $\vec{v} = \text{const}$ натижага келамиз. $v_x = |\vec{v}| = v > 0$ эканлигидан, моддий нуқта координатасининг вақтга боғланиши

$$x = \int_0^t v_x dt + x_0 = vt + x_0 \qquad (10.1)$$

кўринишда бўлади, бу ерда x_0 — нуқтанинг бошланғич пайтдаги координатаси. Нуқтанинг t вақт ичида босиб ўтган йўли

$$s = x - x_0 = vt \tag{10.2}$$

га тенг бўлади.

2. Тўғри чизиқ бўйлаб текис ўзгарувчан ҳаракат. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб текис ўзгарувчан ҳаракат қилаётган бўлсин. Бу ҳолда $a_n = 0$ ва $a_\tau = \text{const}$ бўлади. $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ ифодадан фойдаланиб, моддий нуқта тезлигининг вақтга боғланишини

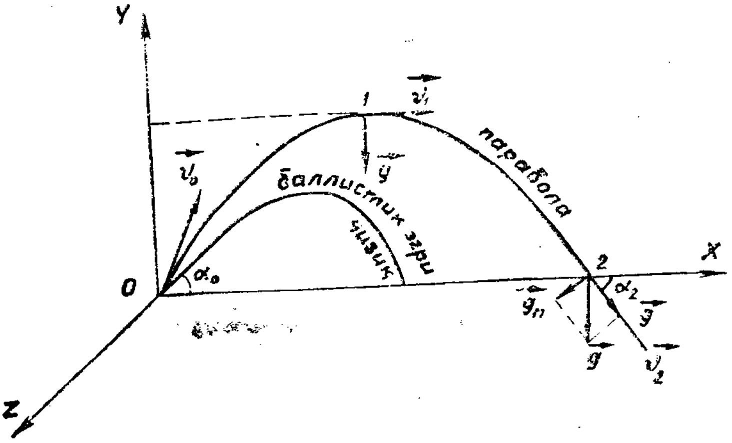
$$v = \int_0^t a_\tau dt + v_0 = v_0 + a_\tau t \tag{10.3}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда v_0 — бошланғич пайтдаги тезлик. OX ўқ бўйлаб ҳаракатланаётган моддий нуқта учун $v = v_x = \frac{dx}{dt}$ деб олиб, нуқта координатасининг вақтга боғланиши учун

$$x = \int_0^t v dt + x_0 = x_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \tag{10.4}$$

ифодага келамиз, бу ерда x_0 — нуқта координатасининг $t = 0$ пайтдаги қиймати.

3. Горизонтга бурчак остида отилган жисм ҳаракати. Жисм горизонтга α_0 бурчак остида $\vec{v}_0$ бошланғич тезлик билан отилган бўлсин (21-расм). Мазкур ҳаракат мобайнида жисмни моддий нуқта деб қараб, муҳитнинг (ҳавонинг) қар-



21-расм.

шилигини эътиборга олмайлик. Нуқтанинг тезланиши $\vec{g}$ га тенг бўлиб, у вертикал пастга йўналган. ($\vec{g}$ — нуқтанинг оғирлик кучи таъсирида олган тезланиши).

Масалани соддалаштириш мақсадида координаталар системасини бошланғич тезлик вектори $\vec{v}_0$ XOY текислигида ётадиган қилиб танлаб олайлик. У ҳолда $a_x = a_z = 0$, $a_y = -g$, $v_z = 0$, $z = 0$ бўлади (нуқта ҳаракати ясси ҳаракат бўлади).

Жисм ҳаракати тенгламаларини тузиш учун тезлик векторининг координата ўқларига проекцияларини топамиз:

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt. \tag{10.5}$$

Бу ифодалардан фойдаланиб ҳаракатланаётган нуқта координаталарининг вақтга боғланишини, яъни ҳаракат тенгламасини аниқлаймиз:

$$x = \int_0^t v_x dt = (v_0 \cos \alpha_0)\ t,$$

$$y = \int_0^t v_y dt = (v_0 \sin \alpha_0)\ t - \frac{gt^2}{2}. \tag{10.6}$$

Бу ифодалардан t вақтни чиқариб юбориб, ҳаракат траекториясининг тенгламасини топамиз:

$$y = (tg\, \alpha_0)\ x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}. \tag{10.7}$$

Бу — Y ўққа параллел симметрия ўқига эга бўлган парабола тенгламасидир. Бундан кўринадики, муҳит қаршилиги ҳисобга олмайдиган даражада кичик бўлганда горизонтга бурчак остида отилган жисм парабола бўйлаб ҳаракатланади.

Жисм кўтарилиш баландлиги $y_{\max}$ ни топайлик. Траекториянинг энг юқори нуқтасида $v_y = 0$ эканлигини ҳисобга олсак, (10.5) ифодадан $v_0 \sin \alpha_0 - gt = 0$ тенглама келиб чиқади. У ҳолда жисмни энг юқори нуқтага кўтариш учун сарфланган вақт $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$, кўтарилиш баландлиги эса

$$y_{\max} = (v_0 \sin \alpha_0)\ t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0 \sin^2 \alpha_0}{2g} \tag{10.8}$$

га тенг бўлади.

Жисмнинг учиш узоқлигини топиш учун, (10.7) ифодада $y = 0$ деб ҳисоблаб

$$(tg\alpha_0)\, x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0} = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама иккита ечимга эга: $x = 0$ (бошланғич пайтдаги ҳолат) ҳамда

$$x_{\max} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha_0}{g}. \qquad (10.9)$$

Бундан кўринадики, $\sin 2\alpha_0 = 1$, яъни $\alpha = 45^\circ$ бўлганда учиш узоқлиги энг катта қийматга эга бўлади:

$$x^0_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Траекториянинг энг юқори *1* нуқтасида $v_y = 0$, бундан эса $tg\alpha_1 = \frac{v_y}{v_x} = 0$ ёки $\alpha_1 = 0$ эканлиги келиб чиқади, яъни *1* нуқтада жисмнинг тезлиги горизонтал йўналган бўлиб, унинг қиймати

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha_0} = v_0\cos\alpha_0$$

га тенг бўлади.

Жисмнинг тушиш нуқтаси *2* да $y = 0$ бўлиб, бундан

$$(v_0\sin\alpha_0)\, t - \frac{gt^2}{2} = 0$$

ифодани оламиз. У ҳолда, жисмнинг учиши учун сарфланган тўла вақт $t_2 = \frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}$ бўлади. Жисмнинг энг юқориги нуқтага кўтарилиши учун сарфланган вақт билан таққослаб, $t_2 = 2t_1$ эканлигини кўрамиз. Жисм тезлигининг тушиш пайтидаги Y ўққа проекцияси $v_y = -v_0\sin\alpha_0$ бўлиб, жисм тезлигининг *2* нуқтадаги йўналиши

$$tg\alpha_2 = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{v_0\sin\alpha_0}{v_0\cos\alpha_0} = -tg\alpha_0, \quad \alpha_2 = -\alpha_0$$

муносабатлар билан аниқланади.

Жисм тезлигининг тушиш пайтидаги сон қиймати

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha_0 + v_0^2\sin^2\alpha_0} = v_0,$$

яъни бошланғич пайтдаги v_0 тезлик қийматига тенг.

Жисм траекториясининг *1* ва *2* нуқталардаги эгрилик радиусларини топайлик. Эркин тушиш тезланиши траекториядаги барча нуқталар учун ўзгармас бўлганидан, жисмнинг тўла тезланиши бутун ҳаракат давомида ўзгармайди: $\vec{a} = \vec{g} = \text{const}$.

1 нуқтада $\vec{g}$ тезланиш $\vec{v}_1$ тезлик векторига перпендикуляр бўлиб, бунда жисм фақат нормал тезланишга эга бўлади: $\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{g}$.

$v_1 = v_0 \cos\alpha_0$ ҳамда $a_n = g = \frac{v_1^2}{R_1}$ эканлигидан, 1 нуқтадаги эгрилик радиуси

$$R_1 = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{g}$$

га тенг бўлади.

Жисмнинг тушиш нуқтасида тезликнинг горизонт билан ташкил қилган бурчаги $\alpha_2 = -\alpha_0$ бўлиб, жисм тезланишини нормал ва тангенциал ташкил этувчиларга ажратиш мумкин:

$$g_n = g\cos\alpha_2, \quad g_\tau = g\sin\alpha_2,$$

у ҳолда траекториянинг тушиш нуқтасидаги эгрилик радиуси

$$R_2 = \frac{v_2^2}{g_n} = \frac{v_0^2}{g\cdot\cos\alpha_0}$$

га тенг бўлади.

Юқорида келтирилган хулосалар жисм бўшлиқда ҳаракат қилган ҳол учунгина ўринли бўлади. Аслида, жисм ҳавода ҳаракат қилганда унинг тезлиги ҳавонинг қаршилиги туфайли камая боради. Натижада жисм траекторияси параболадан фарқ қилиб, унинг пасайиш қисми тикроқ бўлади. (21-расмга қаранг). Бундай траектория *баллистик эгри чизиқ* дейилади. Ҳавонинг қаршилиги туфайли жисмнинг кўтарилиш баландлиги ва учиш узоқлиги анча камайиши мумкин.

II боб

МОДДИЙ НУҚТА ДИНАМИКАСИ

Кинематика фақат вақт билан кўчиш орасидаги муносабатнигина ифодалайди, *динамика* эса у ёки бу кўчишни юзага келтирадиган сабабларни ҳам ўрганади.

И. Ньютон ўзининг «Натурал фалсафанинг математик асослари» (1687 й.) асарида баён қилган учта динамика қонунлари классик механиканинг асосини ташкил қилади. Ньютон шу қонунлар асосида мураккаб механик ҳодисаларни ўрганиш усулини ишлаб чиқди ва классик механиканинг мукаммал назариясини яратди. Динамикани ўрганишни моддий нуқта динамикасига оид масалаларни кўриб чиқишдан бошлаш мақсадга мувофиқ. Мазкур масалаларни ҳал қилишда келиб чиқадиган хулосалар кейинчалик, ихтиёрий жисм (моддий нуқталар системаси) ҳаракатини ўрганишда қўлланилади.

11-§. Ньютоннинг I қонуни. Инерциал саноқ системалари

Динамиканинг биринчи қонунини биринчи бўлиб Г. Галилей (1564—1642) кашф қилди ҳамда *жисмга бошқа жисмлар таъсир қилмаса, у ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат ҳолатини сақлайди* деган хулосага келди.

Узоқ вақтлар давомида Аристотелнинг (Э. а. 384—322 й.) бирор жисмга бошқа жисм томонидан кўрсатилаётган таъсир олиб қўйилса, у тўхтаб қолади, деган фикри ҳукмдор бўлган. Аристотелнинг фикрича, бошқа жисмлар таъсири жисм ҳаракатининг (тезлигининг) сабаби бўлиб, бошқа жисмлар таъсир этмаганда жисм фақат тинч ҳолатдагина бўлиши мумкин.

Галилей биринчи бўлиб, жисм ўзининг ҳаракат ҳолатини сақлаши учун бошқа жисмлар томонидан кўрсатилаётган таъсирнинг бўлиши шарт эмас, деган фикрга келди.

Бошқа жисмлар томонидан кўрсатиладиган таъсирлар бўлмаган ҳолда жисмлар ҳаракати тезлигининг (хусусан, тинчлик ҳолатининг) сақланиши *инерция* деб аталади. Шу сабабга кўра, Ньютоннинг I қонуни *инерция қонуни* деб юритилади.

Динамиканинг биринчи қонуни ҳар қандай саноқ системаларида ҳам бажарилавермайди. Бунинг сабаби шуки, жисмнинг тинч ёки тўғри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат ҳолати нисбий бўлиб, саноқ системасини танлаб олишга боғлиқ. Мисол тариқасида бир-бирига нисбатан бирор тезланиш билан ҳаракат қилаётган икки саноқ системасини кўриб чиқайлик. Саноқ системаларидан бирига нисбатан тинч турган жисм иккинчи системага нисбатан тезланиш билан ҳаракатланади. Бунда Ньютоннинг I қонуни бир вақтнинг ўзида мазкур саноқ системаларнинг бирида бажарилади, иккинчисида эса бажарилмайди.

Динамиканинг биринчи қонуни бажариладиган системалар *инерциал саноқ системалар* дейилади. Бироpта инерциал саноқ системасига нисбатан доимий тезлик билан ҳаракатланаётган ҳар қандай система ҳам инерциал бўлади. Бунга сабаб шуки, жисмнинг бу системаларнинг ҳар бирига нисбатан тезлиги ўзгармас бўлса-да, ҳар қайси системадаги қиймати ҳар хил бўлади.

Табиатда тамомила инерциал бўлган саноқ системалар йўқ, чунки ҳар қандай саноқ жисми ҳам ташқи таъсирлардан ҳоли эмас. Фақат ўрганилаётган ҳодиса табиати ва шароитга қараб саноқ системасини тахминан инерциал деб ҳисоблаш мумкин. Амалда гелиоцентрик (саноқ жисми сифатида Қуёшни танлаб олиб, координата ўқлари жуда узоқдаги муайян юлдузларга томон йўналтирилган) саноқ системасини жуда катта аниқлик билан инерциал система деб ҳисоблаш мумкин.

Ер сирти билан боғланган саноқ системасини инерциал система деб ҳисоблаб бўлмайди, чунки Ер ўз ўқи атрофида айланма ҳаракат қилади.

Бундан ташқари, у Қуёш атрофида айланага яқин траектория бўйлаб, яъни тезланиш билан ҳаракатланади. Бироқ, бир қатор ҳолларда бу системанинг ноинерциаллигини ҳисобга олмай, уни инерциал саноқ системаси деб ҳисоблаш мумкин (мазкур системанинг ноинерциаллиги билан боғлиқ бўлган баъзи ҳодисаларни кейинроқ батафсил кўриб чиқамиз). Мисол тариқасида станцияда тўхтаб турган пассажир поезди вагонида жойлашган столча устида турган шарчани олайлик. Поезд жойидан қўзғалмагунча шарча тинч ҳолатда бўлади. Бу ҳол учун инерция қонуни бажарилмоқда. Демак, Ер сирти билан боғлиқ бўлган ёки унга нисбатан тинч турган жисм билан боғлиқ бўлган саноқ системасини ҳам мазкур ҳолда инерциал деб ҳисоблаш мумкин экан. Ана шу мулоҳазаларга кўра мазкур поезд йўлнинг тўғри чизиқли қисмида ўзгармас тезлик билан ҳаракатланаётган ҳолда ҳам поезд билан боғлиқ бўлган саноқ системасини инерциал система дейиш мумкин: столча устидаги шарча бу ҳолда ҳам тинч ҳолатини сақлайди. Чунки бу ҳолларда саноқ жисми (поезд) Ер сиртига нисбатан тинч ҳолатда бўлади ёки унга нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади. Бироқ, поезд жойидан қўзғалганда, ҳаракатини тезлатганда ёки секинлатганда, йўлнинг бурилиш жойларида айтиб ўтилган шарча тинч ҳолатини сақламайди, яъни бу ҳолларда инерция қонуни бажарилмайди, поезд билан боғлиқ бўлган саноқ системасини эса инерциал система деб ҳисоблаб бўлмайди. Бунинг сабаби шуки, мазкур ҳолларда саноқ жисми (поезд) Ер сиртига нисбатан тезланиш билан ҳаракат қилади: поезд қўзғалганда у ҳаракат йўналишида тезланиш олади; унинг ҳаракати тезлашганда ҳам поезднинг тезланиши ҳаракат йўналиши билан мос келади; поезд ҳаракати секинлашган ҳолда унинг тезланиши ҳаракат йўналишига қарама-қарши бўлади; поезд йўлнинг бурилиш қисмида ҳаракатланганда эса у марказга интилма (нормал) тезланишга эга бўлиб, мазкур тезланиш траекториянинг эгрилик марказига томон йўналган бўлади. Мазкур ҳолларда столча устидаги шарча ўзининг тинч ҳолатини сақламайди: поезд жойидан қўзғалганда ва ҳаракатини тезлаштирганда у орқага томон; поезд ҳаракати секинлашганда олдинга томон: поезд бурилаётганда эса ён томонга ҳаракатланади.

12- §. Куч ва уни ўлчаш

Классик механикада муайян пайтда жисмга бошқа жисм томонидан кўрсатилаётган таъсирнинг катталигини ва йўналишини характерлаш учун *куч* тушунчаси киритилади. Физикада «ташқи жисм мазкур жисм билан ўзаро таъсирлашмоқда» деган жумла ўрнига «ташқи жисм берилган жисмга куч билан таъсир қилмоқда» дейиш қабул қилинган. Бунда «куч» деганда ўзаро таъсирнинг миқдорий характеристикаси тушунилади. «Куч» сўзига бошқача маъно бериш ўринли эмас. Бир қатор мисоллар кўрайлик.

Стол устида пўлат шар ётган бўлсин. Бошқа жисмлар таъсир қилмагунча шар столга нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Уни тинч ҳолатдан чиқариш учун стол сирти бўйлаб унга бевосита бошқа жисм билан таъсир қилиш, масалан, қўл билан туртиб юбориш мумкин. Мазкур шарга доимий магнитни яқинлаштириб кўрайлик. У шарга бевосита тегмаса ҳам, уни тинч ҳолатдан чиқаради.

Биринчи ҳолда кучнинг таъсири жисмлар бевосита бир-бирига теккизилганда намоён бўлади, иккинчи ҳолда эса куч жисмлар ўзаро бир-бирига тегмаса ҳам таъсир қилади. Айнан шундай ҳодисани зарядланган шарчаларнинг ўзаро таъсирида ҳам кузатиш мумкин. Бу тажрибаларга асосланиб, кучнинг таъсири жисмларни бевосита бир-бирига теккизилганда ёки майдон борлигида намоён бўлади, деган хулосага келиш мумкин.

Куч ўзининг сон қиймати, таъсир йўналиши ва қўйилиш нуқтаси билан аниқланади. Куч йўналган тўғри чизиқ *кучнинг таъсир чизиғи* дейилади. Куч — вектор катталик бўлиб, у ҳамма вақт қўйилиш нуқтасига эга, яъни жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган бўлади.

Кучлар геометрик усулда қўшилади. Масалан, бир-бирига нисбатан бирор бурчак остида йўналган иккита кучнинг моддий нуқтага кўрсатаётган натижавий таъсирини мазкур векторлар устига қурилган параллелограмм ёрдамида аниқлаш мумкин. Бу фикр *кучларни вектор усулда қўшиш қоидаси* бўлиб, 4- § да баён қилинган ҳаракатларнинг мустақиллик принципи билан биргаликда *суперпозиция принципини* ташкил қилади. Бу принцип кучлар таъсирининг мустақиллиги ҳақидаги тасаввурга асосланган.

Ҳозирги замон физика фанига тўрт хил ўзаро таъсир маълум: 1) бутун олам тортишиш қонуни орқали ифодаланадиган гравитацион таъсир, 2) электр ва магнит майдонлари орқали амалга ошадиган электромагнит таъсир, 3) атом ядроси таркибидаги заррачалар алоқасини таъминлайдиган кучли таъсир (ёки ядровий таъсир), 4) элементар заррачаларнинг парчаланишини характерлайдиган кучсиз таъсир.

Классик механикада гравитацион, ишқаланиш ва эластиклик кучлари ўрганилади. Ишқаланиш ва эластиклик кучлари модда молекулалари орасидаги ўзаро таъсир туфайли вужудга келади. Мазкур ўзаро таъсир эса электромагнит табиатга эга. Шунга кўра, эластиклик ва ишқаланиш кучлари ҳам электромагнит табиатга эга деб ҳисоблаш мумкин.

Гравитацион ва электромагнит кучлар фундаментал (асосий) кучлар бўлиб, уларни бошқа, соддароқ кучларга келтириб бўлмайди. Эластиклик ва ишқаланиш кучлари эса фундаментал кучлар эмас.

Инерциал саноқ системаси ва куч тушунчаларини киритиб моддий нуқта учун Ньютоннинг I қонунини қуйидагича таърифлаш мумкин:

Шундай саноқ системалари мавжудки, жисмга куч таъсир қилмаса ёки унга қўйилган куч таъсири мувозанатланса, жисм мазкур системаларга нисбатан доимий *тезлик билан ҳаракат қилади (жумладан, тинч ҳолатда бўлади).*

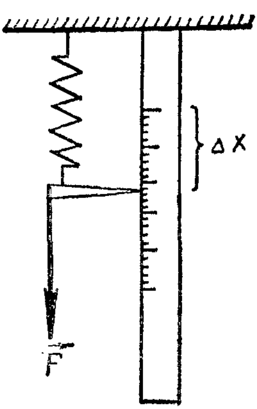
Куч таъсирининг мувозанатланиши ҳақидаги фикрни мисолларда кўрайлик. Ер сиртида тинч турган жисмга аслида пастга йўналган оғирлик кучи таъсир қилади. Унинг Ерга нисбатан тинч туришининг (ўзгармас, нолга тенг тезликка эга бўлишининг) сабаби шуки, мазкур жисмга юқорига йўналган, миқдор жиҳатдан оғирлик кучига айнан тенг бўлган (таянчнинг) реакция кучи таъсир қилишидир.

Ньютоннинг I қонунидан, жисмга мувозанатланмаган куч таъсир қилса, у ўз тезлигини ўзгартиради, яъни тезланиш олади деган хулоса келиб чиқади.

Бироқ куч фақат жисмларга тезланиш бериши билангина (динамик) намоён бўлиб қолмай, жисмларни деформациялаши билан ҳам (статик) намоён бўлади.

Кучни ўлчаш учун унинг ўлчов бирлигини танлаб олиш, сўнгра ўлчаниши зарур бўлган кучни бирлик куч билан taққослаш керак. Албатта, кучни унинг динамик таъсири бўйича ҳам ўлчаш мумкин. Лекин бу ҳолда кучни мустақил тарзда (тезланишни ўлчамай) ўлчаб бўлмайди, яъни кучни ўлчаш жараёни мураккаблашади. Шу сабабли кучни унинг статик таъсири бўйича ўлчаган маъқул.

Энг оддий деформацияланган жисмга мисол қилиб чўзилган ёки қисилган пружинани олиш мумкин. У кучни ўлчаш эталони вазифасини бажара олади: куч бирлиги сифатида маълум даражада қисилган ёки чўзилган пружинани қабул қилса бўлади. Мазкур усул билан кучни ўлчашга мўлжалланган асбоб *динамометр* дейилади (22-расм). Одатда пружинанинг Δx чўзилиши унга қўйилган $\vec{F}$ кучга пропорционал бўлади. Ўлчашлар етарли аниқликка эга бўлиши учун пружина сезиларли даражада чўзилиши ҳамда унинг деформациялари қўйилган кучга бир қийматли боғланган бўлиши зарур.



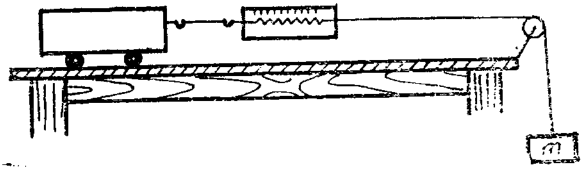
22-расм.

Пружинали динамометрлардан ташқари, замонавий лабораторияларда кучнинг механик таъсирини электрик, магнитик ва бошқа кўринишдаги сигналларга айлантирувчи динамометрлар ҳам қўлланилади. Мазкур динамометрлар баъзи жисмларнинг электр, магнит, оптик ва бошқа хусусиятлари деформацияланиш даражасига боғлиқлигига асосланган.

13- §. Ньютоннинг II қонуни. Масса ва импульс

Тинч ҳолатда бўлган ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётган эркин жисм бошқа жисмлар билан таъсирлашганда Ньютоннинг биринчи қонунига кўра, ўз ҳолатини ўзгартиради. Бироқ, динамиканинг биринчи қонуни бу ўзгариш қандай бўлади, деган саволга жавоб бермайди.

Ньютоннинг иккинчи қонуни жисмга таъсир қилаётган $\vec{F}$ куч, жисмнинг m массаси ва унинг ана шу куч таъсирида олган $\vec{a}$ тезланиши орасидаги миқдорий муносабатни белгилайди.



23-расм.

Жисмга таъсир қилаётган кучлар билан уларнинг жисмга берган тезланишлари орасидаги муносабатни аниқлайлик. Бунинг учун столнинг силлиқ сиртида жойлашган аравачадан фойдаланамиз (23- расм). Аравачага ипнинг m массали юк ҳосил қиладиган таранглик кучи қўйилган. Бу кучнинг қийматини аниқлаш учун аравачага ип пружинали динамометр орқали уланган. Аравачанинг бир хил вақт оралиқларида босиб ўтган йўлларини ўлчаб, унинг тезланишини ҳисоблаб топиш мумкин. Агар аравачанинг ҳаракати мобайнида динамометр кўрсатишлари ўзгармаса, аравача амалда доимий куч таъсирида текис тезланувчан ҳаракат қилади. Юкнинг массасини ўзгартириш йўли билан ипнинг таранглик кучи ўзгартирилиб, қайтадан тезланиш ҳисобланса, ҳаракат характери ўзгармай, фақат тезланишнинг катталиги ўзгарганини пайқаш мумкин. Бу тажрибалар натижасида

$$\vec{a} \sim \vec{F} \qquad (13.1)$$

ифодага эга бўламиз, яъни тезланишлар жисмга таъсир қилаётган кучларга пропорционал бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, $\vec{a}$ ва $\vec{F}$ векторлар коллинеар (бир хил йўналишга эга) бўлади. Шунинг учун кучнинг тезланишга нисбати ўзгармас катталикдир:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \ldots, \qquad (13.2)$$

бу ерда F_1, F_2, F_3, ... ва a_1, a_2, a_3, ... мос векторларнинг сон қийматлари.

Мазкур тажрибаларни оғирроқ аравача билан такрорлаб, ипнинг таранглик кучи бир хил бўлганда аравачанинг олган тезланиши кичикроқ бўлишига, яъни оғирроқ аравача ўз тезлигини секинроқ ўзгартиришига (кўпроқ инертликка эга бўлишига) ишонч ҳосил қиламиз.

Инертлик — барча жисмларга тааллуқли бўлган муҳим хоссалардан бири. Бироқ у ҳар хил жисмларда турли даражада намоён бўлади.

Оғирроқ аравача учун ҳам $\frac{\vec{F}}{\vec{a}}$ нисбат ўзгармаганини пайқаш мумкин. Шундай қилиб, берилган жисм учун $\frac{\vec{F}}{\vec{a}}$ нисбат ўзгармас катталик бўлиб, у жисмнинг инертлигини характерлайди, шу сабабли уни инертлик ўлчови сифатида қабул қилиш мумкин. Жисм инертлигининг миқдорини белгилайдиган бу катталик унинг *массаси* дейилади.

Масса — скаляр катталик бўлиб, жисмга таъсир қилаётган кучнинг шу куч таъсирида жисм олган тезланишга нисбатига тенг:

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}}. \qquad (13.3)$$

Шу ўринда массани ўлчаш усулларига тўхтаб ўтамиз. Масса асосан жисмларнинг бошқа жисмларни тортиши ёки уларга тортилиши (гравитация) да ҳамда уларнинг инерциясида намоён бўлади.

Жисм массасини унинг инертлигига кўра ўлчаш унчалик қулай эмас, чунки бунда массани ўлчаш мустақил равишда эмас, балки жисмнинг тезланишини ўлчаш орқали амалга оширилади. Шу сабабли кундалик ҳаётда жисмларнинг массаларини уларнинг Ерга тортилиш кучига кўра таққосланади. Масалан, бирор маҳсулотни тарозида тортганда унинг массаси тарози тошининг массаси билан таққосланади.

Жисмнинг Ерга тортилиш кучини икки хил усул билан: уларнинг оғирликларини пружинали динамометрда таққослаш билан ҳамда шайинли тарозида таққослаш билан ўлчаш мумкин. Лекин мазкур усуллар тенг кучли эмас. Чунки жисмларнинг Ерга тортилиш кучи улар жойлашган географик кенгликка ҳамда Ер сиртигача бўлган масофага боғлиқ (масалан, жисм Ернинг қутбидан экваторга олиб ўтилганда унинг оғирлик кучи тахминан 0,5% га камаяди). Шу сабабли етарли аниқликка эга бўлган динамометр Ер сиртининг ҳар хил жойларида айнан бир жисмнинг оғирлигини ҳар хил кўрсатади. Шайинли тарози билан ўлчанганда эса, муайян жисмнинг оғирлиги ҳамма жойда бир хил чиқади, чунки бир жойдан иккинчи жойга ўтганда жисмнинг ҳам, тарози тошининг ҳам Ерга тортилиш кучлари бир хил тарзда ўзгаради.

Аравачалар билан амалга оширилган тажрибада улардан бирининг массасини m_1 билан, иккинчисининикини эса m_2 билан белгилайлик. Агар ипнинг бир хил $\vec{F}$ таранглик кучи таъсирида биринчи аравача олган тезланиш $\vec{a}_1$, иккинчисининг тезланиши эса $\vec{a}_2$ бўлса, $m_1 = \frac{\vec{F}}{\vec{a}_1}$, $m_2 = \frac{\vec{F}}{\vec{a}_2}$ тенгликлардан

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (13.4)$$

келиб чиқади, яъни иккита жисмнинг бир хил куч таъсирида олган тезланишлари уларнинг массаларига тескари пропорционал. (13.3) ифодани

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (13.5)$$

кўринишда ёзамиз. Бу формула Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодалайди, яъни *жисмга таъсир қилаётган куч жисмнинг массаси билан унга мазкур куч берган тезланиш кўпайтмасига тенг.*

(13.5) формуладаги барча катталикларни мустақил равишда тажрибада аниқлаш мумкин, аммо улар орасидаги миқдорий муносабатни фақат табиатнинг энг асосий қонунларидан бири бўлган мазкур қонун аниқлаб беради.

Жисм бир нечта куч таъсирида ҳаракат қилаётган бўлса, мазкур жисм шу кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган ҳолдагидек тезланиш олади:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F} = m\vec{a}. \qquad (13.6)$$

Шунинг учун (13.6) тенгламадаги $\vec{F}$ кучни мазкур жисмга қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси деб қараш зарур.

Ньютоннинг иккинчи қонуни фақат инерциал саноқ системаларидагина бажарилади, яъни жисм массасининг унинг инерциал саноқ системасига нисбатан тезланишига кўпайтмаси унга таъсир қилаётган кучларнинг вектор йиғиндисига тенг.

(13.6) ифодани

$$\vec{F} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = m\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (13.7)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Жисмга бошқа жисмлар таъсир қилмаган ёки таъсирлар ўзаро мувозанатлашган ҳол учун $\vec{F} = 0$ бўлиб, (13.5) ифодада тезланиш нолга тенг бўлади. Бу хулоса Ньютоннинг биринчи қонуни таърифига мос келади. Шунинг учун Ньютоннинг биринчи қонунини иккинчи қонуннинг хусусий ҳоли деб ҳисоблаш мумкин. Шунга қарамай, биринчи қонун иккинчи қонундан мустақил равишда таърифланади, чунки у инерциал саноқ системаларининг мавжудлиги ҳақидаги фикрни ўз ичига олади.

Аравача билан амалга оширилган тажрибада биз ипнинг таранглик кучи ўзгармайди, аравача доимий тезланиш олади деб ҳисоблаган эдик. Агар аравачанинг t_1 пайтдаги тезлиги $\vec{v}_1$ бўлиб, t_2 пайтда эса $\vec{v}_2$ бўлиб қолган бўлса, унинг ўртача тезланиши

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

га тенг бўлади. Бу ифодани (13.5) тенгламага қўйиб,

$$\vec{F}\,(t_2 - t_1) = m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

ифодани олиш мумкин. Бу ифодадан кўринадики, жисм тезлигининг ўзгариши фақат унга таъсир қилаётган кучгагина эмас, балки кучнинг таъсир қилиб туриш вақтига ҳам боғлиқ экан.

Кучнинг у таъсир қилиб турган вақтга кўпайтмаси билан ўлчанадиган вектор катталик *куч импульси* дейилади.

Жуда кичик вақт оралиғи учун $\vec{F}\cdot dt = md\vec{v}$ деб ёзиш мумкин (бунда ўзгарувчан кучни жуда кичик вақт оралиғида ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин). Классик механикада жисм массасини ўзгармайди деб ҳисоблаганидан,

$$\vec{F}dt = d\,(m\vec{v}) \qquad (13.8)$$

ифодани ёзиш мумкин.

Жисм массасининг унинг тезлигига кўпайтмасига тенг бўлган вектор катталик *жисмнинг импульси* (ёки ҳаракат миқдори) дейилади:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \qquad (13.9)$$

Жисм импульсининг вектори тезлик вектори билан бир хил йўналишга эга бўлади. (13.9) формулани ҳисобга олсак, (13.8) ифода

$$\vec{F}\cdot dt = d\vec{p} \qquad (13.10)$$

кўринишга келади, яъни жисм импульсининг ўзгариши унга таъсир қилаётган куч импульсига тенг бўлиб, куч таъсир чизиғи бўйлаб йўналган бўлади. Жисм импульсининг ўзгарувчи куч таъсирида чекли вақт оралиғидаги ўзгаришини

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad (13.11)$$

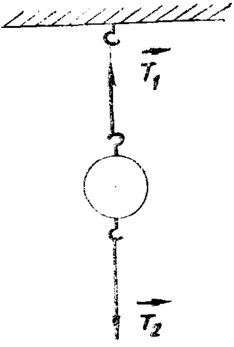
ифода ёрдамида топиш мумкин.

(13.10) тенгламадан

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (13.12)$$

ифода келиб чиқади, яъни жисм импульсидан вақт бўйича олинган ҳосила унга таъсир қилаётган кучга тенг. Бу формула ҳам аслида, динамиканинг иккинчи қонунини ифодалайди.

Кучнинг таъсир қилиш вақти муҳим эканлигини тасдиқловчи бир мисол кўрайлик. Массаси m бўлган юк ипга осилган бўлиб, юкнинг паст томонига худди ўшандай ип боғланган бўлсин (24- расм). Агар пастдаги ипнинг учидан тутиб секин-аста пастга қараб тортсак, юқоридаги ип узилади. Ипни силтаб тортганда эса пастдаги ип узилади. Юкка таъсир қилаётган $\vec{P}$ оғирлик кучи ҳамда иккала ипнинг $\vec{T}_1$ ва $\vec{T}_2$ таранглик кучлари таъсирида юк $\vec{a}$ тезланиш олади. Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{P}=m\vec{a}$ деб ёзиш мумкин (ипларни вазнсиз деб ҳисоблаймиз). Кучларнинг йўналишларини ҳисобга олиб, сўнгги тенгликни скаляр кўринишда ёзиш мумкин:



24-расм.

$$T_2 + P - T_1 = ma,$$

ёки

$$T_1 - T_2 = m\,(-a + g). \qquad (13.13)$$

Ипни секин-аста тортганимизда юкнинг тезланиши жуда кичик бўлиб, уни ҳисобга олмаса ҳам бўлади, яъни

$$T_1 - T_2 = mg$$

тенглик бажарилади. Бундан кўринадики, мазкур ҳолда юқоридаги ипнинг таранглик кучи пастки ипнинг таранглик кучидан mg га ортиқ бўлар экан. Шу сабабли, иккала ипнинг йўғонлиги бир хил бўлганидан, юқориги ип аввал узилади.

Ипни силтаб тортганда эса манзара тамоман бошқача бўлади. Бунда юк жуда қисқа вақт давомида маълум тезланиш олади. (13.13) тенгликдан кўринадики, $a>g$ бўлганда $T_2>T_1$ яъни пастки ипнинг таранглиги юқоридаги ип таранглигидан катта бўлар экан. Бу ҳолда, албатта, аввал пастдаги ип узилади.

(13.5) ифода асосида куч бирликларини аниқлаш мумкин. Узунлик, масса ва вақтнинг бирликлари маълум бўлгани сабабли, куч бирлиги сифатида бирлик массали жисмга бирлик тезланиш берадиган куч қабул қилинади.

СИ бирликлар системасида куч бирлиги қилиб 1 *ньютон* (Н) қабул қилинган. У 1 кг массали жисмга 1 м/с^2 тезланиш берадиган кучдир. Физикада СГС бирликлар системаси ҳам кенг қўлланилади. Мазкур системада узунлик бирлиги бўлган сантиметр (см), вақт бирлиги секунд (с) ва масса бирлиги грамм (г) асосий бирликлар сифатида қабул қилинган. СГС системасида дина (дин) куч бирлиги ҳисобланади. У 1 г массали жисмга 1 см/с^2 тезланиш берадиган кучдир. Айтиб ўтилганлардан

$$1 Н = 10^5 \text{ дин}$$

эканлиги келиб чиқади.

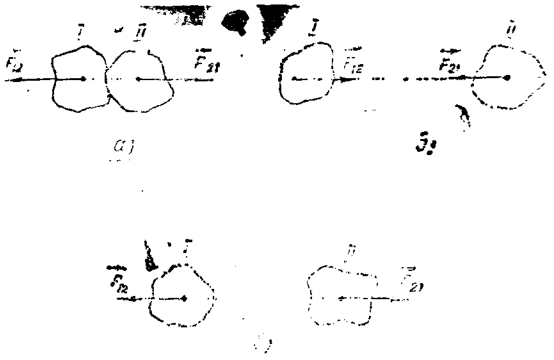
14- §. Ньютоннинг III қонуни

Ньютоннинг учинчи қонуни жисмларнинг ўзаро таъсири ҳақида бўлиб, қуйидагича таърифланади: *ҳар қандай икки жисм бир-бирига сон жиҳатдан тенг ва битта тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган кучлар билан таъсир қилади.*

Бу қонунда тажрибада текшириб кўриш мумкин бўлган иккита фикр бор: 1) жисмларнинг бир-бирига таъсири ўзаро таъсир характерига эга, яъни агар битта куч мавжуд бўлса, албатта, унга қарама-қарши йўналган иккинчи куч ҳам бўлиши шарт; 2) ўзаро таъсирлашаётган жисмларнинг бир-бирига таъсир кучлари сон жиҳатдан ўзаро тенг.

Мазкур қонунни

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{14.1}$$



25-расм.

кўринишда ёзиш мумкин. 25-расмдаги шакллар бу қонунни тасаввур қилишга ёрдам беради. 25-*а* расмда жисмларнинг бевосита таъсирлашиши, 25-*б*, *в* расмларда эса бирор масофадан туриб тортишиш ва итаришиш ҳоллари кўрсатилган.

Иккита макроскопик жисмлар орасидаги ўзаро таъсир кучини аниқлаш учун жисмларни фикран майда бўлакчаларга ажратиб, ўзаро таъсир кучларини жисмларнинг ҳажми бўйлаб қўшиб чиқилади.

Ньютоннинг учинчи қонунини тасдиқловчи иккита мисол келтирамиз. 12- § да баён қилинган пўлат шар билан магнит орасидаги ўзаро таъсирни кўрайлик. Бунда магнит шарни, шар эса ўз навбатида магнитни ўзига тортади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун уларга бир-бирига томон эркин ҳаракат қила оладиган шароит яратиш керак. Бунинг учун уларни иккита аравачага солиб, аравачалардан бирини динамометр орқали бирор қўзғалмас жисмга маҳкамлаб, иккинчи аравачани эса бошқа динамометр орқали тутиб туриш мумкин. Ҳар иккала динамометрнинг кўрсатиши бир хил бўлади. Яна бир мисол кўрайлик. Тарозининг бир палласига сувли стаканни жойлаштириб, тарози тоши билан мувозанатга келтирайлик. Сувга бирор жисмни, масалан, таёқчани ботирсак, стаканли палла босиб кетиб, мувозанат бузилади. Бунинг сабаби шуки, сув таёқчага итариб чиқарувчи куч (Архимед кучи) билан, таёқча эса сувга пастга йўналган ўшанча куч билан таъсир қилади.

Шуни айтиб ўтиш керакки, учинчи қонунда бошқа-бошқа жисмларга қўйилган кучлар ҳақида сўз юритилади, шунинг учун бу кучлар бир-бирини мувозанатламайди.

Ўзаро таъсир кучларидан бирини, Ньютон таъбири бўйича *таъсир,* иккинчисини эса *акс таъсир* деб номланади. Бундай номланиш шартли бўлиб, аслида ҳар иккала кучнинг табиати бир хилдир. Масалан, иккита зарядланган шарчаларнинг ўзаро таъсирида биринчи шарчанинг иккинчисига таъсир кучи биринчи шар атрофида ҳосил бўлган электр майдони туфайли, аксинча — иккинчи шарчанинг биринчисига таъсир кучи эса иккинчи шарча атрофида ҳосил бўлган электр майдони туфайли вужудга келади.

Агар бир жисмнинг иккинчи жисмга таъсири биринчи жисмнинг деформацияланиши туфайли бўлса, иккинчи жисмнинг биринчи жисмга таъсири ҳам иккинчи жисмнинг деформацияланиши туфайли юзага келади.

Динамиканинг учинчи қонунига кўра, таъсир ва акс таъсир — ўзаро таъсирлашиш жараёнининг иккита ташкил этувчиларидир.

Иккита жисм ўзаро таъсирлашаётган бўлсин. Учинчи қонунга кўра $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ деб ёзиш мумкин. Ўзаро таъсир туфайли жисмлар $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}$ ва $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$ тезланишлар олади. Бу ерда m_1 ва m_2—уларнинг массалари, $\vec{F}_{12}$ — биринчи жисмга иккинчи жисм кўрсатаётган таъсир кучи, $\vec{F}_{21}$ эса иккинчи жисмга биринчиси томонидан кўрсатилаётган таъсир кучи. (14.1) ни ҳисобга олсак

$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{a}_2 \qquad (14.2)$$

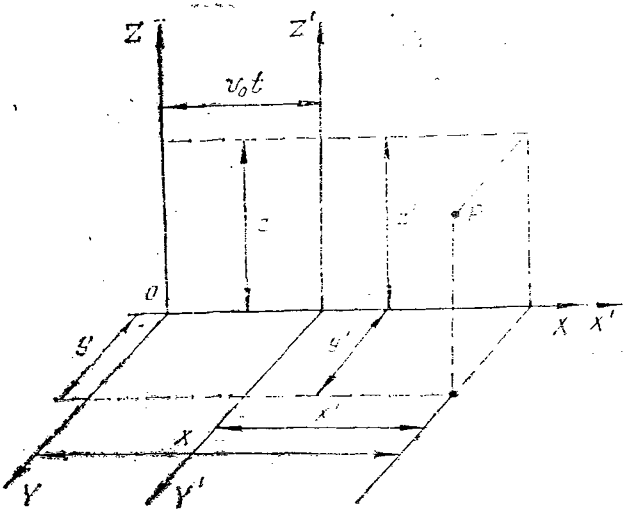
ифода ҳосил бўлади.

Бундан кўринадики, ўзаро таъсирлашаётган жисмлар қарама-қарши томонга йўналган ҳамда уларнинг массаларига тескари пропорционал бўлган тезланишлар олади. Масалан, Ер сирти бўйлаб юриб кетаётган одам Ерни куч билан орқага итаради, ўзи эса Ер томонидан кўрсатилаётган куч таъсирида олдинга ҳаракат қилади. Бу кучлар сон жиҳатдан тенг бўлиб, қарама-қарши йўналишга эга. Бироқ Ер ва одамнинг бу кучлар таъсирида олган тезланишлари уларнинг массаларига тескари пропорционал бўлиб, Ернинг массаси одам массасига нисбатан жуда катта бўлгани сабабли Ер амалда ҳаракатсиз қолади.

15- §. Галилей алмаштиришлари ва нисбийлик принципи

Баъзан ҳаракатни ўрганишда бир инерциал саноқ системасидан унга нисбатан доимий $\vec{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланаётган бошқа саноқ системасига ўтишга тўғри келади. Иккала системанинг мос координата ўқлари ўзаро параллел, $\vec{v}_0$ тезлик X ўқи бўйлаб йўналган ва вақт саноғи иккала система координата бошлари устма-уст тушганда бошланган деб ҳисоблаб, муайян P нуқтанинг ҳар иккала системадаги координаталари орасидаги муносабатни топайлик (26- расм).

Нуқтанинг қўзғалувчи $X'Y'Z'O'$ саноқ системасига нисбатан ҳаракати *нисбий ҳаракат*, қўзғалувчи саноқ системасининг қўзғалмас $XYZO$ саноқ системасига нисбатан ҳаракати эса *кўчирма ҳаракат* дейилади. Нуқтанинг қўзғалмас системадаги координаталарини x, y, z билан, қўзғалувчи системадаги координаталарини эса x', y', z' билан белгилаймиз. $t = 0$ пайтда иккала системаларнинг бошлари O ва O' устма-уст тушиб, қўзғалувчи система боши OX бўйлаб v_0 тезлик



26-расм.

билан ҳаракатланаётган бўлсин. У ҳолда мазкур нуқтанинг иккала саноқ системасидаги координаталари ўзаро

$$x = x' + v_0 t, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \qquad (15.1)$$

муносабатлар орқали боғланган бўлади. Бу тенгликдан кўринадики, қайси саноқ системасида ўлчанганидан қатъи назар вақт бир хил ўтар экан. (15.1) тенгламалар системаси *Галилей алмаштиришлари* деб аталади.

Бир саноқ системасидан иккинчисига ўтганда қиймати ўзгармай қоладиган катталиклар мазкур алмаштиришларга нисбатан *инвариант* дейилади.

Мисол тариқасида бирор стерженнинг унга нисбатан қўзғалмас ва қўзғалувчи саноқ системаларидаги узунлигини аниқлайлик. Стержень учларининг қўзғалмас системадаги координаталари x_1, y_1, z_1 ва x_2, y_2, z_2 бўлса, унинг узунлиги

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

бўлади. Қўзғалувчи саноқ системасига нисбатан стержень — v_0 тезлик билан ҳаракатланади. Ҳаракатланаётган стерженнинг узунлигини аниқлаш учун бир вақтнинг ўзида ҳар иккала учининг вазиятини аниқлаш керак. Мазкур t пайт учун (15.1) га асосан

$$x_1' = x_1 - v_0 t, \quad x_2' = x_2 - v_0 t, \quad y_1' = y_1, \quad z_1' = z_1, \quad y_2' = y_1, \quad z_2' = z_2$$

деб ёзиш мумкин. У ҳолда

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1;\ y_2' - y_1' = y_2 - y_1;\ z_2' - z_1' = z_2 - z_1$$

ифода ҳосил бўлади.

Шундай қилиб,

$$l' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ёки

$$l' = l \qquad (15.2)$$

ифода келиб чиқади, яъни стерженнинг ҳар иккала саноқ системасидаги узунликлари бир хил экан. Шу сабабли, икки нуқта орасидаги масофа ёки бирор жисмнинг узунлиги Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариант экан.

Ҳаракатланаётган P нуқта тезлигининг ҳар иккала саноқ системасидаги координата ўқларига проекциялари орасидаги муносабатни топайлик. Бунинг учун (15.1) ифодалардан вақт бўйича ҳосила олсак,

$$v_x = v_x' + v_0,\ v_y = v_y',\ v_z = v_z'$$

ёки вектор кўринишда

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \qquad (15.3)$$

ифода келиб чиқади, яъни нуқтанинг қўзғалмас саноқ системасига нисбатан тезлиги нисбий $\vec{v}'$ тезлик билан кўчирма $\vec{v}_0$ тезликнинг вектор йиғиндисига тенг экан. Бу ифода *тезликларни қўшиш қонуни* деб аталади.

(15.3) ифодадан вақт бўйича ҳосила олсак, P нуқта тезланишининг ҳар иккала саноқ системасидаги координата ўқларига проекциялари орасидаги муносабат келиб чиқади:

$$a_x = a_x',\ a_y = a_y',\ a_z = a_z',$$

ёки вектор кўринишда

$$\vec{a} = \vec{a}' \qquad (15.4)$$

ифодага эга бўламиз.

Шундай қилиб, тезланиш Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариант экан. Бундан, бирор инерциал саноқ системасига нисбатан тўғри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат қилаётган барча саноқ системалари инерциал эканлиги келиб чиқади.

Бирор нуқтанинг ҳар хил инерциал саноқ системаларига нисбатан ҳаракати бир-бириндан тезлиги, бошланғич координаталари ва кўчиши билан фарқ қилади, тезланиши эса мазкур системаларнинг барчасида бир хил бўлади. Шу сабабли, бир хил механик тажрибалар бундай системаларда бир хил натижани беради, яъни ҳеч қандай механик тажриба инерциал саноқ системаларидан қайси бири тинч ҳолатда-ю, қайсиниси ҳаракат қилаётганини аниқлашга имкон бермайди.

Бу фикрни биринчи марта Галилей томонидан баён қилинган бўлиб, у нисбийликнинг механик принципини ифодалайди. Кўпинча уни *Галилейнинг нисбийлик принципи* деб аталади.

«Нисбийлик принципи» номи, ҳаракат тенгламаларининг барча инерциал саноқ системаларида бир хил бўлишини, улардан бирига нисбатан ҳаракатни абсолют ҳаракат деб аташ мумкин эмаслигини, яъни тинчлик ҳолати билан тўғри чизиқли текис ҳаракатни бир-биридан ажратиб бўлмаслигини, бошқача айтганда, ҳаракатнинг нисбийлигини кўрсатади.

Амалда бу принцип муайян саноқ системасида туриб ўтказилган ҳеч қандай механик тажриба ёрдамида системанинг тинч турганини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётганини аниқлаб бўлмаслигида намоён бўлади.

Масалан, тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётган вагоннинг ичида турган киши ойнадан ташқарига қарамасдан туриб, вагон тинч турибдими ёки ҳаракатланаяптими, деган саволга жавоб бера олмайди. Бунда жисмларнинг эркин тушиши, отиб юборилган жисмларнинг ҳаракати ва бошқа механик ҳодисалар вагон тинч турган ҳолатдагидек юз беради.

16- §. Динамика масалалари

Берилган кучларга кўра муайян моддий нуқта ҳаракатининг траекториясини ва ҳаракат қонунини аниқлаш — механиканинг асосий масаласи ҳисобланади. Бу масала одатда Ньютоннинг иккинчи қонуни ёрдамида ечилади. Шу сабабли мазкур қонун *моддий нуқта динамикасининг асосий қонуни* деб юритилади. Бошланғич шартларни (нуқтанинг бошланғич пайтдаги вазияти ва тезлигини) ва таъсир қилаётган кучларнинг ўзгариш қонунини билган ҳолда нуқтанинг кейинги ихтиёрий пайтдаги вазияти ва тезлигини аниқлаш мумкин.

Ньютоннинг иккинчи қонуни бунга тескари бўлган масалани ечиш — нуқтанинг траекториясини ва ҳаракат қонунини билган ҳолда унга қандай кучлар таъсир қилаётганини ҳамда улар қай тарзда ўзгараётганини аниқлаш имконини ҳам беради.

Бундай тескари масаланинг ечилишига планеталарнинг траекториялари ва Кеплер томонидан кашф этилган ҳаракат қонунларига кўра уларга таъсир қилаётган кучларни топиш масаласи мисол бўла олади. Бу масаланинг ечилиши Ньютонни Бутун олам тортишиш қонунини яратишига олиб келди.

Нуқтанинг ҳаракат қонуни табиий, вектор ва координаталар усулида берилиши мумкинлиги айтиб ўтилган эди. Ҳаракат қонуни табиий усулда берилган бўлса, босиб ўтилган йўл ифодасидан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, тезланишни (унинг нормал ва тангенциал ташкил этувчиларини) аниқлаш мумкин. Шундан сўнг Ньютоннинг иккинчи қонунидан фойдаланиб, таъсир этаётган кучнинг вектор ифодасини топса бўлади.

Ҳаракат қонуни вектор усулида берилганда нуқтанинг $\vec{r}$ радиус-векторидан вақт бўйича иккинчи ҳосила олиб, унинг тезланиши вектори топилади, шундан сўнг Ньютоннинг иккинчи қонуни қўлланилади.

Ҳаракат қонуни координаталар кўринишида берилганда эса x, y ва z лардан вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосила олиб, нуқта тезланиши векторининг мос ўқларга проекцияларини топиш мумкин. Бу катталиклардан Ньютоннинг иккинчи қонуни ёрдамида куч векторининг проекцияларига ўтиш мумкин.

Муайян массали моддий нуқтага таъсир қилаётган кучга кўра унинг ҳаракат қонунини аниқлаш учун нуқтанинг бошланғич ($t=0$) пайтдаги вазияти ва тезлиги маълум бўлиши шарт. Бундай масалани ечишда Ньютоннинг иккинчи қонунини ёзиб, ундан нуқтанинг тезланиши ифодасини аниқлаб олинади. Шундай сўнг бу ифодани икки марта интеграллаб нуқта ҳаракати қонунини топиш мумкин. Бунда интеграллаш доимийларини топишда бошланғич шартлардан фойдаланилади.

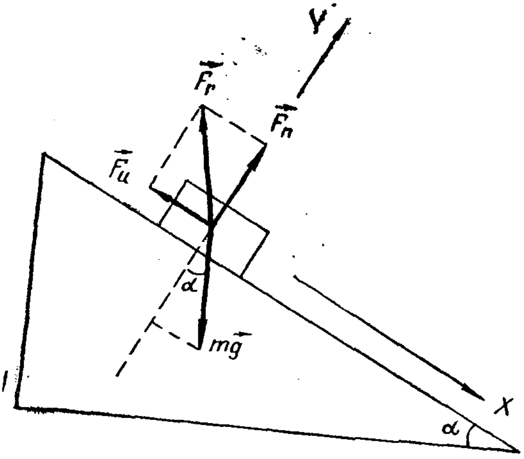
Динамика масалаларини ечишда даставвал масала шартларида берилган катталиклар (нуқтанинг вазияти, тезлиги ва тезланиши ҳамда унга таъсир қилаётган кучлар) қайси саноқ системасига нисбатан берилганини аниқлаб олиш зарур.

Кўпчилик динамика масалаларида жисмларнинг турли боғланишлар билан чекланган, яъни эркин бўлмаган ҳаракатини ўрганишга тўғри келади. Механикада жисм ҳаракатига кўрсатилаётган ҳар қандай чеклашлар *боғланишлар* деб аталади. Улар доимо жисмга бошқа жисмлар томонидан кўрсатилаётган таъсирнинг натижасидир. Шунинг учун жисм эркинмас ҳаракат қилганда унга бошқа ташқи кучлар билан бир қаторда боғланишларни ҳосил қилаётган жисмлар томонидан ҳам куч таъсир қилади. Бу кучларни *боғланишларнинг реакция кучи* деб юритилади. Жисм ҳаракати тенгламасини тузаётганда берилган кучлардан ташқари боғланишларнинг номаълум реакция кучларини ҳам ҳисобга олиш зарур.

Жисмларнинг ҳаракат тенгламасини вектор кўринишда ёки кучлар ва тезланишларнинг координата ўқларига проекцияларини ўзаро боғлайдиган скаляр тенгламалар кўринишида ёзиш мумкин.

Агар масалада бир нечта жисмдан иборат система берилган бўлса, ҳар бир жисм учун алоҳида ҳаракат тенгламаларини тузиш керак. Бундай масалани ечишда ҳаракат тенгламаларинигина тузиш кифоя қилмайди. Шунинг учун жисмнинг ҳаракатига боғланишлар томонидан қўйилаётган шартларни ифодалайдиган қўшимча тенгламаларни ҳам тузиш керак бўлади. Бунда тузилган тенгламаларнинг умумий сони номаълум катталиклар сонига тенг бўлиши зарур.

Ҳаракат тенгламасини тузиш учун, энг аввало ўрганилаётган жисмга қандай кучлар таъсир қилаётганини аниқлаш



27-расм.

керак. Бунда мазкур жисмга айнан қайси жисмлар таъсир қилаётганини аниқлаш муҳим. Масалан, қия текислик бўйлаб сирпаниб тушаётган жисм учун Ернинг ($m\vec{g}$ оғирлик кучи) ва қия текисликнинг таъсири ($\vec{F}_r$ реакция кучи) муҳим (27-расм). Хатоликка йўл қўймаслик учун кучларни уларнинг таъсири бўйича эмас, балки уларни юзага келтирувчи «манба» бўйича характерлаш, яъни ҳар бир кучни юзага келтираётган жисмни кўра билиш зарур. Мазкур мисолда қия текисликнинг реакция кучи $\vec{F}_r$ ни иккита ташкил этувчига — нормал $\vec{F}_n$ босим кучига ва $\vec{F}_u$ ишқаланиш кучига ажратган маъқул.

Жисмга таъсир қилаётган барча кучлар аниқ бўлгач, Ньютоннинг иккинчи қонуни бўйича тенглама тузилади. 27-расмда тасвирланган мисолда

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_r = m\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{F}_u$$

тенгламага эга бўламиз. Ҳисоблашларни бажариш учун векторлардан уларнинг танлаб олинган (X ва Y) йўналишлардаги проекцияларига ўтилади:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu F_n, \quad 0 = F_n - mg\cos\alpha,$$

бу ерда $F_{nx} = 0$ эканлиги ҳисобга олинган.

Сўнгги тенгликлардан тезланишни аниқлаш қийин эмас.

III боб

ИШ ВА ЭНЕРГИЯ

17-§. Иш ва қувват. Кинетик энергия

Физикадаги «иш» тушунчаси кундалик ҳаётдагидек кенг маънога эга эмас. Масалан, физика нуқтаи назаридан китоб ўқиётган талаба ёки қўшиқ айтаётган ҳофиз иш бажармайди.

Механикадаги иш тушунчаси кўчиш ва куч тушунчалари билан боғлиқ. Жисм ўзгармас $\vec{F}$ куч таъсирида $\Delta\vec{r}$ га кўчса, кучнинг бажарган иши куч вектори ҳамда кўчиш векторининг скаляр кўпайтмаси билан аниқланади:

$$\Delta A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}. \qquad (17.1)$$

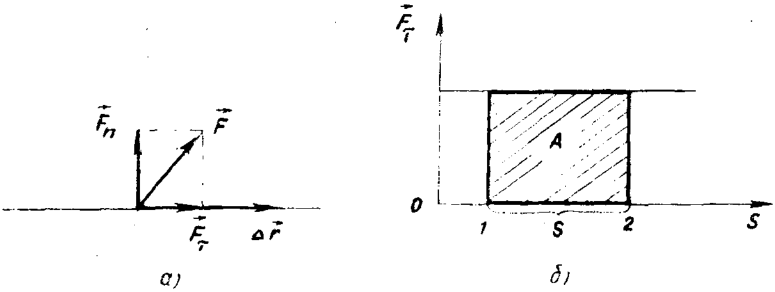
Жисм тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда ўзгармас $\vec{F}$

куч таъсирида s масофани босиб ўтса, кучнинг бажарган иши

$$A = F_\tau \cdot s = F \cdot s \cdot \cos\alpha \qquad (17.2)$$

бўлади, бу ерда $F_\tau = F \cdot \cos\alpha$ — куч векторининг ҳаракат йўналишига проекцияси, α — куч вектори билан ҳаракат йўналиши орасидаги бурчак (28-*а* расм).

$\alpha < 90°$ бўлганда кучнинг бажарган иши мусбат ($\cos\alpha > 0$), $\alpha > 90°$ бўлганда эса манфий ($\cos\alpha < 0$). Масалан, ишқаланиш кучининг иши ($\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$) манфий бўлади. $\alpha = 90°$ бўлганда эса куч иш бажармайди ($\cos\alpha = 0$). Бундан кўринадики, кучнинг ҳаракат йўналишига нормал бўлган $\vec{F}_n$ ташкил этувчиси иш бажармай, фақат унинг (йўл бўйлаб йўналган) тангенциал $\vec{F}_\tau$ ташкил этувчисигина иш бажарар экан. Табиийки, $s = 0$ ҳолда ҳам кучнинг бажарган иши нолга тенг. Масалан, бирор юкни ушлаб турган одам биохимиявий иш бажаради, бироқ механик иш бажармайди (кўчиш нолга тенг). Ўзгармас кучнинг бажарган иши 28-*б* расмда кўрсатилган юзага тенг бўлади.



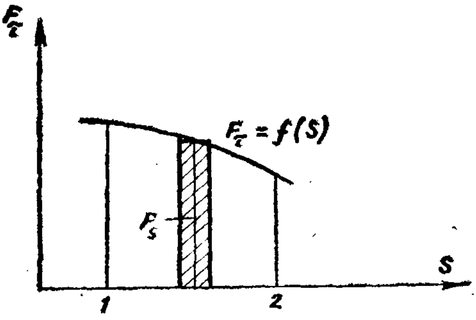
а) *б)*

28-расм.

Куч вақт ўтиши билан ўзгариб турса, унинг бажарган ишини ҳисоблаш учун жисмнинг траекториясини кичик Δs бўлакларга бўламиз (бу бўлакларнинг ҳар бирида F_τ кучни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин). Кучнинг траекториянинг ҳар бир бўлагида бажарган иши $\Delta A \simeq F_\tau \cdot \Delta s$, бутун s йўл бўйича бажарган иши эса

$$A = \sum_i \Delta A_i = \sum_i F_{\tau i} \cdot \Delta s_i$$

га тенг бўлади. $\Delta s \to 0$ да лимитга ўтиб, бажарилган ишнинг аниқ ифодасини топамиз:



29-расм.

$$A = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i F_{\tau i} \cdot \Delta s_i = \int_s F_\tau \cdot ds. \qquad (17.3)$$

Мазкур интегрални ҳисоблаш учун F_τ кучнинг s га боғланиш қонунини билиш зарур. 29-расмда ана шундай боғланишлардан бирининг графиги тасвирланган. Расмдан кўриндики, траекториянинг кичик бўлагида бажарилган иш штрихланган тасмача юзига тенг. Моддий нуқтани *1* нуқтадан *2* нуқтага кўчиришда бажарилган тўлиқ иш эса шу нуқталарга мос келган ординаталар, s ўқи ва $F_\tau = f(s)$ боғланишни ифодаловчи эгри чизиқ билан чегараланган юзага тенг.

Бажарилган ишнинг шу ишни бажариш учун сарфланган вақтга нисбати билан ўлчанадиган катталик *қувват* деб аталади:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \qquad (17.4)$$

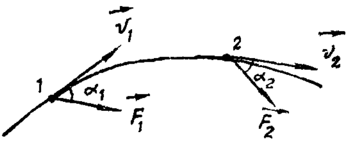
Вақт ўтиши билан қувват ўзгариб турганда *оний қувват* тушунчаси киритилади:

$$N = \frac{dA}{dt}. \qquad (17.5)$$

(17.1) ифодага кўра $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (17.6)$$

ифода келиб чиқади, яъни оний қувват куч ва тезлик векторларининг скаляр кўпайтмасига тенг.



30-расм.

Муайян m массали моддий нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракати мобайнида *1* вазиятдан *2* вазиятга ўтганда $\vec{F}$ куч томонидан бажарилган ишни ҳисоблайлик (30-расм). Нуқтанинг чексиз кичик $d\vec{r}$ кўчишида кучнинг бажарган иши $dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ бўлиб, *1* ва *2* вазиятлар орасидаги йўлда бажарилган иш

$$A_{1,2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_1^2 \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{v}$$

га тенг. Бундан

$$A_{1,2} = m\int_1^2 \vec{v}\,d\vec{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (17.7)$$

келиб чиқади. Бу ифодада моддий нуқтанинг траекториянинг бошланғич ва охирги нуқтасидаги тезликларигина қатнашади. Моддий нуқтанинг ҳаракат ҳолати билан белгиланадиган

$$E_к = \frac{mv^2}{2} \qquad (17.8)$$

катталик *кинетик энергия* деб аталади.

Массаси ўзгармас бўлган жисмнинг кинетик энергияси унинг ҳаракати тезлиги билангина белгиланади, энергия жисмга қандай усулда берилганига боғлиқ эмас. Маълумки, жисмнинг тезлиги танлаб олинган саноқ системасига нисбатан ўлчанади. Шунинг учун кинетик энергия ҳам нисбий катталик, яъни саноқ системасининг танлаб олинишига боғлиқ. Масалан, юқоридан ташлаб юборилган қутига солинган тош Ер сирти билан боғланган саноқ системасига нисбатан муайян кинетик энергияга эга, бироқ унинг ташлаб юборилган қутига нисбатан кинетик энергияси нолга тенг.

(17.8) ифодани

$$E_{к2} - E_{к1} = A_{1,2} \qquad (17.9)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бундан кўринадики, жисм бир вазиятдан бошқа вазиятга кўчишидаги кинетик энергиянинг ўзгариши бажарилган ишга тенг. Агар кинетик энергия камайса, жисм бу энергия ҳисобига ташқи кучларга қарши иш бажаради ва бу ҳолда бажарилган иш манфий бўлади ($A<O$). Кинетик энергия ортганда эса ташқи кучлар мазкур жисм устида иш бажаради, яъни $A>O$.

Жисмлар системасининг кинетик энергияси система таркибига кирувчи жисмлар кинетик энергиялари йиғиндисига тенг:

$$E_к = \sum_i \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} . \tag{17.10}$$

Механик иш билан кинетик энергия бир хил ўлчамликка эга:

$$[A] = [E_к] = [F \cdot s] = [L^2 T^{-2} M]. \tag{17.11}$$

Механик иш бирлиги сифатида кўчиш йўналишида таъсир қилаётган бир бирлик кучнинг бирлик масофада бажарган иши қабул қилинади. СИ системада иш бирлиги **1 жоуль** (Ж) бўлиб, у 1 Н кучнинг шу куч йўналишидаги 1 м йўлда бажарган ишига тенг. СГС системада эса иш бирлиги **1 эрг** бўлиб, у 1 дина кучнинг шу куч йўналишидаги 1 см йўлда бажарган ишига тенг. Айтилганларга асосан

$$1Ж = 1Н \cdot 1м = 10^5 \text{ дин} \cdot 10^2 \text{ см} = 10^7 \text{ эрг}.$$

деб ёзиш мумкин.

Механик қувватнинг ўлчамлиги:

$$[N] = [L^2 T^{-3} M].$$

Қувват бирлиги сифатида вақт бирлиги ичида бир бирлик иш бажарилган ҳолдаги ўзгармас қувват қабул қилинади. СИ системада қувват бирлиги **1 ватт (Вт)** бўлиб, у 1 секундда 1 Ж иш бажарилгандаги ўзгармас қувватга тенг:

$$1 \text{ Вт} = \frac{1 Ж}{1 с} .$$

СГС системадаги қувват бирлиги $\left(\frac{1 \text{ эрг}}{1 \text{ с}}\right)$ алоҳида номга эга эмас. Қувват бирликлари орасидаги муносабат қуйидагича:

$$1 \text{ Вт} = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{с}} .$$

Техникада қувватнинг **«от кучи»** деб аталадиган бирлиги кенг қўлланилади: 1 о. к. = 736 Вт.

18- §. Потенциал энергия

Физика курсида ўрганиладиган барча кучлар консерватив (потенциал) ва ноконсерватив (нопотенциал) кучларга бўлинади. Бажарган иши кўчирилаётган жисм траекториясининг шакли билан эмас, балки жисмнинг фазодаги бошланғич ва охирги вазиятлари билан белгиланадиган кучлар *консерватив кучлар* дейилади. Бундай кучларга тортишиш кучлари, эластиклик кучлари, зарядланган жисмлар орасидаги электростатик тортишиш ва итаришиш кучлари мисол бўлади.

Оғирлик кучининг Ер сирти яқинида бажарган иши жисмнинг тезлигига ва траекториясининг шаклига боғлиқ бўлмай, жисмнинг ихтиёрий танлаб олинган бошланғич сатҳга нисбатан баландлигининг ўзгариши билан белгиланади, яъни

$$A = mgh, \qquad (18.1)$$

бу ерда $h = h_2 - h_1$ — жисмнинг охирги h_2 ва бошланғич h_1 вазиятлари баландликлари орасидаги фарқ.

Жисм оғирлик кучи майдонида берк траектория бўйлаб ҳаракатланганда, яъни ҳаракат охирида яна бошланғич баландликда бўлганда ($h_2 = h_1$), (18.1) ифодага кўра оғирлик кучининг бажарган тўла иши $A = 0$ бўлади ($h = 0$). Бу хусусият барча консерватив кучларга хос бўлиб, ундан консерватив кучларнинг таърифи сифатида фойдаланиш мумкин: ихтиёрий берк траектория бўйлаб бажарган тўла иши нолга тенг бўлган кучлар *консерватив кучлардир*. Бу фикрни

$$A = \oint\limits_{S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ ёки } A = \oint\limits_{S} F_\tau \cdot ds = 0 \qquad (18.2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $\oint\limits_{S}$ — берк йўл бўйича олинган интеграл.

Бу шартни қаноатлантирмайдиган кучлар *ноконсерватив кучлар* бўлади. Масалан, ишқаланиш кучларининг берк траектория бўйлаб бажарган иши нолга тенг эмас, яъни улар ноконсерватив кучлардир. Суюқлик ичида ҳаракат қилаётган жисмга таъсир қилаётган қаршилик кучи жисм тезлигига боғлиқ, шунинг учун у ҳам ноконсерватив кучларга киради.

Консерватив кучнинг ўзаро таъсирлашаётган жисмлар системасини жисмларнинг бир-бирига нисбатан вазияти бир хил бўлган ҳолатдан бошқача бўлган ҳолатга ўтказишда бажарган иши билан ўлчанадиган катталик *потенциал энергия* деб аталади.

Потенциал энергия ўзаро таъсирлашаётган жисмлар энергияси бўлиб, уларнинг ҳаракат тезлигига боғлиқ эмас. Жисмлар берк системасининг (20-§ га қаранг) потенциал энергияси уларнинг бир-бирига нисбатан вазиятига боғлиқ, яъни у жисмлар вазияти (координаталари) нинг функциясидир. Масалан, юқорида айтиб ўтилган мисолда нуқтанинг потенциал энергияси унинг Ер сиртига нисбатан баландлигига боғлиқ:

$$E_п = mgh. \qquad (18.3)$$

Ер билан моддий нуқтадан иборат система потенциал энергиясининг мазкур нуқта *1* вазиятдан *2* вазиятга ўтгандаги ўзгариши оғирлик кучининг бажарган ишига тенг, яъни

$$E_{п1} - E_{п2} = A_{1,2}. \qquad (18.4)$$

Потенциал энергиянинг қиймати саноқ бошининг танлаб олинишига боғлиқ. Масалан, Ер билан моддий нуқтадан иборат системани ўрганишда саноқ боши сифатида Ернинг сирти олинган эди, у ҳолда Ер сиртидаги ўра ичида жойлашган моддий нуқтанинг потенциал энергияси манфий бўлади.

Шуни таъкидлаш керакки, Ер сиртидан маълум баландликка кўтарилган жисм потенциал энергияси ҳақида гапирганда жисм билан Ердан иборат системанинг потенциал энергияси назарда тутилади (жисм Ер сиртида бўлганда системанинг потенциал энергияси нолга тенг деб ҳисобланади). Баъзи ҳолларда саноқ боши сифатида жисмларнинг шундай вазияти танлаб олинадики (масалан, жисмлар бир-биридан чексиз узоқликда бўлган ҳол), бунда системага кирувчи жисмлар амалда ўзаро таъсирлашмайди.

Ўзаро консерватив кучлар орқали таъсирлашаётган *О* ва *К* моддий нуқталардан иборат (берк) система берилган бўлсин. Координаталар боши сифатида *О* моддий нуқта жойлашган нуқтани танлаб олайлик. У ҳолда *К* моддий нуқтанинг *О* га нисбатан потенциал энергияси унинг координаталарига боғлиқ бўлиб қолади:

$$E_п = f(x, y, z).$$

К моддий нуқта *1* (x_1, y_1, z_1) вазиятдан *2* (x_2, y_2, z_2) вазиятга кўчиши учун унга O моддий нуқта томонидан таъсир қилаётган куч муайян иш бажариши зарур. Бу иш K нуқтанинг бошланғич ва охирги вазияти билан, яъни бу ўтишдаги ўзаро таъсир потенциал энергиясининг ўзгариши билан белгиланади. Агар бу иш мусбат бўлса, потенциал энергия камаяди ва аксинча:

$$\Delta E_{п} = E_{п2} - E_{п1} = -A_{1,2}. \qquad (18.5)$$

Шундай қилиб, потенциал энергиянинг ўзгариши жисмни бир вазиятдан иккинчи вазиятга ўтказишда консерватив куч бажарган ишнинг тескари ишора билан олинганига тенг.

Маълумки, чексиз кичик кўчишда бажарилган иш $dA = F_{\tau} \cdot ds$ га тенг эди. (F_{τ} — кучнинг K нуқта кўчиш йўналишига проекцияси). (18.5) ни ҳисобга олсак, $F_{\tau} \cdot ds = -dE_{п}$ ифода ҳосил бўлади. Бу ифодадан

$$F_{\tau} = -\frac{dE_{п}}{ds} \qquad (18.6)$$

келиб чиқади, яъни кучнинг бирор йўналишга проекцияси потенциал энергиядан мазкур йўналиш бўйича тескари ишора билан олинган ҳосилага тенг.

Кучни унинг координата ўқларига проекциялари орқали ифодалаш мумкин:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k},$$

бу ерда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — мос равишда X, Y, Z ўқлар бўйлаб йўналган бирлик векторлар. Кучнинг мос проекциялари учун

$$F_x = -\frac{\partial E_{п}}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_{п}}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_{п}}{\partial z}$$

деб ёзиш мумкин. У ҳолда

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_{п}}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_{п}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_{п}}{\partial z} \cdot \vec{k}\right)$$

ифодага эга бўламиз.

Математика курсида grad $u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$ вектор $u(x, y, z)$ скаляр катталикнинг *градиенти* деб аталади.

Шу ўринда скаляр катталик градиентининг маъноси устида тўхталиб ўтмоқчимиз: градиент — мазкур катталикнинг энг жадал ўзгарадиган йўналишда олинган бирлик масофадаги ўзгаришини ифодалайди. У ҳолда

$$\vec{F} = -\text{grad}\ E_{\text{п}} \tag{18.7}$$

деб ёзиш мумкин. Яъни консерватив куч потенциал энергиянинг тескари ишора билан олинган градиентига тенг экан.

19- §. Энергиянинг сақланиш қонуни

Илгариланма ҳаракат қилаётган жисмлардан иборат системанинг кинетик энергияси фақат ана шу жисмлар тезлигига, системанинг потенциал энергияси эса уларнинг координаталаригагина боғлиқ бўлишини кўрган эдик.

Жисмлар системасининг тўла энергияси унинг кинетик ва потенциал энергиялари йиғиндисига тенг бўлиб, системадаги жисмларнинг ўзаро жойлашувига ҳамда уларнинг тезликларига боғлиқ бўлади:

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}. \tag{19.1}$$

Шундай қилиб, системанинг механик энергиясини аниқлаш учун унинг таркибига кирувчи жисмларнинг координаталари ва тезликларини билиш зарур. Бу катталиклар системанинг муайян пайтдаги ҳолатини белгилайди, яъни системадаги жисмларнинг тезланишларини ҳисоблаб топишга ва уларнинг бундан кейинги вазиятларини аниқлашга имкон беради.

Системанинг ҳолатини белгилайдиган катталиклар *параметрлар* дейилади. Масалан, эркин моддий нуқта координаталари (x, y, z) ва нуқта тезлигининг учала координата ўқларига проекцияларидан иборат олтита катталик мазкур моддий нуқтанинг ҳолат параметрлари ҳисобланади. Бир-бири билан таъсирлашмайдиган n та моддий нуқтадан иборат системанинг параметрлари сони $6n$ га тенг.

Бундан кўринадики, жисмлар системасининг механик энергияси унинг ҳаракатини белгиловчи параметрларга боғлиқ экан.

Консерватив ва ноконсерватив кучлар орқали ўзаро таъсирлашаётган n та моддий нуқтадан иборат системани кўрайлик. Динамиканинг иккинчи қонунига кўра системадаги ҳар бир жисм учун

$$m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{f}_i + \vec{f}'_i \tag{19.2}$$

тенгламани ёзиш мумкин. Бу ерда $\vec{f_i} = \sum_{i\neq k} \vec{f_{ik}}$ — мазкур i-жисмга таъсир қилаётган натижавий консерватив куч; $\vec{f_{ik}}$ — i-жисмга k-жисм томонидан таъсир қилаётган консерватив куч; $\vec{f_i'}$ — i-жисмга таъсир қилаётган натижавий ноконсерватив куч, $\vec{F_i}$ — мазкур жисмга таъсир қилаётган ташқи куч.

Кичик dt вақт оралиғида ҳар бир жисм $d\vec{r_i}$ кўчишга эга бўлади. (19.2) тенгламани скаляр равишда $d\vec{r_i}$ га кўпайтирсак:

$$m_i \cdot \frac{d\vec{v_i}}{dt} \cdot d\vec{r_i} = \vec{f_i} \cdot d\vec{r_i} + \vec{f_i'} \cdot d\vec{r_i} + \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i} \qquad (19.3)$$

ифода ҳосил бўлади. $d\vec{r_i} = \vec{v_i} \cdot dt$ ва $m_i(\vec{v_i} \cdot d\vec{v_i}) = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dE_k$ эканлигини ҳисобга олсак, (19.3) тенглама

$$dE_{ki} = \vec{f_i} \cdot d\vec{r_i} + \vec{f_i'} \cdot d\vec{r_i} + \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i}$$

кўринишга келади. Ҳар бир жисм учун мазкур кўринишдаги тенгламаларни ёзиб, уларни қўшиб чиқамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} dE_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} \cdot d\vec{r_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i'} \cdot d\vec{r_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i},$$

бу ерда $\sum_{i=1}^{n} dE_{ki} = dE_к$ — система кинетик энергиясининг ўзгариши, тескари ишора билан олинган $-\sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} \cdot d\vec{r_i}$ катталик — системадаги жисмлар орасидаги барча ўзаро таъсир консерватив кучларининг бажарган ишлари йиғиндиси бўлиб, (19.5) га кўра, система ички потенциал энергиясининг ўзгаришига тенг, $\sum_{i=1}^{n} \vec{f_i'} \cdot d\vec{r_i}$ — системадаги жисмлар орасида таъсир этаётган барча ноконсерватив кучларнинг бажарган иши.

Шундай қилиб, бутун система учун

$$dE_{к} + dE_{п} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}'_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i, \qquad (19.4)$$

ёки

$$dE = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}'_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

бўлади, яъни система механик энергиясининг ўзгариши ички ноконсерватив кучлар ва ташқи кучлар томонидан бажарилган ишга тенг.

Берк система (бошқа жисмлар билан таъсирлашмайдиган жисмлар системаси) учун ташқи кучларнинг бажарган иши нолга тенг бўлганидан,

$$dE = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}'_i \cdot d\vec{r}_i, \qquad (19.5)$$

яъни берк система механик энергиясининг ўзгариши системада таъсир қилаётган ноконсерватив кучлар томонидан бажарилган ишга тенг. Системадаги бундай ички кучларнинг бажарган иши ҳамма вақт система механик энергиясининг камайиши билан боғлиқ. Система энергиясининг камайиш жараёни *энергиянинг диссипацияси (сочилиши)* дейилади.

Берк системада барча ноконсерватив кучлар, масалан, ишқаланиш кучларининг бажарган иши ҳисобга олмайдиган даражада кичик бўлганда $dE = 0$, ва демак,

$$E = E_{к} + E_{п} = \text{const}, \qquad (19.6)$$

яъни *берк консерватив системада механик энергия бир турдан бошқа турга айланиши ва бир жисмдан иккинчи жисмга узатилиши мумкин, лекин унинг умумий миқдори ўзгаришсиз қолади.*

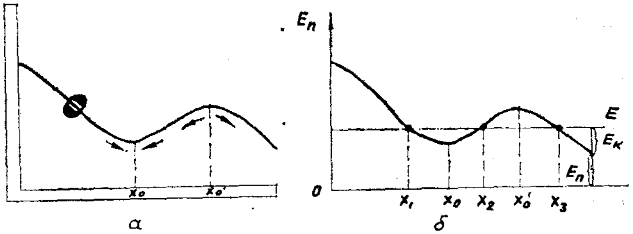
Бу — *механик энергиянинг сақланиши ва бир турдан иккинчи турга айланиши қонуни*дир.

Система изоляцияланган (берк) бўлса ҳам, унда ноконсерватив кучлар мавжуд бўлганда механик энергия сақланмаслигини парашютчи билан Ердан иборат системада кўриш мумкин. Парашютчи учиб тушаётганда унинг потенциал энергияси камайиб борса-да, кинетик энергияси ортмайди (бунда парашютчи доимий тезлик билан ҳаракат қилади). Бунда ҳавога ишқаланиши натижасида механик энергиянинг бир қисми парашютчи ва парашютнинг ҳамда ўраб турган ҳавонинг ички энергиясига айланади.

Механикадаги ҳар қандай масалани икки хил усул билан ҳал қилиш мумкин: 1) куч усули (асосий қонунлар — Ньютон қонунлари, асосий тушунчалар — куч ва масса) ҳамда 2) энергетик усул (асосий қонун — энергиянинг сақланиш қонуни, асосий тушунчалар — энергия ва иш). Баъзи масалаларни куч усули билан ечиш қулай бўлса, бошқаларини энергетик усулда ечган маъқул.

Бир инерциал саноқ системасидан бошқа инерциал саноқ системасига ўтганда системанинг импульси ва энергияси ўзгаради, чунки Галилей алмаштиришларига кўра бунда система қисмларининг тезликлари ўзгаради. Система қисмларининг бир-бирига нисбатан вазиятига боғлиқ бўлган потенциал энергия ўзгаришсиз қолса-да, системанинг тўла энергияси ўзгаради. Лекин берк система учун энергиянинг сақланиш қонуни янги саноқ системасида ҳам ўринли бўлади.

Энди энергиянинг сақланиш қонунидан фойдаланиб механик системанинг мувозанат шартини келтириб чиқарамиз. Фақат битта эркинлик даражасига эга бўлган моддий нуқта ҳаракатини кўрайлик. Бунда нуқтанинг вазияти битта катталик, масалан, x координата билан берилиши мумкин. Мисол тариқасида вертикал текисликда эгиб тайёрланган сим бўйлаб ишқаланишсиз сирпана оладиган шарчани олиш мумкин (31-а расм).



31-расм.

Шарчага консерватив куч, яъни оғирлик кучигина таъсир қилади. 31-б расмда шарча потенциал энергиясининг графиги тасвирланган. Шарча сим бўйлаб ишқаланишсиз ҳаракатланганлиги сабабли сим томонидан шарчага таъсир қилаётган куч шарчанинг ҳаракат йўналишига тик бўлади. Шунинг учун бу кучнинг иши нолга тенг бўлади, яъни бунда энергиянинг сақланиш қонуни тўлиқ бажарилади.

Бу ҳолда кинетик энергия фақат потенциал энергиянинг камайиши ҳисобигагина ортиши мумкин. Шунинг учун агар шарча тезлиги нолга тенг бўлиб, потенциал энергияси эса минимал қийматга эга бўлса, у ташқи таъсирсиз ҳаракатга келолмайди, яъни мувозанатда бўлади.

Потенциал энергиянинг минимумига графикдаги x_0 нуқта мос келади. Потенциал энергиянинг минимуми

$$\frac{dE_п}{dx} = 0 \qquad (19.7)$$

шарт билан белгиланади.

(18.6) га асосан, бу ҳолатда

$$F_x = 0 \qquad (19.8)$$

деб ёзиш мумкин. Бундан кўринадики, потенциал энергиянинг минимумида шарчага таъсир қиладиган куч нолга тенг бўлар экан.

Шарчанинг x_0 ва x_0' ҳолатларида у мувозанатда бўлади. Лекин $x = x_0$ да у *турғун мувозанатда* (шарчани мувозанат ҳолатидан қўзғатилганда ҳосил бўладиган куч уни мувозанат ҳолатига қайтаришга интилади) бўлиб, $x = x_0'$ да у *нотурғун мувозанатда* (шарча қўзғатилганда ҳосил бўладиган куч уни мувозанат ҳолатидан узоқлаштиришга интилади) бўлади. Хулоса қилиб айтганда, потенциал энергиянинг минимуми турғун мувозанатга, максимуми эса нотурғун мувозанатга, потенциал энергия ўзгармас бўлган соҳа эса *фарқсиз мувозанатга* мос келади.

Потенциал энергияни ифодаловчи функция графигига кўра моддий нуқта ҳаракатининг характери тўғрисида бир қатор хулосаларни айтиш мумкин. Моддий нуқтанинг тўла энергияси шаклда кўрсатилган (31- *б* расм) E қийматга эга бўлса, у x_1 ва x_2 нуқталар орасида ёки x_3 дан чексизликкача бўлган оралиқда ҳаракатланиши мумкин. Моддий нуқта $x < x_1$ ва $x_2 < x < x_3$ соҳаларга кира олмайди, чунки унинг потенциал энергияси тўла энергиясидан катта бўлиши мумкин эмас (кинетик энергия манфий бўлолмайди). Шундай қилиб, $x_2 < x < x_3$ соҳа потенциал тўсиқ бўлиб, берилган E энергияга эга бўлган нуқта мазкур соҳага киролмайди. $x_1 < x < x_2$ соҳа эса *потенциал ўра* деб аталади.

Агар моддий нуқта ўзининг ҳаракати давомида чексизликка кетиб қололмаса, унинг ҳаракати *финит ҳара-*

кат дейилади. Заррача ҳоҳлаганча узоқликка кетолса, ҳаракат *инфинит ҳаракат* дейилади. Шаклдан кўринадики, заррача потенциал ўрада финит ҳаракат қилади, $x < x_3$ соҳада эса унинг ҳаракати инфинит бўлади, яъни у хоҳлаганча узоқлашиши мумкин.

IV боб

МОДДИЙ НУҚТАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ДИНАМИКАСИ

20- §. Моддий нуқталар системасининг ҳаракати. Массалар маркази

Система таркибига кирувчи жисмларнинг ўзаро таъсир кучлари *ички кучлар* деб, система жисмларига унинг таркибига кирмайдиган жисмларнинг таъсирини эса *ташқи кучлар* деб аталади.

Агар системага ташқи кучлар таъсир қилмаса ёки уларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлса, уни *берк система* дейилади. Шуни айтиб ўтиш керакки, ташқи ва ички кучларни танлаб олиш тамомила ихтиёрий. Масалан, Ер билан Қуёшнинг ҳаракатини ўрганишда уларни бир бутун система деб қараш мумкин, у ҳолда уларнинг ўзаро тортишиши ички кучлар ҳисобланади. Аммо фақат Ернинг ҳаракатини ҳам ўрганиш мумкин. Бунда Ернинг Қуёшга томон тортилиши ташқи куч ҳисобланади.

Моддий нуқталар системаси таркибига кирувчи ҳар бир нуқта, умуман олганда, ички ҳамда ташқи кучлар таъсирида кўчиб, ўзининг ҳаракат ҳолатини у ёки бу тарзда ўзгартиради. Система ҳаракатини яхлитлигича ўрганиш учун унинг таркибига кирувчи ҳар бир моддий нуқта ҳаракатини ўрганиш зарур. Бунинг учун Ньютон қонунларидан фойдаланиб, ҳар бир нуқта ҳаракати тенгламаларини тузиш ва бу тенгламаларни ечиш мумкин. Лекин ички кучларни муайян функциялар орқали ифодалашнинг қийинлиги туфайли ёки система жуда кўп сонли моддий нуқталардан таркиб топгани сабабли масалани бу тарзда ечиш кўп ҳолларда анча мураккаб бўлади. Бир қатор масалаларни ечишда мазкур қийинчиликлардан қутулиш мумкин.

Системанинг тўла импульсини

$$\vec{p} = M \cdot \vec{V_c} \qquad (20.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$ — система массаси, (20.1) ифодадан кўринадики, система импульсини массаси система массаси M га тенг бўлган қандайдир моддий нуқта импульси билан алмаштириш мумкин экан. Мазкур моддий нуқта *системанинг массалар маркази* (ёки *инерция маркази*) дейилади. (20.1) формуладаги $\vec{V}_c$ катталик массалар марказининг тезлигини ифодалайди. Унинг координатгларини (20.1) ифодани вақт бўйича интеграллаб топиш мумкин:

$$X_c=\frac{\sum m_i\cdot x_i}{M},\quad Y_c=\frac{\sum m_i\ y_i}{M},\quad Z_c=\frac{\sum m_i\cdot z_i}{M}. \qquad (20.2)$$

У ҳолда система массалар марказининг радиус-вектори

$$\vec{r}_c=\vec{i}\cdot X_c+\vec{j}\cdot Y_c+\vec{k}\cdot Z_c=\frac{\sum m_i\cdot\vec{r}_i}{M} \qquad (20.3)$$

кўринишга эга бўлади. Бу ерда $\vec{r}_i$ — системага кирган моддий нуқталарнинг радиус- векторлари.

Шуни таъкидлаш зарурки, массалар маркази система таркибига кирувчи моддий нуқталардан бирортаси билан ҳам мос келмаслиги мумкин. Масалан, бир жинсли ҳалқанинг массалар маркази унинг геометрик маркази билан устма-уст тушади (яъни бўшлиққа мос келади).

Симметрия марказига эга бўлган бир жинсли жисмлар (шар, доиравий диск, ғилдирак ва ҳ. к.) нинг массалар маркази уларнинг симметрия маркази билан мос келади. Мураккаброқ ҳолларда эса массалар марказининг ўрнини (20.3) ифодага кўра интеграл ҳисоб усуллари билан топилади.

(20.1) ифодани динамиканинг II қонунига қўйиб, массалар маркази ҳаракатининг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$M\cdot\frac{d\vec{V}_c}{dt}=\vec{F}. \qquad (20.4)$$

Бундан кўринадики, системанинг массалар маркази массаси системанинг тўла массасига тенг бўлган ва ташқи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг куч таъсир қилаётган моддий нуқта сингари ҳаракат қилар экан.

Бир қатор мисоллар кўрайлик. Аравани тортиб кетаётган от аравани қандай куч билан олдинга тортса, арава ҳам ўшанча куч билан отни орқага тортади. От билан аравадан иборат бу система мазкур ички кучлар таъсирида ҳаракатга келмаган бўларди. Ҳамма гап шундаки, от аравани ерга таянган ҳолда тортади. Бундан кўринадики, отга Ер томонидан ташқи куч бўлган горизонтал йўналишдаги ишқаланиш кучи таъсир қилиб, бу куч системани ҳаракатга келтиради.

Яна бир мисол сифатида ҳавосиз фазода парабола бўйлаб ҳаракат қилаётган снарядни кўрайлик. Бунда системага фақат битта ташқи куч—оғирлик кучигина таъсир қилади. Агар учиб кетаётган снаряд портлаб, майда парчаларга бўлиниб кетса, бу парчалар ички кучлар таъсирида ҳар хил томонга учиб кетади. Лекин портлаш пайтида ҳосил бўлган парчалар ва газларнинг массалар маркази худди портлаш бўлмагандек, парабола кўринишидаги траектория бўйлаб ҳаракатини давом эттиради.

Агар моддий нуқталар системаси берк система бўлса, (яъни ташқи жисмлар билан таъсирлашмаса) ташқи кучлар ёки уларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F} = 0$ бўлиб, (20.4) тенгламалан

$$M \cdot \vec{V}_c = \text{const} \qquad (20.5)$$

эканлиги келиб чиқади. Яъни, берк системанинг массалар маркази тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади ёки нисбий тинчликда бўлади.

Бу фикрнинг тасдиғи сифатида ўйинчоқ поезд билан бажариладиган тажрибани кўриб чиқиш мумкин. Бунинг учун поездни ипга осиб, унинг механизмини ишга туширамиз. Бунда унинг ғилдиракчалари айланса ҳам, поезд ҳаракатга келмайди. Чунки ички кучлар системанинг массалар марказини жойидан қўзғатолмайди (унинг нолга тенг бўлган бошланғич тезлигини ўзгартиролмайди). Энди поездни тушириб, уни тутиб турилган горизонтал аравача устидаги рельсларга қўйсак, у ҳаракатга келади. Чунки энди система берк бўлмай қолди (поезд билан рельс орасида ташқи — ишқаланиш кучи вужудга келди). Шундан сўнг аравачани ҳам тутиб турмай, қўйиб юборилса, аравача поезд ҳаракатига қарама-қарши йўналишда ҳаракатга келади (бунда аравача билан поезддан иборат системанинг массалар маркази деярли қўзғалмайди).

Бир қатор ҳолларда системанинг массалар маркази унинг оғирлик маркази билан алмаштирилади. Лекин бунинг учун системадаги барча нуқталарнинг эркин тушиш тезланиши бир хил бўлиши зарур (яъни уларнинг оғирлик кучлари ўзаро параллел деб ҳисобланади).

Оғирлик маркази деганда барча параллел оғирлик кучларининг маркази тушунилади. Унинг координаталари:

$$X_{c'}=\frac{\sum\vec{P}_i\cdot x_i}{\sum\vec{P}_i},\quad Y_{c'}=\frac{\sum\vec{P}_i\cdot y_i}{\sum\vec{P}_i},\quad Z_{c'}=\frac{\sum\vec{P}_i\cdot z_i}{\sum\vec{P}_i},$$

бу ерда P_i —i — бўлакчанинг оғирлиги. Бу тенгликларнинг сурат ва махражини эркин тушиш тезланишига бўлсак, массалар марказининг координаталари келиб чиқади. Демак, массалар маркази билан оғирлик маркази устма-уст тушар экан. Лекин массалар маркази тушунчаси оғирлик маркази тушунчасига нисбатан анча кенг. Ҳақиқатан ҳам, баъзи ҳолларда система массалар марказига эга бўлсада, оғирлик марказига эга бўлмаслиги мумкин. Масалан, ўлчамлари Ернинг ўлчамларига яқин бўлган бирор жисм Ер яқинида жойлашган бўлсин. Бу ҳолда жисм бўлакларига таъсир қилаётган оғирлик кучлари ўзаро параллел бўлмайди, чунки уларнинг ҳаммаси Ернинг марказига томон йўналган. Шу сабабли таърифга кўра мазкур жисм оғирлик марказига эга бўлмайди.

Ер билан Ой, Қуёш билан Ердан иборат системалар ҳам масса марказига эга бўлса-да, оғирлик марказига эга эмас.

21- §. Импульснинг сақланиши қонуни

Ўзаро таъсирлашадиган жисмлардан иборат системага динамиканинг иккинчи ва учинчи қонунларини қўллаб, импульснинг сақланиш қонунини келтириб чиқариш мумкин.

Дастлаб ўзаро таъсирлашадиган иккита жисм, масалан ораларига сиқилган пружина ўрнаштирилган, горизонтал силлиқ сирт устида жойлашган иккита шарчадан иборат системани кўрайлик (иккала шарча бир-бирига ип билан боғлаб қўйилган). Шарчаларнинг мазкур сиртга ишқаланишини ҳисобга олмаса ҳам бўлади, деб фараз қилайлик. Шарчаларнинг массалари m_1 ва m_2, пружинанинг массаси нолга тенг бўлсин. Иккала шарча бир-бирига пружина орқали $\vec{F}_{12}$ ва $\vec{F}_{21}$ куч билан таъсир қилади. Ипни ёқиб юборилса, у узилиб, шарчалар қарама-қарши йўналишда ҳаракатланади. Динамиканинг учинчи қонунига кўра

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \qquad (21.1)$$

деб ёзиш мумкин. Динамиканинг иккинчи қонунига асосан эса

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12}, \quad m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21}$$

ифодаларга эга бўламиз. Буни (21.1) га қўямиз:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0,$$

ёки

$$m_1 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0,$$

бундан эса

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0,$$

ёки

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const} \qquad (21.2)$$

келиб чиқади. Бундан кўринадики, ташқи кучлар таъсир қилмагунча шарчалар импульсларининг йиғиндиси ўзгармас экан, яъни ўзаро таъсир кучлари иккита жисмдан иборат системанинг импульсини ўзгартирмайди.

Система n та жисмдан иборат, дейлик. Уларга таъсир қилаётган ташқи кучларни $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ деб, системага қарашли жисмларнинг ўзаро таъсир кучларини эса $\vec{f}_{ik}$ деб белгилайлик. Системадаги ҳар бир жисм учун динамиканинг иккинчи қонунини ёзайлик:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1n}) + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = (\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2n}) + \vec{F}_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (21.3)$$

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = (\vec{f}_{n1} + \vec{f}_{n2} + \ldots + \vec{f}_{n,n-1}) + \vec{F}_n.$$

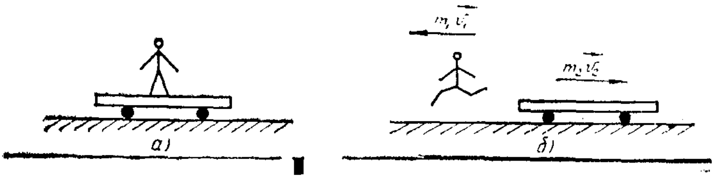
Динамиканинг учинчи қонунига асосан ҳар бир $\vec{f}_{ik}$ ички кучга $\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik}$ шартни қаноатлантирадиган $\vec{f}_{ki}$ куч мос келади. ($\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$, $\vec{f}_{23} = -\vec{f}_{32}$, $\vec{f}_{13} = -\vec{f}_{31}$, ... ва ҳ. к.) Шунинг учун (21.3) ифодаларни ҳадма-ҳад қўшиб, система жисмлари орасида таъсир қиладиган барча ички кучларнинг йиғиндиси нолга тенг эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{21.4}$$

ифодага эга бўламиз, яъни жисмлар системаси импульсидан вақт бўйича олинган ҳосила системадаги жисмларга таъсир қилаётган барча ташқи кучлар йиғиндисига тенг.

Берк система учун $\sum \vec{F}_i = 0$ бўлганидан, (21.4) ифода $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ кўринишга келади, бундан $\vec{p} = \text{const}$ эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, *берк системадаги жисмлар орасидаги ўзаро таъсир қандай бўлишидан қатъи назар, системанинг импульси ўзгармайди.*



32-расм.

Мазкур ифода *моддий нуқталар системаси импульсининг сақланиш қонунини* ифодалайди: моддий нуқталарнинг берк системасида қандай ўзгаришлар содир бўлишидан қатъи назар, система импульси ўзгармайди, лекин системадаги моддий нуқталар орасида импульсларнинг қайта тақсимланиши амалга ошиши мумкин.

Моддий нуқталар системаси импульсининг ўзгариши қонунини ифодаловчи (21.4) тенгламага асосланиб, бундай система ҳаракатини ўрганишда барча ички кучларни эътиборга олмасдан, қўйилган масалаларни ечишни бирмунча соддалаштириш мумкин.

Масалан, қўзғалмас аравача устида бола ҳаракатсиз турган бўлсин (32-*а* расм). Бунда аравача билан боладан иборат системанинг импульси нолга тенг. Системани берк система дейиш мумкинми? Унга ташқи кучлар (оғирлик кучлари ва аравача ғилдираклари билан пол орасидаги ишқаланиш кучлари) таъсир қилади. Кўриниб турибдики, умуман олганда система берк система эмас. Лекин аравачани рельслар устига ўрнатиб, махсус усуллар билан ишқаланиш кучларини анча камайтириш ва уларни ҳисобга олмаслик ҳам мумкин.

Вертикал равишда пастга йўналган оғирлик кучлари деформацияланган рельсларнинг реакция кучлари билан мувозанатлашади, шу сабабли уларнинг тенг таъсир этувчиси системага горизонтал йўналишда тезланиш беролмайди, яъни системанинг горизонтал йўналишдаги тезлигини ва импульсини ўзгартиролмайди. Шундай қилиб, мазкур системани маълум маънода берк система деб ҳисоблаш мумкин.

Энди бола $\vec{v}_1$ тезлик билан аравачадан сакраб тушди деб фараз қилайлик (32-*а* расм). Бунда ўзаро таъсирлашиш натижасида бола орқа томонга, аравача эса олдинга томон йўналган тезланиш олади. Ўзаро таъсир натижасида аравача муайян $\vec{v}_2$ тезлик олади.

Олинган $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ тезликларни динамика қонунлари ёрдамида топмоқчи бўлсак, бола билан аравача орасидаги ўзаро таъсир кучлари қандай ўзгараётганини ва улар қайси нуқталарга қўйилганини билишимиз зарур эди. Импульснинг сақланиш қонунидан фойдаланилганда эса ўзаро таъсир кучларини эътиборга олмасдан ҳам $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ тезликлар нисбатини ҳамда уларнинг йўналишини аниқлаш мумкин.

Бола аравача устида турганда система импульси нолга тенг бўлган. Бола аравачадан $\vec{v}_1$ тезлик билан сакраб тушгандан кейин ҳам система импульси нолга тенг бўлиши керак:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0.$$

Бундан

$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\cdot\vec{v}_1$$

эканлиги келиб чиқади, яъни бола билан аравачанинг олган тезликлари уларнинг массаларига тескари пропорционал бўлади. Минус ишораси эса бу тезликлар қарама-қарши томонга йўналганлигини кўрсатади.

Айтайлик, $\vec{v}_1$ тезлик билан югуриб кетаётган бола рупарадан $\vec{v}_2$ тезлик билан келаётган аравачага сакраб чиқиб, туриб қолсин. Бундан сўнг улар умумий v тезлик билан ҳаракатланади. Уларнинг умумий импульси ҳар иккаласининг аввалги импульслари йиғиндисига тенг бўлади:

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Импульснинг сақланиш қонунини текшириб кўриш ҳам мумкин. Доимий ток манбаидан таъминланадиган ғалтак горизонтал ҳолатда ипга осиб қўйилган бўлсин. Ғалтак ўқининг давомига ҳалқа шаклидаги керамик магнит осилган.

Ғалтакдан ток ўтганда ички итарилиш (ёки тортишиш) кучлари вужудга келиб, ғалтак билан магнит қарама-қарши йўналишда $\vec{p}_1$ ва $\vec{p}_2$ импульслар олади. Ғалтакни ток манбаидан ажратиб, ғалтак билан магнитни бир-бирига боғлаб қўяйлик. Ғалтакдан ток ўтказиб, системанинг олган импульси $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шундай бўлиши табиий, чунки бунда фақат ички кучлар таъсир қилиб, улар системанинг импульсини ўзгартиролмайди. Ғалтак билан магнитнинг олган импульслари эса сон жиҳатдан бир-бирига айнан тенг.

Жисмларнинг берк бўлмаган системаси учун $\sum \vec{F}_i \neq 0$, яъни ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолдан фарқли бўлиб, ташқи жисмлар билан таъсирлашиш натижасида системанинг импульси ўзгаради.

Берк бўлмаган система учун (21.4) вектор ифоданинг ўрнига учта тенглама ёзиш мумкин (бу тенгламаларга система импульси ва ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг координата ўқларига проекциялари киради):

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad \frac{dp_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad \frac{dp_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

Агар ташқи кучларнинг бирор координата ўқига, масалан OX ўқига проекциялари йиғиндиси нолга тенг, яъни

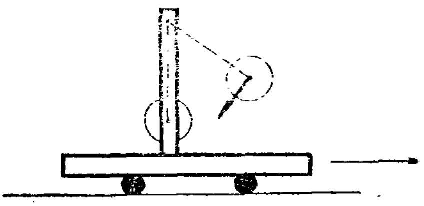
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

бўлса,

$$p_x = \text{const} \qquad (21.5)$$

ифодага эга бўламиз. Яъни система импульсининг мазкур ўққа проекцияси доимий бўлиб, системани бу йўналишда берк система деб ҳисоблаш мумкин.

(21.5) тенгламани *импульс проекциясининг сақланиш қонуни* деб юритилади. Бу қонунни горизонтал рельслар устида деярли ишқаланишсиз ҳаракатланадиган аравачага ўрнатилган оғир маятник ёрдамида намойиш қилиш мумкин (33- расм). Аравачани тутиб туриб, маятникни мувозанат ҳолатидан четлатилса ва бир пайтнинг ўзида маятник билан аравачани қўйиб юборилса, уларнинг ҳар иккаласи ҳам ҳаракатга келади. Аравачанинг тезлиги ҳамма вақт маятник оғирлик маркази тезлигининг горизонтал ташкил этувчисига қарама-қарши йўналган бўлади. Маятник энг катта оғишга эга бўлган, яъни тезлиги нолга тенг бўлган пайтларда аравача ҳам тўхтайди.



33-расм.

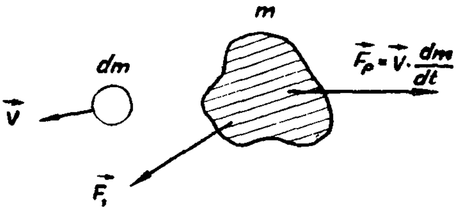
22- §. Ўзгарувчан массали жисм ҳаракати. Мешчерский тенгламаси

Баъзи жисмлар ҳаракати мобайнида уларнинг массалари узлуксиз равишда ўзгара боради. Масалан, ҳаракатланаётган томчининг массаси буғланиш ҳисобига камая бориши ёки аксинча, унинг сиртида буғларнинг конденсацияланиши ҳисобига орта бориши; ёниш маҳсулотларининг ажралиб чиқиши ҳисобига ракетанинг массаси ўзгариши; сув сепаётган машинанинг массаси камайиши; ип ўралаётган ғалтакнинг массаси орта бориши мумкин. Жисм массасининг ўзгариши унинг ҳаракатини ўрганишда муайян қийинчиликлар туғдиради.

Ўз массасининг бирор қисмини маълум йўналишда улоқтирганда жисм қарама-қарши йўналишда импульс олади. Бу кенг қўлланиладиган *реактив ҳаракат* принципидир.

Ўзгарувчан массали жисм ҳаракатининг асосий тенгламасини келтириб чиқарамиз. Жисмнинг ўлчамлари ва шаклини ҳисобга олмай, уни ўзгарувчан массали моддий нуқта деб қараймиз. Мисол тариқасида оддий ракетанинг ҳаракатини кўрайлик. Ракетанинг массаси узлуксиз ўзгаради деб ҳисоблаймиз (массаси сакраш билан ўзгарадиган кўп босқичли ракеталар ҳаракати мазкур курсда ўрганилмайди).

Муайян t пайтда ракетанинг массаси m, унинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан тезлиги $\vec{v}$ бўлсин (34-расм). Бирор dt вақт ичида ракетадан $-dm$ массали заррача $\vec{u}$ тезлик билан (қўзғалмас координаталар системасига нисбатан) ажралиб чиққан бўлсин. Минус ишораси ракетанинг массаси камайишини кўрсатади.



34-расм.

Ракетага таъсир қилаётган ташқи (оғирлик кучи ва муҳитнинг қаршилиги) кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ га тенг деб олайлик.

Ракета билан ажралган заррачадан иборат системанинг заррача ажралишигача (t пайтдаги) бўлган импульси

$$p_0 = mv$$

бўлиб, заррача ажралгандан сўнг ($t+dt$ пайтда) ги импульс қолган $m - dm$ массали, $\vec{v} + d\vec{v}$ тезликка эга бўлган жисм импульси билан $-dm$ массали, $\vec{u}$ тезликда ҳаракат қилаётган заррача импульслари йиғиндисига тенг:

$$\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - \vec{u}\cdot dm. \qquad (22.1)$$

Система импульсининг dt вақт оралиғидаги ўзгариши

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - \vec{u}\cdot dm - m\vec{v} = \vec{v}\cdot dm - \vec{u}\cdot dm + m\cdot d\vec{v}$$

бўлиб (иккинчи тартибли кичик миқдор бўлган $dm\cdot d\vec{v}$ катталикни ташлаб юбордик), у ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг импульсига тенг:

$$m\cdot d\vec{v}-\vec{u}\cdot dm+\vec{v}\cdot dm=\vec{F}\cdot dt. \qquad (22.2)$$

Бу ифодани dt га бўлиб, ўзгарувчан массали нуқта ҳаракатининг асосий тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+(\vec{u}-\vec{v})\cdot\frac{dm}{dt}\cdot \qquad (22.3)$$

Бу формула *Мешчерский тенгламаси* дейилади. Бу тенгламадаги $\vec{V}=\vec{u}-\vec{v}$ катталик ёниш маҳсулотларининг ракетага нисбатан тезлиги бўлиб, уни *нисбий тезлик* деб юритилади. У ҳолда (22.3) ифодани

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{V}\cdot\frac{dm}{dt} \qquad (22.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгламадан кўринадики, ракетанинг ҳаракати ташқи $\vec{F}$ кучлардан ташқари, тенгламанинг ўнг қисмидаги куч ўлчамлигига эга бўлган иккинчи ҳад билан аниқланадиган, чиқиб кетаётган газларнинг кўрсатаётган таъсирига ҳам боғлиқ экан. Бу катталик *реактив куч* деб аталади.

Реактив куч ҳамма вақт $\vec{V}$ тезликка қарама-қарши йўналган бўлади, шунинг учун ёниб чиқаётган газ оқими ҳаракатга тескари йўналишга эга бўлганда реактив куч таъсирида ракетанинг ҳаракати тезлашади. Газ оқими ҳаракат йўналишида бўлса, реактив куч ракета ҳаракатини секинлаштиради. Шу йўл билан ракетани тормозлаш мумкин. Газ оқими ҳаракат йўналиши билан муайян бурчак ҳосил қилганда эса реактив куч ракета тезлигини фақат сон жиҳатдангина эмас, балки йўналиш жиҳатдан ҳам ўзгартиради. Шу йўл билан ракета ҳаракати йўналишини бошқариш мумкин.

Учиш аппаратларида реактив кучни қўллаш ғояси 1881 йилда Н. И. Кибальчич томонидан илгари сурилган. К. Э. Циолковский 1903 йилда ўзининг ракета ҳаракати назарияси ва суюқ ёнилғили реактив двигатель назариясига бағишланган мақоласини эълон қилди.

Мешчерский тенгламасини ташқи кучлар таъсир қилмайдиган ракета ҳаракатига татбиқ қиламиз. $\vec{F}=0$ деб ҳисоблаб, чиқаётган газларнинг тезлиги ракета тезлигига қарама-қарши йўналишга эга эканлигини ҳисобга олсак,

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=-V\cdot\frac{dm}{dt}$$

кўринишдаги скаляр ифода ҳосил бўлади. Бу ифодадан

$$v = -V \int \frac{dm}{m} = -V \ln m + C$$

келиб чиқади. Интеграллаш доимийси C қийматини бошланғич шартлар ёрдамида топамиз. Агар бошланғич пайтда ракетанинг тезлиги $v = 0$ ва массаси m_0 бўлса, $C = V \cdot \ln m_0$ келиб чиқади. У ҳолда:

$$v = V \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \qquad (22.5)$$

ифода ҳосил бўлади.

Бу муносабат *Циолковский формуласи* деб аталади. Формуладан кўринадики, ракетанинг тезлиги ракета массаси қандай қонуният билан ўзгаришига боғлиқ эмас, у ракетанинг v_0 бошланғич тезлиги ($v_0 \neq O$ бўлса, у мазкур формулада алоҳида ҳад сифатида қатнашади), ажралиб чиқаётган заррачалар (газ) нинг ракетага нисбатан тезлиги ҳамда ракетанинг бошланғич ва охирги массалари нисбати билан белгиланади, яъни, ракетанинг тезлигини орттириш учун газларнинг чиқиш тезлигини орттириш ёки ракетанинг бошланғич массасини орттириш (кўпроқ ёнилғи запас қилиб олиш) керак.

Шундай қилиб, ракетанинг тезлигини орттириш учун унинг фойдали (ёнилғи тугагандан кейинги) массаси жуда ҳам кичик бўлиши керак (бошланғич массасига нисбатан). Масалан, v/V нисбат 2; 5 ва 10 га тенг бўлганда $\frac{m}{m_0}$ нисбат мос равишда 0,14; 7. 10^{-3} ва $5 \cdot 10^{-5}$ га тенг бўлиши керак.

Циолковский формуласи ракетага муайян тезлик бериш учун зарур бўладиган ёнилғи запасини ҳисоблаш имконини беради. Ракетага ҳар хил нисбий v/V тезлик бериш учун унинг массалари нисбати $\frac{m_0}{m}$ қанча бўлиши кераклигини 3- жадвалдан кўриш мумкин.

3- жадвал

$\frac{v}{V}$	$\frac{m_0}{m}$	$\frac{v}{V}$	$\frac{m_0}{m}$	$\frac{v}{V}$	$\frac{m_0}{m}$	$\frac{v}{V}$	$\frac{m^0}{m}$
1	2,72	4	54,6	7	1100	10	22000
2	7,39	5	148	8	2980	11	59900
3	20,1	6	403	9	8100	12	163000

Айтайлик, ракетага биринчи космик тезлик бериш зарур бўлсин ($v_1 \approx 8$ км/с). Газ оқимининг тезлиги $V = 1 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ бўлганда $\frac{m_0}{m} = 2980$. Бунда ракета массаси деярли тўлалигича ёнилғи массасига тенг бўлади. $V = 2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ бўлган ҳолда $\frac{m_0}{m} = 54,6$ бўлар эди. $V = 4$ км/с бўлганда эса $\frac{m_0}{m} \approx 7,4$ ва ҳ. к. Газ оқимининг нисбий тезлигини $V \simeq \sqrt{\frac{T}{M}}$ га ошириш мумкин, бу ерда T — газнинг абсолют температураси, M — газнинг моляр массаси. Газ оқимининг тезлиги $V = 3 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ бўлганда ракетага иккинчи космик тезликни бериш учун $\left(v_{II} = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}\right)$ $\frac{m_0}{m}$ нисбат тахминан 50 га тенг бўлиши, учинчи космик тезликни бериш учун $\left(v_{III} = 16,7 \frac{\text{км}}{\text{с}}\right)$ эса, тахминан 164 га тенг бўлиши керак. Бу шартни бажариш техник жиҳатдан анча мураккаб. Масалан, «Восток» космик кемасининг фойдали массаси 5 тоннага тенг. Бундан чиқадики, унга иккинчи космик тезлик бериш учун зарур бўлган бир босқичли ракетанинг бошланғич массаси 250 тонна бўлиши керак.

Циолковский кўп босқичли ракеталар ясаш ғоясини илгари суради. Агар ҳар бир босқичда ракетанинг олган тезлиги бир хил v бўлиб, босқичлар сони n га тенг бўлса, унинг охирги тезлиги $v' = n \cdot v$ бўлади. Айтайлик, ракета соплосидан чиқаётган газларнинг тезлиги $3 - 4 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ бўлсин. У ҳолда Ернинг сунъий йўлдошларини учириш учун уч босқичли, сайёралараро кемаларни учириш учун эса тўрт босқичли ракета ясаш кифоя.

Ракетадаги ҳамма юклар ҳам учиш охиригача фойдали бўлиб қолмайди. Масалан, ёнилғи баклари ёнилғи ёниб бўлгандан кейин фойдасизгина эмас, балки зарарли ҳам бўлиб қолади. Чунки ракетани бошқариш, уни янада тезлатишга халақит беради. Мазкур босқичга тааллуқли бўлган бошқа жиҳозлар ҳам кейинги босқичда зарарли бўлиб қолади. Шунинг учун ёнилғи ёниб бўлгач, ёнилғи баки ва ишлаб бўлган босқич жиҳозлари ажратиб қолдирилади.

Ёнилғи ёниши натижасида эришиш мумкин бўлган тезлик Циолковский формуласига кўра чекланган бўлганидан, космонавтиканинг бундан кейинги тараққиёти (масалан, бошқа юлдузларга томон учиш) ёнилғининг химиявий бўлмаган янги турларини ишлаб чиқишни талаб қилади.

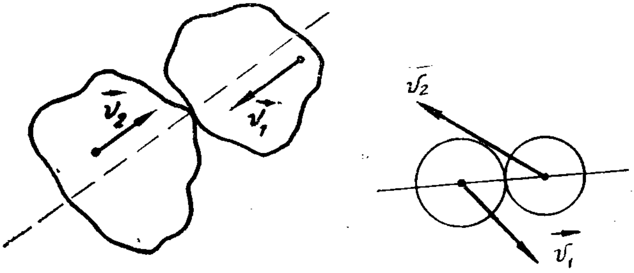
23- §. Эластик ва ноэластик тўқнашиш

Абсолют эластик ва ноэластик жисмларнинг тўқнашиши — импульс ва энергиянинг сақланиши қонунларини физик масалаларни ҳал қилишга қўллашга мисол бўла олади. Тўқнашиш деганда фазонинг анча кичик соҳасида жисмларнинг қисқа вақтли ўзаро таъсирлашиш жараёни тушунилади. Бу таърифга кўра, тўғридан-тўғри «тўқнашиш» маъносидаги ҳодисалар (атомларнинг ёки биллиард шарларининг тўқнашиши) дан ташқари бошқа ҳодисаларни ҳам, масалан, йўловчининг трамвайдан сакраб тушиши, тўпнинг тепилиши ва ҳ. к. ни ҳам тўқнашишга қўшиш мумкин. Тўқнашиш пайтида жисмларда шу қадар катта ички зўриқишлар вужудга келадики, уларга таъсир қилаётган ташқи кучларни ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Бу ҳол ўзаро тўқнашаётган жисмларга берк система деб қараш ва уларга импульс ҳамда энергиянинг сақланиш қонунларини қўллаш имконини беради.

Тўқнашиш пайтида жисмлар деформацияланади. Тўқнашишнинг моҳияти шундаки, тўқнашаётган жисмлар нисбий ҳаракатининг кинетик энергияси қисқа вақтга эластик деформация энергиясига айланади. Тўқнашиш вақтида жисмлар орасида энергия қайта тақсимланади. Кузатишлар шуни кўрсатадики, тўқнашишдан кейинги v' нисбий тезлик тўқнашишгача бўлган v нисбий тезликдан камроқ бўлади. Буни жисмларнинг идеал эластик эмаслиги, сиртларнинг идеал силлиқ эмаслиги билан тушунтириш мумкин. Нисбий ҳаракат тезлигининг тўқнашишдан кейинги ва тўқнашишгача бўлган нормал ташкил этувчилари нисбати *тикланиш коэффициенти* дейилади:

$$\varepsilon = \frac{v'_n}{v_n}.$$

Тўқнашишда қатнашаётган жисмларнинг сиртларига улар тегиб турган нуқта орқали ўтказилган умумий нормал *тўқнашиш чизиғи* дейилади (35- расмдаги пунктир



а) б)

35-расм.

чизиқ). Агар тўқнашишгача жисмлар тезликларининг векторлари тўқнашиш чизиғига параллел бўлса *тўғри тўқнашиш* (35-*а* расм), бошқа ҳолларда эса *қийшиқ тўқнашиш* бўлади (35-*б* расм). Тўқнашиш чизиғи жисмларнинг масса марказлари орқали ўтганда *марказий тўқнашиш* бўлади (35-*б* расм).

Тўқнашишдан сўнг жисмларнинг деформациялари тўласича йўқолса — *соф эластик тўқнашиш* юз беради. Бундай тўқнашишда $\varepsilon=1$ бўлади. Тўқнашишдан сўнг жисмларнинг деформациялари тўла сақланиб қолганда *соф ноэластик тўқнашиш* юз беради. Бундай тўқнашишда $\varepsilon=0$ бўлади.

Амалда ҳамма жисмлар учун $0<\varepsilon<1$ бўлади. Масалан, пўлат шарлар учун $\varepsilon\approx0{,}56$, фил суягидан тайёрланган шарлар учун $\varepsilon\approx0{,}89$, қўрғошин учун эса $\varepsilon\approx0$. Лекин, баъзи ҳолларда жисмларни катта аниқлик билан мутлоқ эластик ёки мутлоқ ноэластик жисм деб қараш мумкин. Одатда эластик материал ҳисобланган резина, фил суяги, пўлат, шиша ва бошқалардан тайёрланган жисмларнинг тўқнашиши соф эластик тўқнашишга яқин бўлади. Пластилин ёки қўрғошин шарчаларнинг тўқнашиши, кишининг юриб кетаётган аравачага чиқиб олиши, электроннинг мусбат ион томонидан тутиб қолиниши ва бошқа ўзаро таъсирлашишларни амалда соф ноэластик тўқнашиш деб қараш мумкин.

Соф эластик тўқнашишда ҳар иккала жисмда ҳам ҳеч қандай деформация қолмайди, жисмларнинг тўқнашишгача бўлган кинетик энергиялари тўқнашишдан сўнг яна тўласича кинетик энергияга айланади. Бунда импульснинг сақланиши қонуни ҳамда энергиянинг сақланиши қонуни бажарилади.

Жисмларнинг тўқнашишгача бўлган тезликларини $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ билан, тўқнашишдан кейинги тезликларини эса $\vec{v}_1'$ ва $\vec{v}_2'$ билан белгилаймиз. Масалани соддалаштириш учун фақат марказий тўқнашишларни кўриб чиқамиз. Шунинг учун катталикларнинг модуллари билан иш кўриш мумкин. Импульснинг ва энергиянинг сақланиши қонунларини

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2', \tag{23.1}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2} \tag{23.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу иккала тенгламани ечиб, жисмларнинг тўқнашишдан кейинги тезликларини аниқлаш мумкин:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2\,m_2v_2}{m_1 + m_2}, \tag{23.3}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2\,m_1v_1}{m_1 + m_2}. \tag{23.4}$$

Бир нечта хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз: 1) *иккинчи жисм ҳаракатсиз бўлган ҳол* ($v_2 = 0$):

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1, \tag{23 5}$$

$$v_2' = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1. \tag{23.6}$$

Ҳар иккала шарнинг массаси бир хил ($m_1 = m_2$) бўлганда

$$v_1' = 0, \quad v_2' = v_1,$$

яъни бунда урилган шар тўхтаб қолиб, иккинчи (ҳаракатсиз бўлган) шар биринчи шар тезлиги билан ҳаракатланади (иккала шарларнинг тезликлари алмашади).

Массалар бир хил бўлмаганда ($m_1 > m_2$) биринчи шар ҳаракат йўналишини ўзгартирмайди, бироқ тезлиги камаяди: $v_1' < v_1$, иккинчи шарнинг тўқнашишдан кейинги тезлиги биринчи шарникидан катта: $v_2' > v_1'$.

Биринчи шарнинг массаси кичикроқ ($m_1 < m_2$) бўлганда унинг ҳаракат йўналиши ўзгариб, орқага сапчийди. Иккинчи шар биринчи шар ҳаракати йўналишида ҳаракатга келади.

Ҳаракатсиз турган (иккинчи) жисмнинг массаси жуда катта ($m_2 \gg m_1$) бўлганда $v_1' \approx -v_1$ (яъни биринчи жисм девордан қайтгандай қайтади), $v_2' \approx \frac{2\,m_1v_1}{m_2} \approx 0$ (иккинчи жисм деярли жойидан қўзғалмайди). 2) *ҳар иккала жисм массалари бир хил бўлганда* ($m_1 = m_2$):

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1,$$

яъни массалари тенг бўлган жисмларнинг тезликлари алмашади.

Соф ноэластик тўқнашишда ҳар иккала жисм бирикиб, тўқнашишдан сўнг бир жисмдек ҳаракат қилади. Бу ҳол учун импульснинг сақланиши қонунини

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\cdot\vec{v}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ифодадан тўқнашишдан кейинги тезликни топамиз:

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (23.7)$$

Агар тўқнашишгача шарлар бир томонга қараб ҳаракатланган бўлса, тўқнашиш шарлардан бири иккинчисини қувиб етганда юз беради, у тўқнашишдан кейин ҳам ўша йўналишда ҳаракатланади. Шарлар, бир-бирига томон ҳаракатланганда тўқнашишгача қайси шарнинг импульси катта бўлса, шарлар тўқнашишдан кейин ўша шар ҳаракати йўналишида ҳаракатланишади.

Деформация натижасида кинетик энергия камаяди, бу энергия иссиқлик энергиясига ёки бошқа турдаги энергияларга айланади. Йўқолган энергияни жисмларнинг тўқнашишгача ва тўқнашишдан кейинги кинетик энергияларнинг айирмасидан топиш мумкин:

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\cdot v^2}{2}.$$

Бу энергия асосан жисмларни деформациялашга сарф бўлади, яъни у деформациялашда бажарилган ишга тенг: $\Delta E_{\text{к}} = A_{\text{деф}}$. Агар тўқнашишгача жисмлардан бири ҳаракатланмаётган (қўзғалмас) бўлса ($v_2 = 0$),

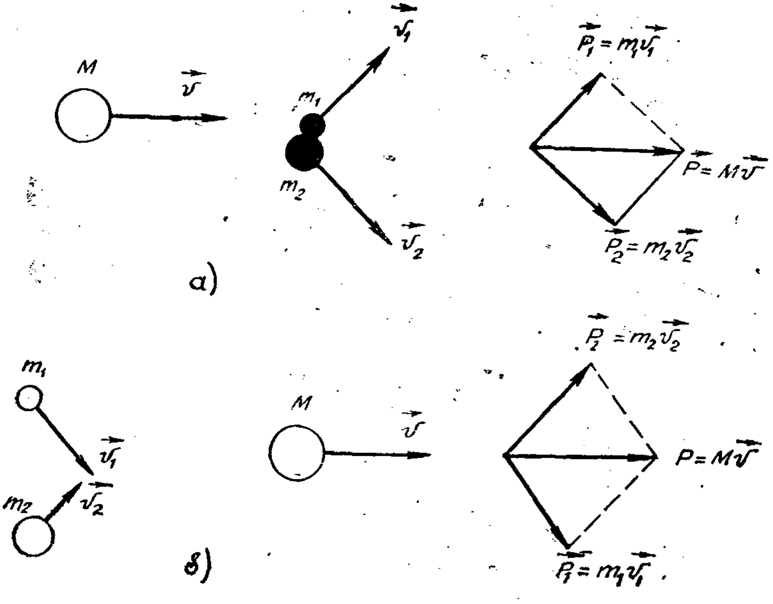
$$A_{\text{деф}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\cdot v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{\text{к}} \qquad (23.8)$$

бўлади. Бу ерда $E_{\text{к}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ — биринчи жисмнинг тўқнашишдан аввалги кинетик энергияси.

Тўқнашиш натижасида жисмларнинг шаклини ўзгартириш (болғалаш, штамплаш, майдалаш ва ҳ. к.) учун кинетик энергиянинг кўпроқ қисми деформациялаш учун сарфлангани маъқул. Бунинг учун (23.8) га асосан, қўзғалмас жисм (масалан, сандон) нинг массаси урилаётган жисм (болға) массасидан анча катта бўлиши керак.

Тўқнашиш натижасида жисмлардан бирини кўчириш зарур бўлганда (қозиқ ёки мих қоқиш) деформациялашда бажарилган иш иложи борича кичик, тўқнашишдан кейинги кинетик энергия эса каттароқ бўлгани маъқул. Бундай ҳолда (23.8) га асосан, урилаётган жисм (болға, босқон) массаси кўчирилиши зарур бўлган жисм (мих, қозиқ) массасидан анча катта бўлиши зарур.

Баъзан бирор жисмнинг портлаб, бўлакларга ажралиб кетишига оид, ёки икки жисм ўзаро ноэластик тўқнашиб, бир бутун жисм сифатида ҳаракат қилишига оид масалаларни ҳал қилиш керак бўлади. Мазкур ҳолларда импульснинг сақланиши қонунидан фойдаланиб, портлаш натижасида ҳосил бўлган бўлакларнинг импульсларини ёки тўқнашиш натижасида ҳосил бўлган янги жисм импульсини аниқласа бўлади. Мазкур ҳодисалар умумий ҳолда 36- *а* ва *б* расмларда кўрсатилган.



36-расм.

V боб

БУТУН ОЛАМ ТОРТИШИШ ҚОНУНИ

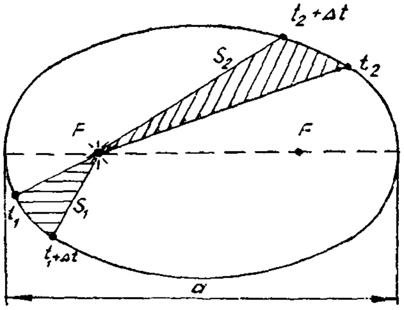
24- §. Кеплер қонунлари

Бутун олам тортишиш қонуни

Жуда қадим замонлардаёқ кишилар юз йиллар мобайнида ҳам юлдузларнинг бир-бирига нисбатан вазияти ўзгармаслигини, сайёралар эса юлдузлар орасида жуда ҳам мураккаб траекториялар бўйлаб ҳаракатланишини кузатишган. Сайёраларнинг сиртмоқсимон траекториялар бўйлаб ҳаракатланишини тушунтириш учун юнон олими Қ. Птолемей (эрамиздан аввалги II аср) Ер коинот марказида жойлашган, сайёралар эса марказлари Ер атрофидаги катта айланалар бўйлаб бир текис ҳаракатланадиган кичик айланалар (эпициклллар) бўйлаб ҳаракатланади деб фараз қилди. Мазкур қараш Птолемейнинг геоцентрик системаси деган ном олиб, католик черков ҳомийлигида қарийб бир ярим минг йил ҳукмронлик қилди.

XVI аср бошида польшалик астроном Н. Коперник (1473—1543) томонидан гелиоцентрик система асослаб берилди, астрономик кузатишлар Ер ва бошқа сайёраларнинг Қуёш атрофидаги ҳаракати ҳамда Ернинг суткалик айланишининг натижаси эканлиги исбот қилинди. Лекин узоқ вақтгача Коперникнинг назарияси ва кузатишларига жиддий эътибор берилмади.

XVII аср бошларига келиб кўпчилик олимлар оламнинг гелиоцентрик системаси тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилишди.



37-расм.

Даниялик астроном Т. Браггенинг (1546—1601) жуда аниқ кузатишлари натижаларини умумлаштириб, И. Кеплер (1571—1630) сайёраларнинг ҳаракатини ифодалайдиган учта қонун яратди:

1. Ҳар бир сайёра фокусларидан бирида Қуёш жойлашган эллипс бўйлаб ҳаракатланади.

2. Сайёранинг радиус-вектори (Қуёшга нисбатан) тенг вақт оралиқларида тенг юзаларни чизади (37-расм).

3. Эллипслар катта ярим ўқларининг кублари сайёралар айланиш даврларининг квадратига пропорционал.

Само жисмлари ҳаракатини ўрганиб ҳамда Кеплер қонунлари ва динамиканинг асосий қонунларига асосланиб, 1687 йилда И. Ньютон бутун олам тортишиш қонунини кашф қилди.

Масаланинг математик томонини соддалаштириб, мазкур қонуннинг келтириб чиқарилишини кўрайлик. Бунинг учун сайёраларнинг орбиталарини доиравий деб ҳисоблаймиз. Чунки кўпчилик сайёралар орбиталарининг эллиптикликлиги жуда кичик (айланадан жуда кам фарқ қилади). У ҳолда Кеплер қонунлари соддароқ кўринишга келади, яъни Қуёш доиравий орбиталарнинг марказида жойлашган бўлади. У ҳолда Кеплернинг иккинчи қонуни бўйича сайёралар доимий бурчак тезлик билан ҳаракатланади, учинчи қонунга кўра эса

$$R_i^3 = C_к \cdot T_i^2$$

ифода ҳосил бўлади, бу ерда R_i — i — сайёра орбитасининг радиуси, T_i — унинг айланиш даври, $C_к$ — ўзгармас катталик (Қуёш системасидаги сайёралар учун).

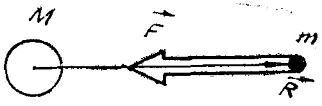
Кеплернинг иккинчи ва учинчи қонунини қўллаб, Ньютон сайёраларнинг марказга интилма тезланишларини аниқлади:

$$a_i = \omega_i^2 \cdot R_i = \frac{4\pi^2}{T_i^2} \cdot R_i = \frac{C'_к}{R_i^2}.$$

Бу формуладан янги $C'_к$ доимийни топиш мумкин.

Айнан ана шундай мулоҳазалар асосида Ньютон Юпитер учун (бу пайтга келиб Юпитер йўлдошларининг ҳаракати Галилей томонидан ўрганиб бўлинган эди) ҳамда Ер учун (Ойнинг ҳаракатини ўрганиш асосида) $C'_ю$ ва $C'_{Ер}$ доимийларни ҳисоблаб топди. Ньютон ҳар бир доимий тортаётган (марказдаги) жисм массасигагина боғлиқ, яъни

$$C'_{к} = G\cdot M_{к}, \quad C'_{ю} = G\cdot M_{ю},$$
$$C'_{Ер} = G\cdot M_{Ер}$$



38-расм.

деб фараз қилади, бу ерда G — универсал бўлган пропорционаллик коэффициенти. Мазкур коэффициент *тортишиш доимийси* ёки *гравитацион доимий* деб аталиб, энг асосий физик доимийлардан бири ҳисобланади.

Шундан сўнг Ньютон динамиканинг иккинчи қонунини қўллаб, ҳамма ҳолларда ҳам жисмларга марказий (тортаётган жисмга томон йўналган)

$$F = G\cdot\frac{Mm}{r^2} \qquad (24.1)$$

куч таъсир қилади, деган хулосага келади (M ва m — тортаётган ва тортилаётган жисм массалари, r — иккала жисм масса марказлари орасидаги масофа).

Радиус-вектор тортаётган жисм марказидан бошланади деб ҳисобланса, (24.1) формула вектор кўринишдаги ифодага ўтиши мумкин (38-расм):

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\cdot\vec{r}. \qquad (24.2)$$

(24.1) ва (24.2) формулалар *бутун олам тортишиш қонунини* ифодалаб, унга кўра *ҳар қандай икки моддий нуқта массаларининг кўпайтмасига тўғри пропорционал, ораларидаги масофанинг квадратига тескари пропорционал бўлган куч билан бир-бирига тортилиб туради:*

$$F = G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}. \qquad (24.3)$$

Бутун олам тортишиш қонуни моддий нуқталар учун ёки ўлчамлари ораларидаги масофага қараганда жуда кичик бўлган жисмлар учун яратилган. Жисмларнинг ўлчамлари уларнинг ораларидаги масофа билан таққосланадиган даражада бўлганда жисмларни кичик элементларга ажратиб, элементлар орасидаги тортишиш кучларини (24.3) ифода ёрдамида топиб, уларнинг вектор йиғиндиси олинади. У ҳолда ҳар иккала жисмнинг натижавий ўзаро тортишиш кучини вектор йиғинди бўлган

$$\vec{F}_{12} = G\sum_{i}\sum_{k}\frac{\Delta m_i \cdot \Delta m_k}{r_{ik}^3}\cdot\vec{r}_{ik} \qquad (24.4)$$

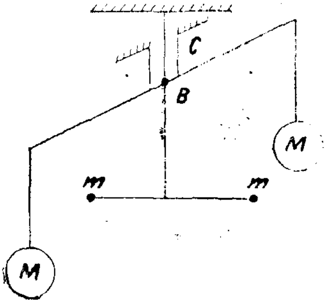
ифодадан топиш мумкин.

Ньютон (24.2) қонунни коинотдаги ҳамма жисмларга жорий қилди. У бир жинсли шар худди шунча массага эга бўлиб, мазкур шар марказида жойлашган моддий нуқта билан бир хил тортишиш кучи ҳосил қилишини исботлади.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, ўз ҳисобларини олиб борганда Ньютон бирорта ҳам само жисмининг массасини ҳамда тортишиш доимийси катталигини билмас эди.

Юқоридаги мулоҳазаларда сайёраларнинг бир-бирига тортишиши ҳисобга олинмаган эди. Бу кучлар Қуёшга тортилишга нисбатан жуда кичик, чунки Қуёшнинг массаси сайёраларнинг массаларидан анча катта (сайёраларнинг биргаликда олинган массасидан 750 марта ортиқ).

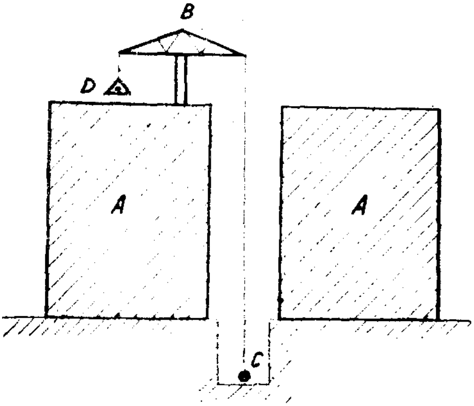
1798 йили инглиз физиги Г. Кавендиш (1731—1810) биринчи марта тажрибада бутун олам тортишиш қонунининг ердаги жисмлар учун тўғри эканлигини исбот қилди ва буралма тарози ёрдамида гравитацион доимийнинг сон қийматини аниқлади. 39- расмда Кавендиш тажрибасининг схемаси келтирилган. Массалари $m=729$ г дан бўлган иккита бир хил шар ўрнатилган енгил *A* шайин осонгина бураладиган ингичка эластик *B* ипга осилган. *C* шайинга эса *m* шарлар билан бир хил баландликда массалари $M=158$ кг дан бўлган бир хил иккита қўрғошин шарлар ўрнатилган. *C* шайинни вертикал ўқ атрофида буриб, *m* ва *M* шарлар орасидаги масофани ўзгартириш мумкин. *M* шарлар томонидан *m* шарларга қўйилган жуфт кучлар таъсирида *A* шайин горизонтал текисликда бурилиб, эластик кучлар моменти тортишиш кучлари моментини мувозанатлагунча *B* ипни буради. *A* шайиннинг бурилиш бурчагини ўлчаб, унга таъсир қилаётган айлантирувчи моментни ҳамда *m* ва *M* шарлар орасидаги ўзаро тортишиш кучларини ҳисоблаб топиш мумкин. Ўзаро тортишаётган шарларнинг масса-



39-расм.

ларини ҳамда улар орасидаги масофани билган ҳолда (24.3) формула ёрдамида тортишиш доимийсини аниқлаш мумкин бўлган.

Кавендиш тажрибаси турли хил вариантда жуда кўп марта такрорлаб кўрилган. G доимийнинг энг аниқ қиймати Жоли — Рихард (1898 й.) усули билан топилган (40- расм). Оғир қўрғошин A плита устига ўрнатилган B тарози шайинига C шарча ва у билан бир хил массали D юк осилган. Плита қўйилмай туриб улар бир-бирини мувозанатлаши керак, лекин улардан бири қўйилган қўрғошин плитага яқинроқ, иккинчиси эса ундан узоқроқда жойлашган (жуда катта чуқурликда). Шунинг учун тарози шайини оғиб, юк босиб кетади. Ана шу оғиш даражасига асосан юкнинг плитага тортилиш кучини ҳамда G доимийни ҳисоблаб топиш мумкин.



40-расм.

Гравитацион доимийнинг замонавий усуллар ёрдамида топилган қиймати $6{,}6745 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot с^2}$ га тенг, яъни ҳар бирининг массаси 1 кг дан бўлиб, бир-биридан 1 м масофада жсйлашган нуқтавий жисмлар бир-бирига $6{,}6747 \cdot 10^{-11}$ Н куч билан тортилади. Мазкур доимий қийматининг жуда ҳам кичиклиги массалар жуда катта бўлгандагина гравитацион тортишиш кучи сезиларли бўлишидан дарак беради.

Ер сиртида эркин тушиш тезланиши 9,81 м/с^2 га тенг, шунинг учун Ерни шар шаклида деб ҳисоблаб, G доимий билан Ер радиусини билган ҳолда, унинг массасини аниқлаш мумкин $\left(g = G\frac{M_E}{R^2_E}\right)$. Бундай ҳисоблашлар $M_E = 6\cdot10^{24}$ кг натижани беради. Бундан эса Ернинг ўртача зичлиги келиб чиқади ($\rho = 5500$ кг/м^3). Бу қиймат Ер сиртидаги қатламнинг ўлчаб топилган ўртача зичлигидан икки мартадан ортиқроқ катта бўлиб, у Ернинг ўртасида зич ядро мавжуд эканлигидан дарак беради.

Ернинг (Қуёшнинг тортиш майдонидаги) марказга интилма тезланишини $\left(a_E = \omega_E^2 \cdot R'_E = G\cdot\frac{M_K}{R'^2_E}\right)$ билган ҳолда (R'_E — Ер орбитасининг радиуси) Қуёшнинг массасини ҳам аниқлаш мумкин. $M_K = 2\cdot10^{30}$ кг $= 0,3\cdot10^6$ M_E. Айнан шундай усул билан сайёралар йўлдошларининг массаларини ҳам аниқласа бўлади.

Қатъий айтганда, Қуёш ва сайёралар уларнинг умумий массалар маркази атрофида айланади. Лекин Қуёшнинг массаси ихтиёрий олинган сайёра массасидан катта бўлганидан, системанинг массалар маркази деярли Қуёшнинг массалар марказида жойлашган бўлади. Шу сабабли юқоридаги мулоҳазаларда биз Қуёшни қўзғалмас деб ҳисобладик. 1846 йилда ўша пайтда энг катта узоқликда жойлашган деб ҳисобланадиган Уран сайёраси ҳаракатидаги оғишларни кузатиш асосида Адамс ва Леверье мазкур сайёрадан нарида ҳам бошқа сайёра бўлиши керак, деган хулосага келишди. Улар бутун олам тортишиш қонунига асосланиб, мазкур сайёранинг фазодаги ўрнини ҳам айтиб бердилар. Астрономлар айтилган жойда ҳақиқатан ҳам сайёрани кузатдилар, бу сайёрага Нептун номи берилди. Айнан шу йўл билан 1930 йилда яна ҳам узоқроқда жойлашган Плутон сайёраси борлиги башорат қилинди ва кузатилди.

25- §. Тортишиш майдони ва унинг кучланганлиги

Ҳар қандай жисм атрофида материянинг алоҳида кўриниши бўлган *тортишиш майдони* мавжуд. Бошқа жисмларнинг бор ёки йўқлигидан қатъи назар, тортишиш майдони бор бўлиб, у мазкур жисмларга куч таъсир қилиши билан намоён бўлади. Бу фикр суперпозиция принципига асосланади: бир неча моддий жисмларнинг бирор бошқа жисмга кўрсатаётган тортишиш кучи алоҳида жисмлар майдонлари томонидан таъсир қилаётган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Майдоннинг бирор нуқтасига кичик «синаш жисми» ни, яъни муайян m массали моддий нуқтани жойлаштириб, унга таъсир қилаётган $\vec{F}$ кучни ўлчаб, майдоннинг мазкур нуқтасини *майдоннинг кучланганлиги* деб аталадиган

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m} \tag{25.1}$$

вектор катталик билан характерлаш мумкин. Бундан кўринадики, *кучланганлик майдоннинг муайян нуқтасидаги бирлик массага таъсир қиладиган кучга тенг* экан. Шундай қилиб, $\vec{g}$ тезланиш Ер торгиш майдонининг кучланганлигини ифодалайди.

Нуқтавий M масса майдонининг $\vec{r}$ масофадаги кучланганлиги

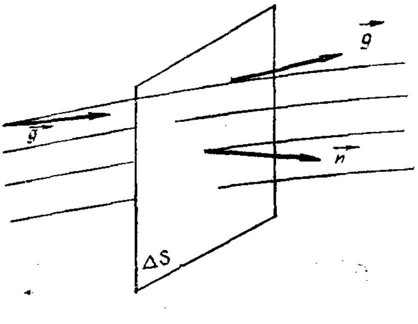
$$\vec{g}=-G\cdot\frac{M}{r^3}\cdot\vec{r} \tag{25.2}$$

га тенг бўлади, яъни M массали моддий нуқта тортишиш майдонининг кучланганлиги фақат майдон муайян нуқтасининг координаталаригагина боғлиқ. Моддий нуқта кучланганлигининг сон қиймати

$$g=-G\cdot\frac{M}{r^2} \tag{25.2'}$$

ифодадан топилади.

Тортишиш майдони кучланганлиги тушунчасидан фойдаланиб, мазкур майдонни график усулда кучланганлик чизиқлари ёрдамида тасвирлаш мумкин. Ҳар бир нуқтасида кучланганлик вектори уринма бўйлаб йўналган чизиқ *кучланганлик чизиғи* (куч чизиғи) деб аталади (41-расм). Ҳар бир нуқтадаги кучланганлик векторининг йўналиши кучланганлик чизиғи йўналиши билан мос келади деб қабул қилинган. Майдон кучланганлиги ҳар бир нуқтада биргина йўналишга эга бўлгани сабабли, кучланганлик чизиқларининг бир-бири билан кесишиши мумкин эмас. Кучлан-



41-расм.

ганлик чизиқлари ёрдамида кучланганлик векторининг йўналишинигина эмас, балки унинг сон қийматини ҳам ифодалаш мумкин. Бунинг учун кучланганлик чизиқларини шундай ўтказиладики, уларга перпендикуляр бўлган сирт юзасини кесиб ўтаётган чизиқлар сони мазкур жойдаги кучланганликнинг қийматига пропорционал бўлади. Шунинг учун майдоннинг кучланганлик камроқ бўлган жойларида кучланганлик чизиқлари сийракроқ, кучланганлик каттароқ бўлган жойларда эса зичроқ ўтказилади.

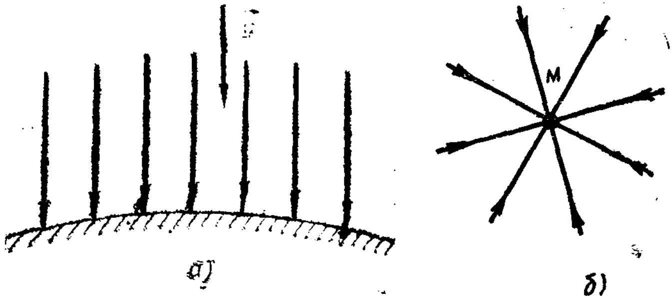
Жуда кичик бўлган ΔS юзани унга нормал йўналган ΔN та кучланганлик чизиғи кесиб ўтаётган бўлсин (41-расм). У ҳолда майдон кучланганлигининг сон қиймати

$$g = \frac{\Delta N}{\Delta S} \qquad (25.3)$$

муносабатдан топилади.

Майдоннинг бирор соҳасида унинг кучланганлиги амалда ўзгармас бўлса, мазкур соҳа доирасидаги майдон *бир жинсли майдон* деб аталади. Масалан, Ер сирти яқинида оғирлик кучи деярли ўзгармас бўлади, шунинг учун Ер сирти яқинидаги тортиш майдонини бир жинсли деб ҳисоблаш мумкин. Бир жинсли майдоннинг кучланганлик чизиқлари кучланганлик векторига параллел бўлиб, бир-биридан бир хил масофаларда жойлашган тўғри чизиқлардан иборат бўлади (42-*а* расм).

М массали яккаланган моддий нуқта тортишиш майдонида ҳамма кучланганлик векторлари мазкур нуқта томон йўналган бўлади. Бундай майдонлар *марказий кучлар майдони* деб аталади. Бу ҳолда кучланганликнинг сон қиймати фақат моддий нуқтагача бўлган масофагагина боғлиқ бўлгани сабабли, мазкур майдон сферик симметрияга эга бўлади (42-*б* расм).



42-расм.

Бир нечта майдонларнинг қўшилишида натижавий майдоннинг кучланганлиги мазкур майдонлар кучланганликларининг вектор йиғиндисига тенг:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i. \qquad (25.4)$$

Мазкур қоида *майдонлар суперпозицияси (қўшилиши) принципи* деб ном олган. Масалан, Ернинг тортиш майдонида Қуёш, Ой ва Қуёш системасидаги сайёралар ҳосил қилган майдонлар қўшилади.

Элементар dS сирт катталиги ҳамда унга ўтказилган нормалнинг бирлик $\vec{n}$ вектори кўпайтмаси билан ифодаланадиган $d\vec{S}$ вектор билан майдон кучланганлигининг скаляр кўпайтмаси $dN = \vec{g} \cdot d\vec{S}$ *кучланганлик векторининг сирт элементи орқали оқими* дейилади. Кучланганлик векторининг чекли сирт орқали оқими

$$N = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} \qquad (25.5)$$

эса, (25.3) га асосан мазкур сиртни кесиб ўтаётган кучланганлик чизиқлари сонини ифодалайди.

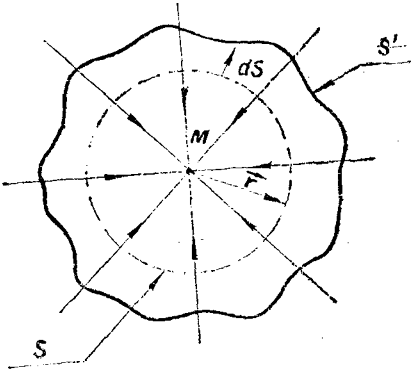
Майдонда муайян берк сирт билан чегараланган ҳажм элементи ажратиб олинган ҳолларда $d\vec{S}$ вектор ташқи нормаль бўйлаб йўналган деб олинади. Шунинг учун кучланганлик чизиқлари «ташқарига» йўналганда кучланганлик оқими мусбат бўлади.

M массали моддий нуқтани маркази шу нуқтада жойлашган r радиусли сферик сирт билан ўраб олайлик (43-расм). Бу ҳолда кучланганлик векторининг оқими

$$N = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \qquad (25.6)$$

га тенг, чунки сиртнинг ҳамма нуқталарида $\vec{g}$ ва $d\vec{S}$ векторлар қарама-қарши йўналган. Демак, мазкур кучланганлик векторининг сферик сирт орқали оқими моддий нуқтанинг M массасига пропорционал экан.

Энди мазкур моддий нуқтани ҳамда айтиб ўтилган сферик сиртни ўз ичига олган S' юзали ихтиёрий берк сиртни олайлик (43-расм). Шаклдан кўринадики, кучланганлик векторининг ҳар иккала сирт орқали оқими бир хил. Чунки S сиртни кесиб ўтаётган ҳамма куч чи-



43-расм.

зиқлари S' сиртни ҳам кесиб ўтади. Агар бирорта чизиқ сиртни бир неча марта кесиб ўтса, бу сон албатта тоқ сон бўлади ва (25.5) ифодадаги мусбат ва манфий ташкил этувчилар бир-бирини йўқотиб, натижада ҳар бир чизиқ мазкур ифодада фақат бир мартадан ҳисобга олинади.

Муайян берк сирт ичида бир неча жисм жойлашган бўлса, ҳар бир нуқтада уларнинг ҳосил қилаётган кучланганликлари вектор усулида қўшилади, кучланганликнинг сирт элементлари орқали оқимлари эса скаляр равишда қўшилади:

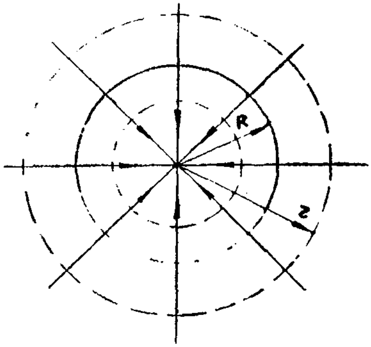
$$N = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum_k M_k. \qquad (25.7)$$

Мазкур ифода *Остроградский — Гаусс теоремаси* дейилади. Бу теоремага кўра, массалари M_i бўлган бир қанча жисмлар ҳосил қилган майдонда ихтиёрий берк S сирт ажратиб олинса, кучланганлик векторининг шу сирт орқали оқими сирт ичида жойлашган жисмлар массаларининг йиғиндисига пропорционал бўлади.

Бу теорема моддий жисмлар симметрик жойлашган ҳолда майдон кучланганлигини осонгина топиш имконини беради. Масалан, бир жинсли шар ташқи фазода унинг марказида жойлашган моддий нуқта билан бир хил майдон ҳосил қилади. Буни майдоннинг симметрик жойлашганлиги асосида келтириб чиқариш мумкин.

Массаси M бўлган R радиусли бир жинсли шар (44-расм) майдонининг кучланганлигини топайлик. Шар ичида унинг марказидан r_1 масофада жойлашган ихтиёрий нуқтани танлаб олиб, у орқали сферик S_1 сирт ўтказамиз. Мазкур сирт учун Остроградский — Гаусс теоремасини қўллаб,

$$N = \int_{S_1} \vec{g}_1 \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_1$$



44-расм.

ифодани ҳосил қиламиз, бу ерда M_1 — шарнинг радиуси r_1 бўлган сферик сирт ичидаги қисмининг массаси. Лекин,

$$\frac{M_1}{M} = \frac{r_1^3}{R^3},$$

мазкур сиртнинг ҳамма нуқталарида майдон кучланганлигининг қиймати бир хил (симметрия бўлгани сабабли) бўлгани ҳамда $\int_{S_1} dS = 4\pi r_1^2$ га тенг эканлигидан, мазкур шар ичидаги кучланганлик

$$\vec{g}_1 = -G\frac{M}{R^3}\cdot\vec{r}_1 \qquad (25.8)$$

га тенг бўлади.

$r_1 = R$ бўлганда

$$\vec{g}_0 = -GM\cdot\frac{1}{R^3}\cdot\vec{R} \qquad (25.8')$$

ҳосил бўлади, $r > R$ бўлганда эса,

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^3}\cdot\vec{r} \qquad (25.9)$$

ифодага эга бўламиз. Бу ифода моддий нуқта майдонининг (25.2) кучланганлиги билан мос келади.

26-§. Тортишиш майдонида бажарилган иш. Майдон потенциали

Тортишиш кучларининг бирор m массали моддий нуқтани M массали қўзғалмас моддий нуқта ҳосил қилган гравитацион майдонда кўчиришда бажарган ишини ҳисоблайлик.

m моддий нуқта қўзғалмас *M* жисмдан уларни бирлаштирувчи тўғри чизиқ бўйлаб узоқлашаётган ёки яқинлашаётган бўлсин. У ҳолда жуда кичик *dr* кўчишда тортишиш майдони

$$dA = Fdr = G\frac{Mm}{r^2}dr$$

миқдорда иш бажарилади. Моддий нуқталар орасидаги бошланғич масофа r_1 бўлиб, *m* моддий нуқта *M* дан r_2 масофагача узоқлашган бўлса, тортишиш кучларининг иши

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (26.1)$$

га тенг бўлади.

(26.1) ифодадан кўринадики, тортишиш кучлари консерватив (потенциал) кучлар бўлиб (18-§), жисмни тортишиш кучи майдонида кўчиришда бажарилган иш жисм потенциал энергиясининг камайишига тенг:

$$A_{1,2} = -\Delta E_п = E_{п_1} - E_{п_2}. \quad (26.2)$$

(26.1) ва (26.2) ларни тенглаштириб,

$$E_{п1} - E_{п_2} = -Gm\,M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r^2}\right) \quad (26.3)$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Потенциал энергиянинг ҳисоб боши сифатида ҳар иккала моддий нуқталарнинг улар бир-бири билан амалда таъсирлашмайдиган вазиятини танлаб оламиз. Шубҳасиз, бу вазият *m* массали нуқта *M* моддий нуқтадан чексиз узоқликда бўлган ҳолда тўғри келади. Бу ҳолда моддий нуқталар орасидаги масофа $r_2 \to \infty$ ва $\frac{1}{r_2} \to 0$ ҳамда $E_п \to 0$ бўлади. Ноль қиймат шу тарзда танлаб олинганда ўзаро таъсирлашаётган икки моддий нуқтанинг потенциал энергияси ҳамма вақт манфий бўлиб, улар орасидаги масофа ортиши билан катталашиб боради. У ҳолда *m* моддий нуқтанинг *M* нуқтадан *r* масофада бўлгандаги потенциал энергияси

$$E_п = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r} \quad (26.4)$$

га тенг бўлади. Бу формуладан кўринадики, иккита моддий нуқтанинг ўзаро тортишиш потенциал энергияси улар орасидаги масофага тескари пропорционал равишда ўзгарар экан.

Тортишиш майдонини M_1, M_2, ... M_n массали бир нечта моддий нуқталар ҳосил қилаётган бўлса, m массали моддий нуқтани чексизликка кўчиришда бажарилган иш унинг ҳар бир моддий нуқтага тортилишини енгиш учун бажарилган ишларнинг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади. Бундан кўринадики, m массали моддий нуқтанинг бир нечта моддий нуқталар ҳосил қилган тортишиш майдонидаги потенциал энергиясини

$$E_{\text{п}} = -Gm\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{r_i} \qquad (26.5)$$

ифодадан топиш мумкин, бу ерда r_i — мазкур моддий нуқтадан майдон ҳосил қилаётган моддий нуқталаргача бўлган масофалар.

(26.4) ва (26.5) ифодалардан m массали моддий нуқтанинг тортишиш майдонидаги потенциал энергияси мазкур нуқта массасига пропорционал экани келиб чиқади. Моддий нуқта потенциал энергиясининг унинг массасига нисбати билан ўлчанадиган

$$\varphi = \frac{E_{\text{п}}}{m} \qquad (26.6)$$

катталик эса мазкур m массага боғлиқ бўлмай, майдонни ҳосил қилаётган жисмларнинг массалари ва уларгача бўлган масофаларгагина боғлиқ бўлади. Мазкур φ катталик тортишиш майдонининг энергетик характеристикаси бўлиб, *тортишиш майдонининг потенциали* деб аталади. Шундай қилиб, тортишиш майдонининг потенциали скаляр катталик бўлиб, майдоннинг муайян нуқтасида жойлашган моддий нуқта потенциал энергиясининг унинг массасига нисбатига тенг. Майдон кучланганлиги каби, потенциал ҳам фақат координаталаргагина боғлиқ бўлади. Масалан, алоҳида M массали моддий нуқта майдонининг потенциали:

$$\varphi = -G\frac{M}{r} \qquad (26.7)$$

га тенг.

Тортишиш майдони потенциали тушунчасидан фойдаланиб, тортишиш кучлари томонидан m массали моддий нуқтани майдоннинг φ_1 потенциалли нуқтасидан φ_2 потенциалли нуқтасига кўчиришда бажарилган ишни ҳисобласак:

$$A_{1,2} = E_{\text{п}_1} - E_{\text{п}_2} = m\varphi_1 - m\varphi_2 = -m\cdot\Delta\varphi, \qquad (26.8)$$

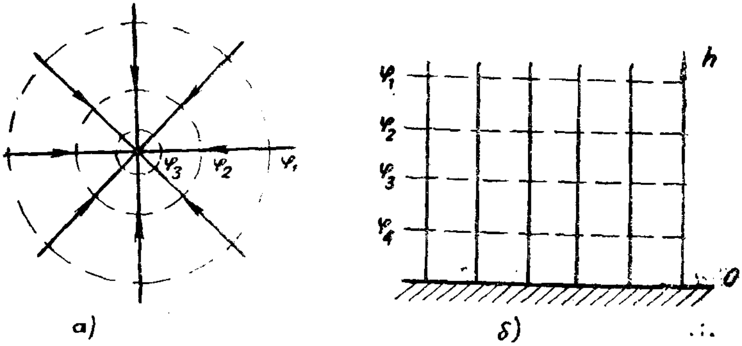
ифодага эга бўламиз, яъни тортишиш кучларининг моддий нуқтани гравитацион майдонда кўчиришда бажарган иши мазкур моддий нуқта массаси билан у кўчиб ўтган нуқталардаги майдон потенциаллари айирмасининг кўпайтмасига тенг.

(26.4) ва (26.5) формулаларни таққослаб

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \qquad (26.9)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бундан кўринадики, бир неча моддий нуқталар ҳосил қилган тортишиш майдонининг муайян нуқтасидаги потенциал алоҳида моддий нуқталар майдонларининг мазкур нуқтадаги потенциалларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади.

Тортишиш майдонида бир хил потенциалга эга бўлган нуқталардан иборат сиртни ўтказиш мумкин. Бундай сиртлар *эквипотенциал сиртлар* деб аталади. Моддий нуқта ҳосил қилган майдонда эквипотенциал сиртлар маркази мазкур нуқта билан устма-уст тушадиган сферик сиртлардан иборат бўлади (45-*а* расмдаги пунктир чизиқлар).

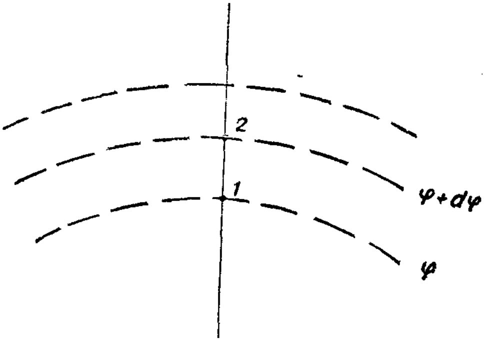


а) *б)*

45-расм.

Бир жинсли майдонда эквипотенциал сиртлар кучланганлик чизиқларига тик бўлган текисликлардан иборат бўлади (45-*б* расм).

Тортишиш майдонида жойлаштирилган жисмларг таъсир қилаётган куч кучланганлик чизиқларига ўтказилган уринма бўйлаб йўналганлиги ҳамда (26.8) формулага кўра тортишиш кучларининг эквипотенциал сир бўйлаб кўчиришда бажарган ишлари нолга тенглиг



46-расм.

сабабли, кучланганлик чизиқлари эквипотенциал сиртларни ҳамма вақт тўғри бурчак остида кесиб ўтади. Эквипотенциал сиртларни потенциаллари бир-биридан бир хил миқдорга фарқ қиладиган тарзда чизишга келишиб олинса, мазкур сиртлар майдон хоссаларини яққол ифодалаб беради.

Тортишиш майдонининг кучланганлиги билан потенциали ўзаро боғланган. Майдоннинг муайян *1* нуқтаси орқали эквипотенциал сирт ўтказилган бўлсин (46- расм). Унга ўтказилган нормал (кучланганлик чизиқлари) йўналишида чексиз кичик dr масофада яна бир эквипотенциал сирт ўтказайлик. Бирор m массали моддий нуқтани мазкур йўналишда *1* нуқтадан иккинчи эквипотенциал сиртдаги *2* нуқтага кўчиришда бажарилган иш

$$dA = Fdr = mgdr, \qquad dA = m(\varphi_1 - \varphi_2) = md\varphi$$

га тенг бўлади. Бу тенглемаларни таққослаб,

$$g = -\frac{d\varphi}{dr} \tag{26.10}$$

ифодани ҳосил қиламиз.

$\frac{d\varphi}{dr}$ катталик потенциалнинг эквипотенциал сиртга ўтказилган нормал йўналишидаги ўзгариш тезлигини характерлаб, потенциал градиентига тенг. 18-§ да киритилган градиент тушунчасидан фойдаланиб, (26.10) ифодани

$$\vec{g} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{26.11}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан кўринадики, эквипотенциал сиртлар бир-бирига қанчалик яқин жойлашган бўлса, кучланганлик қиймати шунчалик катта бўлар экан. Бунда кучланганлик вектори эквипотенциал сиртга ўтказилган нормал бўйлаб потенциалнинг камайиши томон йўналган бўлади.

(26.11) ифодани

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dn}\cdot\vec{n}_0$$

кўринишда ёзиш мумкин ($\vec{n}_0$ — нормал бўйича йўналган бирлик вектор). Сўнгги тенгликдан

$$\varphi = -\int \vec{g}\cdot d\vec{n} + C \qquad (26.12)$$

ифода келиб чиқади (бу ерда C доимийни танлаш билан потенциал ҳисоб бошини танлаш мумкин). Мазкур ифодадан фойдаланиб, M массали, радиуси R бўлган бир жинсли шар майдонининг потенциалини топиш мумкин. Шардан ташқарида $(r > R)$

$$\varphi = -G\frac{M}{r} \qquad (26.13)$$

эканлиги келиб чиқади (интеграллаш доимийси $C = 0$ деб олинган). Шарнинг сиртида

$$\varphi_0 = -\frac{GM}{R}, \qquad (26.14)$$

шарнинг ичида $(r < R)$ эса

$$\varphi = \int \frac{GM}{R^3}\cdot\vec{r}\,d\vec{r} = \frac{GM}{R^3}\cdot\frac{r^2}{2} + C_1$$

эканлиги келиб чиқади. Бу ердаги C_1 доимий энди ихтиёрий қийматни ололмайди, чунки у шар сиртининг ҳисоблаб топилган потенциалига боғлиқ бўлади. (26.14) ифодани ҳисобга олсак,

$$C_1 = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R}$$

ҳосил бўлади. У ҳолда шар ичидаги майдон потенциали

$$\varphi = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R} + \frac{GM}{2R^3}\cdot r^2 \qquad (26.15)$$

га тенг бўлади.

Юқоридаги мулоҳазалар ҳамда (25.2), (25.8), (25.8′), (25.9), (26.7) формулаларга асосан моддий нуқта майдонини тасвирлаш мумкин.

45-*а* расмда моддий нуқта гравитацион майдони тасвирланган.

27- §. Космик тезликлар

Қуёш системасидаги сайёралар ҳаракатини ўрганиш жисмларнинг марказий тортишиш майдонидаги ҳаракатига мисол бўла олади. Мазкур ҳолда Қуёш ҳамда муайян сайёрани моддий нуқта деб қараш мумкин. Бунда биз «икки жисм ҳақидаги масала» га дуч келамиз. 24- § даги мулоҳазаларга кўра, мазкур системани берк система деб ҳисоблаш мумкин, шунинг учун ўзаро тортишиш кучлари система массалар марказининг ҳаракат ҳолатини ўзгартиролмайди, яъни массалар маркази билан боғлиқ бўлган саноқ системаси инерциал саноқ системаси бўлади. Мазкур масалани айнан ана шу саноқ системасида ечиш қулай. Сунъий йўлдошларнинг ҳаракати ҳам ана шу усул билан ўрганилади.

Марказий жисмнинг M массаси иккинчи жисмнинг m массасидан анча катта бўлган ҳолларда системанинг массалар маркази амалда марказий жисм массалар маркази билан устма-уст тушиб, марказий жисм билан боғлиқ бўлган саноқ системасини инерциал деб ҳисоблаш мумкин.

Моддий нуқтанинг фазодаги бирор қўзғалмас 0 нуқтага нисбатан радиус-вектори $\vec{r}$ билан унинг мазкур нуқта билан боғлиқ системага нисбатан $\vec{p} = m\vec{v}$ импульсининг вектор кўпайтмаси

$$\vec{L} =]\vec{r}\,\vec{p}] \tag{27.1}$$

билан ифодаланадиган катталик моддий нуқтанинг 0 нуқтага нисбатан *импульс моменти* деб аталади, моддий нуқта радиус-вектори $\vec{r}$ билан унга таъсир қилаётган $\vec{F}$ кучнинг вектор кўпайтмаси

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{F}] \tag{27.2}$$

эса мазкур *кучнинг 0 нуқтага нисбатан моменти* дейилади. (27.1) ифодадан вақт бўйича ҳосила олсак,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{p}\right]$$

келиб чиқади. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ эканлигини ҳамда моддий нуқта тезлиги билан унинг импульси бир хил йўналишга эга эканлиги туфайли $[\vec{v}\ \vec{p}] = 0$ бўлишини ҳисобга олсак, (27.1) ва (27.2) ифодалардан

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (27.3)$$

келиб чиқади. Яъни, моддий нуқта импульс моментидан вақт бўйича олинган ҳосила унга таъсир қилаётган куч моментига тенг экан. Бундан кўринадики, ***моддий нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг моменти нолга тенг бўлган ҳолларда унинг импульс моменти вақт ўтиши билан ўзгармас экан.*** Бу фикр *импульс моментининг сақланиш қонуни* деб юритилади.

Марказий кучлар майдонида импульс моментининг сақланиш қонуни бажарилишини исбот қилиш мумкин. Мазкур майдонда ҳаракат қилаётган жисмга таъсир қилаётган куч ҳамма вақт марказий жисм томон йўналган бўлади. Шу сабабли бу кучнинг моменти нолга тенг ($\vec{M} = 0$) бўлади. У ҳолда (27.3) ифодадан

$$\vec{L} = \text{const},$$

яъни импульс моментининг вектори ўзгармаслиги, (27.1) ифодадан эса моддий нуқтанинг $\vec{r}$ радиус-вектори ва унинг $\vec{p}$ импульси ётган текислик фазода ўз вазиятини ўзгартирмаслиги келиб чиқади. Яъни марказий кучлар майдонида ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг траекторияси майдон маркази (марказий жисм) орқали ўтган текисликда ётадиган ясси эгри чизиқдан иборат бўлади. Моддий жисм траекториясининг кўриниши унинг бошланғич тезлигига боғлиқ бўлиб, у айлана, эллипс, парабола ёки гиперболадан иборат бўлиши мумкин.

Ер сиртидаги жисм доиравий орбита бўйлаб ҳаракатланиши учун унга Ер сиртига уринма йўналишда қандай тезлик бериш зарур эканлигини топайлик. Бунинг учун оғирлик (тортилиш) кучи тўласича жисмга g_0 га тенг миқдорда марказга интилма $\frac{v^2}{R} = g_0$ тезланиш ((8.6) формулага қаранг) бериб, (R — Ернинг радиуси) фақат динамик тарзда намоён бўладиган тезликни аниқлаш керак, бундан

$$v_1 = \sqrt{Rg_0} \qquad (27.4)$$

ифода келиб чиқади.

(27.4) формулага Ер сиртидаги эркин тушиш тезланиши ва Ер радиусининг сон қийматларини қўйиб, жисм Ернинг сунъий йўлдоши бўлиб қолиши учун унга $v_1 = 7{,}9\frac{\text{км}}{\text{с}}$ тезлик бериш зарур эканлигини топамиз. Мазкур тезлик *биринчи космик тезлик* дейилади. Ер атмосферасининг қаршилиги туфайли йўлдошни Ер сиртига яқин бўлган доиравий орбита бўйлаб учириш имконияти йўқ.

Муайян h баландликда эркин тушиш тезланиши

$$g_h = \frac{R^2}{(R+h)^2}\cdot g_0$$

га тенг бўлади. Мазкур баландликка мос келган доиравий орбитадаги марказга интилма тезланиш эса $\frac{v_1^2}{R+h}$ га тенг. Бу ифодаларни тенглаштириб, h баландликда доиравий орбита бўйлаб ҳаракатланаётган йўлдошнинг тезлигини топиш мумкин:

$$v_{1h} = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}\,. \qquad (27.5)$$

Бундан кўринадики, доиравий орбита қанчалик Ер сиртидан узоқ бўлса, сунъий йўлдошнинг тезлиги шунчалик кичик бўлади. Масалан, бу баландлик 250 км бўлганда $v_1 = 7{,}76$ км/с, 2000 км баландликда 6,9 км/с, 6400 км баландликда ($h = R$) $v_1 = 3{,}6$ км/с, 60000 км баландликда эса 1,02 км/с га тенг бўлади.

Сайёранинг *таъсир доираси* деган тушунча киритамиз. Жуда катта массали жисм (масалан, Қуёш) ва унинг атрофида айланаётган бошқа жисм (масалан, Ер) ни кўрайлик. Мазкур жисмлар тортишиш майдонида нисбатан кичик массали учинчи жисм (масалан, ракета) бор бўлсин. Мазкур жисмнинг ҳаракатини Қуёш билан боғлиқ бўлган ва Ер билан боғлиқ бўлган (лекин унинг суткалик айланишида қатнашмайдиган) саноқ системаларига нисбатан ўрганиш мумкин. У ҳолда Ер атрофидаги $\frac{f_{\text{Қ}}}{F_E}$ нисбат ($f_{\text{Қ}}$ — ракетанинг Ерга нисбатан ҳаракатига Қуёш томонидан таъсир кўрсатаётган куч, F_E — ракетанинг Ерга тортилиш кучи) $\frac{f_E}{F_{\text{Қ}}}$ нисбатдан кичик бўлган соҳани Ернинг Қуёшга нисбатан таъсир доираси дейилади. Ер таъсир доирасининг радиуси 930000 км га, Венера учун эса 62000 км га тенг, чунки Венера Қуёшга яқинроқ жойлашган.

Ер сиртидан v_0 тезлик билан тик юқорига отилган m массали жисмнинг Ерга тортилиш кучи

$$G\cdot\frac{mM}{R^2}=mg_0$$

га тенг (M ва R — Ернинг массаси ва радиуси, g_0 — Ер сиртидаги эркин тушиш тезланиши). Ихтиёрий h баландликда бу куч

$$F=G\frac{mM}{(R+h)^2}=mg_0\cdot\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

га тенг бўлади.

Тортишиш кучининг бажарган иши жисм кинетик энергиясининг камайишига тенг:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int\limits_R^r F\cdot dr=\int\limits_R^r mg\,\frac{R^2}{r^2}\,dr.$$

Жисм энг юқори нуқтага етганда $r_{max}=R+h_{max}$ ва $v=0$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$h_{max}=\frac{v_0^2}{2g_0-\frac{v_0^2}{R}}\qquad(27.6)$$

келиб чиқади.

Бошланғич тезлик кичик бўлганда $\frac{v_0^2}{R}\ll 2g_0$ бўлиб, Галилей томонидан аниқланган

$$h_{max}=\frac{v_0^2}{2g_0}\qquad(27.7)$$

формула келиб чиқади.

(27.6) формула махражи нолга тенг бўлганда жисмнинг кўтарилиш баландлиги h_{max} чексиз ортиб, жисм Ернинг тортиш майдонидан чиқиб кетади. Жисм бошланғич тезлигининг мазкур шарт бажариладиган қийматини топайлик:

$$2g_0-\frac{v_0^2}{R}=0,$$

бундан

$$v_{II}=\sqrt{2g_0R}\qquad(27.8)$$

келиб чиқади. Бу тезлик *иккинчи космик тезлик* деб аталади. $g_0 = 9,81$ м/с^2 ва $R = 6,37 \cdot 10^6$ м эканлигини ҳисобга олсак,

$$v_{II} = 11200 \text{ м/с}$$

эканлиги келиб чиқади. (27.4) ва (27.8) формулаларни таққослаб,

$$v_{II} = \sqrt{2}\, v_I \tag{27.9}$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Жисм тортишиш майдонида ҳаракат қилганда у ҳам потенциал, ҳам кинетик энергияга эга бўлади. Лекин фақат M ва m массали иккита жисмдан иборат берк системада m жисмнинг тўла энергияси ўзгармайди: унинг тезлиги ортган сари кинетик энергияси ортиб боради, потенциал энергияси эса фақат иккала жисмнинг ўзаро вазиятигагина боғлиқ бўлади (26- §):

$$E_п = -G \cdot \frac{mM}{r}.$$

Бу энергия жисм марказий жисмдан чексиз узоқлашганда нолга тенг бўлиб, улар энг яқин бўлганда ($r = R_1 + R_2$) ўзининг энг катта (абсолют қиймат жиҳатдан) қийматига эришади. Бундан кўринадики, жисмга унинг потенциал энергиясидан кичик, унга тенг ёки катта бўлган кинетик энергия бериш мумкин экан.

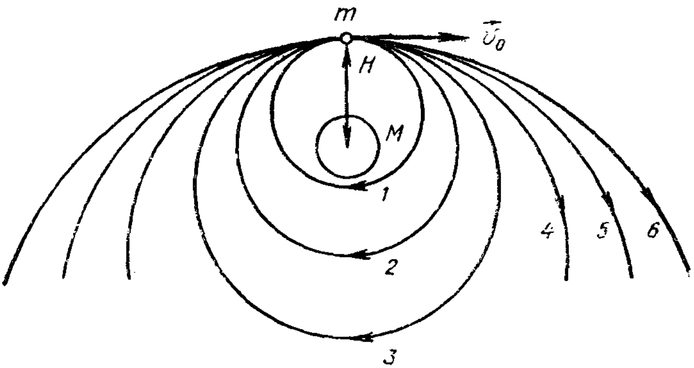
Муҳитнинг қаршилиги ҳисобга олинмайдиган ҳолларда механик энергиянинг сақланиш қонуни

$$\frac{mv^2}{2} - G\,\frac{mM}{r} = \text{const} \tag{27.10}$$

кўринишга келиб, мазкур доимий мусбат, манфий ёки нолга тенг бўлиши мумкин.

m массали жисм M жисм марказидан H масофада бўлсин. Унга ҳар иккала жисм марказлари орқали ўтган тўғри чизиққа тик йўналишда v_0 тезлик берайлик. Бу тезлик биринчи космик тезликка тенг бўлса, жисм доиравий орбита бўйлаб ҳаракат қила бошлайди (47- расм). Жисм тезлиги v_1 га тенг бўлмаган ҳолларда жисм доиравий орбита бўйлаб эмас, эллипс, парабола ёки гипербола бўйлаб ҳаракатланади.

Қуёшнинг тортиш майдонида ҳаракат қилаётган сайёралар ёки бошқа космик аппаратлар орбиталарининг Қуёшга энг яқин жойлашган нуқталари *перигелий*, энг кўп узоқлашган нуқтаси эса *афелий* деб аталади. Ер



47-расм.

тортиш майдонидаги бундай нуқталар *перигей* ва *апогей* деб юритилади. Космик кема ўз ҳаракатини перигейда ёки апогейда бошлаши мумкин. Лекин у ҳаракатни апогейда бошласа (47-расм, *1*), марказий жисм (Ер) орбитанинг узоқроқдаги фокусида жойлашиб, ракетанинг траекторияси атмосфера орқали ўтади ҳамда тезлиги камайиб, Ерга қайтиб тушиши мумкин.

Ракетанинг тезлиги берилган нуқтага мос келган биринчи космик тезликдан ортиқ бўлса, у ҳаракатни орбитанинг перигейида бошлайди (47-расм, *3*), бунда Ер орбитанинг яқиндаги фокусида жойлашади. Ракетанинг бошланғич тезлиги ортиб борганда орбитанинг апогейи ҳамда иккинчи фокуси бошланғич нуқтадан узоқлашиб бориб, эллиптик орбита чўзиқроқ бўлиб боради (47-расм, *4, 5, 6*).

Ракетанинг кинетик энергияси потенциал энергиясининг энг катта қийматидан кичик бўлганда у берк орбита (айлана ёки эллипс) бўйлаб ҳаракатланади. v_0— тезликнинг муайян қийматида мазкур энергиялар ўзаро тенг бўлади:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \left|G\frac{mM}{H}\right|. \qquad (27.11)$$

Бу формуладан топилган бошланғич тезлик (27.8) ифода билан мос келади:

$$v_{II} = \sqrt{2gH}. \qquad (27.12)$$

Ҳар иккала ҳолдаги жисмнинг бошланғич тезликлари бир-бирига перпендикуляр эди: биринчи ҳолда тик юқорига томон, иккинчи ҳолда эса — Ер сиртига параллел йўналган. Бунга сабаб шуки, $\vec{v}_0$ тезлик йўналиши қандай бўлишидан қатъи назар, у иккинчи космик тезликдан ортиқ бўлса, у Ернинг тортиш майдонини енгиб чиқиб кетади (унинг кинетик энергияси Ер тортиш кучига қарши иш бажариш учун етарли бўлади).

Жисмга иккинчи космик тезлик берилса, у траекториянинг бошланғич нуқтасига қайтиб келмайди, у парабола бўйлаб ҳаракатланиб, Ердан чексиз узоқлашиб кетади.

(27.9) ифодани ҳисобга олсак, Ер сиртидан ҳар хил баландликдаги нуқтадан отилган ракета парабола бўйлаб ҳаракатланиши учун унинг бошланғич тезлиги турлича бўлиши керак, деган хулосага келамиз. Масалан, 250 км баландликда бу тезлик 10,97 км/с, 2000 км баландликда 9,76 км/с, 6400 км баландликда 7,9 км/с, 60000 км баландликда эса 1,45 км/с бўлиши керак.

Космик аппаратга амалда айнан иккинчи космик тезликка тенг бўлган тезликни бериш жуда қийин. Бошланғич тезлик ортиб бориши билан йўлдош Ернинг тортиш доирасидан чиқиб, гипербола бўйлаб ҳаракатланади. Бундан кейин Қуёшнинг тортиш кучини ҳисобга олишга тўғри келади. Шунинг учун координаталар бошини Қуёшга кўчириб, у билан боғлиқ бўлган саноқ системасидан фойдаланамиз.

Юқорида биринчи ва иккинчи космик тезликларни ҳисоблашда атмосферанинг қаршилиги ҳисобга олинмаган эди. Ҳаво қаршилиги ҳисобга олинса, мазкур тезликлар анча катта бўлиши керак. Масалан, ракета парабола бўйлаб ҳаракатланиши учун унинг бошланғич тезлиги камида 13—14 км/с бўлиши керак экан. Ҳавонинг қаршилиги асосан Ер сиртидан 300 км гача бўлган баландликлардагина мавжуд. Шу сабабли сайёралараро ҳаракатланадиган космик кемани Ер сиртидан эмас, балки доиравий орбита бўйлаб ҳаракатланаётган сунъий йўлдошдан учирилгани маъқул. Бунда космик кема йўлдош билан бир хил бўлган доиравий ҳаракат тезлигига эга бўлгани сабабли, Ернинг таъсир доирасидан чиқариш учун унга мазкур баландликдаги биринчи ва иккинчи космик тезликлар айирмасига тенг бўлган тезликни бериш кифоя.

Ракетанинг Ер таъсир доирасидан чиқиш пайтидаги тезлиги Қуёш билан боғлиқ бўлган саноқ системасидаги парабола бўйлаб ҳаракатлантириш учун етарли бўлмаса, у Қуёш атрофидаги берк орбита (эллипс ёки айлана) бўйлаб ҳаракатланади (Венера ёнидан ўтиб, Галлей кометаси билан учрашиши керак бўлган «Вега» аппарати худди ана шундай тезлик билан учирилган); акс ҳолда эса ракета Қуёшга нисбатан парабола ёки гипербола бўйлаб ҳаракатланиб, секин-аста Қуёш системаси доирасидан чиқиб кетади.

Ракета Қуёш системасидан чиқиб кетиши учун унинг Ер юзидаги бошланғич тезлиги камида қанча бўлиши кераклигини топайлик. Бунинг учун

$$v' = \sqrt{2 \cdot \frac{GM_{\text{Қ}}}{r_{\text{ҚЕ}}}} \qquad (27.13)$$

формуладан фойдаланамиз, бу ерда $M_{\text{Қ}}$ — Қуёшнинг массаси, $r_{\text{ҚЕ}}$ — Ернинг Қуёш атрофидаги ҳаракат орбитаси радиусининг ўртача қиймати. Ҳисоблашлар натижасида $v' = 42{,}2$ км/с қийматга эга бўламиз. Ернинг ўз орбитасидаги ўртача ҳаракат тезлиги 29,8 км/с га тенг. Ракета тезлигининг у Ернинг таъсир доирасидан чиқиш пайтидаги вектори Ернинг орбита бўйлаб ҳаракати тезлиги билан бир хил йўналган бўлса, унинг мазкур нуқтадаги тезлигининг энг кичик қиймати $v'' = (42{,}2 - 29{,}8)$ км/с $= 12{,}4$ км/с бўлиши керак.

Ракетани Ер сиртида учириш пайтидаги унинг кинетик энергияси камида уни Ернинг таъсир доирасидан чиқариш учун зарур бўладиган энергия билан мазкур нуқтадан Қуёш атрофидаги парабола бўйлаб ҳаракатланиш учун зарур бўлган энергия йиғиндисига тенг бўлиши зарур:

$$\frac{1}{2} mv_{\text{III}}^2 = \frac{1}{2} mv_{\text{II}}^2 + \frac{1}{2} m(v'')^2.$$

Бу ифодадан

$$v_{\text{III}} = \sqrt{v_{\text{II}}^2 + (v'')^2} \qquad (27.14)$$

формула келиб чиқади. Бу тезлик *учинчи космик тезлик* деб аталади. Ҳисоблашлар натижасида $v_{\text{III}} = 16{,}7$ км/с эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бундай тезликка эга бўлган ракета фақат Ернинг тортиш кучинигина эмас, балки Қуёшнинг тортишини ҳам енгиб, Қуёш системаси доирасидан юлдузлараро фазога чиқиб кетади.

Ҳозирги пайтда Қуёшнинг сунъий йўлдошларини яратиш одатдаги ишга айланиб қолди. Космик кемани Қуёш системаси доирасидан ташқарига чиқариш ҳам катта қийинчилик туғдирмайди. Лекин юлдузлараро парвозга мўлжалланган космик кемаларни учиришни мавжуд ёнилғилар ёрдамида амалга ошириб бўлмайди. Чунки 22-§ да айтиб ўтилганидек, ёниш маҳсулотининг ракетага нисбатан тезлиги 5 км/с га яқин. Энг яқин юлдузгача бўлган масофа эса 4 ёруғлик йилига тенг (1 ёруғлик йили — ёруғликнинг 1 йилда босиб ўтган йўли, тахминан $9{,}5\cdot10^{15}$ м га яқин). Ракетанинг тезлиги $v=1{,}2\cdot10^6$ м/с га тенг бўлганда у мазкур юлдузга 1000 йилда етиб борган бўларди. У ҳолда Циолковский формуласига кўра, ракетанинг бошланғич массасининг унинг охирги массасига нисбати

$$\frac{m_0}{m}=e^{240}\doteq10^{100}$$

га тенг бўлиши керак. Яъни, учиш охирида ракетанинг массаси 1 кг бўлиб қолиши учун унинг бошланғич массаси Ернинг массасидан анча катта бўлиши керак.

Ҳозир бир қатор адабиётларда фотон ракеталари ҳақида сўз юритилмоқда. Мазкур ракеталарда фотонлар дастаси ёниш маҳсулотлари ролини ўйнайди. Лекин реактив двигателлар техникасининг ҳозирги тараққиёт даражасида бундай ракеталарни яратиш вазифасини ҳал қилиш мушкул.

28-§. Оғирлик кучи ва жисмнинг вазни. Вазнсизлик

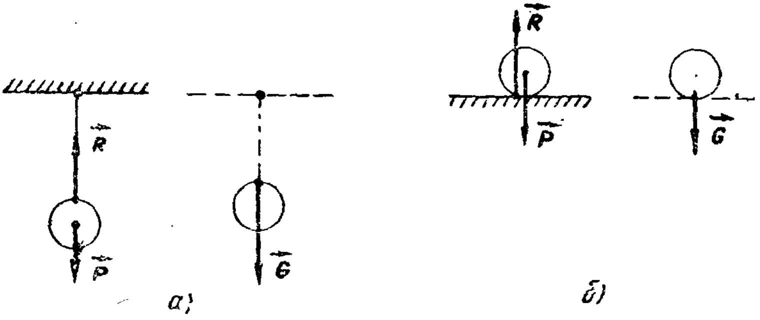
Ер сирти яқинида жойлашган барча жисмлар бир хил, эркин тушиш тезланиши $\vec{g}$ га тенг тезланиш билан тушади (25-§), яъни Ер билан боғланган саноқ системада ҳар қандай жисмга

$$\vec{P}=m\vec{g} \tag{28.1}$$

куч таъсир қилади. Бу куч *оғирлик кучи* деб юритилиб, тахминан мазкур жисмга Ер томонидан таъсир қиладиган тортиш кучига тенг. Ер билан боғланган саноқ системаси тўла маънода инерциал бўлмаганлиги туфайли оғирлик кучи билан тортилиш кучи орасида фарқ вужудга келади. Бу фарқ 0,36% дан ортмаганлиги сабабли, оғирлик кучини Ерга тортилиш кучига тенг деб олиш мумкин.

Жисмни бирор осмага осиб қўйилса (48-*а* расм) ёки бирор таянч устига қўйилса (48-*б* расм), у Ерга нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Бу ҳолда оғирлик кучи османинг ёки таянчнинг $\vec{R}$ реакция кучи билан мувозанатлашади. Ньютоннинг 3-қонунига кўра, мазкур жисм осмага ёки таянчга *жисмнинг вазни* деб ном олган $\vec{G}$ куч билан таъсир қилади. Шундай қилиб, *жисмнинг вазни* (баъзан жисмнинг оғирлиги деб ҳам юритилади) деганда *Ерга тортилиши туфайли жисм томонидан осмага ёки таянчга таъсир қилаётган куч* тушуниладн.

48-расмда кўрсатилган ҳол учун $\vec{P} = -\vec{R}$ муносабат ўринли бўлади. Ньютоннинг III қонунига кўра эса $\vec{G} = -\vec{R}$ (осмага ва жисмга қўйилган кучлар) деб ёзиш мумкин. Ҳар икки муносабатни таққослаб,



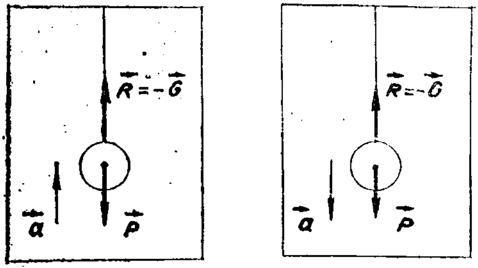
48-расм.

$$\vec{G} = \vec{P} = m\vec{g} \qquad (28.2)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, жисмнинг ҳаракатсиз ҳолатдаги $\vec{G}$ вазни билан $\vec{P}$ оғирлик кучи ўзаро тенг бўлади. Бироқ бу кучлар бошқа-бошқа жисмларга: жисмнинг вазни — таянчга (ёки осмага), оғирлик кучи эса жисмга қўйилган бўлади.

(28.2) муносабат фақат осма ёки таянч (албатта, жисм ҳам) Ерга нисбатан қўзғалмас бўлганда ёки тезланишсиз ҳаракатлангандагина ўринли бўлади. Осма маҳкамланган нуқта ёки таянч тезланиш билан ҳаракатланганда жисмнинг вазни оғирлик кучига тенг бўлмай қолади.

Осма $\vec{a}$ тезланиш билан тушаётган лифт кабинасининг шифтига маҳкамланган бўлсин (49-*а* расм). У ҳолда осмага осилган жисм ҳам $\vec{a}$ тезланиш билан ҳаракатланади, унинг ҳаракат тенгламаси эса



а) б)

49-расм.

$$m\vec{a} = \vec P + \vec R = \vec P - \vec G = m\vec g - \vec G$$

бўлиб, бундан

$$\vec G = \vec P - m\vec a = m(\vec g - \vec a), \qquad (28.3)$$

яъни жисмнинг вазни оғирлик кучидан кичик эканлиги келиб чиқади. Лифт тезланиш билан кўтарилганда эса жисм вазни оғирлик кучидан ортиб кетади (49, б- расм).

Лифтни тутиб турган трос узилиб кетиб, лифт $\vec g$ тезланиш билан туша бошласа, жисм осмага куч билан таъсир қилмай, унинг вазни нолга тенг бўлиб қолар эди. Мазкур ҳолат *вазнсизлик* деб аталади. Бу ҳолда османинг таранглик кучи ҳам нолга тенг бўлиб қолади, яъни жисм осмага (ёки таянчга) куч билан таъсир қилмайди. Вазнсизлик ҳолатида жисмга фақат оғирлик кучигина таъсир қилади, шу сабабли жисмга фақат оғирлик кучи $\vec g$ тезланиш беради. Жисмга бошқа ҳеч қандай куч таъсир қилмагани туфайли унинг зарралари бир хил тезланиш билан ҳаракатланиб, жисм деформацияси вужудга келмайди. Шу сабабли вазнсизлик юз берганда жисм деформацияланмаган ҳолатда бўлади.

Космик кема двигатели ишдан тўхтаб, Ер атрофида ҳаракат қилаётганда ҳам вазнсизлик ҳолати вужудга келади, чунки бунда космик кема ва унинг ичида жойлашган барча жисмлар бир хил $\vec g$ тезланишга эга бўлади, бошқа кучлар таъсир қилмайди. Бунда кема ичидаги жисмлар бир-бирига куч билан босмайди. Космонавтлар организмида ҳам ўзига хос физиологик ҳолат вужудга келади: одатдаги ички зўриқишлар тўлалигича йўқолади.

Космик кема двигатели ишга тушгач, вужудга келадиган реактив куч кеманинг ҳаракатини тезлатади ёки уни тормозлайди. Бунда *ўта юкланиш* ҳолати вужудга келиб, жисмларнинг деформацияси ва вазни орта боради. Масалан, кема стартидан сўнг унинг тезланиши $\vec{a}=-\vec{g}$ бўлганда (28.3) га кўра $G=2mg$ ифода ҳосил бўлади, яъни кемадаги жисмнинг вазни ва вужудга келадиган деформация (зўриқишлар ҳам) Ерда тинч турган жисмдагидан 2 марта ортиқ бўлади.

Жисмнинг вазни Ерда тинч турган ҳолдагига нисбатан неча марта катта эканлигини кўрсатадиган сон *ўта юкланиш коэффициенти* ёки ўта юкланиш деб аталади ва кўпинча $|\vec{g}|$ ларда ўлчанади. Бинобарин, вазнсизлик ҳолатида мазкур коэффициент нолга тенг бўлади.

Космик кема Ер сиртига тушаётганда ҳам тормозланиш туфайли ўта юкланиш ҳолати вужудга келади. Бунда унинг тезланиши юқорига йўналган бўлади. Масалан, $\vec{a}=-2\vec{g}$ бўлса, (28.3) га кўра ўта юкланиш $3g$ га тенг эканлиги келиб чиқади.

Космик кемадаги вазнсизлик ҳолати одатда физиологик жиҳатдан нохуш ҳиссиётни вужудга келтиради. Шу сабабли кемага маълум даражада айланма ҳаракат бериб нохуш ҳолатни камайтириш мумкин. Бунда вужудга келадиган марказдан қочирма куч ўзига хос «сунъий вазн» ни ҳосил қилади.

29- §. Инерцион ва гравитацион масса

Динамиканинг иккинчи қонунида иштирок этадиган масса жисмларнинг ҳар қандай табиатга эга бўлган кучлар таъсирида тезланиш олиш хусусиятини ифодалайди, яъни жисмлар инертлигининг ўлчови бўлиб хизмат қилади. Шунинг учун динамиканинг иккинчи қонунидаги масса *инерцион масса* деб юритилади.

Шу билан бирга масса жисмларнинг ўзаро тортишиш кучини ифодалайдиган қонунда ҳам қатнашади. Жисмга муайян тортишиш майдонида таъсир қиладиган куч унинг массасига пропорционал бўлади. Бутун олам тортишиш қонунида масса жисмларнинг тортишиш майдонларини ҳосил қилиш ва тортишиш майдонларидан таъсирланиш хусусиятининг ўлчови бўлиб хизмат қилади.

Шунинг учун мазкур масса *гравитацион масса* деб юритилади.

Инертлик ва тортишиш майдонларини ҳосил қилиш материя хусусиятларининг бир-биридан тубдан фарқ қиладиган тарзда намоён бўлишидир. Шу сабабли материянинг ҳар иккала хусусиятини ҳам битта физик катталик билан ифодалаш мумкин, деб айтиш қийин.

Жисмнинг инерциал (гелиоцентрик) саноқ системадаги эркин тушишини кўрайлик. Ер сирти яқинида ҳар қандай жисм Ерга

$$F = G\,\frac{m_{\text{г}}\,M_E}{R_E^2}$$

куч билан тортилади, бу ерда m_r ва M_E — мос равишда мазкур жисм ва Ернинг гравитацион массалари, R_E — Ернинг радиуси.

Иккинчи томондан, мазкур куч таъсирида жисм динамиканинг иккинчи қонунига асосан, F кучнинг жисмнинг инерцион $m_{\text{и}}$ массасига нисбатига тенг бўлган

$$a = \frac{F}{m_{\text{и}}} = G\,\frac{M_E}{R_E^2}\cdot\frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}} \qquad (29.1)$$

тезланиш олади.

Галилей ва унинг издошлари амалга оширган тажрибалар, турли хил жисмлар эркин тушаётганда бир хил $a = g$ тезланишга эга бўлишини кўрсатди. Ҳамма жисмлар учун $G\frac{M_E}{R_E^2}$ кўпайтувчи ҳам бир хил. Бундан, $\frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}}$ нисбат ҳам ҳамма жисмлар учун бир хил бўлиши керак, деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (29.1) ўрнига

$$g = B\,\frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}} = \text{const} \qquad (29.2)$$

ифода ҳосил бўлади: $\left(B = \frac{GM_E}{R_E^2}\right)$.

Шундай қилиб, ҳар қандай жисмнинг инерцион ва гравитацион массалари ўзаро пропорционал, деган хулосага келамиз. Бошқача қилиб айтганда, мазкур массаларнинг намоён бўлиши бир-биридан тубдан фарқ қилса-да, уларнинг сон қийматлари бир-бирига пропорционал бўлади.

Қатъий пропорционал боғланиш ($m_{\text{г}}=km_{\text{и}}$) бўлган ҳолда мазкур боғланиш коэффициентининг сон қиймати аҳамиятга эга бўлмай, уни бирга тенг ($k=1$) деб олиш мумкин. У ҳолда гравитацион масса инерцион массага тенг бўлади ($m_г = m_и = m$). Шунинг учун одатда умуман жисм массаси ҳақида сўз юритилади. Ньютон ўз тажрибаларида $\frac{m_г}{m_и} = 1 \pm 10^{-3}$ эканлигини топди. Кейинчалик тажрибалар аниқлиги анча ортиб, 1899 й. Этвеш $m_г = m_и$ тенгликнинг 10^{-8} гача аниқликда тўғри эканлигини тасдиқлади. Мазкур тенгликни Дикке $\sim 3 \cdot 10^{-11}$ аниқликкача, Брагинский ва Попов эса (1971 й.) 10^{-12} гача аниқликда текшириб кўришди. Бу йўналишдаги тадқиқотлар давом эттирилмоқда.

Юқорида баён қилинган тажрибаларга асосланиб, ҳар бир жисм аслида унинг ҳам инертлик, ҳам гравитацион хоссаларини белгилайдиган ягона массага эга деган хулосага келиш мумкин. Лекин, бу хулоса инертлик билан гравитация орасида фарқ йўқ деган маънони англатмайди. Бу эса Ньютон механикасининг асосий қоидаларини уни инертлик билан гравитация тенг кучли деган фикрни берадиган янги назарияни вужудга келтирадиган тарзда қайта кўриб чиқиш керак, деган хулосага олиб келади. Бундай механика А. Эйнштейн томонидан яратилди. 1916 йилда у тортишиш (умумий нисбийлик) назариясини эълон қилди. Бу назария учун жисмнинг инерцион ва гравитацион массаларининг тенглиги ҳал қилувчи аҳамиятга эга бўлиб, инерция ва тортилиш ҳодисалари бир хил табиатга эга деб ҳисобланади. Мазкур фикр *инерция ва тортилишнинг тенг кучлилиги принципи* деб ном олган. Эйнштейн назариясида тортишиш ҳодисаси фазонинг геометрик хусусиятларининг намоён бўлиши билан тушунтирилиб, фазонинг ўзи вақт билан узвий боғланган, деб ҳисобланади. Бошқача айтганда, тортишиш тўрт ўлчамли фазо — вақт геометрик хоссаларининг намоён бўлишидир.

VI боб

ҚАТТИҚ ЖИСМ ДИНАМИКАСИ

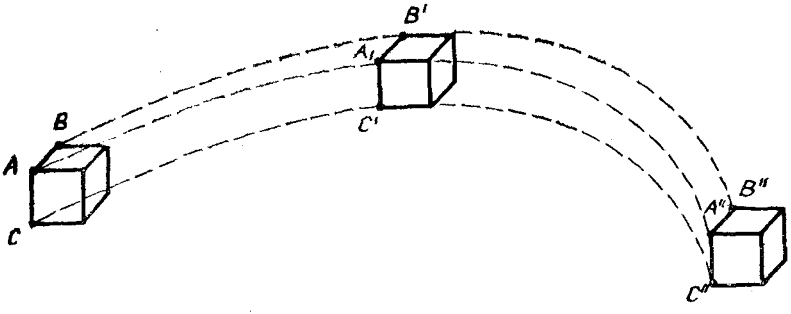
30- §. Қаттиқ жисм ҳаракати

Ҳозиргача ҳал қилган масалаларимизда ҳаракат қилаётган жисмларнинг шакл ва ўлчамлари катта аҳамиятга эга бўлмаганлигидан, биз уларни моддий нуқта деб қабул қилган эдик. Лекин бир қатор масалаларни ҳал қилишда ҳаракатни айнан иштирок этаётган жисмларнинг шакл ва ўлчамлари белгилаб берганидан, моддий нуқта тушунчасидан фойдаланиб бўлмайди. Жисм ўрганилаётган ҳаракат мобайнида олган деформациясини ҳисобга олмайдиган даражада бикр бўлса, унинг эластиклик хусусиятлари аҳамиятга эга бўлмайди. У ҳолда жисмни деформацияланмайдиган ёки *абсолют қаттиқ жисм* деб ҳисоблаш мумкин.

Қаттиқ жисм ҳаракатини ўрганишда унинг шакли ва ўлчамлари муҳим роль ўйнайди. Лекин қаттиқ жисмни фикран шундай кичик бўлакчаларга бўлиш мумкинки, унинг ҳаракати учун бу бўлакчаларнинг шакл ва ўлчамлари ҳеч қандай роль ўйнамайди. У ҳолда мазкур бўлакчаларни моддий нуқталар деб қараш мумкин. Шундай қилиб, қаттиқ жисм ҳаракати ҳақидаги масалани жуда кўп сонли моддий нуқталар ҳаракати ҳақидаги масалага келтириш мумкин (бундай масала IV бобда ўрганилган эди). Қаттиқ жисмни деформацияланмайди, деб ҳисоблаганимиз учун қаттиқ жисм ўрнига ўрганиладиган моддий нуқталар системасидаги алоҳида моддий нуқталар орасидаги масофаларни ўзгармайди, деб ҳисоблаш зарур. Қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганишда алоҳида бўлакчалар орасида вужудга келадиган ички кучларни ҳисобга олмаймиз, чунки улар қаттиқ жисмнинг (мазкур нуқталар системасининг) ҳаракатига таъсир қилмайди.

Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай ҳаракатини ҳаракатнинг асосий турлари бўлган илгариланма ва айланма ҳаракатга ажратиш мумкин.

Қаттиқ жисм билан боғлиқ бўлган ихтиёрий икки нуқтани туташтирувчи тўғри чизиқ ўз-ўзига параллел кўчса, қаттиқ жисм ҳаракати *илгариланма ҳаракат* деб аталади (50-расм). Бу ўринда «ихтиёрий икки нуқта»

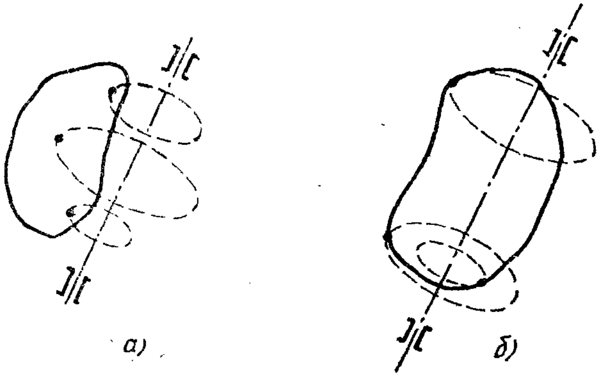


50-расм.

деган жумлага алоҳида эътибор бериш зарур. Масалан, автомашина ғилдирагида шундай икки нуқта танлаб олиш мумкинки, улар орқали ўтган тўғри чизиқ автомобиль юрган пайтда ўз-ўзига параллел кўчади (мазкур тўғри чизиқ ғилдирак ўқига параллел бўлганда). Лекин ғилдиракнинг ҳаракатини илгариланма ҳаракат деб бўлмайди.

Илгариланма ҳаракатга цилиндр ичидаги поршеннинг ҳаракати, темир йўл вагонининг йўлнинг тўғри чизиқли қисмидаги ҳаракати, «шайтон ғилдираги» аттракционидаги кабинанинг ҳаракати мисол бўла олади. Шуни айтиш кераккки, илгариланма ҳаракат тўғри чизиқли ва эгри чизиқли, текис ёки нотекис бўлиши мумкин.

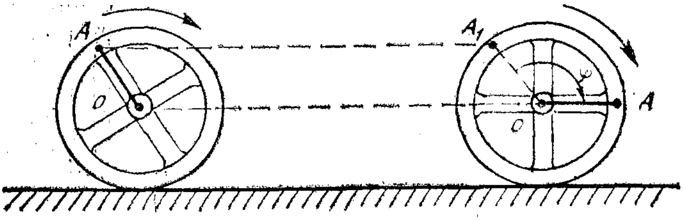
Илгариланма ҳаракат қилаётган жисмнинг барча нуқталари бир хил траекториялар бўйлаб ҳаракат қилиб, уларнинг тезликлари ва тезланишлари бир хил бўлади. Шунинг учун илгариланма ҳаракатни ўрганишда қаттиқ жисм нуқталаридан бирининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. Одатда жисм массалар марказининг ҳаракати ўрганилади.



51-расм.

Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг барча нуқталари марказлари бир тўғри чизиқ устида ётган айланалар бўйлаб ҳаракатланади. Мазкур тўғри чизиқ *айланиш ўқи* деб аталади. Айланиш ўқи айланаётган жисмдан ташқари (51- *а* расм) ёки уни кесиб ўтган (51- *б* расм) бўлиши мумкин.

Ишлаб турган двигатель валининг ҳаракати, венти-

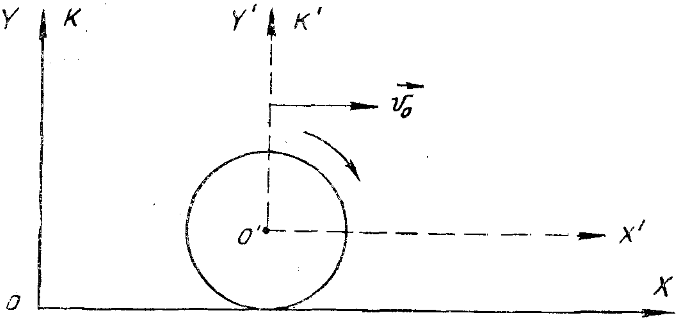


52-расм.

лятор паррагининг ҳаракати айланма ҳаракатга мисол бўла олади.

Умумий ҳолда қаттиқ жисм бир вақтнинг ўзида ҳам илгариланма, ҳам айланма ҳаракатда иштирок этиши мумкин. Масалан, автомобиль ғилдираги мураккаб ҳаракатда иштирок қилади: бунда ғилдирак ўз ўқи атрофида айланма ҳаракат қилиб, унинг ўқи илгариланма ҳаракат қилади (ғилдирак билан биргаликда). Ғилдиракнинг ҳаракатини (52-расм) илгариланма ҳаракатдаги AA' масофага кўчиш ҳамда ўз ўқи атрофида φ бурчакка бурилишдан иборат дейиш мумкин.

Мазкур ҳолни горизонтал текисликда ғилдираб бораётган цилиндр мисолида муфассалроқ кўрайлик (53-расм). Қўзғалмас K саноқ системасида цилиндр $\vec{v}_0$ тезлик билан илгариланма ҳаракат қилаётган ўқ атрофида айланма ҳаракат қилади. Бундай мураккаб ҳаракатларни ўрганишда оний айланиш ўқи тушунчаси киритилади. Муайян пайтда қўзғалмас саноқ системасига нисбатан тезликлари нолга тенг бўлган нуқталардан иборат тўғри



53-расм.

чизиқ жисмнинг *оний айланиш ўқи* дейилади. Оний айланиш ўқининг вазияти вақт ўтиши билан ўзгариб бориши мумкин. Мазкур мисолдаги цилиндрнинг оний айланиш ўқи цилиндр билан текисликнинг уриниш нуқталаридан иборат (M нуқта орқали чизма текислигига тик равишда ўтказилган тўғри чизиқ). Цилиндрнинг муайян пайтдаги ҳаракати оний айланиш ўқи атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат. Оний айланиш ўқи цилиндрнинг ва текисликнинг янгидан-янги нуқталари орқали ўтади.

Цилиндрнинг ўз ўқи атрофидаги айланма ҳаракати ω бурчак тезликка эга бўлсин. У ҳолда цилиндрнинг илгариланма ҳаракат тезлиги

$$v_0 = \omega R = v_{\text{мм}} \tag{30.1}$$

га тенг бўлади. Бу ерда R — цилиндр радиуси, $v_{\text{мм}}$ — цилиндр массалар марказининг тезлиги.

Қўзғалувчан K' системада цилиндр нуқталарининг тезлиги уларнинг траекториялари (айланалар) га уринма йўналишда бўлиб,

$$v' = \omega r$$

ифодадан топилади. Бу ерда r — муайян нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофа (54-*а* расм). Нуқтанинг қўзғалмас K системадаги тезлигини

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

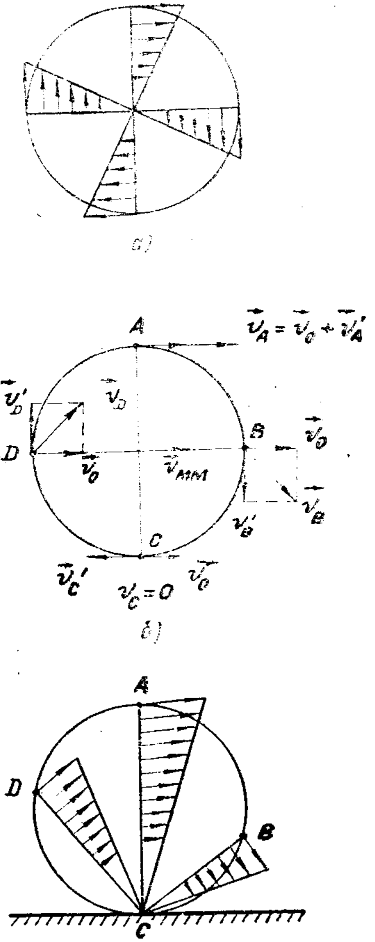
ифодадан топиш мумкин. Текисликка уриниб турган барча нуқталар учун $v_0 = 0$ тенгликка эга бўламиз (54-*б* расм). Шундай қилиб, айланишнинг оний ўқи цилиндрнинг текисликка уриниш чизиғидан иборат экан. Цилиндр нуқталарининг ихтиёрий пайтдаги тезлигини $v = \omega \cdot r'$ ифодадан топиш мумкин. Бу ерда r' — муайян нуқтадан оний айланиш ўқигача бўлган масофа. Бундан кўринадики, ҳаракатланаётган қаттиқ жисмдаги ихтиёрий нуқтанинг қўзғалмас саноқ системасига нисбатан тезлиги r_0' кесмага тик бўлиб, сон қиймати мазкур масофага пропорционал бўлади (54-*в* расм).

Моддий нуқталар системасининг ҳаракатини ифодалайдиган мустақил функциялар (ёки параметрлар) сони системанинг *эркинлик даражаси сони* дейилади.

Моддий нуқта учта эркинлик даражаси (координаталари) га эга, иккита мустақил моддий нуқтадан иборат системанинг эркинлик даража сони эса олтига тенг.

Мазкур моддий нуқталар ўзаро муайян узунликка эга бўлган стержень орқали боғланган бўлса, уларнинг 6 та координаталари энди мустақил бўлмайди, чунки улар орасидаги масофани ифодаловчи тенглама уларни бир-бирига боғлайди. Бу тенглама ёрдамида координаталардан бирини қолган 5 таси орқали ифодалаш мумкин. У ҳолда мустақил функциялар сони биттага камайиб, системанинг эркинлик даража сони 5 га тенг бўлади.

Қаттиқ жисмнинг фазодаги вазиятини белгилаш учун мазкур жисмнинг бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтаси (учбурчак) ўрнини бериш кифоя. Бу учала нуқтани 9 та координаталар орқали ифодаланиб, учала нуқта орасидаги ўзгармас масофаларни учта тенглама орқали бериш мумкин. Бундан кўринадики, эркин қаттиқ жисмнинг эркинлик даража сони 6 га тенг экан.



54-расм.

Қаттиқ жисм тўла эркин бўлмаса, унинг эркинлик даражаси сони 6 дан кам бўлади. Масалан, қаттиқ жисмнинг битта нуқтаси қўзғалмас қилиб маҳкамланган бўлса, 6 та мустақил координаталардан қўзғалмас нуқтага қарашли учтаси ўзгармас бўлади. Шу сабабли мазкур қаттиқ жисмнинг эркинлик даража сони 3 га тенг бўлади.

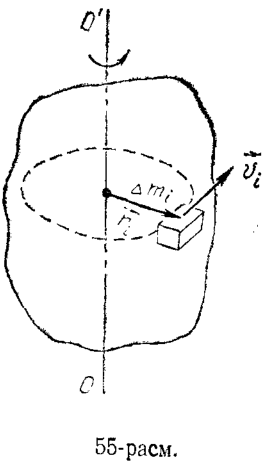
Қаттиқ жисм қўзғалмас ўққа ўрнатилган бўлиб, айланма ҳаракат қилса, айтиб ўтилган учбурчак учларидан иккитаси маҳкамланган бўлиб, фақат биттаси ҳаракатланади (яъни 3 та эркинлик даражаси). Лекин учбурчакнинг мазкур учи ҳам тўла эркин эмас: ундан учбурчакнинг қолган иккита учларигача бўлган масофалар берилган (иккита эркинлик даражаси камаяди). Яъни, қўзғалмас ўққа ўрнатилган қаттиқ жисмнинг эркинлик даража сони 1 га тенг экан.

Илгариланма ҳаракат пайтида қаттиқ жисмнинг барча нуқталари бир хил ҳаракат қилади. Шунинг учун унинг бирор нуқтаси (масалан, массалар марказининг) ҳаракатини ўрганиш кифоя. Бундан илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг эркинлик даража сони 3 га тенг эканлиги келиб чиқади.

Моддий нуқта муайян чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда унинг эркинлик даража сони бирга, бирор сирт бўйлаб ҳаракатланганда эса иккига тенг бўлади.

31- §. Айланаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси. Инерция моменти

Қўзғалмас OO' ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмни кўрайлик (55- расм). Уни фикран жуда кичик Δm_1, Δm_2, $\ldots$, Δm_n массали бўлакчаларга ажратамиз. Мазкур бўлакчалар мос равишда r_1, r_2, $\ldots$, r_n радиусли айланалар бўйлаб ҳар хил $\vec{v}_i$ тезликлар билан ҳаракатланади. Жисм абсолют қаттиқ бўлгани сабабли ҳамма бўлакчалар бир хил бурчак тезликка эга бўлади.



55-расм.

Айланаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергиясини жисм бўлакчалари кинетик энергияларининг йиғиндиси сифатида топиш мумкин:

$$E_k = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{\Delta m_n \cdot v_n^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \, v_i^2}{2} .$$

Бу ифодада $v_i = \omega \cdot r_i$ эканлигини ҳисобга олсак (9- §)

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2}{2} =$$

$$= \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2$$

келиб чиқади.

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2 \qquad (31.1)$$

катталик қаттиқ жисмнинг мазкур айланиш ўқига нисбатан *инерция моменти* дейилади. У ҳолда айланаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси учун

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (31.2)$$

ифода ҳосил бўлади. Бу ифодани илгариланма ҳаракат қилаётган жисм кинетик энергияси $\frac{mv^2}{2}$ билан таққослаб, инерция моменти қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатидаги инерция ўлчови деган хулосага келиш мумкин. (31.1) ифодадан кўринадики, қаттиқ жисмнинг инерция моменти унинг массаси қандай тақсимланганига, яъни айланиш ўқининг танлаб олинишига боғлиқ бўлади: айланиш ўқи ўзгарса, жисмнинг инерция моменти ҳам ўзгаради.

Инерция моментининг ўлчамлиги

$$[I] = [L^2M]$$

бўлиб, СИ системадаги бирлиги кг·м^2 га тенг.

Қаттиқ жисм маҳкамланмаган бўлиб, бирор мураккаб ҳаракатда иштирок этаётган бўлса, унинг кинетик энергияси

$$E_k = \sum \frac{\Delta m_i \cdot v_i'^2}{2} \qquad (31.3)$$

ифодадан топилади. Бу ерда v_i' — жисм i-бўлакчасининг қўзғалмас саноқ системасидаги тезлиги. Жисмнинг муайян пайтдаги ҳаракатини $\vec{v}_c$ тезликли илгариланма ҳаракат ва массалар маркази орқали ўтган ўқ атрофидаги айланма ҳаракатлар йиғиндисидан иборат деб ҳисоблаш мумкин ($\vec{v}_c$ — массалар марказининг тезлиги) бўлганидан:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_c + \vec{v}_i$$

деб ёзиш мумкин. Бу ерда $v_i = \omega r_i$ — жисм i-бўлакчасининг массалар маркази билан боғлиқ бўлган саноқ системасидаги тезлиги. Бу ифодани (31.3) формулага қўямиз:

$$E_k = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i \cdot v_c^2 + \frac{1}{2}\sum \Delta m_i \cdot v_i^2 + \sum \Delta m_i \cdot \vec{v}_c \cdot \vec{v}_i.$$

Бу ерда $\sum \Delta m_i = m$ (жисм массаси), $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ эканлигидан,

$$E_k = \frac{1}{2}\, m \cdot v_c^2 + \frac{1}{2}\, I \cdot \omega^2 + \frac{d}{dt}\left(\sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i\right) \cdot \vec{v}_c$$

ифода ҳосил бўлади. Бу ерда массалар маркази учун $\sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i = 0$ эканлигини ҳисобга олсак:

$$E_k = \frac{m \cdot v_c^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} \tag{31.4}$$

келиб чиқади, яъни мураккаб ҳаракат қилаётган жисмнинг кинетик энергияси унинг илгариланма ҳаракати энергияси билан массалар маркази орқали ўтган ўқ атрофидаги айланма ҳаракат энергиясининг йиғиндисига тенг.

(31.1) ифодадан кўринадики, инерция моменти аддитив катталик, яъни жисмнинг инерция моменти унинг бўлаклари (қисмлари) инерция моментларининг йиғиндисига тенг. Ҳаракат қилиши ёки тинч туришидан қатъи назар, жисм массага эга бўлганидек, қаттиқ жисм айланма ҳаракат қиладими ёки тинч турадими, бундан қатъи назар ҳар қандай ўққа нисбатан инерция моментига эга бўлади.

Жисм бирор бўлакчасининг массасини $\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i$ деб олсак (ρ_i — жисмнинг мазкур нуқтасидаги зичлиги), инерция моменти учун

$$I = \sum \rho_i \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i \tag{31.5}$$

ифода ҳосил бўлади. Жисмнинг зичлиги бир хил бўлганда

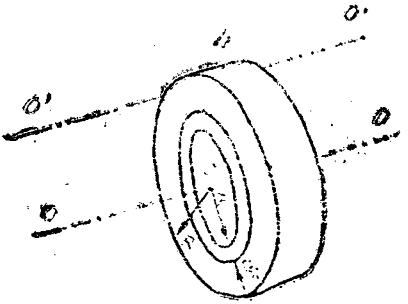
$$I = \rho \sum r_i^2 \cdot \Delta V_i \tag{31.6}$$

деб ёзиш мумкин.

(31.5) ва (31.6) муносабатлар тақрибий бўлиб, инерция моментини аниқроқ ҳисоблаш учун интеграллашга ўтиш зарур:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho\, r^2 dV. \tag{31.7}$$

32-§. Инерция моментларини ҳисоблаш



56-расм.

Мисол тариқасида бир жинсли дискнинг унинг текислигига тик бўлиб, массалар маркази орқали ўтган *OO* ўққа нисбатан инерция моментини топамиз (56-расм). Дискни қалинлиги *dr* бўлган ҳалқачаларга бўлиб чиқамиз. Ҳар бир ҳалқанинг нуқталари ўқдан *r* масофада жойлашган бўлиб, ҳалқанинг ҳажми

$$dV = h\cdot 2\pi r dr$$

бўлади. Бу ерда h — дискнинг қалинлиги. Диск бир жинсли бўлгани сабабли, (31.7) ифода

$$I = \rho\int_0^R r^2 dV = \rho\int_0^R r^2 h 2\pi r dr$$

кўринишга келади (R — дискнинг радиуси). Ўзгармас катталикларни интеграл белгисидан ташқарига чиқарамиз:

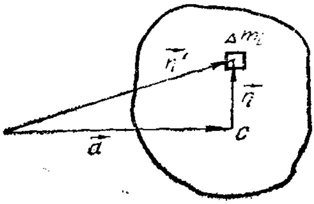
$$I = 2\pi h\rho\int_0^R r^3 dr = 2\pi h\rho\frac{R^4}{4}.$$

Бу ифодада дискнинг массаси $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$ эканлигини ҳисобга олсак:

$$I = \frac{mR^2}{2} \qquad (32.1)$$

эканлиги келиб чиқади.

Мазкур мисолда жисм бир жинсли ва симметрик бўлгани ҳамда унинг симметрия ўқига нисбатан инерция моментини топганимиз сабабли, масаланинг ечими мураккаб бўлмади. Агар биз дискнинг бирор бошқа, масалан унинг четидан ўтган ҳамда унга тик бўлган *O'O'* ўққа нисбатан инерция моментини топмоқчи бўлганимизда, албатта, ҳисоблаш жуда мураккаб бўларди. Бундай ҳолларда *Штейнер теоремаси*дан фойдаланган маъқул. Мазкур теоремага кўра, ***жисмнинг ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти ана шу ўққа параллел***



57-расм.

бўлиб, массалар марказидан ўтган ўққа нисбатан инерция моменти билан жисм массаси ҳамда иккала ўқ орасидаги масофа квадрати кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

Теоремани исбот қилиш учун ихтиёрий жисм оламиз (57-расм). Бир-биридан a масофада бўлган, бири массалар маркази C орқали, иккинчиси ихтиёрий O' нуқта орқали ўтган ўзаро параллел бўлган иккита ўқ олайлик (чизма текислигига тик). Жисм i-бўлакчасининг O' ва C ўқларга нисбатан радиус-векторларини $\vec{r_i}'$ ва $\vec{r_i}$ билан белгилайлик. Улар орасидаги муносабат

$$\vec{r_i}' = \vec{a} + \vec{r_i}$$

бўлади. Мазкур ўқларгача бўлган масофаларнинг квадратлари

$$r_i^2 = \vec{r_i^2},$$

$$r_i'^2 = (\vec{a} + \vec{r_i})^2 = a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{r_i} + \vec{r_i^2}$$

га тенг бўлгани сабабли, жисмнинг O' ўққа нисбатан инерция моменти

$$I = \sum \Delta m_i \cdot r_i'^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\vec{a} \sum \Delta m_i \cdot \vec{r_i} + \sum \Delta m_i \cdot r_i^2$$

бўлади. Бу ерда $I_C = \sum \Delta m_i \cdot r_i^2$ — жисмнинг массалар маркази орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти, $m = \sum \Delta m_i$ — жисмнинг массаси, $\sum \Delta m_i \cdot \vec{r_i} = m \cdot \vec{r_c} = 0$ ($\vec{r_c}$ — массалар марказининг C га нисбатан радиус-вектори) эканлигини ҳисобга олсак

$$I = ma^2 + I_C \tag{32.2}$$

ифода ҳосил бўлади.

Бу формула исбот қилиниши зарур бўлган Штейнер теоремасини ифодалайди.

56-расмдаги дискнинг $O'O'$ ўққа нисбатан инерция моментини Штейнер теоремаси ёрдамида топайлик:

$$I = mR^2 + \frac{mR^2}{2} = \frac{3}{2}\,mR^2. \tag{32.3}$$

Шундай қилиб, Штейнер теоремаси ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моментини топиш масаласини жисмнинг массалар марказидан ўтган ўққа нисбатан инерция моментини топишга келтиради.

Жисмнинг бирор нуқтага нисбатан инерция моментини топиб, сўнгра унинг ўққа нисбатан инерция моментини осонгина ҳисоблаб топиш мумкин. Аслида, жисмнинг нуқтага нисбатан инерция моменти амалий жиҳатдан ҳеч қандай аҳамиятга эга бўлмаса-да, ҳисобларни осонлаштиришга хизмат қиладиган ёрдамчи тушунча ҳисобланади. Жисмни ташкил қилган моддий нуқталар массалари билан улардан бирор O нуқтагача бўлган масофалар квадратларининг кўпайтмаларидан ҳосил қилинган йиғинди жисмнинг мазкур *нуқтага нисбатан инерция моменти* деб аталади:

$$\theta = \sum m_i \cdot r_i^2.$$

Жисм массаси узлуксиз тақсимланган ҳолларда бу ифода интеграл билан алмаштирилади:

$$\theta = \int r^2 dm. \qquad (32.4)$$

Массаси m, координаталари x, y, z бўлган моддий нуқтани кўрайлик (58-расм). Ундан координата ўқларигача бўлган масофаларнинг квадратлари y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2; унинг мазкур ўқларга нисбатан инерция моментлари эса

$$I_x = m\ (y^2+z^2),$$

$$I_y = m\ (z^2+x^2),$$

$$I_z = m\ (x^2+y^2)$$

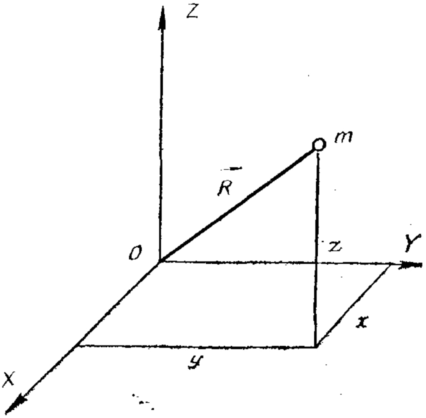
бўлади.

Учала тенгликни қўшсак,

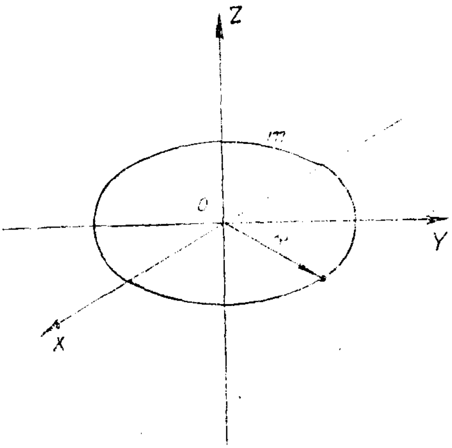
$$I_x + I_y + I_z = 2m\ (x^2 + y^2 + z^2)$$

ифода ҳосил бўлади. $x^2+y^2+z^2=R^2$ эканлигини ҳисобга олсак (R — мазкур m нуқтадан координаталар боши O гача бўлган масофа),

$$I_x + I_y + I_z = 2\theta \qquad (32.5)$$



58-расм.



59-расм.

эканлиги келиб чиқади. Бу муносабат фақат моддий нуқта учунгина эмас, ихтиёрий жисм учун ҳам ўринлидир, чунки уни моддий нуқталар мажмуаси деб қараш мумкин. Шундай қилиб, *жисмнинг бир нуқтада кесишадиган учта ўзаро перпендикуляр ўқларга нисбатан инерция моментларининг йиғиндиси жисмнинг мазкур нуқтага нисбатан инерция моментининг иккиланганига тенг.*

(32.5) муносабатни қўллашга ингичка ҳалқанинг унинг диаметри билан устма-уст тушадиган Y ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблашни мисол сифатида кўрайлик (59- расм). Мазкур ҳалқа учун

$$I_z = mR^2, \ \theta = mR^2$$

деб ёзиш мумкин (m — ҳалқа массаси, R — радиуси). Ҳалқанинг X ва Y ўқларга нисбатан инерция моментлари ўзаро тенг эканлигини ҳисобга олсак, (32.5) ифодадан

$$2I_y + mR^2 = 2mR^2$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан

$$I_y = \frac{1}{2} mR^2$$

натижага эга бўламиз.

Бир жинсли баъзи симметрик жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш формулаларини келтирамиз. Мазкур формулаларни мустақил равишда келтириб чиқаришни тавсия қиламиз:

1. Ингичка ҳалқанинг унинг текислигига тик бўлиб, массалар марказидан ўтган ўққа нисбатан инерция моменти (юпқа деворли цилиндрнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моменти ҳам шу тарзда топилади):

$$I = mR^2. \qquad (32.6)$$

2. Қалин деворли цилиндрнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моменти:

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2), \qquad (32.7)$$

бу ерда R_1 ва R_2 — цилиндрнинг ички ва ташқи диаметри.

2. Дискнинг унинг диаметрларидан бири билан мос келадиган ўққа нисбатан инерция моменти:

$$I = \frac{1}{4} mR^2. \qquad (32.8)$$

4. Ингичка стерженнинг унга тик бўлиб, ўртасидан ўтган ўққа нисбатан инерция моменти:

$$I = \frac{1}{12} ml^2, \qquad (32.9)$$

бу ерда l — стержень узунлиги.

5. Ингичка стерженнинг унга тик бўлиб, унинг учларидан бири орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти:

$$I = \frac{1}{3} ml^2. \qquad (32.10)$$

6. Шарнинг унинг маркази орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти

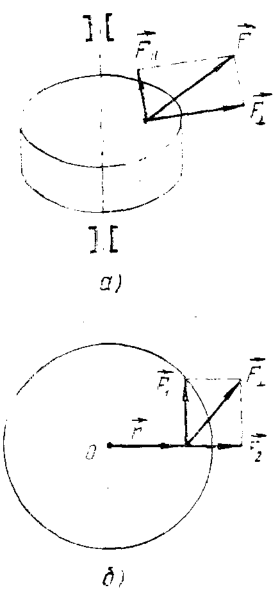
$$I = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (32.11)$$

33-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланиши

Қаттиқ жисмнинг муайян нуқталарига қўйилган ташқи кучлар уни айлантириши мумкин. Бунда жисм деформацияланади, ички зўриқишлар вужудга келади. Ташқи кучлар таъсири олингандан сўнг қаттиқ жисм айланишда давом этади (ишқаланиш ҳисобга олмайдиган даражада кичик бўлганда), яъни ички кучлар қаттиқ жисмни айлантиролмайди ҳам, айланма ҳаракатини йўқота олмайди ҳам.

Қўзғалмас ўққа ўрнатилган қаттиқ жисмга ихтиёрий $\vec{F}$ куч қўйилган бўлсин (60-расм). Мазкур кучни айланиш ўқига тик бўлган текисликда ётган $\vec{F}_\perp$ ва ўққа параллел бўлган $\vec{F}_\parallel$ ташкил этувчиларга ажратамиз.

Кучнинг $\vec{F}_\parallel$ ташкил этувчиси жисмни ўқ атрофида ай·



60-расм.

лантира олмайди. $\vec F_\perp$ кучнинг ўзини $\vec r$ радиус-вектор йўналишидаги $\vec F_2$ ва унга тик бўлган $\vec F_1$ ташкил этувчиларга ажратамиз: $\vec F_2$ ташкил этувчи ўқни эгиши мумкин, лекин жисмни айлантира олмайди. Сон қиймати

$$F_1 = F_\perp \cdot \cos\beta$$

бўлган $\vec F_1$ ташкил этувчи қаттиқ жисмни айлантириб, унга бурчакли тезланиш беради.

Жуда кичик $ds = r\cdot d\varphi = r\omega dt$ кўчишда $\vec F_1$ куч

$$dA = \vec F_1 \cdot d\vec s = rF_1 \omega dt$$

иш бажаради, натижада қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

$$dE = I\omega d\omega = dA$$

миқдорга ортади. Сўнгги икки муносабатдан:

$$I\cdot\frac{d\omega}{dt} = r\cdot F_1$$

келиб чиқади. Лекин $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ жисмнинг бурчакли тезланиши эканлигидан,

$$I\varepsilon = r\cdot F_1 = r\cdot F_\perp\cdot\sin\beta \qquad (33.1)$$

ифода ҳосил бўлади.

Моддий нуқта кинематикасини ўрганишда (9-§) бурчакли тезланишни айланиш ўқига параллел бўлган вектор деб ҳисоблаган эдик. У ҳолда сўнгги (33.1) ифоданинг ўнг қисмини вектор кўпайтма деб ҳисоблаб, $\vec\varepsilon$ га параллел бўлган векторни ҳосил қиламиз:

$$\vec M = [\vec r\,\vec F_1]. \qquad (33.2)$$

Бу катталик $\vec F_1$ *кучнинг айланиш ўқига нисбатан моменти* ёки *айлантирувчи момент* дейилади.

Куч моментининг СИ системадаги ўлчов бирлиги: Н·м. β бурчак 90° га тенг бўлгандаги $\vec{r}$ радиус-векторнинг энг кичик қиймати *кучнинг айланиш ўқига нисбатан елкаси* дейилади. (33.1) муносабатни

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \qquad (33.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу муносабат *қаттиқ жисм айланма ҳаракати динамикасининг асосий тенгламасини* ифодалайди. *Куч моменти жисм инерция моментининг куч таъсирида олган бурчакли тезланишига кўпайтмасига тенг.* Бу тенглама Ньютоннинг иккинчи $\vec{F} = m\vec{a}$ қонунига жуда ҳам ўхшайди. Таққослаш шуни кўрсатадики, қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатини вужудга келтирувчи катталик— куч моменти, инертлик ўлчови — инерция моменти, чизиқли тезланиш ролини эса бурчакли тезланиш ўйнайди.

Айланма ҳаракат динамикасининг асосий (33.3) тенгламасини

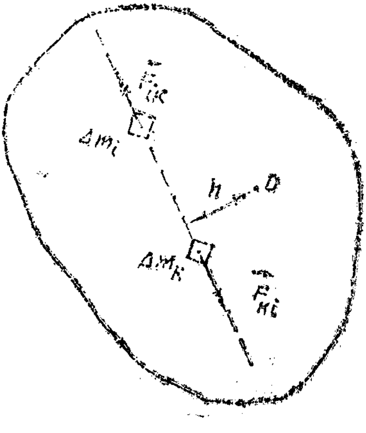
$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \qquad (33.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламадан кўринадики, қўзғалмас ўққа ўрнатилган жисмнинг олган бурчакли тезланиши унга қўйилган кучлар моментига тўғри пропорционал, жисмнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моментига тескари пропорционал бўлади.

Қаттиқ жисмга бир нечта ташқи кучлар таъсир қилаётган бўлса, уларнинг натижавий моменти алоҳида кучлар моментларининг вектор йиғиндисига тенг:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = I \sum \vec{\varepsilon}_i. \qquad (33.5)$$

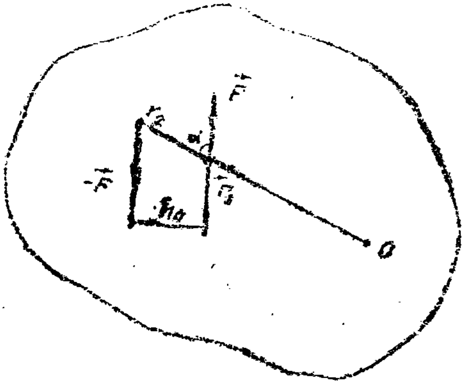
Айтиб ўтилганлардан кўринадики, қўйилган кучнинг айланиш ўқига эга бўлган жисмга таъсири унинг моменти билан белгиланади. Бу фикр асосида ички кучлар жисмнинг айланма ҳаракатига таъсир қилолмаслигини тушунтириш мумкин: қаттиқ жисмни бўлакчаларга бўлсак, динамиканинг учинчи қонунига



61-расм.

асосан ихтиёрий иккита бўлакча орасидаги ўзаро таъсир кучлари $\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{ki}$ бўлади. Бу кучлар сон жиҳатдан тенг бўлиб, уларнинг таъсир чизиқлари устма-уст тушади. Кучларнинг йўналишлари қарама-қарши, елкалари эса бир хил бўлганлигидан, ҳосил қилган моментлари ҳам қарама-қарши йўналган бўлиб, бир-бирини мувозанатлайди (61-расм). Яъни ички кучларнинг натижавий моменти нолга тенг.

Ўрта мактаб курсидан маълумки, қаттиқ жисмга таъсир қилаётган параллел кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш мумкин. Тенг таъсир этувчи шундай кучки, қаттиқ жисмга таъсир қилаётган барча кучларни олиб ташлаб, ўрнига мазкур куч қўйилса, унинг ҳаракати ўзгармайди. Лекин жуфт кучларнинг тенг таъсир этувчиси мавжуд эмас, чунки уларни битта куч билан алмаштириб бўлмайди. Иккита, сон жиҳатдан тенг, қарама-қарши йўналган кучлар **жуфт кучлар** дейилади (62-расм). Жуфт кучлар моментини топайлик. Расмдан кўринадики:



62-расм.

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, -\vec{F}] + [\vec{r}_2, \vec{F}] = [\vec{h}, \vec{F}].$$

Лекин, $h \sin\alpha = h_0$ (h_0 — жуфт кучлар орасидаги масофа, яъни жуфт кучларнинг елкаси) бўлганидан:

$$\vec{M} = [\vec{h}_0, \vec{F}]. \qquad (33.6)$$

Яъни, жуфт кучлар моменти айланиш ўқининг вазиятига боғлиқ эмас. Жуфт кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг эканлигидан, улар қаттиқ жисмнинг массалар марказини ҳаракатга келтиролмайди. Шу сабабли жуфт кучлар таъсирида эркин қаттиқ жисм унинг массалар маркази орқали ўтган ўқ атрофида тезланиш билан айланма ҳаракат қилади. Мазкур ўқ жуфт кучлар текислигига тик бўлади.

34- §. Импульс моменти ва унинг сақланиши қонуни

Илгариланма ва айланма ҳаракат қонунларини таққослаганда уларнинг ўхшаш эканлигини пайқаш мумкин. Айланма ҳаракатда куч ўрнига куч моменти иштирок этади, инерция моменти эса масса ролини ўйнайди. Илгариланма ҳаракатдаги жисм импульси ўрнига айланма ҳаракатда қатнашадиган катталик — импульс моментидир.

Муайян массали моддий нуқта импульсининг ундан айланиш ўқигача бўлган масофага кўпайтмаси моддий нуқтанинг берилган ўққа нисбатан *импульс моменти* деб аталади (27- §):

$$L_i = m_i \cdot v_i \cdot r_i. \tag{34.1}$$

Қаттиқ жисмнинг импульс моменти эса жисм бўлакчалари импульс моментларининг йиғиндисига тенг:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i.$$

Айланма ҳаракатда $v_i = \omega \cdot r_i$ эканлигидан, бу ифодани

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \cdot \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I\omega \tag{34.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин, яъни

$$L = I\omega. \tag{34.3}$$

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўққа нисбатан импульс моменти жисмнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчакли тезлиги кўпайтмасига тенг. Вектор кўринишда мазкур ифода

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \tag{34.4}$$

шаклда ёзилади, яъни жисмнинг импульс моменти — айланиш ўқи бўйлаб йўналган вектор бўлиб, унинг учидан қараганда жисм соат стрелкасига тескари йўналишда айланади ($\vec{\omega}$ билан бир хил йўналишда).

Айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламасидан

$$Mdt = I \cdot d\omega \qquad (34.5)$$

ифодани келтириб чиқариш мумкин. Бу тенгламадан кўринадики, қаттиқ жисм бурчакли тезлигининг ўзгариши ташқи кучлар моменти билангина белгиланиб қолмасдан, унинг таъсир қилиш вақтига ҳам боғлиқ экан.

Умумий ҳолда қаттиқ жисмга таъсир қилаётган кучларнинг моменти ўзгариши мумкин. t_1 дан t_2 пайтгача бўлган вақт оралиғида жисмнинг бурчакли тезлиги ω_1 дан ω_2 гача ўзгарган бўлсин. У ҳолда (34.5) ифодани интеграллаймиз:

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} Id\omega.$$

Бу ерда $\int_{t_1}^{t_2} Mdt$ катталик жисмга таъсир қилаётган *кучлар моментининг импульси* дейилади.

Абсолют қаттиқ жисм учун $I = \text{const}$ эканлигидан,

$$\int_{t_1}^{t_1} Mdt = I\omega_2 - I\omega_1,$$

ёки

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = L_2 - L_1 \qquad (34.6)$$

келиб чиқади, яъни *қаттиқ жисм импульс моментининг ўзгариши жисмга қўйилган кучлар моментининг импульсига тенг.*

Қаттиқ жисмнинг ихтиёрий айланиш ўқига нисбатан инерция моменти доимий эканлигидан, (34.5) ифодада $Mdt = d\,(I\omega) = dL$ деб ёзиш мумкин. Бу тенгламадан

$$M = \frac{d\,(I\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt} \qquad (34.7)$$

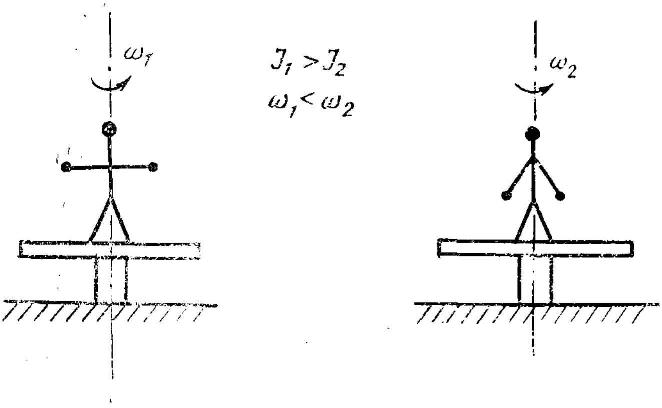
келиб чиқади. Бу формула айланма ҳаракат динамикаси асосий тенгламасининг бошқа кўринишидир.

(34.7) тенгламадан кўринадики, *ташқи кучлар моменти нолга тенг* ($M = 0$) *бўлса, жисмнинг импульс моменти ўзгармайди,* яъни

$$L = I \cdot \omega = \text{const}. \qquad (34.8)$$

Бу тенглама қўзғалмас ўққа эга бўлган жисм учун ***импульс моментининг сақланиши қонунини*** **ифодалайди.**

(34.7) тенглама абсолют қаттиқ жисмнинг инерция моменти ўзгармаслигига асосланиб келтириб чиқарилган бўлса ҳам, қисмларининг ўзаро жойлашуви ўзгариши натижасида инерция моменти ўзгарадиган жисмлар учун ҳам ўринли бўлади. Ташқи кучларнинг моменти нолга тенг ($M=0$) бўлганда инерция моментининг ўзгариши бурчакли тезликнинг ҳам мос ўзгаришига олиб келади, бунда $I\omega$ кўпайтма ўзгармайди. Бир қатор мисоллар кўрайлик:



63-расм.

1. Импульс моментининг сақланиши қонунини кўпинча Н. Е. Жуковский томонидан таклиф қилинган платформада намойиш қилинади. Горизонтал платформа вертикал ўқ атрофида деярли ишқаланишсиз айланади (63- расм). Ишқаланиш кучлари ўққа яқин жойга қўйилгани сабабли, уларнинг моментларини ҳисобга олмаслик мумкин. Платформадаги киши гантелли қўлларини ёзган ҳолда турганда уни ω_1 бурчакли тезлик билан айлантириб юборилади. Қўлларини йиғиб, киши ўзининг инерция моментини камайтиради. Бунда бурчакли тезлик ортади. Импульс моментининг сақланиши қонунига кўра,

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

бўлиб, кишининг инерция моменти камайганда ($I_2 < I_1$) бурчакли тезлик ω_1 дан ω_2 гача ортади.

2. Автомобилни иккита жисм: ҳаракатга келтирувчи ғилдираклар ҳамда кузовдан иборат жисмлар системаси деб қараш мумкин. Автомобиль жойидан қўзғалганда ёки кескин тезлаганда у орқа ғилдираклари билан ерга «ўтириб» қолгандек бўлади. Бу ҳодиса импульс моментининг сақланиши қонуни натижасидир: ғилдирак билан кузов умумий айланиш ўқига эга; ғилдиракнинг бурчак тезлиги кескин ортганда унинг импульс моменти ҳам ортади. Кузовнинг ҳам импульс моменти худди ўшанча миқдорга тенг бўлиб, тескари йўналган бўлади. Шу сабабли кузов «ўтириб» қолади.

3. Космик кема ичига учта ўзаро тик жойлашган ўқлар атрофида айланиб турадиган унча катта бўлмаган ғилдираклар ўрнатилади. Эркин парвоз пайтида кемага ташқи кучлар моменти таъсир қилмайди. Шунинг учун двигатель тўхтагач, системанинг тўлиқ импульс моменти ўзгаришсиз сақланади. Учала ғилдиракларнинг айланишини ўзгартириб, кеманинг фазодаги вазиятини ўзгартириш, вертикал ўқ атрофида айланиб кетишининг олдини олиш мумкин.

4. Импульс моментининг сақланиши қонунининг бажарилишини акробат ҳамда муз устида учувчи фигурачи ҳаракатида ҳам кузатиш мумкин.

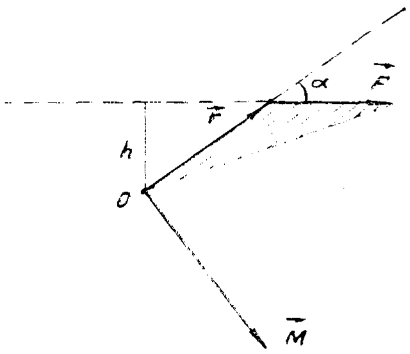
35- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида айланиши

Умумий ҳолда қаттиқ жисм қўзғалмас нуқта атрофида айланиши мумкин. *Айланиш маркази* деб аталадиган бу нуқта жисм ичида ёки ундан ташқарида жойлашган бўлиши мумкин.

Айланиш маркази қаттиқ жисм ичида жойлашган, яъни унинг бир нуқтаси қўзғалмас қилиб маҳкамланган ҳолни кўрайлик. Қаттиқ жисмнинг муайян пайтдаги ҳаракатини *оний айланиш ўқи* атрофидаги жуда кичик бурилишдан иборат деб ҳисоблаш мумкин. Чунки жуда қисқа вақт оралиғида оний айланиш ўқи ҳисобланган тўғри чизиқ устида ётган нуқталар қўзғалмайди дейиш мумкин. Оний айланиш ўқи вақт ўтиши билан ўзининг қаттиқ жисмдаги ва фазодаги вазиятини ўзгартириши мумкин. Лекин у доимо айланиш марказидан ўтади.

Жисмга қўйилган кучнинг таъсир чизиғи айланиш марказидан ўтганда, албатта, бу куч жисмнинг ҳаракатини ўзгартиролмайди, чунки у жисмга боғланиш (айланиш марказидаги) томонидан таъсир қиладиган реакция кучи билан мувозанатлашади. Фақат таъсир чизиғи айланиш маркази орқали ўтмаган кучгина жисмнинг ҳаракатини ўзгартира олади. Бундай кучнинг жисм ҳаракатига таъсирини унинг моменти орқали характерлаш мумкин.

Куч моменти O айланиш марказидан кучнинг қўйилиш нуқтасига ўтказилган $\vec{r}$ радиус-вектор ҳамда $\vec{F}$ куч векторининг вектор кўпайтмаси билан ифодаланади (64-расм):



64-расм.

$$\vec{M} = [\vec{r}\cdot\vec{F}]. \qquad (35.1)$$

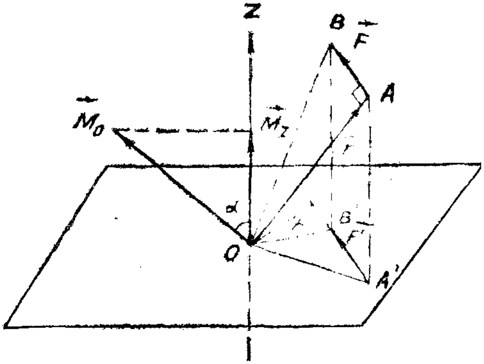
Куч моментининг сон қиймати

$$M = rF\cdot\sin\alpha = F\cdot h$$

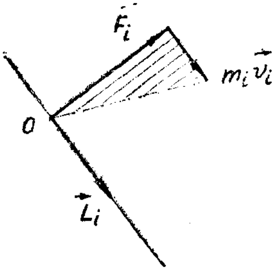
га тенг бўлиб, бу ерда α — $\vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторлар орасидаги бурчак, $h = r\cdot\sin\alpha$ — айланиш марказидан кучнинг таъсир чизиғига ўтказилган перпендикулярнинг узунлиги. Бу катталик *кучнинг елкаси* дейилади.

Куч моменти векторининг йўналишини парма қоидасидан топиш мумкин: унинг йўналиши айланиш марказида жойлашган парманинг дастасини кучнинг таъсир йўналишида айлантиргандаги илгариланма ҳаракати йўналиши билан мос келади.

Кучнинг ихтиёрий ўққа нисбатан моменти унинг шу ўқда ётган нуқтага нисбатан моментининиг мазкур ўққа проекциясига тенг эканлигини исбот қилиш мумкин: Z ўқи устида ихтиёрий O нуқтани танлаб олиб (65-расм), $\vec{F}$ кучнинг ана шу нуқтага нисбатан моментини топайлик. (35.1) га кўра мазкур момент $\vec{M}_0 = [\vec{r}\,\vec{F}]$ га, сон қиймати эса OAB учбурчакнинг иккиланган юзига тенг. OAB учбурчакни O нуқта орқали OZ ўқига тик қилиб ўтказилган текисликка проекциялаймиз. Бу проекция $OA'B'$ учбурчакдан иборат. Маълумки, бирор шакл проекциясининг юзи мазкур шакл юзи билан шакл ҳамда унинг проекцияси текисликлари орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг, яъни



65-расм.



66-расм.

$$S_{\Delta OA'B'} = S_{\Delta OAB}\cdot\cos\alpha.$$

Юқорида айтилганидек, $M_0 = 2S_{\Delta OAB}$ бўлганидан, $2S_{\Delta OA'B'} = M_0\cdot\cos\alpha$ бўлади, бу ерда α — $\vec{M}_0$ вектор билан OZ ўқи орасидаги бурчак. Расмдан кўринадики, $M_Z = M_0\cdot\cos\alpha$. Шундай қилиб,

$$M_Z = M_0\cos\alpha = 2S_{\Delta OA'B'} = F'\cdot h'.$$

Айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламасини вектор кўринишда ёзамиз:

$$\vec{M} = I\cdot\vec{\varepsilon},$$

бу ерда I — жисмнинг оний айланиш ўқига нисбатан инерция моменти. $M = 0$, яъни жисмга таъсир қилаётган ташқи кучлар моменти нолга тенг бўлганда $\vec{\varepsilon} = 0$, яъни бурчакли тезлик вектори $\vec{\omega}$ ўзгармайди (қаттиқ жисм ўзгармас бурчакли тезлик билан айланиб, айланиш ўқининг йўналиши ҳам ўзгармайди).

Моддий нуқтанинг (ёки жисм бўлакчасининг) *ихтиёрий О нуқтага* (66-расм) *нисбатан импульс моменти* нуқта $\vec{r}_i$ радиус-вектори билан унинг импульси $\vec{p}_i = m_i\cdot\vec{v}_i$ векторларининг вектор кўпайтмасига тенг:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i\,\vec{p}_i]. \qquad (35.2)$$

У ҳолда қаттиқ жисмнинг мазкур нуқтага нисбатан импульс моменти жисм нуқталари импульс моментларининг вектор йиғиндисига тенг бўлади:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i]. \qquad (35.3)$$

Қаттиқ жисмнинг ихтиёрий нуқтага нисбатан импульс моменти векторининг шу нуқта орқали ўтган ўққа проекцияси скаляр катталик бўлиб, $I\omega$ кўпайтмага тенг.

Айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламасини вектор кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

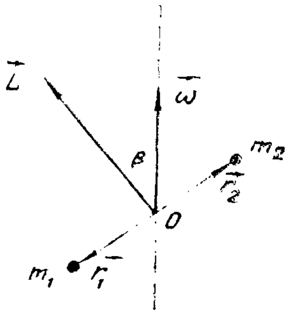
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \qquad (35.4)$$

яъни ташқи кучларнинг моменти жисмнинг ихтиёрий нуқтага нисбатан олинган импульс моментидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг. (35.4) дан кўринадики, *ташқи кучларнинг моменти нолга тенг бўлса, жисмнинг импульс моменти ўзгармайди:*

$$\vec{L} = \text{const}. \qquad (35.5)$$

Бу тенглама жисм қўзғалмас нуқта атрофида айланган ҳол учун *импульс моментининг сақланиш қонунини* ифодалайди. Бу қонунни берк система учун ҳам умумлаштириш мумкин: берк жисмлар системаси тўла импульс моментининг вектори сон қиймати жиҳатдан ҳам, йўналиш жиҳатдан ҳам ўзгармайди.

Умуман олганда, импульс моменти векторининг йўналиши оний ёки қўзғалмас айланиш ўқи билан мос келмаслиги мумкин. Масалан, жисм m_1 ва m_2 массали иккита моддий нуқтадан иборат бўлиб (67-расм), у муайян пайтда иккала моддий нуқта орқали ўтган чизиқда ётган O нуқта атрофида мазкур чизиққа нисбатан бурчак остида йўналган ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчакли тезлик билан айланаётган бўлсин. Айланиш ўқи ва моддий нуқталар чизма текислигида жойлашган, шу сабабли моддий нуқталарнинг $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ тезликлари чизма текислигига тик йўналган бўлиб, уларнинг O нуқтага

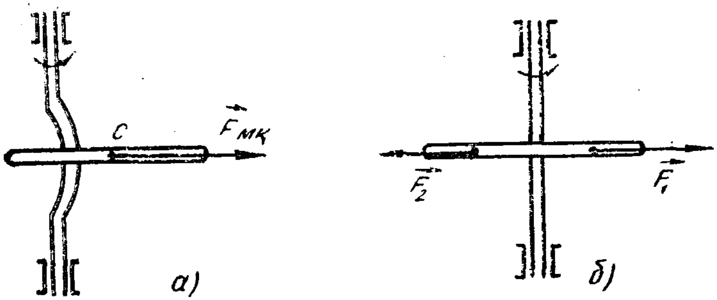


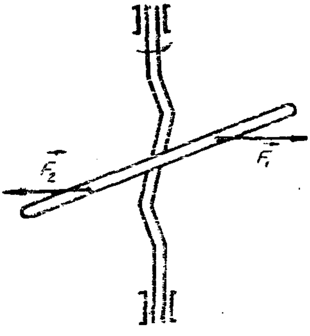
67-расм.

нисбатан импульс моментлари (натижавий $\vec{L}$ вектор ҳам) чизма текислигида жойлашиб, ҳар иккала моддий нуқта орқали ўтган тўғри чизиққа тик бўлиши керак. Расмдан кўринадики, $\vec{L}$ векторнинг йўналиши оний айланиш ўқи билан мос келмай, у билан β бурчак ҳосил қилади.

36-§. Гироскоп. Гироскопик кучлар

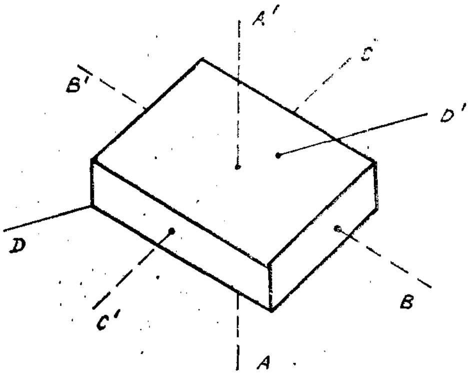
Айланиш ўқи қаттиқ жисмнинг массалар маркази орқали ўтмаган ҳолларда ўққа марказдан қочирма кучлар таъсир қилади. Масалан, таёқчани унинг учига яқин бўлган ўқ атрофида айлантирганда ўқ эгилади (68-*а* расм). Айланиш ўқи массалар маркази орқали ўтганда (68-*б* расм) таёқчанинг ҳар иккала қисмига таъсир қилаётган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ марказдан қочирма кучлар бир-бири билан мувозанатлашиб, ўққа ҳеч қандай куч таъсир қилмайди. Айланиш ўқи массалар маркази орқали ўтиб, таёқча ўққа нисбатан симметрик жойлашмаган ҳолда (68-*в* расм) эса марказдан қочирма кучлар жуфти ҳосил бўлиб, ўққа эгувчи жуфт кучлар моменти таъсир қилади.





68-расм.

Бундан кўринадики, айланиш ўқи массалар маркази орқали ўтиб, марказдан қочирма кучларнинг ўққа тик бўлган ихтиёрий йўналишга нисбатан мо-



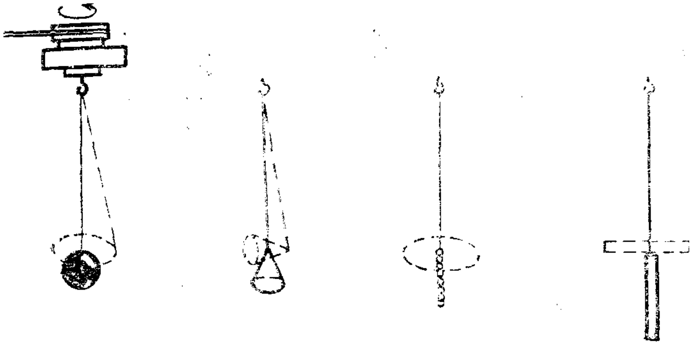
69-расм.

менти нолга тенг бўлганда айланаётган жисм ўққа куч билан таъсир қилмайди.

Жисм симметрияга эга бўлган ҳолларда бундай ўқларнинг йўналишини аниқлаш мумкин. Масалан, тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги жисм қарама-қарши ёқлар марказлари орқали ўтган учта ўзаро перпендикуляр ўққа эга (69- расм). Жисм ана шу ўқлардан бири атрофида айланса, жисмнинг айланиши ўқни тутиб турган таянчларга ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди, шу сабабли бундай ўқлар *эркин ўқлар* дейилади.

Ташқи кучлар бўлмаганда жисм эркин ўқ атрофида айлантирилса, бу айланиш узоқ давом этиши мумкин. Аксинча, жисмни эркин ўқлар билан мос келмайдиган, масалан, *DD'* ўқ атрофида айлантирилиб ўз ҳолига қўйилса айланиш мазкур ўқ атрофида давом этмай, мураккаб кўринишга эга бўлади. *AA'* ўқ энг катта инерция моментига, *BB'* ўқ энг кичик инерция моментига мос келади. Мазкур ўқлар атрофида жисмнинг айланиши турғун бўлади. *CC'* ўқ атрофидаги эркин айланиш эса турғун бўлмайди. Бунга гугурт қутини айлантириб юқорига отиш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

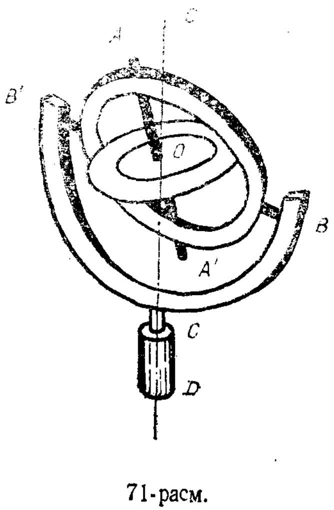
Турли хил жисмларнинг эркин айланиш ўқлари атрофидаги айланиши турғун бўлишини марказдан қочирма машина ўқига боғланган ипга осиб, уни тез айлантириш усули билан кузатиш мумкин. Металл ҳалқа, конус, занжир ва таёқча билан ўтказилган тажрибалар кўрсатадики (70- расм), айланиш тезлиги ортиб борганда оғирлик кучи таъсири бўлишига қарамай, мазкур жисмлар энг



70-расм.

катта инерция моментига эга бўлган ўқ атрофида айлана бошлайди. Энг кичик инерция моментига мос келган ўқ эса шуниси билан характерлики, бундай ўқ атрофида жисмни айлантириш жуда осон.

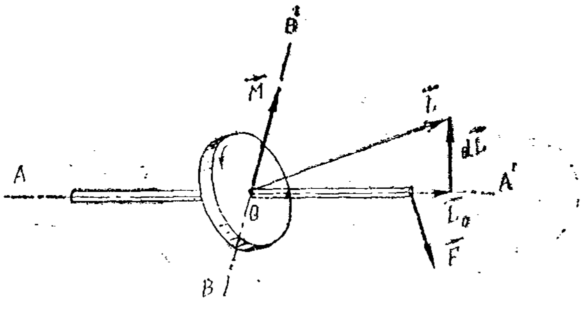
Симметрия ўқи атрофида жуда тез айланаётган симметрик жисм *гироскоп* деб аталади. Тез айланаётган пилдироқ ҳамда маркази орқали текислигига тик қилиб ўтказилган ўқ атрофида жуда тез айланаётган диск гироскопга мисол бўла олади. 71-расмда Кардано осмасига ўрнатилган гироскоп тасвирланган. Осма гироскоп оғир роторининг ўқини унинг массалар маркази орқали ўтган ўзаро перпендикуляр учта ўқ атрофида бурилишини таъминлайди. Шундай қилиб, гироскопнинг ўқи фазода ихтиёрий йўналишни олиши мумкин, шунинг учун гироскопни унинг массалар марказида маҳкамланган қаттиқ жисм деб ҳисобласа бўлади. Гироскоп ўқларига ишқаланиши жуда оз бўлган махсус подшипниклар ўрнатилган, оғирлик кучининг массалар марказига нисбатан моменти эса нолга тенг, шунинг учун бошқа ташқи кучлар таъсир қилмаган ҳолларда гироскопнинг айланиш ўқи (AA') ўз йўналишини ўзгартирмайди (импульс моментининг сақла-



71-расм.

ниш қонунига асосан). Бундай гироскоп *эркин гироскоп* дейилади. D дастадан ушлаб, гироскопни вертикал ва горизонтал текисликда бурилса, унинг айланиш ўқи ўзининг фазодаги йўналишини ўзгаришсиз сақлайди. Гироскопнинг бу хусусиятидан фойдаланиб Ернинг ўз ўқи атрофидаги суткалик айланишини пайқаш мумкин (гироскопнинг ўқи Ер билан боғлиқ бўлган саноқ системасида бурилади).

(35.4) тенгламага кўра, гироскопга унинг массалар марказига нисбатан моменти нолдан фарқли бўлган ташқи кучлар таъсир қилгандагина унинг ўқи ўз йўналишини ўзгартиради. Гироскопнинг айланиш ўқи горизонтал бўлиб, ўқнинг учига унга тик йўналишда (масалан, пастга йўналган) куч таъсир қилса, ўқ пастга қараб эмас, ён томонга қараб бурилади, яъни *гироскопик эффект* кузатилади. Бу ҳодисани айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси ёрдамида тушунтириш мумкин. Гироскопнинг AA' айланиш ўқининг учига пастга йўналган $\vec{F}$ куч таъсир қилаётган бўлсин (72-расм). Бу кучнинг массалар маркази O га нисбатан $\vec{M}$ моменти BB' ўқ бўйлаб йўналган бўлади. dt вақт ичида гироскоп импульсининг моменти $d\vec{L} = \vec{M}dt$ орттирма олади. Бу вектор $\vec{M}$ билан бир хил йўналишга эга, яъни бошланғич пайтдаги $\vec{L}_0$ импульс моментига тик бўлади. Гироскопнинг импульс моменти $\vec{L} = \vec{L}_0 + d\vec{L}$ бўлиб қолади, гироскоп ўқининг кейинги йўналиши ҳам $\vec{L}$ йўналиши билан мос келади.



72-расм.

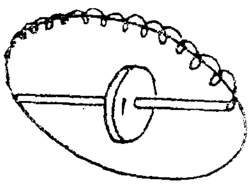
Шундай қилиб, гироскопнинг айланиш ўқи $\vec{M}$ ва $\vec{L_0}$ векторлар ётган текисликка тик бўлган ўқ атрофида, мазкур векторлар орасидаги бурчак камаядиган йўналишда бурилади. Бу бурилиш $\vec{L}$ вектор ташқи кучлар моменти вектори билан бир хил йўналишда бўлиб қолгунча давом этади.

Гироскоп жуда катта бурчакли тезлик билан айланаётган бўлса, унинг ўқи қисқа муддатли турткиларни деярли сезмайди. Бунинг сабаби шуки, dt кичик бўлганда $d\vec{L}$ ҳам кичик бўлиб, гироскопнинг ўқи ўз вазиятини деярли ўзгартирмайди. Ташқи кучлар моменти узоқ вақт таъсир қилгандагина бу ўзгариш сезиларли бўлади. Ўзгармас қийматга эга бўлган ташқи кучлар моменти гироскоп ўқига нисбатан йўналишини ўзгартирмаса, унинг ўқи ўзгармас бурчакли тезлик билан бурилади.

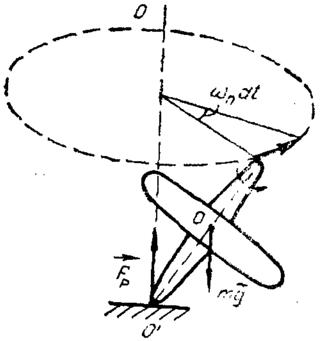
Гироскоп ўқининг ўзгармас бурчакли тезлик билан бурилишини *прецессия* дейилади. dt вақт ичида гироскопнинг ўқи $d\alpha$ бурчакка бурилган бўлсин (72-расм). Бунда импульс моменти $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ га ортади. Расмдан кўринадики, $d\alpha = \frac{dL}{L} = \frac{Mdt}{L}$ га тенг. Бу ифодадан прецессиянинг бурчакли тезлигини топиш мумкин:

$$\omega_п = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{M}{L}. \qquad (36.1)$$

Шундай қилиб, гироскоп ўқи айланишининг бурчакли тезлигини ташқи кучлар моменти белгилар экан. Ташқи кучлар моментининг таъсири йўқолиши заҳоти гироскопнинг ўқи бурилишдан тўхтайди. Шуни таъкидлаш керакки, ги-



73-расм.



74-расм.

роскоп ўқининг айланиш тезлиги қарор топмагунча гироскоп ўқининг учи циклоида бўйлаб ҳаракат қилади (73-расм). Гироскоп учининг бу ҳаракати *нутация* дейилади.

Оддий пилдироқда ҳам прецессия ҳодисасини кузатиш мумкин (74-расм). Пилдироқнинг O массалар (оғирлик) маркази O' таянч нуқтасидан юқорида жойлашганлиги сабабли, пилдироқ вертикалдан оғганда унга $m\vec{g}$ оғирлик кучи ҳамда таянчнинг $\vec{F}_р$ реакция кучидан иборат жуфт кучлар моменти таъсир қилади. Мазкур жуфт кучлар моменти айланаётган пилдироқ ўқининг прецессиясини вужудга келтиради. Жуфт кучлар моменти $M = mgl\sin\varphi$ га тенг, бу ерда l — пилдироқ оғирлик маркази билан таянч нуқтаси орасидаги масофа, $l\sin\varphi$ кўпайтма эса жуфт кучлар елкасининг узунлигини ифодалайди. (36.1) муносабатдан фойдаланиб, пилдироқ импульс моментининг орттирмасини топиш мумкин: $dL = Mdt = \omega_п L\sin\varphi\cdot dt$. Бундан $\omega_п = \frac{M}{L\sin\varphi}$ эканлиги келиб чиқади. Бу ифодага $L = I\omega$ ва жуфт кучлар моментининг қийматини қўйсак,

$$\omega_п = \frac{mgl\sin\varphi}{I\omega\sin\varphi} = \frac{mgl}{I\omega} \qquad (36.2)$$

тенглама ҳосил бўлади, яъни пилдироқ ўқи прецессиясининг тезлиги ўқнинг оғиш бурчагига боғлиқ бўлмайди, пилдироқ айланиш тезлиги камайиши билан эса ортиб боради.

Айтиб ўтилган хусусиятларидан фойдаланиб, гироскопларни бир қатор қурилмаларни яратишда қўллаш мумкин. Мазкур қурилмаларда ишқаланиш кучлари йўқ даражада кичик бўлиши зарур.

1. Учта эркинлик даражасига эга бўлган, мувозанат ҳолатдаги катта тезлик билан айланаётган гироскоп ёрдамида Ернинг суткалик айланишини пайқаш мумкинлиги айтиб ўтилган эди. Бу тажрибани биринчи бўлиб француз физиги Л. Фуко (1819—1868) амалга оширган эди.

2. Эркин гироскоп айланиш ўқининг йўналиши ўзгармаслигидан фойдаланиб, мустақил ҳаракат қилаётган мина (торпеда), самолёт, кема, ракета ва бошқа қурилмаларни автоматик равишда бошқаришни амалга ошириш мумкин. Подшипниклардаги ишқаланиш таъсирини камайтириш учун гироскопнинг $\vec{L} = I\cdot\vec{\omega}$ импульс моменти етарли даражада катта қилиб олиниши зарур. Аппарат-

нинг ҳаракат йўналиши ўзгарганда гироскопнинг ўқи аппаратга нисбатан бурилади. Бу ҳолда бошқариш руллари ишга тушиб аппаратни зарур йўналишга қайтаради. Узоқ вақт давом этадиган парвозларга мўлжалланган самолётлар ана шу тарзда ишлайдиган автопилот билан жиҳозланган бўлади.

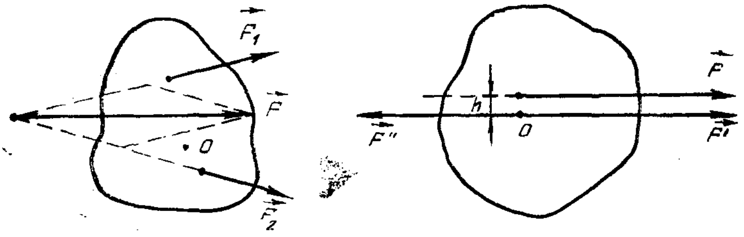
3. Мувозанатлашмаган гироскоплар сунъий вертикал ва горизонтал йўналишларни ҳосил қилишда ҳам кенг қўлланилади. Умумий ҳолда вертикал йўналишни осмага ўрнатилган маятник ёрдамида аниқлаш мумкин. Лекин бу усулдан кемада ёки самолётда фойдаланиб бўлмайди, чунки ҳаракат пайтидаги тезланишлар бунга йўл қўймайди. Бундай ҳолларда одатдаги маятник ўрнига гироскопик маятникдан фойдаланилади. Кўпинча гироскоп ўқининг тезланишлар таъсирида бўладиган прецессиясининг T даври тезланиш (тебраниш, бурилиш) юз берадиган вақтдан анча катта бўлгани сабабли, гироскопнинг вертикал йўналган ўқи жуда кичик бурчакка оғади.

4. Гироскоп қўлланиладиган яна бир муҳим соҳа — кемалардаги гироскопик компаслардир. Одатдаги магнитли компасга Ер магнит майдонининг турли хил ўзгаришлари (магнит бўронлари) таъсир қилади. Бундан ташқари, унга кемадаги катта темир буюмлар ҳамда ҳар хил электр қурилмалари ҳам таъсир қилади. Бундай ҳолда магнитли компасдан амалда фойдаланиб бўлмайди. Гироскопик компас эса бу таъсирлардан холи.

37- §. Қаттиқ жисм мувозанати

Абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанати шартини аниқлаймиз. Шуни айтиш керакки, илгариланма ва айланма ҳаракатларининг кинетик энергияси нолга тенг бўлгандагина қаттиқ жисм қўзғалмас бўлади.

Қаттиқ жисмга $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар таъсир қилаётган бўл-



57-расм.

син (75-*а* расм). Уларнинг $\vec{F}$ тенг таъсир этувчисини параллелограмм қоидасидан фойдаланиб топиш мумкин. Бу кучни унинг таъсир чизиғи бўйлаб кўчирайлик. 75-*б* расмдан кўринадики, мазкур кучлар тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғи жисмнинг *O* массалар марказидан ўтмаган. Жисмнинг массалар марказига ўзаро тенг, қарама-қарши йўналишдаги ҳамда $\vec{F}$ кучга параллел бўлган $\vec{F'}$ ва $\vec{F''}$ кучларни қўямиз (бу кучлар ўзаро мувозанатда бўлганидан, улар жисмнинг ҳаракат ҳолатига таъсир қилмайди). Шундай қилиб, $\vec{F}$ кучни жисмнинг массалар марказига қўйилган $\vec{F'}$ куч ҳамда елкаси *h* га тенг бўлган $\vec{F}$ ҳамда $\vec{F''}$ лардан иборат жуфт куч билан алмаштириш мумкин. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин: а) фақат $\vec{F'}$ куч бўлиб, жуфт куч бўлмаганда ($h = 0$, яъни жисмга қўйилган кучлар тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғи массалар марказидан ўтганда) жисм илгариланма ҳаракат қилади; б) фақат жуфт кучлар бўлган ҳолда ($\vec{F'} = 0$) жисм массалар маркази орқали жуфт кучлар текислигига тик қилиб ўтказилган ўқ атрофида айланма ҳаракат қилади; в) $\vec{F'}$ куч ҳам, жуфт кучлар ҳам бўлган ҳолда жисм бир вақтнинг ўзида ҳам илгариланма ҳаракат қилади, ҳам айтиб ўтилган ўқ атрофида айланма ҳаракат қилади.

Дастлаб жисм тинч ҳолатда бўлган деб ҳисоблайлик. Ташқи кучлар таъсирида жисм мувозанат ҳолатидан чиқмаслиги учун олтита шарт бажарилиши зарур (эркин қаттиқ жисм эркинлик даража сони олтига тенг).

Массалар маркази қўзғалмаслиги учун жисмга таъсир қилаётган кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак:

$$\sum \vec{F}_i = 0. \qquad (37.1)$$

Бу тенглама ўрнига учта скаляр тенгламани ёзиш мумкин:

$$\sum F_{ix} = 0; \ \sum F_{iy} = 0; \ \sum F_{iz} = 0. \qquad (37.2)$$

Жисм айланмаслиги учун ташқи кучлар моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак:

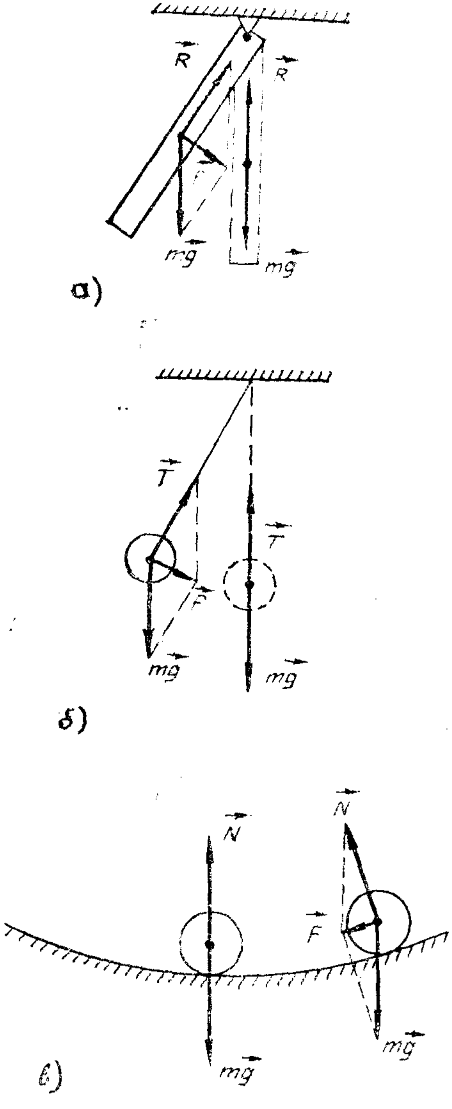
$$\sum \vec{M}_i = 0 \qquad (37.3)$$

ёки

$$\sum M_{ix} = 0; \ \sum M_{iy} = 0; \ \sum M_{iz} = 0. \qquad (37.4)$$

Шундай қилиб, ихтиёрий кучлар системаси таъсир қилаётган жисм мувозанатда бўлиши учун мазкур кучларнинг координата ўқларига проекцияларининг йиғиндиси ҳамда бу кучларнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак.

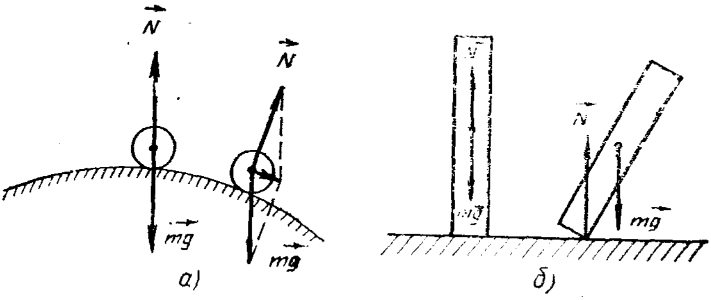
Жисм мувозанатда бўлиши учун (37.1) —(37.4) шартлар бажарилиши зарур, лекин бу шартлар етарли эмас. Жисм узоқ вақт давомида ташқи турткилар таъсирида ҳам мувозанатда бўлиши учун, қўшимча шартлар бажарилиши зарур. Ташқи турткилар таъсирида жисм мувозанат ҳолатидан четлашади. Бунда вужудга келадиган кучлар ва куч моментлари жисмни мувозанат ҳолатига қайтарса, жисм ҳамма вақт мувозанат ҳолати яқинида бўлиб, ундан узоқлашмайди, яъни жисм *турғун мувозанатда* бўлади. Пайдо бўладиган кучлар ва куч моментлари жисмни мувозанат ҳолатидан



76- расм.

узоқлаштирса, жисм *турғунмас (нотурғун) мувозанат*да бўлади. Баъзи ҳолларда жисм мувозанат ҳолатидан чиқарилганда у янги вазиятда қолаверади. Бунда жисм *фарқсиз мувозанатда* дейилади.

Оғирлик кучи майдонидаги жисм мувозанат ҳолати потенциал энергиянинг минимумига мос келганда — мувозанат турғун бўлади, максимумига мос келганда эса турғунмас бўлади. Бунда жисм таянч нуқтасига ёки таянч чизиғига эга бўлиши, ипга ёки пружинага осилган бўлиши мумкин. Маятниклар турғун мувозанатда бўлади: мувозанатдан чиқарилганда потенциал энергияси ортади ҳамда уни мувозанат ҳолатига қайтарувчи кучлар пайдо бўлади (76- *а, б* расмлар). Ботиқ сиртда жойлашган шар шаклидаги жисм ҳам турғун мувозанатда бўлади (76- *в* расм). 77- расмда турғунмас мувозанатдаги жисмлар тасвирланган.



77-расм.

Горизонтал текислик устида жойлашган жисм ҳаракатга келтирилганда жисм массалар марказининг сиртга нисбатан баландлиги ўзгармайди, яъни у фарқсиз мувозанатда бўлади. Ёғоч шарчани носимметрик пармалаб, ичига металл қуйилса, унинг массалар маркази силжиб қолади. Бундай шарни думалатганда у ғайри табиий ҳаракатланиб, унинг массалар маркази энг қуйи ҳолатга ўтганда (турғун мувозанат бўлганда) тўхтайди.

VII боб

ИШҚАЛАНИШ КУЧЛАРИ

38- §. Жисмларнинг қовушоқ муҳитдаги ҳаракати

Шу пайтгача биз жисм ҳаракатини ўрганганда ҳаракат содир бўлаётган муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмаган эдик. Бир-бирига тегиб турган жисмлар ёки уларнинг бўлаклари бир-бирига нисбатан ҳаракатланганда ишқаланиш кучлари намоён бўлади. Тегиб турган икки жисм бир-бирига нисбатан кўчгандаги ишқаланиш *ташқи ишқаланиш;* бирор яхлит жисм (масалан, суюқлик ёки газ) бўлаклари орасидаги ишқаланиш эса *ички ишқаланиш* дейилади.

Қаттиқ жисм суюқлик ёки газга нисбатан ҳаракат қилганда вужудга келадиган ишқаланишни ички ишқаланиш деб ҳисоблаш зарур, чунки бу ҳолда муҳитнинг жисмга бевосита тегиб турган қатламлари жисмга эргашиб, у билан бир хил тезликда ҳаракатланади, жисм ҳаракатига эса мазкур қатламлар билан қўшни қатламлар орасидаги ишқаланиш таъсир қилади.

Бирор бошқа қатлам (масалан, мой) бўлмаган ҳолда икки қаттиқ жисм орасида вужудга келадиган ишқаланиш *қуруқ ишқаланиш,* қаттиқ жисм билан суюқлик ёки газ орасидаги ҳамда мазкур муҳитлар қатламлари орасидаги ишқаланиш эса *қовушоқ ишқаланиш* дейилади.

Қуруқ ишқаланиш сирпаниш ишқаланиши ва думаланиш ишқаланишга бўлинади. Ишқаланиш оқибатида ҳаракатланаётган жисмнинг энергияси камайиб боради. Ишқаланиш жараёнида механик энергиянинг диссипацияланувчи қисми материя ҳаракатининг бошқа кўринишларига айланади, бунда иссиқлик ажралиши, жисмларнинг зарядланиши, емирилиши мумкин.

Ишқаланиш кучлари ишқаланаётган сиртларга (ёки қатламларга) уринма бўйлаб йўналган бўлиб, улар мазкур сиртлар ёки қатламларнинг бир-бирига нисбатан силжишига тўсқинлик қилади. Масалан, суюқликнинг икки қўшни қатлами бир-бирига сирпанаётган бўлса, улар ҳар хил тезликка эга бўлади, бунда тезроқ ҳаракат қилаётган қатламга таъсир қилаётган куч унинг ҳаракат йўналишига тескари, секинроқ ҳаракат қилаётган қатламга таъсир қилаётган куч эса унинг ҳаракат йўналиши билан бир хил йўналишга эга бўлади.

Ишқаланиш кучи ҳисобга олинадиган ҳолларда динамика иккинчи қонунини ифодаловчи тенгламани

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ишқ}} \qquad (38.1)$$

кўринишда ёзиш зарур. Бу тенгламадан кўринадики, жисм текис ҳаракат қилиши учун унга ишқаланиш кучини мувозанатловчи куч қўйилиши керак экан. Ишқаланиш кучини ўлчаш учун жисмнинг текис ҳаракат қилишида унга қўйилиши зарур бўлган ташқи кучни ўлчаш кифоя.

Жисм ковушоқ муҳитда (суюқлик ёки газда) ҳаракат қилганда ишқаланиш кучи фақат жисм ҳаракатлангандагина юзага келади, жисм тинч турганда эса ишқаланиш кучи нолга тенг. Масалан, суюқлик сиртидаги жисмга горизонтал йўналишда хоҳлаганча кичик куч таъсир қилганда ҳам у ҳаракатга келади. Мазкур жисмнинг ўзгармас горизонтал куч таъсиридаги ҳаракатини кузата бориб, муайян вақт ўтгандан сўнг у текис ҳаракат қила бошлаганини кўриш мумкин. Бу тажриба, жисм ҳаракати мобайнида ишқаланиш (қаршилик) кучи вужудга келиб, тезлик ортган сари у ҳам ортиб боришини ва ниҳоят бу куч жисмга қўйилган куч билан мувозанатлашгач, жисм текис ҳаракат қила бошлашини кўрсатади.

Мукаммалроқ тажрибалар тезлик унча катта бўлмаганда (суюқликларда секундига бир неча метр, газларда эса секундига бир неча ўн метрдан ортмаганда) ишқаланиш кучи ҳаракат тезлигига пропорционал бўлиб, унга қарама-қарши йўналган эканлигини кўрсатади:

$$\vec{F}_{\text{ишқ}} = -r \cdot \vec{v}, \qquad (38.2)$$

бу ерда r — жисм сиртининг ҳолатига, унинг шаклига ва суюқлик табиатига боғлиқ бўлган қаршилик коэффициенти. Унинг ўлчамлиги:

$$[r] = [T^{-1} M].$$

Бошланғич пайтда суюқлик ичида тинч турган m массали жисмга ўзгармас $\vec{F}$ куч таъсир қилса, динамика қонунини

$$m \frac{dv}{dt} = -rv + F \qquad (38.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг ечими

$$v = \frac{F}{r}\left[1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \qquad (38.4)$$

бўлади. Бу ерда $\tau = \frac{m}{r}$ катталик *релаксация вақти* деб аталади.

(38.4) ифодадан кўринадики, қарор топган ($t \to \infty$ даги) ҳаракат тезлиги

$$v_{\max} = \frac{F}{r} \qquad (38.5)$$

га тенг экан. Мазкур тезлик жисмнинг массасига боғлиқ эмас, жисмнинг массаси фақат тезликнинг қарор топиш вақтинигина белгилайди.

Агар суюқлик ичида ҳаракат қилаётган жисм тезлиги v_0 бўлган пайтда ташқи куч олиб қўйилса, (38.3) ҳаракат тенгламаси $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau}$ кўринишга келади. Бу тенгламанинг ечими

$$n = v_0 exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

бўлиб, унинг ёрдамида релаксация вақтининг маъносини тушуниб олиш мумкин. $t = \tau$ бўлганда $v = \frac{v_0}{e} \simeq 0{,}37\, v_0$ бўлади, яъни ташқи куч олиб қўйилгач релаксация вақти давомида жисм тезлиги $e = 2{,}7$ марта камаяр экан.

Қаршилик коэффициентини ҳисоблаш анча мураккаб. R радиусли шар учун қаршилик коэффициенти ифодасини Стокс топган:

$$r = 6\pi\eta R. \qquad (38.6)$$

Бу ерда η — ҳаракатланаётган шарни ўраб турган муҳитнинг қовушоқлик коэффициенти бўлиб, унинг ўлчамлиги $[\eta] = [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]$, СИ системадаги ўлчов бирлиги эса: Па·с.

Температура кўтарилиши билан суюқликларнинг қовушоқлиги камаяди, газларда эса ортади. Бу ҳол суюқлик ва газлардаги молекулалар ҳаракати турли характерга эга эканлигини кўрсатади.

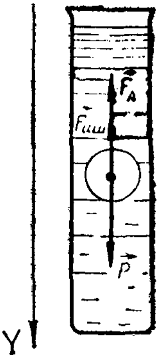
Жисмнинг шакли ва тезлик векторига нисбатан вазияти қаршилик коэффициентига жуда кучли таъсир қилади. Бунга бир варақ қоғозни вертикал ҳолатда, горизонтал ҳолатда, стрелка кўринишида ва юмалоқ қилиб ғижимлаб ташлаб кўриш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Бу ҳолдан фойдаланиб парашютлар ясалади: у йиғиб олинганда кўндаланг ўлчам камайиб, қаршилик коэффициенти ҳамда қаршилик (ишқаланиш) кучи камаяди, натижада парашютчи анча катта (50—55 м/с) тезликда туша бошлайди. Парашют очилгандан сўнг эса унинг кўндаланг ўлчами ортади. Бу эса қаршилик коэффициенти ва ишқаланиш кучининг ортишига ҳамда парашютчининг тушиш тезлигининг (2—4 м/с) камайишига олиб келади. Лекин парашютни очишга ва тормозланишга маълум вақт керак бўлади. Шу сабабли кичик баландликлардан сакрашда парашютдан фойдаланиб бўлмайди.

Катта тезликлар соҳасида қаршилик кучи жисм тезлигидан кўра тезроқ ортади, яъни у тезликнинг квадратига пропорционал бўлади. Тезлик ортиши билан қаршилик кучи бундан ҳам тезроқ орта боради.

(38.6) ифодани (38.2) тенгламага қўйиб, *Стокс формуласини* ҳосил қиламиз:

$$F_{\text{ишқ}} = 6\pi\eta Rv. \qquad (38.7)$$



78-расм.

Қовушоқ муҳитда оғирлик кучи таъсирида тушаётган шарча ҳаракатини кўрайлик (78-расм). Шарчага унинг пастга йўналган $P = mg = \rho_1 Vg$ оғирлик кучи, юқорига йўналган $F_A = \rho_2 Vg$ Архимед кучи ва $F_{\text{ишқ}} = 6\pi\eta Rv$ Стокс кучи таъсир қилади. Бу ерда m ва V — шарчанинг массаси ва ҳажми, ρ_1 ва ρ_2 — шарча материали ҳамда суюқлик зичлиги. У ҳолда шарчанинг ҳаракат тенгламасини

$$m\frac{dv}{dt} = (\rho_1 - \rho_2)\,Vg - 6\pi\eta Rv$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шарчанинг ҳажми $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, массаси $m = \rho_1 V$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}g - \frac{9}{2R^2}\frac{\eta}{\rho_1}v \qquad (38.8)$$

тенглама ҳосил бўлади. v тезлик ортиши билан тезланиш камайиб боради. Бошланғич пайтда $v_0 = 0$ бўлиб, сўнгра тезлик ортиб боради, тезланиш камая бориб, тезликнинг ортиши борган сари секинлашиб боради. (38.8) тенгламадан кўринадики, шарчанинг тезлиги

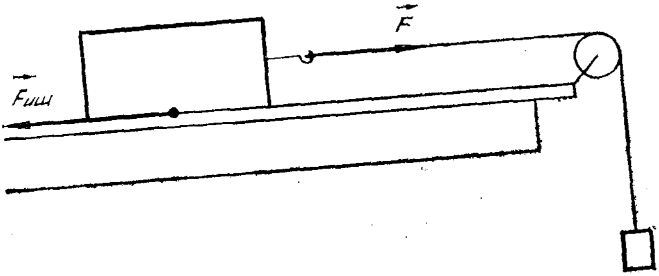
$$v_m = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\eta}\,\frac{2R^2 g}{9} \qquad (38.9)$$

катталикдан ортиши мумкин эмас. $v = v_m$ бўлганда $\frac{dv}{dt} = 0$, яъни тезлик ортмай қолади.

Шарчанинг ҳаракати мураккаб бўлади: ҳаракат бошида, $t \ll \tau$ бўлганда $\left(\tau = \frac{m}{r} = \frac{m}{6\pi\eta R} \text{ — релексация вақти}\right)$ ҳаракат тезланувчан, сўнгра тезланиш секин-аста камайиб боради ва ниҳоят, $t \gg \tau$ да ҳаракат деярли текис ҳаракат бўлади. Текис ҳаракат қарор топиши учун кетадиган вақт ҳамда босиб ўтиладиган йўл қовушоқлик коэффициентига ва шарча радиусига боғлиқ: η қанчалик катта бўлиб, R кичик бўлса, текис ҳаракат шунчалик тез қарор топади.

39-§. Тинчликдаги ишқаланиш ва сирпаниш ишқаланиши

Қуруқ ишқаланишни ўрганиш учун столнинг горизонтал сиртига брусок (тахтача) жойлаштирамиз. Брусокдаги илгакка ип боғлаб, ипнинг иккинчи учини блок орқали ўтказиб, унга юк осайлик (79-расм). Ипнинг таранглик кучи муайян F_0 қийматдан кам бўлган ҳолларда брусок жойидан қўзғалмайди. Демак, брусок тинч турган пайтда унга стол томонидан ипнинг $\vec{F}$ таранглик кучига қарама-қарши йўналган $F_{\text{ишқ}} = F \leqslant F_0$ ишқаланиш кучи таъсир қилади. Бу куч *тинчликдаги ишқаланиш кучи* ёки *тишлашиш (тутиниш) кучи* дейилади. Брусок томонидан ҳам стол сиртига айнан ўшанча миқдорда, лекин қарама-қарши йўналган ишқаланиш кучи таъсир қилади.

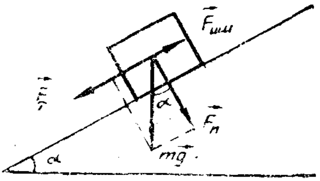


79-расм.

Ташқи куч тинчликдаги ишқаланиш кучининг энг катта F_0 қийматига эришгач, жисм сирпана бошлайди. Сирпанишдаги ишқаланиш қонунлари Амонтон (1699 й.) ва Кулон (1781 й.) томонидан кашф қилинган: *тинчликдаги ишқаланиш кучининг энг катта қиймати бир-бирига тегиб турган жисмларнинг туташ сиртларига нормал бўлган F_n босим кучига пропорционал*

$$F_0 = \mu F_n \tag{39.1}$$

бўлиб, ишқаланаётган сиртларнинг юзасига боғлиқ эмас.



80-расм.

Бу ерда μ — *ишқаланиш коэффициенти* деб аталадиган ва ишқаланаётган сиртларнинг хоссаларигагина боғлиқ бўлган доимий.

Ишқаланиш коэффициентини чегаравий бурчак усулидан фойдаланиб топиш мумкин. Бунинг учун қия текислик устида жойлашган жисм сирпана бошлаган пайтдаги қиялик бурчаги α_0 ўлчанади (80-расм). Бунда ишқаланиш кучи оғирлик кучининг тангенциал ташкил этувчисига тенг бўлади: $F_{ишқ} = mg\sin\alpha_0$ (α_0 — чегаравий бурчак), m — жисм массаси, нормал босим кучи эса $F_n = mg\cos\alpha_0$ бўлади. У ҳолда (39.1) ифода

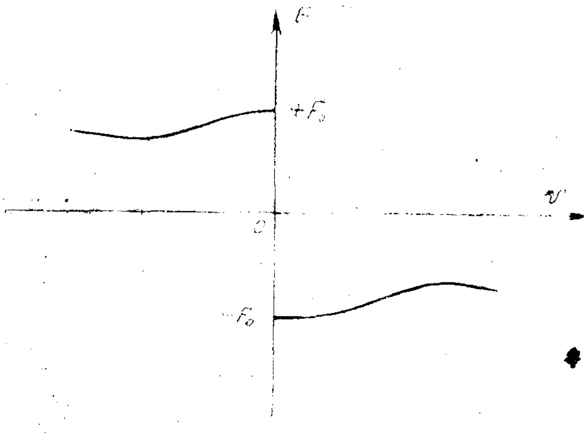
$$mg\sin\alpha_0 = \mu\, mg\cos\alpha_0,$$

ёки

$$\mu = tg\,\alpha_0 \qquad (39.2)$$

кўринишга келади, яъни тинчликдаги ишқаланиш коэффициенти сон жиҳатдан чегаравий (жисм сирпана бошлаган пайтдаги) бурчакнинг тангенсига тенг.

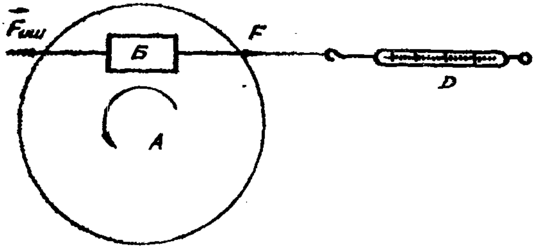
Тинчликдаги ишқаланиш кучи жисмларнинг бир-би-



81-расм.

рига тегиб турган сирти юзасига боғлиқ эмаслигини тажрибада намойиш қилиш мумкин. Тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги брусок (масалан, ғишт) ни турли ёқлари билан қия текислик устига қўямиз. Қия текисликнинг қиялигини орттира бориб, брусок қайси ёғи билан қўйилишидан қатъи назар, у қиялик бурчагининг бир хил қийматида сирпана бошлашига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

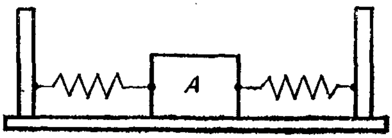
Умуман олганда, сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмларнинг нисбий ҳаракат тезлигига боғлиқ. Бу боғланиш графиги 81-расмда берилган. Тезлик $v=0$ бўлганда ишқаланиш кучининг мутлоқ (абсолют) қиймати F_0 га тенг ёки ундан кичик бўлиши мумкин. Кичик тезликларда ишқаланиш кучи деярли ўзгармайди, тезлик ортиб бориши билан у камая бориб, энг кичик қийматга эришади ва яна орта боради.



82-расм.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучини *трибометр* деб аталадиган асбоблар ёрдамида ўлчанади. Бунда синалаётган жисмлардан бири (*А*) иккинчисига (*Б*) нисбатан ҳаракатга келтирилади (82-расм). *Б* жисмни ҳаракатлантирмай туриш учун қўйилиши зарур бўлган кучни *Д* динамометр билан ўлчанади.

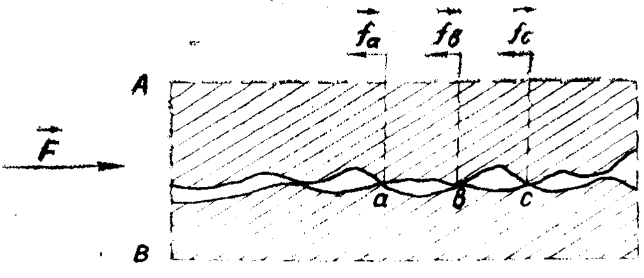
Жисмга қўйилган куч тинчликдаги ишқаланиш кучининг энг катта F_0 қийматидан кичик бўлганда жисм ҳаракатга келмаслиги натижасида турғунлик ҳодисаси юз беради. Горизонтал стол устида иккита пружина орасида *А* жисм мувозанатда турибди, дейлик (83-расм). Бу ҳолда жисмга таъсир қилаётган куч нолга тенг. Жисмни мувозанат вазиятидан бир оз ўнгга ёки чапга сурайлик. Агар деформацияланган жисмлар (пружиналар) томонидан жисмга таъсир қилаётган куч F_0 дан ортиқ бўлмаса, A жисм янги вазиятда ҳам мувозанатда қолади. Стол сиртида муқим мувозанат вазияти бўлмайди. Аксинча, жисм ҳаракатланганда мувозанатда бўладиган муайян соҳа бўлади. Бу соҳа *турғунлик соҳаси* дейилади. Турғунлик ҳодисаси стрелкали ўлчов асбобларининг сезгирлиги ва ўлчаш аниқлигини чеклаб қўяди. Агар асбобнинг стрелкаси ишқаланиш билан ҳаракатланса (ўқида), ўлчанаётган катталик муайян қийматдан ортгандагина стрелка ҳаракатга келади (бу қиймат F_0 билан белгиланади). Стрелканинг «тўхтаб» қолиши шкала бошидагина эмас, унинг ихтиёрий нуқтасида ҳам кузатилади. Шу сабабли, юксак аниқлик билан ишлайдиган ўлчов асбобларидаги стрелка ингичка, етарлича узун ва осонгина бураладиган ипдан иборат осмага ўрнатилади.



83-расм.

Қуруқ ишқаланиш қонунларини қаттиқ сиртлар учунгина қўллаш мумкин. Масалан, қор устида аҳвол бутунлай бошқача бўлади: чанғичининг оғирлиги таъсирида қор эзилиб кетмаслиги учун қорга бўлган босимни камайтириш зарур (шунинг учун ҳам чанғининг юзаси катта бўлиши керак). Чанғига суртиладиган мой ишқаланишни камайтириш учунгина эмас, балки қорнинг чанғига ёпишиб қолмаслиги учун ҳам қўлланилади.

Қуруқ сиртлар орасида ҳосил бўладиган ишқаланишни тушунтирадиган мукаммал назария ҳозирча йўқ. Ишқаланиш кучларининг ҳосил бўлишини қуйидагича тушунтириш мумкин. 84- расмда иккита қаттиқ жисмнинг



84-расм.

бир-бирига тегиб турган сиртларнинг катталаштирилган қирқими кўрсатилган. Жисмнинг сирти идеал силлиқ бўлмай, унда ҳамма вақт нотекисликлар, сирт бўйлаб нотекис жойлашган, турли катталикдаги ва турли шаклдаги дўнгликлар бўлади. Иккала жисм бир-бирига текканда мазкур нотекислик ва дўнгликлар маълум даражада деформацияланади. Бу деформациялар мазкур нуқталардаги босимга (албатта, бир-бирига тегиб турган юзадаги ўртача босимга ҳам) боғлиқ, шунинг учун улар эластик ёки ноэластик характерда бўлиши мумкин. Икки жисмнинг бир-бирига яқинлашиши, улардан бирининг дўнглиги иккинчисининг ботиқ жойларига қай даражада кириб бориши, албатта, мазкур жисмларни бир-бирига босиб турган кучга боғлиқ бўлади.

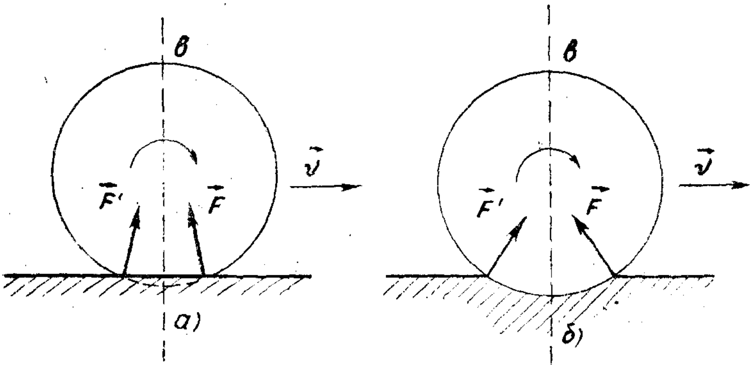
Тинчликдаги ишқаланиш кучи вужудга келганда ($F<F_0$) иккала жисм дўнгликлари орасида юзага келган кучларнинг горизонтал ташкил этувчилари жисмга таъсир қилаётган кучни мувозанатлайди ва шу тарзда ишқаланиш кучини «ҳосил қилади». 84-расмда тинчликдаги ишқаланиш кучининг ҳосил бўлиши кўрсатилган: агар A жисмга куч қўйилган бўлса, a, b, c нуқталарга яқин бўлган соҳаларда ташқи кучни мувозанатлайдиган f_a, f_b, f_c уринма кучлар вужудга келади (яққолроқ кўриниши учун мазкур кучлар юқорига кўчирилган).

Ҳаракат пайтида ($F>F_0$) ҳам иккала жисм сиртларидаги нотекисликлар бир-бирига илашади, лекин бундан ташқари улар бир-бирига урилади ҳам. Бу ҳолда урилиш пайтида юзага келадиган ўзаро таъсир кучлари биргаликда сирпанишдаги ишқаланиш кучини ҳосил қилади. Дўнгликларнинг ўзаро урилиши уларнинг турли йўналишдаги тебранишларини вужудга келтириб, бу тебранишлар ишқаланаётган жисмлар бўйлаб тарқалади. Шуни ҳам ҳисобга олиш зарурки, урилиш пайтида дўнгликлар ва сиртларнинг нотекисликларининг ноэластик деформациялари ҳам муҳим роль ўйнайди.

40- §. Думаланиш ишқаланиши

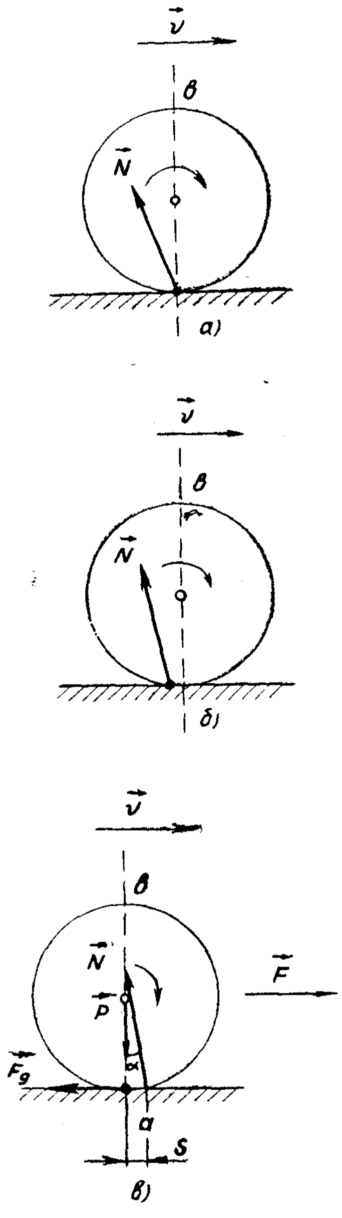
Цилиндр шаклидаги қаттиқ жисм горизонтал текис сирт бўйлаб сирпанишсиз думалаганда энергиянинг диссипацияси (механик энергиянинг иссиқлик энергиясига айланиши) билан боғлиқ бўлган ҳодиса рўй бериб, цилиндр секин-аста тўхтайди; бунда ҳавонинг қаршилик кучидан ташқари, цилиндр ҳамда горизонтал сирт материалига боғлиқ бўлган *думаланиш ишқаланиш кучи* вужудга келади. Цилиндр думалаб кетаётганда уни сиртга ёпиштирувчи босим кучи таъсирида ҳам цилиндр, ҳам текислик деформацияланади (85-расм). Агар бу деформация эластик деформация бўлса, цилиндр билан сирт орасидаги ўзаро таъсир кучлари цилиндр маркази орқали ўтказилган вертикал *ав* чизиққа нисбатан симметрик бўлиши керак. Бу ҳолда барча эластик деформация кучларининг тенг таъсир этувчиси вертикал йўналишга эга бўлиб, унинг цилиндр ўқига нисбатан моменти нолга тенг бўлади. Шунинг учун бу кучлар цилиндрнинг ҳаракатига таъсир қилмайди, яъни ишқаланиш кучлари вужудга келмайди.

Демак, думаланишдаги ишқаланиш кучларини тушунтириш учун цилиндр ҳамда текис сирт ноэластик деформацияланади, деб ҳисоблаш зарур. Албатта, бу ҳолда цилиндрга текис сирт томонидан таъсир қилаётган кучлар *ав* текисликка нисбатан симметрик бўлмайди (85-*б* расм). Шунинг учун бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳаракатга қарама-қарши йўналган горизонтал ташкил этувчига эга бўлиб, кучларнинг цилиндр ўқига нисбатан моменти думаланиш йўналишига қарама-қарши бўлади.



85-расм.

Цилиндр думалаётганда жисмлар сиртларининг бирбирига тегиб турган қисмлари ҳаракатда бўлгани сабабли, тўхтовсиз равишда жисмларнинг янгидан-янги қисмлари деформацияланиб, илгари деформацияланган қисм-



86-расм.

ларда эса деформация йўқолиб ёки қисман йўқолиб боради.

Шуни таъкидлаш керакки, думалаб кетаётган цилиндрга таъсир қилаётган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси орқа томонга оғган бўлади, чунки цилиндр манфий чизиқли тезланишга эга бўлади. Тенг таъсир этувчи куч цилиндр марказининг қайси томонидан ўтганини топайлик. Унинг қўйилиш нуқтаси вертикал *ab* текисликда ёки унинг орқасида бўлиши мумкин эмас (86-*а* ва *б* расмлар), чунки бу ҳолда мазкур кучлар цилиндрга мусбат бурчак тезланиш берар эди. Демак, $\vec{N}$ кучнинг қўйилиш нуқтаси *ab* чизиқдан олдинда бўлиб (86-*в* расм), унинг таъсир чизиғи цилиндрнинг марказидан юқорироқдан ўтиши зарур. $\vec{N}$ кучнинг горизонтал ташкил этувчиси $\vec{F}_д$ думаланишдаги ишқаланиш кучини ташкил қилади. $\vec{N}$ куч қўйилган нуқтадан *ab* вертикал чизиққача бўлган *s* масофа *R* радиусдан анча кичик бўлгани сабабли (α оғиш бурчаги жуда кичик) $\vec{N}$ кучнинг сон қиймати тахминан цилиндрни текисликка босиб турган кучга (мазкур мисолда цилиндрнинг оғирлигига) тенг бўлади: $N \approx P$.

Цилиндр бир текис думалаётган пайтда $|\vec{F}| = |\vec{F}_д|$, яъни цилиндрни думалатаётган $\vec{F}$

куч $\vec{F}_{\text{д}}$ ишқаланиш кучига тенг бўлади (86- *в* расм). Бу ҳолда $\vec{N}$ куч тахминан цилиндр ўқи орқали ўтиши керак. Цилиндрнинг $\vec{P}$ оғирлик кучи ва $\vec{F}$ ташқи куч ҳам тахминан цилиндр ўқи орқали ўтади. Шунинг учун

$$P = N\cos\alpha. \quad F = N\sin\alpha = F_{\text{д}} \qquad (40.1)$$

деб ёзиш мумкин. α бурчак жуда кичик бўлганидан, мазкур ифодалар

$$P \approx N, \quad F_{\text{д}} \approx N\cdot\alpha \approx P\cdot\frac{s}{R} \qquad (40.2)$$

кўринишга келади. Бу муносабатни

$$F_{\text{д}}\cdot R \approx P\cdot \text{s} \qquad (40.3)$$

деб ёзиш мумкин. Бундан кўринадики, думаланишдаги ишқаланиш кучининг моменти нормал босим кучи P билан s масофа кўпайтмасига тенг экан. Бу ердаги s катталик *думаланишдаги ишқаланиш коэффициенти* дейилади. Мазкур коэффициент узунлик бирлигида ўлчанади. У думаланиш тезлигига ва цилиндр радиусига боғлиқ бўлмай, фақат ўзаро таъсирлашаётган жисмларнинг материалига ва сиртларининг ҳолатига боғлиқ. Матерал қаттиқлиги ва сиртнинг тозалиги ортиб бориши билан s камаяди.

4- жадвалда бир қатор ҳоллар учун думаланиш ишқаланиш коэффициенти қийматлари келтирилган:

4- жадвал

Ўзаро ишқаланувчи сиртлар	s (см)
Ёғоч билан ёғоч	0,05=0,06
Юмшоқ пўлат билан юмшоқ пўлат	0,03=0,04
Тобланган пўлат билан пўлат	≈0,001

Думаланишдаги ишқаланиш кучи сирпанишдагидан анча кичик. Шунинг учун замонавий машиналарда шарикли ва роликли подшипниклар кенг қўлланилади. Масалан, сирпанишли подшипникка эга бўлган бир тоннали юкни жойидан қўзғатиш учун 600 Н куч зарур бўлса, ўшанча массали шарикли подшипникли юкни қўзғатиш учун тахминан 40 Н куч кифоя. Шарикли подшипникларсиз ўта катта тезликли машиналарни ясаш мумкин эмас: мазкур машиналардаги тезлик 10^5 айл/мин дан ортиқ бўлади. Бундай тезликда сирпанишли подшипник эриб кетиши мумкин.

Думаланиш ишқаланишида жисмларнинг бир-бирига тегиб турган қисмлари узлуксиз ҳаракатда бўлиб, улар тезда бир-бирига тегиб турган ҳолатдан чиқиб кетадиган бўлса, *буралиш ишқаланиши*да жисмларнинг қисмлари узоқ вақт бир-бирига тегиб туради.

Айланаётган пилдироқ ўқининг полга ишқаланиши ёки компас стрелкасининг таянч бўлиб хизмат қилаётган игна учига ишқаланиши буралиш ишқаланишига мисол бўлиши мумкин. Бунда деформация натижасида жисмларнинг бир-бирига тегиб туриши бир нуқта билан чекланмай, доира ёки эллипс шаклидаги муайян юзадан иборат бўлади.

Буралишдаги ишқаланиш жисмларнинг бир-бирига тегиб турган сиртларидаги сирпаниш ҳисобига вужудга келади. Шунинг учун буралишдаги ишқаланишни камайтириш учун жисмларнинг бир-бирига тегиб турган юзаларини кичиклаштиришга ҳаракат қилинади. Бунинг учун эгрилик радиуси жуда кичик бўлган учли найзалардан фойдаланилади. Бундан ташқари, найзалар ва таянч сиртларини ўта қаттиқ материаллардан тайёрланилади. Масалан, соатлардаги буралиш ишқаланишини камайтириш мақсадида найзанинг учига ўрнатиш учун агат ёки ёқут каби қаттиқ материаллар ишлатилади.

41-§. Табиатда ва техникада ишқаланиш кучлари

Ишқаланиш кучларини енгиш учун муайян миқдорда иш бажариш, яъни энергия сарфлаш зарур. Шу сабабли, ишқаланишнинг зарарли эканлиги ҳақидаги тасаввур кенг тарқалган. Лекин, ишқаланиш кучлари табиатда жуда катта аҳамиятга эга. Кундалик ҳаётимизда ҳам ишқаланиш кўпинча фойдали бўлади. Музлама пайтида пиёдалар ва транспорт воситаларининг ҳаракатланиши қанчалик қийинлашишини эслаб кўрайлик. Бунга сабаб — йўл сирти билан пиёдалар пойабзалининг таглиги ёки транспорт воситаси ғилдираги орасида ишқаланиш кескин камайганлигидир.

Ишқаланиш бўлмаса қоқилган михлар тушиб, ҳамма резьбали бирикмалар бўшаб кетар, тугмалар ўрнида турмас эди. Мебелни эса, у сирпаниб кетиб қолмаслиги учун полга маҳкамлаб қўйиш керак бўларди.

Автомобиль ва поездни ғилдирак билан йўл сирти (ёки рельс) орасида вужудга келадиган ишқаланиш кучлари ҳаракатга келтиради. Шкивлар билан тасма орасидаги ишқаланиш кучлари ҳаракатни бир ғилдиракдан иккинчи ғилдиракка узатишга имкон беради. Келтирилган мисоллардан кўринадики, қуруқ ишқаланиш бўлмаса, кўпчилик ҳаракатларни амалга ошириб бўлмайди. Одатда, қуруқ ишқаланиш ҳаракатга сабаб бўлган ҳолларда, гарчи ишқаланиш кучлари таъсир қилаётган жисмлар ҳаракатланаётган бўлса ҳам, тинчликдаги ишқаланиш кучлари асосий роль ўйнайди. Масалан, қайишли (тасмали) узатмаларда гарчи ғилдирак айланиб, қайиш ҳам ҳаракатда бўлса-да, улар бир-бирига нисбатан деярли сирпанмайди, улар орасида тинчликдаги ишқаланиш таъсир қилади. Бу кучнинг қиймати айлантирилаётган механизм томонидан шкивға таъсир қилаётган кучга боғлиқ. Агар бу кучлар тинчликдаги ишқаланиш кучининг энг катта қийматидан ортиқ бўлса, ғилдирак билан қайиш орасида сирпаниш бошланади. Қайиш нормал ишлаши учун сирпаниш бўлмаслиги керак.

Ғилдиракли транспорт воситалари ҳаракатланганда ҳам шунга ўхшаш ҳол бўлади. Одатда ғилдиракларнинг ҳаракати сирпанишсиз бўлади, шу сабабли ғилдиракка ер томонидан таъсир қилаётган куч — тинчликдаги ишқаланиш кучидир. Транспорт воситалари бошқарувчи ғилдирагининг ишлаши ва тормозланиш жараёни ҳам тинчликдаги ишқаланиш кучи хусусиятларига асосланган.

Айнан тинчликдаги ишқаланиш ўзаро таъсирлашаётган жисмлар системасидаги ички кучлардан бирини мувозанатлайдиган ташқи кўч ролини ўйнаб, бу пайтда ички кучларнинг яна бир система жисмларини ҳаракатга келтиради. Шунинг учун баъзан тинчликдаги ишқаланишни бошқарувчи ишқаланиш деб ҳам юритилади.

Кундалик ҳаётимизда ҳар қадамда ишқаланиш кучлари таъсирига дуч келамиз. Девордан михни суғураётиб ишқаланиш кучини енгамиз. Автомобиль ёки бошқа транспорт воситалари горизонтал йўлда доимий тезлик билан ҳаракат қилаётганда двигателнинг қуввати автомобиль механизмларидаги ҳамда унинг ғилдираклари билан йўл орасидаги турли ишқаланишларни енгишга сарф қилинади. Турли машиналар, транспорт воситалари, самолётдаги ишқаланиш кучларини енгишга сарф бўлган механик энергияни тиклаш учун жуда кўп миқдорда турли хил ёнилғи сарф бўлади. Бундан ташқари, ишқаланиш кучлари машина ва механизмларнинг емирилишига сабаб бўлади. Шунинг учун ишқаланишни камайтириш жуда катта иқтисодий аҳамиятга эга.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучи, умуман олганда, жисмларнинг нисбий ҳаракати тезлигига, уларнинг табиатига ва сиртларнинг ҳолатига боғлиқ. Сирпанишда жисмлар фақат сиртдаги ғадир-будурликларнинг дўнг жойлари билангина бир-бирига тегиб ўтади. Дўнгликларнинг умумий юзаси сирпанаётган сирт юзаларидан анча кичик бўлади. Дўнгликлар бир-бирига тишлашиб ўтгани сабабли, улар деформацияланиб, емирилади. Шунинг учун сирпаниш ишқаланишини камайтириш учун ишқаланаётган сиртларни иложи борича силлиқлашга ҳаракат қилинади. Лекин бундай силлиқлашни фақат маълум даражагача амалга ошириш мумкин. Сиртлар жуда ҳам силлиқ бўлганда улар орасидаги ишқаланиш кучлари камаймай, аксинча, ортиб кетади. Бу ҳодисани ўзаро тегиб турган сирт молекулалари орасидаги ўзаро таъсир кучларининг намоён бўлиши билан изоҳлаш мумкин. Бунда ўзаро таъсирлаша оладиган масофада бўлган молекулалар сони кескин ортиб кетади.

Ишқаланишни камайтириш учун одатда ишқаланаётган сиртларга мой суртилади. Бунда ишқаланиш кучи 8—10 марта камаяди. Мой ишқаланаётган сиртлардаги ғадир-будурликлар оралиқларини тўлдириб, улар орасида юпқа қатлам ҳосил қилади. Ишқаланаётган сиртлар деярли бир-бирига тегмайди, бунда фақат суюқликнин айрим қатламларигина бир-бирига нисбатан сирпанади Шундай қилиб, қаттиқ жисмларнинг ташқи ишқаланиши суюқликнинг анча кичик бўлган ички ишқаланиши била алмаштирилади.

Аммо ишқаланиш кучларини камайтиришнинг эн самарали усули — сирпаниш ишқаланишини думаланиш ишқаланиши билан алмаштиришдир. Бунда шарикл ёки роликли подшипниклардан фойдаланилади. Бу усу билан ишқаланиш кучларини кескин камайтириш мумкин.

Ҳозирги пайтда ишқаланишни камайтиришнинг борган сари кенгроқ қўлланилаётган усули — бир-бириг тегиб ҳаракатланаётган жисмлар орасида «ҳаво ёстиғи» ҳосил қилишдир. Бунда суюқлик (мой) нинг ички ишқаланиши эмас, балки ундан анча кичик бўлган газ (ҳаво) даги ички ишқаланиш мавжуд бўлади.

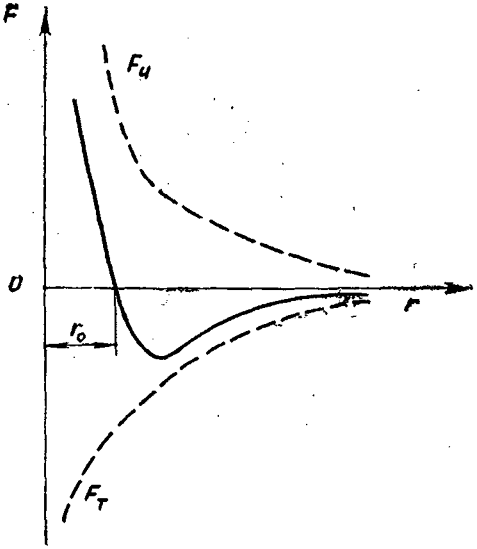
VIII боб

ЭЛАСТИКЛИК КУЧЛАРИ

42- §. Эластик деформация турлари

Қаттиқ жисм динамикасини ўрганганда (VI боб) абсолют қаттиқ жисм тушунчасидан фойдаланган эдик. Лекин табиатда абсолют қаттиқ жисм бўлмайди, чунки куч таъсирида барча реал жисмларнинг шакл ва ўлчамлари ўзгаради, яъни улар деформацияланади. Ташқи кучлар таъсири тўхтагандан сўнг жисмнинг бошланғич ўлчами ва шакли тикланса, жисмнинг деформацияси *эластик деформация* дейилади. Ташқи кучлар таъсири тўхтагандан кейин ҳам деформация йўқолмаса (сақланиб қолса), уни *пластик* (ноэластик ёки қолдиқ) *деформация* деб аталади. Реал жисмларнинг деформацияси одатда пластик деформация бўлади, чунки ташқи кучлар таъсири олингандан кейин у тўласича йўқолмайди. Лекин қолдиқ деформация жуда оз бўлганда уни ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Қаттиқ жисм зарралари кристалл панжарани ташкил қилиб, муайян мувозанат вазиятига эга бўлади (аниқроғи, улар



87-расм.

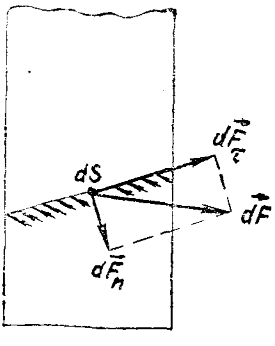
мазкур вазият атрофида тебранма ҳаракат қилади). Жисм чўзилганда унинг зарралари орасида тортишиш кучлари вужудга келади, сиқилганда эса ўзаро итаришиш кучлари кучлироқ намоён бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам жисм ўз ҳажмининг ўзгаришига қаршилик кўрсатади. Тортишиш ва итаришиш кучларининг зарралар орасидаги масофага боғланиши ҳар хил бўлиб, мувозанат вазиятида мазкур кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Ўзаро тортишиш $F_{\text{т}}$, итаришиш $F_{\text{и}}$ кучларининг ҳамда уларнинг тенг таъсир этувчиси F нинг қўшни молекулалар орасидаги r масофага боғланиши 87-расмда келтирилган (молекулалардан бири координаталар бошида, иккинчиси эса ундан r масофада жойлашган). Мувозанат вазияти r_0 масофага мос келади. Расмдан кўринадики, $r > r_0$ да (жисм чўзилганда) зарралар орасида тортишиш (манфий) кучлари ортади, $r < r_0$ да (жисм сиқилганда) эса зарралар орасида итаришиш кучлари орта боради. Бу ҳол эса эластик кучларни вужудга келтиради.

Эластик деформацияланган жисмни фикран икки қисмга ажрайдиган қилиб қирқайлик (88-расм). Бу қисмларнинг ҳар бирига таъсир қилаётган ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси мазкур қисмга иккинчи қисм томонидан таъсир қилаётган эластиклик кучлари билан мувозанатлашади. Жисм кесимининг бирлик юзасига таъсир қилаётган нормал кучни *нормал кучланиш*, уринма кучни эса *уринма кучланиш* деб аталади:

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS}, \quad \tau = \frac{dF_\tau}{dS}. \qquad (42.1)$$

Кучланишни паскалларда ўлчанади:

$$1\,\text{Па} = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

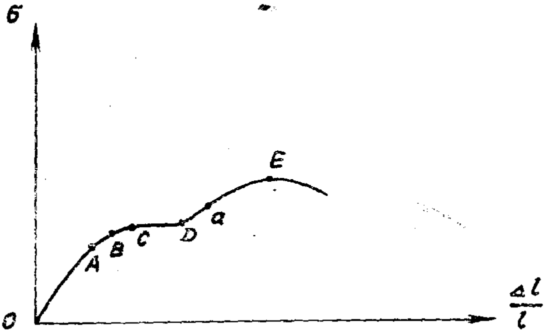


88-расм.

Деформация катталигининг (масалан, Δl чўзилишнинг) ўзгараётган катталикнинг бошланғич қийматига нисбати $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ *нисбий деформация* дейилади.

Тажрибалар кўрсатадики, ташқи куч билан унинг вужудга келтирган деформацияси орасидаги боғланиш анча мураккаб. Масалан, S кесимли ва l узунликка эга бўлган тўғри стержень чўзилганда σ

кучланишнинг кичик қийматларида стерженнинг $x = \Delta l$ чўзилиши σ га пропорционал бўлади (89-расмдаги чўзилиш диаграммасининг *OA* қисми). *A* ҳолатга мос келган $\sigma_{\text{пр}}$ кучланиш *пропорционаллик чегараси* дейилади. Кучни орттиришда давом этсак, стержень чўзилиши тезроқ орта боради (*AB* қисм). Лекин шунда ҳам деформация эластик характерини сақлаб қолиши мумкин. *B* ҳолатга мос келган $\sigma_{\text{эл}}$ кучланишни *эластиклик чегараси* дейилади. *AB* қисм унча катта эмас, шунинг учун амалдаги ҳисобларда $\sigma_{\text{эл}} = \sigma_{\text{пр}}$ деб олиш мумкин.



89-расм.

Кучнинг бундан кейинги ортиб бориши қолдиқ деформация билан характерланади. Диаграмманинг *CD* қисмида куч ортмаса ҳам деформация ўз-ўзидан орта бошлайди. *C* вазиятга мос келган σ_0 кучланишни *оқиш чегараси* дейилади. *D* ҳолатдан бошлаб эластиклик кучлари яна орта боради, яъни жисм яна чўзилишга қаршилик кўрсата бошлайди. Жисмни емирилишга (узилишга) олиб келмайдиган энг катта кучланиш *мустаҳкамлик чегарасига* мос келади (*E* нуқта). Ташқи кучни яна орттирсак, эластиклик кучлари кескин камайиб, жисм қаршиликсиз чўзилади ва тезда узилиб кетади.

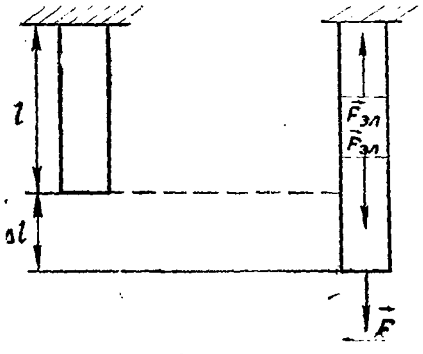
Эластик деформациянинг жуда кўп турлари мавжуд: бир томонлама чўзилиш (ёки сиқилиш), ҳар томонлама чўзилиш (ёки сиқилиш), эгилиш, силжиш, буралиш ва бошқалар. Уларнинг ҳаммаси ҳам соф ҳолда учрайвермайди, аммо уларнинг кўпчилигини бир неча содда турдаги деформацияларга келтириш мумкин. Масалан, стерженнинг эгилишини бир жинсли бўлмаган чўзилиш ва сиқилишга, буралишни бир жинсли бўлмаган силжишга, силжишни эса ўзаро тик йўналишлардаги бир жинсли бўлмаган чўзилиш ва сиқилишга келтирилади. Ҳар қандай мураккаб эластик деформация энг асосий ҳисобланган икки хил деформацияга: чўзилиш (ёки сиқилиш) ва силжишга келтирилишини исботлаш мумкин.

43- §. Гук қонуни. Эластиклик модули

Ҳар қандай турдаги деформацияда жисмда эластиклик кучлари вужудга келади. 1675 йилда Р. Гук (1645—1703) эластиклик кучларининг катталиги ва йўналиши деформация турига ва унинг катталигига боғлиқ бўлишини аниқлади. Гук томонидан яратилган қонунга кўра, деформациялар кичик бўлганда эластиклик кучлари деформация катталигига пропорционал бўлади.

Турли хил деформацияларда эластиклик кучлари ва Гук қонуни қандай бўлишини кўриб чиқамиз.

1. **Бир томонлама чўзилиш (ёки сиқилиш).** Бир учи маҳкамланган, иккинчи учига уни чўзувчи ташқи $\vec{F}$ куч қўйилган стерженни олайлик (90-расм). Қўйилган куч таъсирида стерженнинг l узунлиги Δl га ортади (чўзилади), лекин куч олингач, деформация ҳам йўқолади (эластиклик чегарасигача). Стержень чўзилганда унинг барча кесимларида $\vec{F}_{\text{эл}}$ эластиклик кучлари вужудга келади. Деформацияни характерловчи катталик сифатида Δl *мутлоқ чўзилиш* (чўзилишда мусбат, сиқилишда эса манфий) ёки *нисбий чўзилиш* $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ни олиш мумкин.



90-расм.

Нисбий чўзилиш стерженнинг узунлиги бошланғич узунлигининг қанча қисмига ўзгарганини кўрсатади. Уни стерженнинг 1 м (ёки 1 см) узунликка эга бўлган қисмининг чўзилиши деб ҳам қараш мумкин. Деформация бир жинсли бўлганда жисмнинг барча қисмларининг нисбий чўзилиши бир хил бўлади, яъни у мазкур деформацияни тўласича характерлайди.

Эластик деформацияда эластиклик кучи мутлоқ чўзилишга пропорционаллиги ($\vec{F}_{эл}$ эластиклик кучи сон жиҳатдан қўйилган $\vec{F}$ ташқи кучга тенг)

$$F = k \cdot \Delta l \qquad (43.1)$$

ни

$$\sigma S = k \varepsilon l \qquad (43.2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ифодадан нормал кучланишни топамиз:

$$\sigma = \frac{kl}{S} \cdot \varepsilon.$$

Бу ерда $E = \frac{kl}{S}$ белгилаш киритсак,

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad (43.3)$$

ифода ҳосил бўлади. Бу ерда E доимий *чўзилиш модули* (ёки *Юнг модули*) деб аталиб, жисмнинг ўлчамларига боғлиқ бўлмайди, фақат материал хоссаларигагина боғлиқ бўлади. Юнг модули ҳам σ бирликлари билан (Па) ўлчанади.

(43.1) ва (43.3) формулалар *Гук қонунини* ифодалайди. (43.3) ифодадан кўринадики, Юнг модули сон жиҳатдан бирга тенг бўлган ($\varepsilon = 1$) нисбий деформация ҳосил қиладиган нормал кучланишга тенг. Бу ҳол эса, $\Delta l = l$ га мос келади, яъни Юнг модули сон жиҳатдан стерженни икки марта чўзадиган кучланишга тенг. Каучукдан бошқа ҳеч қандай материал бу даражадаги чўзилишга чидамайди ва ундан анча кичик кучланишлардаёқ узилади.

Чўзилиш деформациясида жисмнинг кўндаланг кесими кичраяди. Буни тажрибада кўриш мумкин. Вертикал резина арқонга зич қилиб металл ҳалқа кийгизиб, арқонни чўзилса ҳалқа пастга сирғаниб тушади. Жисм чўзилганда унинг ҳажми ҳамма вақт ортади, сиқилганда эса камаяди. Радиуси r бўлган доиравий кесимли стержень берилган бўлсин.

$$\varepsilon_к = \frac{\Delta r}{r} \qquad (43.4)$$

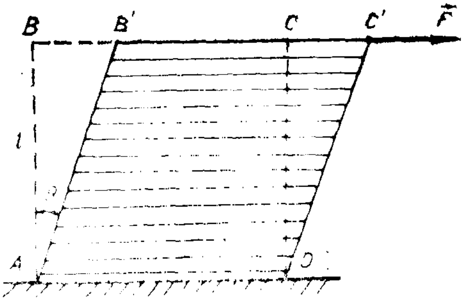
катталик *чўзилишдаги кўндаланг деформация* дейилади. Мазкур стержень ҳажмининг ўзгариши

$$\Delta V_1 = \pi r^2 l \,[(1+\varepsilon)\,(1-\varepsilon_к)^2 - 1] = \pi r^2 l \,(\varepsilon - 2\varepsilon_к)$$

га тенг, чунки жуда кичик бўлган нисбий деформацияларнинг юқори даражаларини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

$\mu = \frac{\varepsilon_к}{\varepsilon}$ катталик *Пуассон коэффициенти* деб аталади. $\Delta V > 0$ бўлганлигидан, ҳамма вақт $\mu < 0,5$ тенгсизлик бажарилади. Кўпчилик материаллар учун Пуассон коэффициенти 0,5 га яқин бўлади. Сўнгги ифодадан кўринадики, тажрибада жисм ҳажмининг ўзгарганини пайқаш қийин. Пўкак учун эса μ анча кичик, шунинг учун уни манометр билан уланган герметик (жипс қилиб беркитилган) идиш тубига ўрнатиб, сиқилса, идиш ичидаги газ босими (пўкак ҳажмининг ҳам) камайганини сезиш мумкин. Чўзилганда стерженнинг ҳажми ортганини намойиш қилиш эса анча қийин.

Шундай қилиб, бир жинсли моддаларнинг эластиклик хусусиятлари Юнг модули ва Пуассон коэффициенти билан характерланади. Лекин бу фикр изотроп (ҳамма йўналишда хусусиятлари бир хил бўлган) жисмлар учунгина тўғри. Кристалларнинг деформацияси ташқи кучларнинг таъсир йўналишигагина боғлиқ бўлмай, бу йўналишнинг кристаллографик ўқларга нисбатан вазиятига ҳам боғлиқ бўлади.



91-расм.

2. Силжиш. Бир ёқи маҳкамланган параллелепипеднинг қарама-қарши ёқига шу ёқ текислиги бўйлаб йўналган $\vec{F}$ кучни қўйиб (91-расм), силжиш деформациясини ҳосил қилиш мумкин. BB' кесма BC қатламнинг AD қатламга нисбатан *мутлақ силжиши* деб аталади. Расмдан кўринадики, турли қатламларнинг мутлақ силжиши ҳар хил: қатлам қўзғалмайдиган қатламдан қанчалик узоқ бўлса, унинг мутлақ силжиши шунчалик катта бўлади. Лекин мутлақ силжишнинг мазкур қатлам билан маҳкамланган қатлам орасидаги масофага нисбати барча қатламлар учун бир хил бўлиб, силжиш бурчаги тангенсига тенг бўлади (мазкур нисбат *нисбий силжиш* дейилади):

$$\gamma = \frac{BB'}{l} = \operatorname{tg}\theta. \tag{43.5}$$

Силжиш бурчаги кичик бўлган ҳолларда $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ бўлиб, $\gamma = \theta$ бўлади. Шундай қилиб, кичик силжишларда нисбий силжиш радианларда ўлчанган силжиш бурчагига тенг бўлади.

Силжиш деформациясида жисм ичида ташқи кучни мувозанатлайдиган эластиклик кучлари вужудга келади, яъни

$$F_{\text{эл}} = F.$$

Кичик деформацияларда мутлоқ силжиш $\vec{F}$ кучга ва силжиётган қатламдан маҳкамланган қатламгача бўлган l масофага тўғри пропорционал, силжиётган қатламнинг S юзига тескари пропорционал бўлади:

$$BB' = \beta \frac{lF}{S}, \tag{43.6}$$

бу ерда β — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, *силжиш коэффициенти* деб аталади. Тажрибалар кўрсатишича, мазкур коэффициент фақат намуна материалигагина боғлиқ бўлади, яъни у жисмнинг силжиш деформациясидаги эластиклик хоссаларининг миқдорий характеристикаси ҳисобланади. Амалда кўпинча β га тескари бўлган, *силжиш модули* деб аталадиган

$$G = \frac{1}{\beta}$$

катталик билан иш кўрилади.

$\tau = \frac{F}{S}$ нисбат *қирқувчи кучланиш* дейилади. У сон жиҳатдан бирлик юзага қўйилган, мазкур юзага уринма бўйлаб йўналган кучга тенг бўлади. (43.6) ифодани l га бўлиб, (43.5) муносабатни ҳисобга олсак,

$$\gamma = \beta\tau \tag{43.7}$$

ифода ҳосил бўлади, яъни нисбий силжиш қирқувчи кучланишга тўғри пропорционал бўлади. (43.7) муносабатни

$$\tau_{\text{элас}} - G\cdot\gamma \tag{43.8}$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин ($\tau_{\text{элас}}$ — вужудга келадиган тангенциал кучланиш), яъни кичик деформацияларда тангенциал кучланиш нисбий силжишга пропорционал бўлади.

(43.7) ва (43.8) муносабатлар силжиш учун Гук қонунини ифодалайди.

Эластиклик назариясида Юнг модули E, Пуассон коэффициенти μ ва силжиш модули G орасида

$$G = \frac{E}{2\,(1+\mu)]} \tag{43.9}$$

муносабат мавжудлиги исбот қилинади.

3. **Ҳар томонлама сиқилиш.** Юқорида айтиб ўтилганидек, жисм бир томонлама чўзилганда унинг кўндаланг кесими кичраяди, сиқилганда эса катталашади, бунинг натижасида жисмнинг ҳажми ўзгаради. Чўзилганда қирралари 1 метрдан бўлган куб узунлиги $(1+\varepsilon)$ м бўлган параллелепипедга айланади. Кубнинг кўндаланг ўлчамлари $\mu\varepsilon$ га камаяди, яъни кубнинг кўндаланг кесими $(1-\mu\varepsilon)^2$ бўлиб қолади. Куб ҳажмининг нисбий ўзгариши,

$$\frac{\Delta V}{V} = (1+\varepsilon)\,(1-\mu\,\varepsilon)^2 - 1$$

га тенг. Қавсларни очиб, иккинчи тартибли кичик миқдорларни ҳисобга олмасак,

$$\frac{\Delta V}{V} = (1-2\,\mu)\,\varepsilon$$

ифода ҳосил бўлади. $\mu < 0{,}5$ эканлигидан, чўзилишда $(\varepsilon > 1)$ жисмнинг ҳажми $(1-2\mu)\,\varepsilon$ га ортади, сиқилишда эса $(\varepsilon < 1)$ жисм ҳажми шунчага кичраяди.

Ҳар томонлама (гидростатик) сиқилишда ҳажмнинг нисбий ўзгариши бир томонлама сиқилишдагидан (ўзгаришдан) уч марта катта, яъни

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\,(1-2\,\mu)\,\varepsilon \tag{43.10}$$

эканлигини исботлаш мумкин.

Гук қонунига кўра нисбий чўзилиш

$$\varepsilon = \alpha p$$

формула билан аниқланади. Бу ерда α — чўзилиш коэффициенти, p — нормал кучланиш (куб ёғига бўлган босим). У ҳолда (43.10) формула

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\,(1-2\,\mu)\,\alpha p,$$

ёки

$$\frac{\Delta V}{V} = \varkappa \cdot p \qquad (43.11)$$

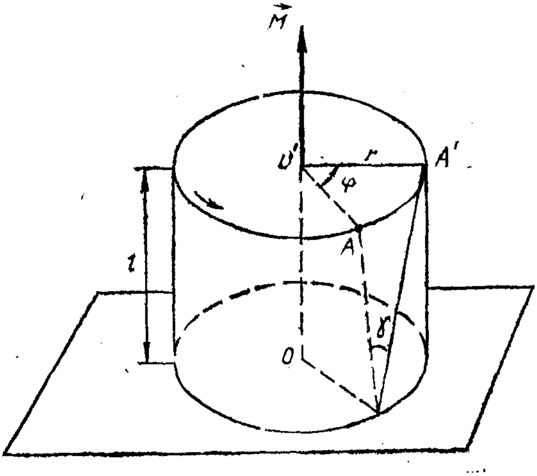
кўринишга келади.

Шундай қилиб, ҳар томонлама сиқилганда жисм ҳажмининг нисбий ўзгариши ташқи босимга тўғри пропорционал бўлади. Бундан кўринадики, ҳар томонлама сиқилиш ҳам Гук қонунига бўйсунади.

$\varkappa = 3\ (1 - 2\mu)\ \alpha$ катталик *сиқилувчанлик коэффициенти* деб аталади (тескари катталик эса *сиқилувчанлик модули* деб юритилади). (43.11) муносабатдан

$$\varkappa = \frac{\Delta V}{V \cdot p} \qquad (43.12)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бундан кўринадики, сиқилувчанлик коэффициенти сон жиҳатдан жисм ҳажмининг бирлик босим таъсиридаги нисбий ўзгаришига тенг. Пуассон коэффициенти $\mu \approx \frac{1}{2}$ бўлган моддаларда сиқилувчанлик коэффициенти жуда кичик бўлиб, улар деярли сиқилмайди. Суюқликларда айнан ана шундай ҳол кузатилади.



92-расм.

4. Буралиш. Юқорида кўриб ўтилган тўғри бурчакли параллелепипедда кузатиладиган силжишда деформация бир жинсли бўлади, яъни ўзаро параллел қатламларнинг нисбий силжиши γ бир хил бўлади. Буралишда эса бир жинсли бўлмаган силжиш кузатилади. Буралиш деформациясини ҳосил қилиш учун узунлиги l ва радиуси r бўлган доиравий цилиндр асосларидан бирини қўзғалмас қилиб маҳкамлаб, иккинчи учига эса уринма кучлар жуфти қўйилган бўлиши зарур (92-расм). Мазкур жуфт куч цилиндрнинг OO' ўқи бўйлаб йўналган айлантирувчи $\vec{M}$ моментни ҳосил қилади. Бунинг натижасида цилиндрнинг $\vec{M}$ айлантирувчи момент таъсир қилаётган (юқоридаги) асоси φ бурчакка бурилади. Расмдан кўринадики, кичик бурилишларда нисбий силжиш

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{|\overset{\smile}{AA'}|}{l} = \frac{r \cdot \varphi}{l}$$

га тенг бўлади; стержень асосига параллел бўлган қатламларнинг силжиши эса маҳкамланган асосдан қанчалик узоқ бўлса, шунчалик катта бўлади.

Тажриба кўрсатишича, буралиш бурчаги φ қўйилган айлантирувчи M моментга пропорционал бўлади:

$$\varphi = k \cdot M, \tag{43.13}$$

бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, *буралишдаги эластиклик коэффициенти* деб аталади. Назарий усул билан мазкур коэффициентни ифодаловчи

$$k = \frac{2l}{\pi r^4 G} \tag{43.14}$$

формулани келтириб чиқариш мумкин.

(43.13) формула буралишдаги Гук қонунини ифодалайди. (43.14) ифодадан кўринадики, бу формулага кирувчи эластиклик коэффициенти k цилиндрнинг узунлигига қараганда унинг радиусига кўпроқ боғлиқ бўлади. Ингичка симлар нисбатан кичик бўлган айлантирувчи момент таъсирида ҳам анча катта бурчакларга буралиши мумкин. Шу сабабли улар буралма тарози, кўзгули гальванометр каби ўлчов асбобларининг сезгир осма системаларини тайёрлашда кенг қўлланилади.

44-§. Эластик деформацияланган жисмнинг потенциал энергияси

Жисмлар деформацияланганда деформацияловчи куч иш бажаради. Ўз навбатида, деформацияланган жисм ҳам ўз ҳолига қайтишда муайян миқдорда иш бажаради. Жисм абсолют эластик бўлганда, у айнан уни деформациялашда бажарилган ишга тенг миқдорда иш бажарар эди. Бундай жисмларни деформациялашда бажарилган иш тўласича мазкур жисм потенциал энергиясини орттиришга сарфланади. Одатдаги жисмлар ўзининг бошланғич шаклини тикламаганлигидан, уни деформациялашда сарфланган ишни тўласича қайтармайди. Лекин кичик деформацияларда кўпчилик жисмлардаги қолдиқ деформациялар ҳисобга олмайдиган даражада кичик бўлиб, ташқи кучларнинг бажарган иши тўласича эластик деформация энергиясига айланади деб ҳисоблаш мумкин.

Бундай ҳол учун деформацияланган жисмнинг потенциал энергиясини ҳисоблаб топиш мумкин. Жисм секинаста чўзилаётган бўлсин. Деформацияланаётган жисмда қирралари l бўлган куб шаклидаги кичик ҳажмни ажратайлик. Мазкур ҳажм элементининг чўзилиш йўналишига тик бўлган ёқига қўшни элемент

$$f = \sigma l^2 = \varepsilon E l^2$$

куч билан таъсир қилади (Гук қонуни бажарилади деб фараз қиламиз, E — Юнг модули). Ажратилган элемент dx масофага силжиганда

$$dA = f \cdot dx = \varepsilon E l^2 dx \qquad (44.1)$$

миқдорда иш бажарилади. Бу силжиш натижасида жисмнинг нисбий чўзилиши $d\varepsilon = dx/l$ миқдорга тенг бўлади. Сўнгги тенгликдан топилган $dx = l \cdot d\varepsilon$ ифодани (44.1) формулага қўямиз:

$$dA = E l^3 \varepsilon d\varepsilon.$$

Жисмнинг бошланғич пайтда l^3 ҳажмга эга бўлган элементини деформациялашда бажарилган тўла ишни топиш учун сўнгги ифодани 0 дан ε гача интеграллаймиз:

$$A = E l^3 \int_0^{\varepsilon} \varepsilon d\varepsilon = l^3 \cdot \frac{E\varepsilon^2}{2}.$$

Бу иш мазкур ҳажм элементи эластик деформациясининг потенциал энергиясига айланади. Элементнинг ҳажми l^3 га тенг бўлганидан, деформацияланган жисм $E^{\circ}_{\text{пот}}$ энергиясининг зичлиги

$$w = \frac{E^{\circ}_{\text{пот}}}{l^3} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \qquad (44.2)$$

га тенг (кичик деформацияларда элемент ҳажми доимий деб олиш мумкин). Гук қонунининг $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ифодасидан фойдаланиб, (44.2) формуланинг шаклини ўзгартирамиз:

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (44.3)$$

Бундан кўринадики, берилган ε деформацияда энергия зичлиги эластиклик модули E га тўғри пропорционал, берилган σ кучланишда эса E га тескари пропорционал бўлади. Шунинг учун қўйилган куч (демак, кучланиш ҳам) маълум бўлиб, жисм қанчалик бикр (E катта) бўлса, эластик деформация энергияси шунчалик кичик бўлади.

Жисм ҳажмининг барча элементлари энергияларини ўзаро қўшиб, бир жинсли деформацияланган жисмнинг эластик деформацияси энергиясини топиш мумкин:

$$E_{\text{пот}} = w \cdot V = \frac{E\varepsilon^2}{2} V,$$

бу ерда V — жисмнинг ҳажми. Деформация бир жинсли бўлмаганда жисмни кичик dV элементларга бўлиб (мазкур элементдаги деформацияни бир жинсли деб ҳисоблаш мумкин), $\frac{1}{2} E\varepsilon^2 \cdot dV$ ифодани жисмнинг тўла ҳажми бўйича интеграллаш зарур: $E_{\text{пот}} = \int\limits_V w \cdot dV = \int\limits_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV.$

(44.3) ифодадан кўринадики, эластик деформацияланган жисм энергиясининг зичлиги нисбий ε деформация квадратига пропорционал.

Силжишдаги эластик деформация энергиясини ҳам ҳисоблаб топиш мумкин. Қирраси l бўлган кубнинг силжиш текислигида ётган ёқига

$$f = \tau \cdot l^2 = G\gamma l^2$$

куч таъсир қилади. Жуда кичик силжишда юқоридаги ёқ $dx = l d\gamma$ га силжийди ҳамда f куч томонидан

$$dA = G\gamma\, l^3 d\gamma$$

миқдорда иш бажарилади. O дан γ гача бўлган силжишда бажарилган тўла иш

$$A = Gl^3 \int\limits_0^\gamma \gamma\, d\gamma = \frac{l^3 G \gamma^2}{2}$$

га тенг. У ҳолда эластик деформация энергиясининг зичлиги

$$w = \frac{G\cdot\gamma^2}{2} = \frac{\tau\cdot\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} \qquad (44.4)$$

бўлади.

(44.3) ва (44.4) формулалардан кўринадики, эластик деформация энергиясининг зичлиги механик кучланиш квадратига тўғри пропорционал, эластиклик модулига эса тескари пропорционал экан. Бошқа гурдаги деформациялар учун ҳам шунга ўхшаш формулаларни келтириб чиқариш мумкин, фақат улар Гук қонунини қўллаш мумкин бўлган ҳоллардагина ўринли бўлади. Лекин Гук қонуни бажарилмаган ҳолларда ҳам жисм элементини жуда оз деформациялашда бажарилган иш кучланиш билан нисбий деформация кўпайтмасига пропорционал бўлади:

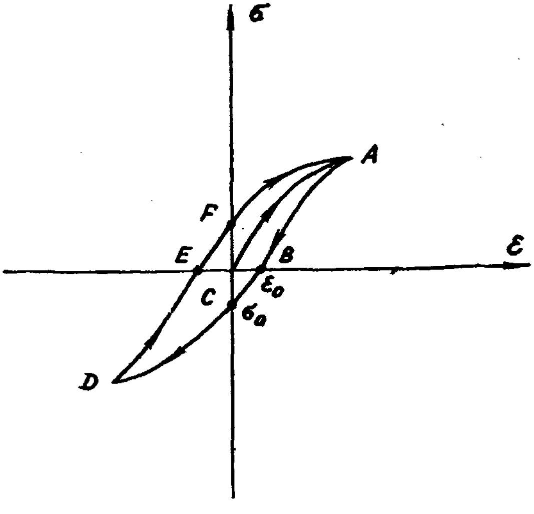
$$dA_\varepsilon = f\cdot dx = l^3\sigma\, d\varepsilon \qquad \text{(чўзилиш учун)},$$

$$dA_\gamma = f\cdot dx = l^3\tau\, d\gamma \qquad \text{(силжиш учун)}.$$

тўла ишни эса

$$A_\varepsilon = l^3\int_0^\varepsilon \sigma\, d\varepsilon \text{ ва } A_\gamma = l^3\int_0^\gamma \tau\, d\gamma$$

формулалардан топиш мумкин. Шунинг учун σ билан ε ёки τ билан γ орасидаги боғланишни эгри чизиқ сифатида тасвирланса, деформациянинг тўла энергияси мазкур эгри чи-



93-расм.

зиқ билан абсцисса ўқи (ε ўқи ёки γ ўқи) орасидаги юза билан ифодаланади.

Ўзгарувчи деформациялар мобайнида қолдиқ деформацияларнинг борлиги туфайли жисмнинг ўз ҳолига қайтишида муайян деформацияларга кичикроқ (камроқ) кучланишлар мос келади. Шу сабабли $\sigma = f(\varepsilon)$ ёки $\tau = f(\gamma)$ эгри чизиқ қайтишда тўғри йўналишдагига қараганда пастроқдан ўтади (93- расм). Деформация йўқолмай туриб жисмдаги кучланиш йўқолади, яъни $\sigma = 0$ бўлганда жисм ε_0 қолдиқ деформацияга эга бўлади. Жисмни тескари йўналишда деформациялашни давом эттирилса (чўзилиш ўрнига сиқилиш бўлганда), жисмда муайян $-\sigma_0$ кучланиш бўлгандагина қолдиқ деформация йўқолади. Бу ҳодиса *эластик гистерезис* деб юритилади.

Деформациялар даврий равишда такрорланганда ε нисбий деформация ва σ кучланиш *гистерезис сиртмоғи* деб аталадиган *ABCDEFA* берк чизиқ билан тасвирланади. Жисмни *E* ҳолатдан *A* ҳолатгача деформациялаганда, *A* ҳолатдан *B* ҳолатга қайтганда жисм бажарган (қайтарган) ишдан кўпроқ иш бажарилади. Бу ишларнинг фарқи жисмни қиздиришга сарфланиб, у гистерезис сиртмоғининг абсциссалар ўқидан юқоридаги қисми юзаси (юзи) билан белгиланади. Худди шунга ўхшаш, *BCDE* бўйлаб амалга ошган деформацияда жисмни қиздиришга кетадиган иш миқдори гистерезис сиртмоғи пастки қисми юзаси билан ифодаланади. Деформациялар даврий равишда такрорланган ҳолларда ҳар бир цикл мобайнида жисмда гистерезис сиртмоқ юзасига пропорционал бўлган миқдорда иссиқлик ажралиб чиқади. Гистерезис сиртмоғининг юзаси қанчалик катта бўлса, даврий деформациялар пайтида жисм шунчалик кучли қизийди. Деформациялар жуда тез такрорланганда вақт бирлиги ичида жисмда сезиларли миқдорда иссиқлик ажралади. Шу туфайли тез такрорланадиган деформациялар таъсирида жисмлар анчагина қизиши мумкин. Бундай қизишни камайтириш учун (қизиганда материалларнинг эластиклик хоссалари ёмонлашади) машиналарнинг тез такрорланадиган даврий деформациялар таъсири остида бўладиган қисмлари (масалан, ички ёнув двигателлари клапанларидаги пружиналар) пўлатнинг гистерезис сиртмоғининг юзаси жуда кичик бўлган махсус навларидан тайёрланади.

IX боб

НОИНЕРЦИАЛ САНОҚ СИСТЕМАЛАРДА ҲАРАКАТ

45- §. Ноинерциал саноқ системалари. Инерция кучлари

Ньютон механикасининг қонунлари инерциал саноқ системалари учун ўринли бўлади. Мазкур қонунлар ноинерциал саноқ системаларида ҳам бажариладими? Инерциал саноқ системасига нисбатан тезланиш билан ҳаракатланаётган саноқ системаси ноинерциал система бўлиши айтиб ўтилган эди. Саноқ системаси муайян қаттиқ жисм билан боғланган бўлади. Қаттиқ жисмнинг тезланишли ҳаракати эса унинг илгариланма ҳамда айланма ҳаракатларидаги тезланишларни ўз ичига олади. Шунинг учун тўғри чизиқ бўйлаб тезланиш билан ҳаракат қилаётган ҳамда айланма ҳаракат қилаётган системаларни энг оддий ноинерциал саноқ системалари деб ҳисоблаш мумкин.

Инерциал саноқ системаларида жисмнинг тезланиш билан ҳаракатига бирдан-бир сабаб — бошқа жисмларнинг мазкур жисмга куч билан таъсиридир. Ноинерциал саноқ системаларида эса системанинг ҳаракат ҳолатини ўзгартириш билан ҳам жисмга тезланиш бериш мумкин.

Инерциал саноқ системасига нисбатан тезланиш билан илгариланма ҳаракат қилаётган саноқ системасида динамика тенгламаларини қўллаш имкониятларини кўриб чиқайлик.

Инерциал K саноқ система қўзғалмас, K' саноқ система эса унга нисбатан $\vec{a}_0$ тезланиш билан илгариланма ҳаракат қилади деб ҳисоблайлик. m массали жисмнинг K' системага нисбатан ҳаракатининг $\vec{a}'$ тезланишини ўлчаб, динамиканинг иккинчи қонунини $\vec{F}' = m\vec{a}'$ кўринишда ёзиш мумкин. Мазкур жисмнинг қўзғалмас K системага нисбатан $\vec{a}$ тезланишини ўлчаб эса, $\vec{F} = m\vec{a}$ тенгламани ёзамиз. У ҳолда жисмга ҳар иккала саноқ системаларида таъсир қилаётган кучларнинг айирмаси

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}' - \vec{F} \quad (45.1)$$

ёки

$$\vec{F}_{\text{ин}} = m(\vec{a}' - \vec{a})$$

эканлиги келиб чиқади. $\vec{a'} - \vec{a} = -\vec{a_0}$ эканлиги сабабли,

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a_0} \tag{45.2}$$

бўлади. Бу куч *инерция кучи* деб аталади. Сўнгги тенгламадан кўринадики, инерция кучи вектор катталик бўлиб, у жисм массаси билан ноинерциал саноқ системасининг инерциал саноқ системасига нисбатан тезланишининг кўпайтмасига тенг бўлиб, мазкур тезланишга қарама-қарши йўналган бўлади.

Инерция кучлари қайси жисм томонидан қўйилган эканлигини кўрсатиш мумкин эмас. Шу маънода уларга динамиканинг учинчи қонунини қўллаб бўлмайди. Бундан ташқари, ноинерциал саноқ системаларида динамиканинг биринчи (инерция) қонуни ҳам бажарилмайди. Динамиканинг иккинчи қонунини эса, фақат расман, «инерция кучи» тушунчасини киритибгина қўллаш мумкин.

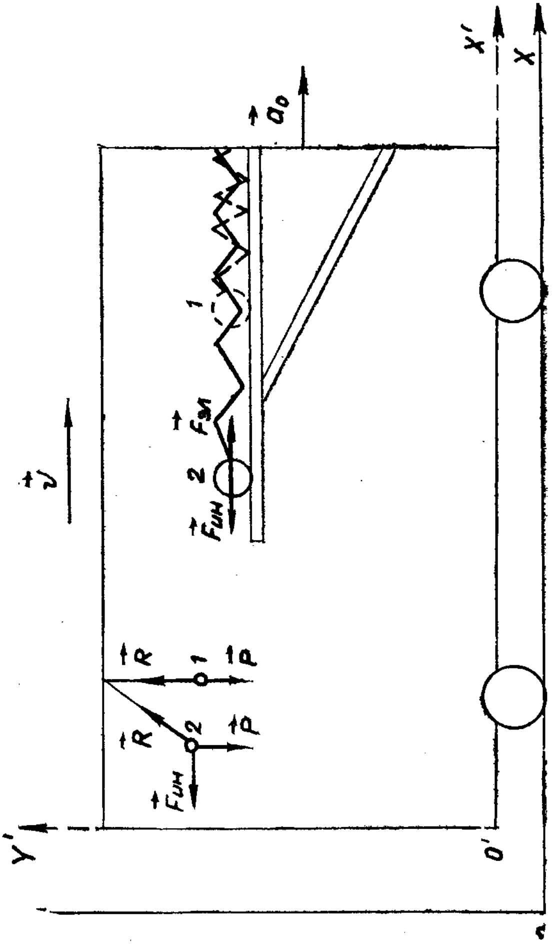
Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, ноинерциал саноқ системаларида жисмларнинг берк системаси бўлиши мумкин эмас, чунки системадаги ихтиёрий жисм учун инерция кучлари ташқи куч ҳисобланади.

Муайян жисм бирор ноинерциал саноқ системасига нисбатан қўзғалмас ($\vec{a'} = 0$) бўлса, $\vec{F'} = 0$ ёки $\vec{F}_{\text{ин}} = -\vec{F}$ келиб чиқади. Шундай қилиб, инерция кучларини ўлчаш учун ноинерциал саноқ системасига нисбатан қўзғалмас бўлган жисмга таъсир қилаётган кучларни ўлчаш кифоя. (45.1) тенгламадан

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} = m\vec{a'} \tag{45.3}$$

келиб чиқади. Инерциал саноқ системасига нисбатан илгариланма ҳаракат қилаётган саноқ системаларида динамика иккинчи қонунининг бундай кўринишдаги ёзувидан фойдаланиш мумкин. Бу тенгламада жисмлар орасидаги ўзаро таъсир кучларигина эмас, балки ноинерциал саноқ системаларининг хусусиятлари билан боғлиқ бўлган инерция кучлари ҳам ҳисобга олинади.

Ҳаракатланаётган вагон иштирок этган мисолни кўрайлик. Вагон шифтига боғланган ипга юк осилган бўлсин (94- расм). Вагон тезланишсиз ҳаракат қилганда ип вертикал ҳолатда бўлиб, юкнинг $\vec{P}$ оғирлик кучи ипнинг $\vec{R}$ реакция кучи билан мувозанатланади. Вагон бошланғич тезлиги йўналишидаги ўзгармас $\vec{a_0}$ тезланиш билан ҳаракатлана бошла-



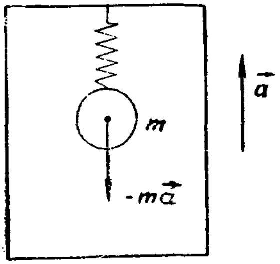
94-расм.

ган бўлсин. Юк рельслар билан боғлиқ бўлган XOY координаталар системасига нисбатан бошланғич тезлик билан ҳаракат қилишда давом этади, чунки горизонтал йўналишда унга ҳеч қандай куч таъсир қилмайди. Вагоннинг ҳаракати борган сари тезлашиб борганидан ипга осилган юк вагондан орқада қола бошлайди. Натижада юк осилган ип *1* вазиятдан *2* вазиятга ўтади, яъни у $\vec{P}$ ва $\vec{R}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси юкка $\vec{a}_0$ тезланиш берадиган бурчакка оғади. Гарчи $\vec{P}$ ва $\vec{R}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлмаса ҳам, юк ноинерциал $X'O'Y'$ саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Бу ҳолни шартли равишда юкка $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$ инерция кучи ҳам таъсир қилаётгани билан тушунтириш мумкин.

Мазкур вагондаги горизонтал силлиқ токчада пружина орқали вагон деворига шар маҳкамланган бўлсин (94-расм). Вагон тезланиш билан ҳаракатланганда шар вагондан орқада қолиб, пружинани чўзади ва пружинанинг эластиклик кучи унга $\vec{a}_0$ тезланиш берадиган *1* вазиятдан *2* вазиятга ўтади. Шарга чўзилган пружинанинг $\vec{F}_{\text{эл}}$ эластиклик кучи таъсир қилаётган бўлса ҳам, у *2* вазиятда вагонга нисбатан қўзғалмайди. Бу ҳолни дам шарга $\vec{F}_{\text{эл}}$ кучдан ташқари $\vec{F}_{\text{ин}}$ инерция кучи таъсир қилиши билан тушунтириш мумкин.

Шуни айтиш керакки, вагон ичидаги кузатувчи шар осилган ипнинг оғишига ёки пружинанинг чўзилишига асосланиб вагон билан боғлиқ саноқ системаси тезланиш билан ҳаракат қилаётгани, яъни у ноинерциал эканлиги ҳақида ҳукм чиқара олади. Мазкур шарларга таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчисини ўлчаб эса инерция кучини аниқлаш мумкин.

Принципиал жиҳатдан муайян масалани ҳал қилишда инерция кучларини ҳисобга олиш шарт эмас. Аслида ҳар қандай ҳаракатни инерциал саноқ системасига нисбатан ўрганиш мумкин. Лекин, кўпинча жисмларнинг ҳаракатини айнан ноинерциал саноқ системаларига нисбатан ўрганиш кўпроқ қизиқиш уйғотади. Инерция кучини ҳисобга олиб, масалани бевосита мазкур саноқ системасига нисбатан ечиш мумкин. Бу эса кўпинча масалани ечишни енгиллаштиради.



95-расм.

Инерция кучларининг хусусиятларидан бири шуки, улар жисм массасига пропорционал бўлади. Шу жиҳатдан инерция кучи тортишиш кучига ўхшаб кетади. Ташқи жисмлардан етарлича узоқликда бўлган берк кабинада ўтирибмиз, дейлик. Кабина бирор $\vec{a}$ тезланиш билан ҳаракатланаётган бўлсин (95-расм). У ҳолда кабинада жойлашган барча жисмларга $-m\vec{a}$ га тенг бўлган инерция кучи таъсир қилгандай бўлади. Масалан, m массали жисм осиб қўйилган пружина эластиклик кучи мазкур инерция кучини мувозанатлайдиган даражада чўзилади. Лекин кабина қўзғалмас бўлиб у Ер сиртига яқин жойлашган бўлганда ҳам айнан шундай манзарани кузатиш мумкин. Кабинадан ташқарига қарамасдан, кабина ичида ўтказилган ҳар қандай тажриба ёрдамида ҳам $-m\vec{g}$ куч кабинанинг тезланиш билан ҳаракат қилаётгани сабабли ёки Ернинг тортиши натижасида вужудга келганини аниқлаб бўлмайди. Шунга асосланиб, инерция кучлари билан тортишиш кучларининг ўзаро эквивалентлиги (тенг кучли эканлиги) ҳақида гапириш мумкин.

46- §. Текис айланаётган ноинерциал саноқ системаси. Марказдан қочирма куч

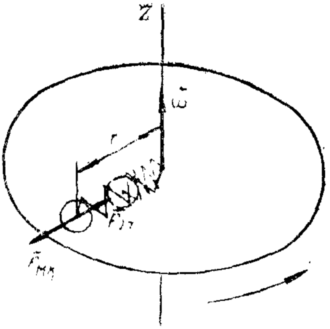
Вертикал ўқ атрофида ўзгармас $\vec{\omega}$ бурчакли тезлик билан айланаётган горизонтал диск устида унинг марказига пружина орқали маҳкамлаб, радиал жойлашган пўлат симга кийдириб қўйилган шар ҳаракатини кўрайлик (96- расм). Бу ҳолда шар, пружинанинг $\vec{F}_{эл}$ эластиклик кучи шарнинг m массаси билан унинг $\vec{a}_п = -\omega^2\vec{r}$ нормал тезланиши кўпайтмасига тенг бўладиган вазиятни олади ($\vec{r}$ — диск марказидан шарга ўтказилган радиус-вектор, r — шардан диск марказигача бўлган масофа):

$$\vec{F}_{эл} = -m\omega^2\vec{r}. \qquad (46.1)$$

Бу ҳолда шар диск билан боғлиқ саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Бу ҳодисани шартли равишда шарга (46.1) кучдан ташқари яна

$$\vec{F}_{мқ} = m\,\omega^2\vec{r} \qquad (46.2)$$

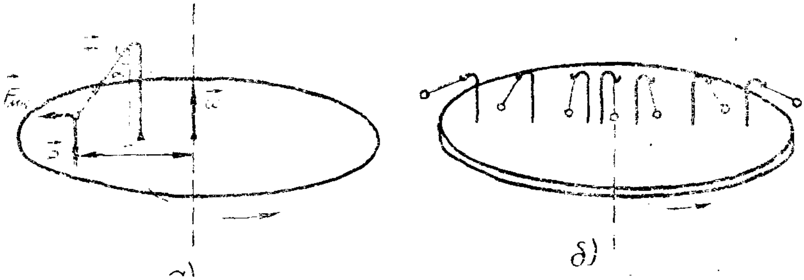
инерция кучи ҳам таъсир қилади, деб тушунтириш мумкин (мазкур куч диск марказидан радиус бўйлаб ташқари томонга йўналган бўлади).



96-расм.

Инерциал саноқ системаларига нисбатан айланма ҳаракат қилаётган саноқ системасида вужудга келадиган (46.2) инерция кучи *марказдан қочирма инерция кучи* деб аталади. Жисм айланма ҳаракат қилаётган саноқ системасида тинч турибдими ёки унга нисбатан ҳаракат қиляптими, бундан қатъи назар, унга мазкур инерция кучи таъсир қилаверади.

Марказдан қочирма инерция кучи жисмнинг айланаётган саноқ системасидаги вазиятига боғлиқ бўлиб, (46.2) тенгламадан кўринадики, унинг сон қиймати жисм массасигагина эмас, балки айланиш марказигача бўлган r масофага ҳам боғлиқ бўлади.



97-расм.

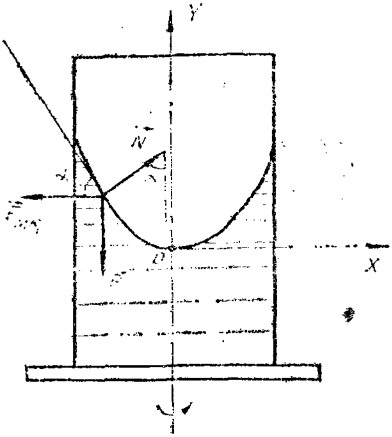
Энди диск марказидан r масофада ипга осиб қўйилган шарча ҳаракатини кўрайлик (97-расм). Диск ўзгармас $\vec{\omega}$ бурчакли тезлик билан айланганда ип α бурчакка оғади. Диск билан боғлиқ бўлган саноқ системасида шар тинч ҳолатда бўлади. Унга $\vec{P}$ оғирлик кучи ва ипнинг $\vec{T}$ таранглик кучи таъсир қилади. Шар тинч ҳолатда бўлганидан, унга яна $\vec{F}_{мқ}$ марказдан қочирма инерция кучи ҳам таъсир қилмоқда, деб ҳисоблаш зарур. Бу куч оғирлик кучи билан ипнинг таранглик кучини мувозанатлайди. Шаклдан

$$F_{мқ} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

эканлиги кўринади. Бу ифодадан

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$$

келиб чиқади. Бундан кўринадики, шарчадан айланиш ўқигача бўлган масофа қанча катта бўлса, ип шунча кўпроқ бурчакка оғар экан. Бу ҳодисани диск ўқидан ҳар хил масофада жойлашган ипларга осиб қўйилган шарлар билан намойиш қилиш мумкин (97-расм).



98-расм.

Бурилаётган транспорт воситаларидаги йўловчиларга, махсус шакл бўйлаб учаётган учувчига марказдан қочирма инерция кучлари таъсир қилади. Барча марказдан қочирма механизмлар, насослар, сепараторлар ва бошқаларда марказдан қочирма инерция кучларидан фойдаланилиб, бу кучлар бурчакли тезликнинг квадратига пропорционал бўлганидан, улар жуда катта қийматларга эришиши мумкин. Машина ва механизмларнинг жуда тез айланадиган қисмлари (роторлар, самолёт винтлари ва ҳ. к.) ни лойиҳалашда мазкур кучларни мувозанатлаш учун махсус чоралар кўришга тўғри келади.

Сув қуйилган цилиндр шаклидаги идишни вертикал ўқи атрофида $\vec{\omega}$ бурчакли тезлик билан айлантирилганда ҳам марказдан қочирма инерция кучи намоён бўлади (98-расм). Суюқлик сирти то унинг ҳар бир заррасига таъсир қилаётган $\vec{P}$ оғирлик кучи, қуйи қатламларнинг $\vec{N}$ реакция кучи ва $\vec{F}_{\text{мқ}}$ марказдан қочирма инерция кучи мувозанатлашгунча эгилади ($\vec{N}$ куч сиртга нормал йўналган). Расмдан

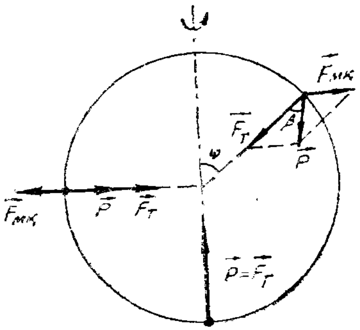
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{F_{\text{мқ}}}{P} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

эканлиги кўринади, яъни суюқлик сиртининг вертикал текислик бўйлаб кесими

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2$$

тенглама билан ифодаланадиган параболадан иборат экан.

(46.2) ифодадан кўринадики, кичик бурчакли тезликлар-



99-расм.

да марказдан қочирма инерция кучлари ҳам унча катта бўлмайди. Шунинг учун ҳам Ернинг ўз ўқи атрофидаги ва Қуёш атрофидаги айланиши деярли сезилмайди. Лекин баъзи ҳолларда мазкур ҳаракат намоён бўлади. Ерни бир жинсли шар деб ҳисобласак, у бошқа жисмларни қатъий равишда марказига томон йўналган куч билан тортиши керак. Бироқ Ер сиртидаги жисм унинг ўқи атрофидаги ҳаракатда иштирок этганидан, унга $\vec{F}_{мқ}$ марказдан қочирма куч ҳам таъсир қилиши керак (99-расм). Шунинг учун жисмнинг оғирлиги (унинг Ер сиртига босим кучи) географик кенгликка боғлиқ бўлади. Қутбларда $\vec{F}_{мқ} = 0$ бўлганидан, жисмнинг оғирлиги Ернинг $\vec{F}_т$ тортиш кучига тенг бўлади. Экваторда эса улар орасидаги фарқ энг катта қийматга эга бўлади. Лекин бу фарқ ҳатто экваторда ҳам унчалик катта эмас. Ҳақиқатан ҳам, Ернинг радиусини $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м деб олсак,

$$a_{мқ} = \omega^2 R = (7{,}3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \ \frac{м}{с^2} = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \ м/с^2$$

эканлиги келиб чиқади, яъни экватордаги марказдан қочирма тезланиш эркин тушиш тезланишининг 0,3 % ига тенг экан. Жисмнинг $\vec{P}$ оғирлик кучи билан Ернинг радиуси орасидаги β бурчак жойнинг φ географик кенглигига боғлиқ бўлиб, градуснинг ўндан бир улушлари тартибида бўлади.

Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши натижасида вужудга келадиган бу ҳодисаларни замонавий усуллар билан сезиш мумкин бўлса-да, Ернинг қатъий шар шаклига эга бўлмаслиги ва унинг бир жинсли бўлмагани туфайли мазкур масала анча мураккаблашади. Ернинг қутб радиуси экватордаги радиусидан тахминан 0,3% кичик. Шу сабабли эркин тушиш тезланиши (у Ер радиусига боғлиқ) экваторда қутбдагига қараганда кичикроқ бўлади. Бу фарқ 0,6% ни ташкил қилади, яъни эркин тушиш тезланишининг Ернинг айланиши туфайли ўзгаришидан ортиқ.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, ноинерциал саноқ системасида турган кузатувчи ипга осилган юкнинг вертикалдан оғишини пайқаб қолган ҳолда ҳам, қўшимча тажрибалар ўтказилмай туриб, у мазкур саноқ система тезланиш билан илгариланма ҳаракат қиляптими ёки айланяптими, деган саволга жавоб беролмайди.

47- §. Кориолис кучи

Жисм айланаётган саноқ системасига нисбатан ҳаракат қилганда унга қўшимча равишда яна бир инерция кучи — *Кориолис кучи* таъсир қилади. Мазкур кучнинг таъсирини кузатиш учун маркази орқали ўтган ўқ атрофида айлана оладиган горизонтал диск олайлик (100-расм). Диск тинч турганида, унинг O марказида жойлашган шарчани диск радиуси бўйлаб v' тезлик билан ҳаракатлантирайлик. У дискнинг радиусига тенг йўлни босиб, A нуқтага етиб бориши учун

$$\Delta t = \frac{R}{v'} \tag{47.1}$$

вақт сарф бўлади.

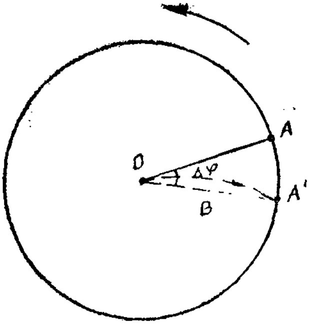
Шундан сўнг дискни ўзгармас ω бурчакли тезлик билан айлантириб, шарчани яна v' тезлик билан йўналтирсак, у диск устида OBA' ёй бўйлаб ҳаракатланиб, A' нуқтага етиб боради. Бу вақт ичида диск $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ бурчакка бурилади. AA' ёйнинг узунлиги эса

$$\Delta s = R \cdot \Delta\varphi = v' \cdot \omega (\Delta t)^2 \tag{47.2}$$

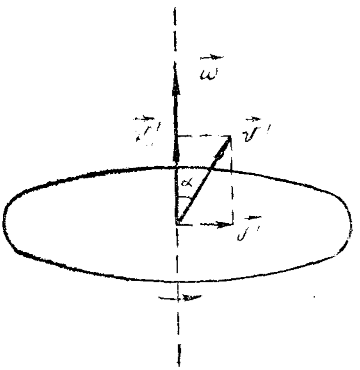
га тенг бўлади. Мазкур ҳаракатни шарчага $\vec{v}'$ тезликка тик йўналишда қандайдир ўзгармас куч таъсир қилиб, унга тезланиш беради, деб тушунтириш мумкин. У ҳолда шарчанинг мазкур йўналишда босиб ўтган йўли (AA' ёй узунлиги) ни

$$\Delta s = \frac{a(\Delta t)^2}{2} \tag{47.3}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (47.2)



100-расм.



101-расм.

ва (47.3) ифодаларни таққосласак бу тезланиш

$$a = 2v'\omega \qquad (47.4)$$

экани келиб чиқади.

Шарчанинг нисбий $\vec{v}'$ тезлиги дискнинг радиуси бўйлаб эмас, унинг айланиш ўқи билан α бурчак ҳосил қилиб йўналган умумийроқ ҳолни кўрайлик (101-расм). Тезлик векторини айланиш ўқига параллел бўлган $\vec{v}'_{\parallel}$ ҳамда диск текислигида ётган $\vec{v}'_{\perp}$ ташкил этувчиларга ажратайлик.

$\vec{v}'_{\parallel}$ ташкил этувчи (47.4) тезланишни ўзгартирмайди. Демак, мазкур тезланиш тезликнинг $v'_{\perp} = v'\cdot\sin\alpha$ ташкил этувчиси билан белгиланади, дейиш мумкин. Бу катталикни (47.4) тенгламага қўйиб ҳамда уни шарчанинг массасига кўпайтириб, Кориолис кучи ифодасини топамиз:

$$F_k = 2mv'\omega\sin\alpha. \qquad (47.5)$$

Шарчанинг дискка нисбатан тезлиги $v' = 0$ бўлганда $F_k = 0$ келиб чиқади, яъни жисм айланаётган саноқ системасига нисбатан ҳаракат қилгандагина унга Кориолис кучи таъсир қилиб, бу куч мазкур ҳаракат тезлигига боғлиқ бўлади. $\vec{v}'$ ва $\vec{\omega}$ векторлар орасидаги бурчак нолга тенг бўлганда ҳам Кориолис кучи вужудга келмайди.

Кориолис кучи ҳамма вақт $\vec{v}'$ ва $\vec{\omega}$ векторларга перпендикуляр бўлиб, марказдан қочирма инерция кучидан фарқли ўлароқ, унинг катталиги жисмнинг саноқ системасига нисбатан вазиятига боғлиқ эмас. Кориолис кучини

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}] \qquad (47.6)$$

кўринишдаги вектор шаклида ёзиш мумкин. Кориолис кучи йўналишини парма қоидаси ёрдамида аниқлаш мумкин.

Кориолис кучи ҳамма вақт жисм ҳаракати йўналишига перпендикуляр бўлгани сабабли, у жисмни кўчиришда иш бажармайди. Кориолис кучининг таъсири шундан иборатки, айланаётган саноқ системасида ҳаракат қилаётган жисм нисбий тезликка тик йўналишда оғади ёки бу оғишга қаршилик қилаётган боғланишга босим билан таъсир қилади.

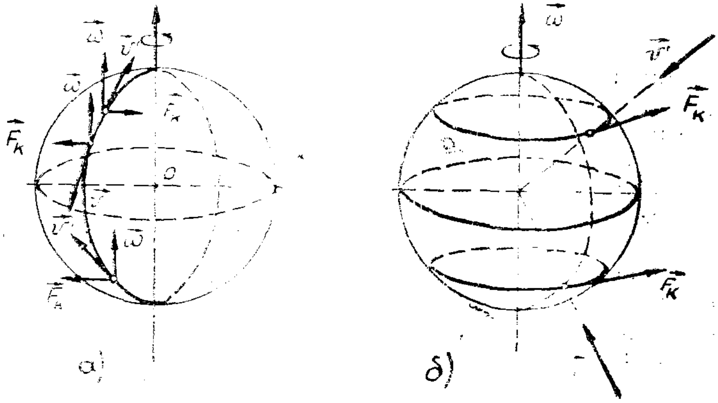
Шундай қилиб, жисмнинг айланаётган саноқ системасига нисбатан ҳаракатини ўрганишда унга бошқа жисмлар томонидан таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчисидан ташқари, марказдан қочирма инерция кучини ҳамда Кориолис кучини ҳисобга олиш зарур. Бошқача қилиб айтганда, бундай ҳолда динамиканинг иккинчи қонуни

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\omega^2\vec{r} + 2m[\vec{v}'\vec{\omega}] \qquad (47.7)$$

кўринишга келади. Бу ерда $\vec{F}$ — мазкур жисмга бошқа жисмлар томонидан таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси.

Шуни эътиборга олиш керакки, инерция кучлари жисмларнинг ўзаро таъсири натижаси бўлмай, саноқ системасининг тезланиш билан ҳаракат қилишидан вужудга келади.

Юқорида айтиб ўтилганидек, жисм айланаётган саноқ системасига нисбатан ҳаракат қилганда унга Кориолис кучи таъсир қилади. Шу сабабли Ер сиртида ҳаракат қилаётган жисмларда ҳам Кориолис кучи намоён бўлади. Масалан, жисм шимолий ярим шарда шимол томонга ҳаракатланаётган бўлса (102-*а* расм), (47.6) ифодага асосан, унга таъсир қилаётган Кориолис кучи ҳаракатга нисбатан ўнгга, яъни шарқ томонга йўналган бўлади. Жисм жануб томонга ҳаракатланганда эса, Кориолис кучи яна ўнг томонга йўналган бўлиб, у ғарб томонга оғади. Шу сабабли шимолий ярим шарда дарёларнинг ўнг (оқимга нисбатан) қирғоқлари кўпроқ ювилиб, емирилади. Худди ана шу сабабга кўра, темир йўлларнинг ўнг рельслари кўпроқ ейилади. Жанубий ярим шарда эса Кориолис кучи ҳаракатга нисбатан чап томонга йўналган бўлади.



102-расм.

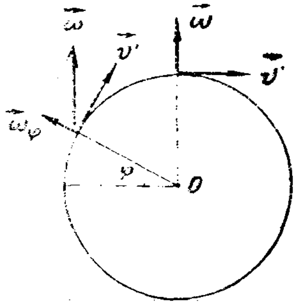
Кориолис кучи туфайли Ер сиртига тушиб келаётган жисмлар шарққа томон оғади (102- *б* расм).

Ҳаво оқими Ер атмосферасида узоқ вақт ҳаракат қилганда унга Кориолис кучи сезиларли таъсир қилади (куч импульси етарлича катта бўлади). Ер сиртининг каттагина қисмини қамраб оладиган шамол ҳеч қачон катта босимли соҳадан тўппа-тўғри паст босимли соҳага томон йўналмай, шимолий ярим шарда ўнгга, жанубий ярим шарда эса чапга томон оғади ва уюрмалар ҳосил қилади. Шу сабабли паст босимли (циклон) ва юқори босимли (антициклон) соҳалар берк изобаралар билан қамраб олинган бўлади. Бу ҳодиса ҳам Кориолис кучи таъсирининг натижасидир.

Кориолис кучи, айниқса, Фуконинг машҳур тажрибаларида (1850 й). намоён бўлади. Мазкур тажрибани марказдан қочирма машина столчасига ўрнатилган вертикал рамкага осилган математик маятник ёрдамида намойиш қилиш мумкин. Маятникни рамка текислигида тебратиб, столчани секин-аста ўз ўқи атрофида айлантира бошлаймиз. Бунда маятник тебранишлар текислигининг хона деворларига нисбатан вазияти ўзгармайди, рамка текислиги эса бурила боради.

Қўзғалмас саноқ системасидаги кузатувчи учун бу ҳодиса тушунарли: маятник столчанинг айланишида қатнашмайди. Қўзғалувчи (стол билан боғлиқ) саноқ системасидаги кузатувчи эса ҳодисани шундай тушунтиради: маятникнинг тебраниш текислиги буриляпти, демак, унга Кориолис кучи таъсир этмоқда.

Ҳақиқий Фуко тажрибасини фақат жуда баланд шифтли хонада, узунлиги бир неча метр бўлган маятник билан амалга ошириш мумкин. Бунинг учун маятникни жуда кучли манба билан ён томондан ёритилиб, деворга белги қўйиб қўйилади. 5—10 минутдан кейин Ер 1—2° га бурилиб, маятник соясининг силжишини пайқаш мумкин.



103-расм.

Ер сиртида, Қутбда жойлашган кузатувчи учун тебраниш текислиги Ер айланишининг бурчакли тезлигига тенг бурчакли тезлик билан бурилади. Бунда $\vec{\omega}$ вектор билан вертикал йўналиш ўзаро параллел бўлади (103- расм). Маятник географик кенглиги φ бўлган нуқтада жойлашганда эса тебраниш текислиги бурилишининг бурчакли тезлиги $\vec{\omega}$ векторнинг вертикал ташкил этувчисига тенг бўлади:

$$\omega_\varphi = \omega \sin \varphi.$$

Масалан, Москвада Фуко маятнигининг тебраниш текислиги бир соат ичида 11° га бурилади (қутбда эса бу бурчак 15° га тенг).

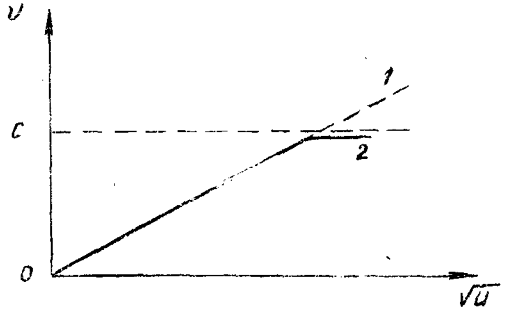
X боб

МАХСУС НИСБИЙЛИК НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСЛАРИ

48- §. Классик механиканинг қўлланилиш чегаралари

Классик механика жуда кўп ҳодисаларни тушунтириб бера олса-да, XIX аср охирига келиб унинг хулосалари баъзи тажрибалар натижалари билан мос келмаслиги аён бўлиб қолди. Шу тарзда Ньютон механикасининг қўлланилиш чегараси ҳақидаги масала вужудга келди.

XX аср бошида электр майдонида тезлатилган электронлар дастасини ўрганиб (майдон кучларининг бажарган



104-расм.

$A = eU$ иши электроннинг $E_k = \frac{m_0 v^2}{2}$ кинетик энергиясига тенг эканлигидан фойдаланиб),

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} \qquad (48.1)$$

ифода текшириб кўрилди. Ўтказилган тажриба натижалари 104- расмда келтирилган. (48.1) ифодага кўра, электроннинг олган тезлиги $\sqrt{U}$ га пропорционал бўлиб (U — тезлатувчи майдон кучланиши), графикда бу боғланиш *1* тўғри чизиқ билан мос келиши керак. Электроннинг тажрибадаги тезлиги эса *2* эгри чизиқ бўйича ўзгарган. Графиклардан кўринадики, унча катта бўлмаган тезликларда мазкур боғланиш классик механика асосида топилган (48.1) муносабат билан мос келади. Лекин ҳаракат тезлиги ёруғлик тезлигига яқин бўлганда электроннинг ҳақиқий тезлиги классик механика асосида ҳисобланган қийматидан анча секин ортиб боради ҳамда ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан катта бўла олмайди. Бу ҳодисани олимлар тезлик ортганда электроннинг массаси ҳам орта бориши билан тушунтиришди.

Бундан кўринадики, ҳаракат тезлиги ёруғлик тезлигига яқин бўлганда ҳодисаларни классик механика ёрдамида тушунтириб бўлмайди.

Ёруғликнинг тарқалишини Ньютон механикаси ёрдамида тушунтиришда ҳам бир қатор қийинчиликлар туғилди. Классик механика бўйича ёруғликнинг инерциал саноқ системасида ўлчанган тезлиги манба ҳамда ёруғлик қабул қилувчи аппаратнинг нисбий тезликларига боғлиқ. Лекин ўтказилган бир қатор тажрибалар шуни кўрсатдики, ёруғликнинг бўшлиқда ўлчанган тезлиги мазкур нисбий тезликларга боғлиқ бўлмай, ҳамма вақт *c* га тенг бўлади.

Юқорида санаб ўтилган тажриба натижаларини тушунтириш учун янги назария яратиш зарур эди. Бу назарияни 1905 йилда А. Эйнштейн (1875—1955) яратди. Эйнштейн назарияси *нисбийлик назарияси* (ёки *релятивистик механика*) деб аталади.

Ньютон механикасининг асосида бир жинсли ва изотроп (ҳамма фазовий йўналишларда бир хил) фазонинг мутлақлиги ҳамда бир жинсли вақтнинг мутлақлиги ҳақидаги тасаввур ётади. Физик ҳодисаларни тавсифлаш учун эса координаталар ўқлари ва соатдан иборат саноқ системасини танлаб олиш зарур эди.

Ньютон механикасида барча инерциал саноқ системалари тенг ҳуқуқли бўлиб, динамика қонунлари бир хил шаклда ёзилади. Галилейнинг нисбийлик принципига кўра, ҳеч қандай механик тажриба ёрдамида инерциал саноқ системасининг ҳаракатини пайқаб бўлмайди. Бундан ташқари, муайян жисмнинг барча инерциал саноқ системаларига нисбатан тезланиши бир хил бўлар эди.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, классик механикада ўзаро таъсир бир зумда, яъни чексиз катта тезлик билан узатилади, деб ҳисобланади. Бу фараз XVII—XIX асрларда шак-шубҳасиз қабул қилинган бўлиб, у пайтларда тажриба билан текшириб кўрилмаган эди. Унча катта бўлмаган тезликлар билан иш кўрилганидан, мазкур тасаввур тажриба натижаларига зид келмаган.

Вақтнинг мутлақлигидан, муайян саноқ системасида бир вақтда содир бўлган иккита физик ҳодиса бошқа саноқ системасида ҳам бир вақтда содир бўлиши келиб чиқади. Бир жойнинг ўзида содир бўлган ҳодисалар учун бу фикр, албатта, тўғри. Лекин турли жойда содир бўлган ҳодисалар ҳақида бу фикрни айтиш қийин, чунки мазкур фикр ўзаро таъсирлашишлар чексиз катта тезлик билан тарқалади, деган фаразга асосланган.

Классик механика асосларини синчиклаб ўрганиб чиқиб, А. Эйнштейн фазо ва вақтнинг мутлақ эканлиги ҳақидаги тасаввур нотўғри деган хулосага келди. Масалан, икки нуқта орасидаги масофа ёки икки ҳодиса орасида ўтган вақт оралиғи ўлчашни амалга ошираётган кузатувчининг ҳаракатига боғлиқ бўлиши керак. Унинг фикрича, ҳар қандай физик ҳодисани мазкур ҳодиса содир бўлган жой ва вақтни кўрсатадиган, лекин бир-бирига боғлиқ бўлган фазовий координаталар ва вақт орқали ифодалаш зарур бўлиб, ўзаро таъсирлашишнинг узатилиш тезлигини ҳам ҳисобга олиш керак. А. Эйнштейн бир вақтлиликнинг мутлақлиги ҳақидаги тасаввур ҳам нотўғри бўлиб, уни қайта кўриб чиқиш керак деган фикрни олға сурди.

А. Эйнштейннинг махсус нисбийлик назариясига унинг иккита ғояси асос бўлди:

1. Ўзаро таъсирлашиш чекли тезлик билан узатилиб, бу тезлик ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан ортмайди. Бўшлиқда ўтказилган барча тажрибалардаги ёруғликнинг ўлчанган тезлиги ёруғлик манбаининг ҳамда қабул қилиш аппаратининг ҳаракат тезликларига боғлиқ бўлмай, барча инерциал саноқ системаларида бир хил қийматга эга.

Мазкур ғоя (постулат) — ҳаракатланаётган саноқ системаларида ёруғлик тезлигини жуда аниқ тажрибалардаги ўлчашларни умумлаштириш натижасидир.

2. Ҳар қандай физик ҳодиса барча инерциал саноқ системаларида (бир хил шароитда) бир хил кечади. Бу принцип механик ҳодисалар учун яратилган Галилейнинг нисбийлик принципига ўхшаб кетади.

Ўша даврда олимлар ҳамма ҳодисалар механик ҳодисаларга келтирилиши мумкин деб ҳисоблар эдилар. Бу тасаввур XIX аср охиригача сақланиб келган. Мазкур фикр хато эканлиги аён бўлиб қолгач, барча инерциал саноқ системаларининг тенг ҳуқуқлилиги амалга ошиши учун Галилей принципини барча физик ҳодисаларни қамраб оладиган умумийроқ принцип билан алмаштириш зарур бўлиб қолди. Бу ишни А. Эйнштейн амалга оширди.

Инерциал саноқ системаларининг тенг ҳуқуқлилиги деганда, механиканинг ёруғлик тезлигининг доимий эканлигини ҳисобга олган ҳолда ёзилган асосий тенгламалари барча инерциал саноқ системаларида бир хил кўринишда бўлиши тушунилади.

Махсус нисбийлик назарияси яратилган даврда электродинамиканинг асосий қонуниятларини ифодаловчи Максвелл тенгламалари маълум эди. Галилей алмаштиришлари амалга оширилганда мазкур тенгламаларнинг шакли ўзгаришсиз қолмайди. Ньютон қонунлари эса Галилей алмаштиришларидан сўнг ўз шаклини ўзгартирмайди. Демак, Максвелл тенгламаларидан ёки Галилей алмаштиришларидан воз кечиш керак бўлади. Эйнштейн

Галилей алмаштиришлари ўрнига бошқа, Лоренц алмаштиришларини ҳосил қилиб, улардан фойдаланди. Шундан сўнг механика тенгламалари ҳам, Максвелл тенгламалари ҳам Эйнштейн постулатларини ҳамда, Лоренц алмаштиришларини қаноатлантирадиган бўлди.

Юқорида баён қилинган фикрлар ҳамда жуда кўп сонли тажрибалар натижаларини таҳлил қилиш шуни кўрсатадики, Ньютон томонидан яратилган классик механиканинг қўлланилиш соҳаси релятивистик (жуда катта тезликларда содир бўладиган) ва квант (микродунёдаги) ҳодисалари билан чекланган.

Ньютон механикаси кичик тезликлар, яъни ёруғлик тезлигидан жуда кичик тезликлар ($v \ll c$) билан ҳаракатланаётган жисмлар механикасидир. Кундалик турмушда ва техникада иш кўриладиган ҳаракат тезликлари ёруғлик тезлигига нисбатан шу қадар кичикки, мазкур ҳодисалар учун Ньютон механикаси жуда катта аниқликда бажарилади. Ҳатто $v=0{,}1c$ бўлганда ҳам нисбийлик назарияси бўйича ҳисобланган импульс Ньютон механикаси асосида ҳисобланган импульсдан 0,5% га фарқ қилади холос.

Элементар зарралар дунёсида c га яқин тезликлар одатдаги ҳол ҳисобланади. Шу сабабли мазкур зарралар учун классик механикани қўллаб бўлмайди. Микрозарралар учун ҳаракат шароитига қараб траектория тушунчасини ёки мутлақо қўллаб бўлмайди ёки муайян аниқлик билангина қўллаш мумкин (Ньютон механикасини эса траектория тушунчасисиз тасаввур қилиб бўлмайди). Масалан, атомда ҳаракатланаётган электрон учун траектория тушунчаси умуман маънога эга бўлмайди.

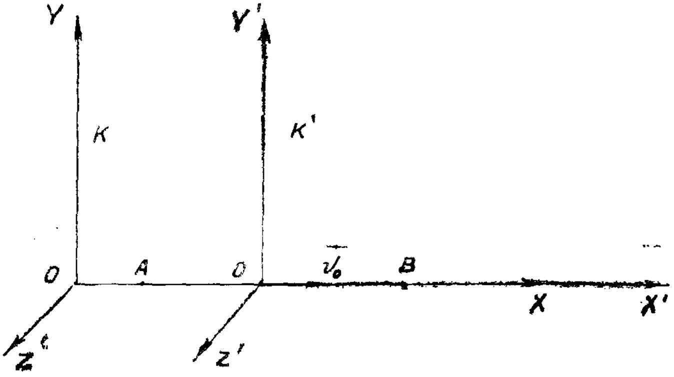
Хулоса қилиб, Ньютон механикаси кичик (ёруғлик тезлигига нисбатан) тезликлар билан ҳаракатланаётган макроскопик жисмлар механикаси, деб айтиш мумкин.

49- §. Лоренц алмаштиришлари

Юқорида айтиб ўтилган ва Эйнштейн томонидан қўлланилган алмаштиришлар голландиялик олим Х. Лоренц (1853—1928) томонидан 1904 йилда ҳозирги замон тасаввурларига зид бўлган мулоҳазалар асосида келтириб чиқарилган бўлиб, уларга Лоренц алмаштиришлари деб ном берилди.

1905 йилда А. Эйнштейн мазкур алмаштиришларни илмий жиҳатдан мукаммал бўлган мулоҳазалар асосида келтириб чиқарди ва уларнинг ҳақиқий маъносини очиб берди.

Лоренц алмаштиришларининг келтириб чиқарилишини кўрайлик. Қўзғалмас деб ҳисобланган K инерциал саноқ системасига нисбатан $\vec{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланаётган K' инерциал саноқ системаси берилган бўлсин (105-расм). X ва X' ўқлар $\vec{v}_0$ вектор бўйлаб йўналган бўлиб, Y ва Y' ҳамда Z ва Z' ўқлар ўзаро параллел бўлсин. Ҳар иккала инерциал саноқ системаси тенг ҳуқуқли бўлиб, уларнинг бирдан-бир фарқи шуки, K' система боши O' нинг K системадаги абсциссаси



105-расм.

$$x_{0'} = v_0 t, \qquad (49.1)$$

K система боши O нинг K' системадаги абсциссаси эса

$$x_0' = -v_0 t' \qquad (49.2)$$

га тенг бўлади (ҳар иккала система абсцисса ўқлари бир томонга йўналган бўлиб, мазкур системалар бир-бирига нисбатан қарама-қарши йўналишда ҳаракатланади).

Маълумки, классик механикада бир инерциал саноқ системасидаги координаталар ва вақтдан бошқа инерциал саноқ системасидаги координаталар ва вақтга Галилей алмаштиришлари (15-§) ёрдамида ўтилиб, улардан тезликларни қўшиш қонуни ($\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$) келиб чиқади. Лекин мазкур қонун ёруғлик тезлигининг доимийлиги ҳақидаги принцип (Эйнштейн постулати) га зид. Ҳақиқатан ҳам, агар x ёруғлик сигнали K' системада $\vec{v}_0$ вектор йўналишида c тезлик билан тарқалаётган бўлса, ёруғлик сигналининг K системадаги тезлиги $c+v_0$ га тенг, яъни c дан катта бўлади. Бундан кўринадики, мазкур ҳолда Галилей алмаштиришлари ўрнига бошқа алмаштиришлардан фойдаланиш зарур экан.

Вақт ва фазо бир жинсли бўлганидан, x, y, z ва t нинг x', y', z' ва t' га боғланиши чизиқли функция бўлиши зарур:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4 t' + \alpha_5, \tag{49.3}$$

бу ерда α_1, α_2, ... — доимий сонлар. У ҳолда

$$dx = \alpha_1 dx' + \alpha_2 dy' + \alpha_3 dz' + \alpha_4 dt' \tag{49.4}$$

деб ёзиш мумкин (y, z ва t ларнинг x', y', z' ва t' орқали ифодаси ҳам шунга ўхшаш кўринишга эга).

Координата ўқлари 103- расмда кўрсатилгандек танлаб олинганда $y=0$ текислик $y'=0$ текислик билан, $z=0$ текислик эса $z'=0$ текислик билан устма-уст тушади. Бундан, бошқа координаталар ва вақт қандай қиймат олишидан қатъи назар, y ва y' координаталар баравариға нолга тенг бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун y ва y' координаталар орасидаги муносабат фақат

$$y = \varepsilon y'$$

кўринишга эга бўлиши мумкин (ε — доимий сон). K ва K' системалар тенг ҳуқуқли эканлигидан, тескари муносабат

$$y' = \varepsilon y$$

кўринишга эга бўлиши керак. Ҳар иккала ифодани ўзаро кўпайтирсак, $\varepsilon^2 = 1$ ёки $\varepsilon = \pm 1$ ҳосил бўлади. Плюс ишора Y ва Y' ўқлар бир хил йўналишга эга бўлган ҳолга, минус ишора эса мазкур ўқлар қарама-қарши йўналган ҳолга мос келади. Мос ўқлар бир хил йўналишга эга бўлганда

$$y = y' \tag{49.5}$$

тенгликка эга бўламиз. Айнан шундай мулоҳазалар

$$z = z' \tag{49.6}$$

ифодани беради.

Энди x ва t ларни алмаштириш ифодаларини топайлик. (49.5) ва (49.6) тенгликлардан кўринадики, y ва z координаталарнинг қийматлари x' ва t' га боғлиқ бўлмайди. У ҳолда ўз навбатида x' ва t' ҳам y ва z га боғлиқ бўлмаслиги; x билан t эса мос равишда y' ва z' га боғлиқ бўлмаслиги керак. Шундай қилиб, x ва t фақат x' ва t' нинг чизиқли функциялари бўлиши мумкин.

K система 0 бошининг K системадаги координатаси $x = 0$, K' системада эса $x' = -v_0 t'$ га тенг. Демак, x координата билан бир вақтда $x' + v_0 t'$ ифода ҳам нолга тенг бўлиши керак. Бунинг учун чизиқли алмаштириш

$$x = \gamma (x' + v_0 t') \qquad (40.7)$$

кўринишга эга бўлиши керак (γ — доимий сон). Айнан шунга ўхшаш мулоҳазаларга кўра

$$x' = \gamma (x - v_0 t) \qquad (49.8)$$

ифодага эга бўламиз. K ва K' системаларнинг тенг ҳуқуқлилигидан, иккала ифодадаги пропорционаллик коэффициентлари бир хил бўлиши кераклиги келиб чиқади.

Мазкур γ пропорционаллик коэффициентини топиш учун ёруғлик тезлигининг доимийлиги принципидан фойдаланамиз. Иккала саноқ системасидаги вақтни координаталар бошлари устма-уст тушган пайтдан бошлаб ҳисоблайлик. Бошланғич $t = t' = 0$ пайтда координаталар бошидан X ва X' ўқлар йўналишида ёруғлик сигнали жўнатилган бўлсин. Сигнал K системада x координатага, K' системада эса x' координатага эга бўлган экранга t ва t' пайтда етиб боради:

$$x = ct, \quad x' = ct'.$$

Бу муносабатларни (49.7) ва (49.8) ифодаларга қўйсак,

$$ct = \gamma (ct' + v_0 t') = \gamma (c + v_0) t',$$
$$ct' = \gamma (ct - v_0 t) = \gamma (c - v_0) t$$

муносабатлар келиб чиқади. Иккала ифодани бир-бирига кўпайтирсак,

$$c^2 = \gamma^2 (c^2 - v_0^2)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан ахтарилаётган коэффициент

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

га тенглиги келиб чиқади. Бу ифодани (49.7) га қўямиз:

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (49.9)$$

Бу муносабат K' системадаги x' координата ва t' вақтга кўра K системадаги x координатани топишга имкон беради. Худди шу тарзда t вақтни топишга имкон берадиган муносабатни ҳосил қилиш учун (49.7) ва (49.8) тенгламалардаги x ни чиқариб юбориб, ҳосил бўлган тенгламани t га нисбатан ечиш зарур. Бунинг натижасида

$$t = \gamma\left[t' + \frac{x'}{v_0}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right]$$

ифода ҳосил бўлади. γ нинг ўрнига унинг ифодасини қўйиб,

$$t = \frac{t' + (v_0/c^2)\,x'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \qquad (49.10)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

(49.5), (49.6), (49.9) ва (49.10) ифодалар биргаликда *Лоренц алмаштиришлари* деб аталади. $\beta = v_0/c$ белгилашдан фойдалансак, Лоренц алмаштиришлари

$$x = \frac{x' + \beta\, ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}};\quad y = y';\quad z = z';\quad t = \frac{t' + (\beta/c)\,x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (49.11)$$

кўринишга келади.

Мазкур формулалар ёрдамида K' саноқ системасидан K саноқ системасига ўтиш мумкин. (49.11) тенгламаларни x', y', z' ва t' га нисбатан ечиб, K саноқ системасидан K' саноқ системасига ўтишга имкон берадиган формулаларни ҳосил қилиш мумкин:

$$x' = \frac{x - \beta\, ct}{\sqrt{1 - \beta^2}};\quad y' = y;\quad z' = z;\quad t' = \frac{t - (\beta/c)\,x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \qquad (49.12)$$

Кутилганидек, K ва K' системалар тенг ҳуқуқли бўлганлигидан, (49.11) ва (49.12) формулалар β, яъни v_0 олдидаги ишора билангина фарқ қилади.

Ҳаракат тезлиги $v_0 \ll c$ (ёки $\beta \ll 1$) бўлганида Лоренц алмаштиришлари Галилей алмаштиришларига (15-§) ўтишини кўриш мумкин. Шундай қилиб, Галилей алмаштиришлари ёруғлик тезлигидан анча кичик тезликлар учун ўринли эканлиги келиб чиқади.

$v_0 > c$ бўлган ҳолда (49.11) ва (49.12) муносабатлардаги x, t, x' ва t' учун ёзилган ифодалар мавҳум бўлиб қолади. Бу эса, бўшлиқда c дан катта тезликли ҳаракат бўлиши мумкин эмас деган фикрни тасдиқлайди. Ҳатто c тезликка эга бўлган саноқ системаси ҳам бўлиши мумкин эмас. Чунки $v_0 = c$ бўлганда x ва t ифодаларининг махражи нолга айланади.

Лоренц алмаштиришларидан Ньютон механикаси бўйича биринчи қарашда ғайри табиий бўлиб кўринадиган бир қатор хулосалар келиб чиқади:

1. **Бир вақтлиликнинг нисбийлиги.** Ньютон механикаси-

га кўра, бирор инерциал саноқ системасида бир вақтда содир бўлган ҳодисалар бошқа барча инерциал саноқ системаларида ҳам бир вақтда содир бўлади. Релятивистик механикада аҳвол қандай бўлишини аниқлайлик. Ҳаракатдаги K' саноқ системасининг x'_1 ва x'_2 нуқталарида бир (t') пайтнинг ўзида иккита ҳодиса содир бўлган, дейлик. (49.11) га кўра мазкур ҳодисалар K системада ҳар хил

$$t_1 = \frac{t' + (\beta/c)\,x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t' + (\beta/c)\,x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

пайтда содир бўлади, чунки $x'_1 \neq x'_2$.

Шундай қилиб, релятивистик механика (махсус нисбийлик назарияси) бўйича бир саноқ системасида бир пайтнинг ўзида содир бўлган ҳодисалар бошқа саноқ системасида ҳар хил пайтда содир бўлар экан.

2. Вақт оралиғининг нисбийлиги. Ҳаракатланаётган K' системадаги қўзғалмас x' нуқтада $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ вақт давомида бирор ҳодиса содир бўлди дейлик (бу ерда t'_1 ва t'_2 — — ҳодисаларнинг мазкур системадаги қўзғалмас соат бўйича олинган бошланиш ва тугалланиш пайтлари). Ҳодисанинг қўзғалмас K системадаги кузатувчи томонидан аниқланган бошланиш ва тугалланиш пайтларини (49.11) муносабатдан топиш мумкин:

$$t_1 = \frac{t'_1 + (\beta/c)\,x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (\beta/c)\,x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

У ҳолда ҳодисанинг K системадаги давомийлиги:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (49.13)$$

эканлиги келиб чиқади, яъни K системада ҳодиса K' системадагидан узоқроқ давом этади (вақт секинлашади). Шундай қилиб, битта ҳодисанинг ўзи турли инерциал саноқ системаларида турлича вақт давом этар экан. Мазкур ҳодиса юз берган нуқта қўзғалмас бўлган саноқ системасида ҳодиса энг қисқа вақт (жадал) давом этади. Мазкур вақт «хусусий вақт» деб юритилади.

Ҳозирги пайтда вақтнинг секинлашишини тасдиқлайдиган бир қатор тажрибалар маълум. Шу тарздаги энг дастлабки тажрибалардан бири элементар зарралардан мюонларнинг парчаланишини тадқиқ қилиш бўлди. Мюон — μ — мезоннинг истеъмолдаги номи бўлиб, мусбат мюон парчаланишида позитрон ва 2 та нейтрино ҳосил бўлади:

$$\mu^+ \to e^+ + 2\nu,$$

бу ерда e^+ — позитрон (массаси электрон массасига тенг бўлган мусбат зарра), ν — нейтрино (зарядсиз, массаси электрон массасидан жуда кичик бўлган зарра). Агар вақт ўтишининг секинлашиши содир бўлса, мюоннинг ўртача яшаш вақти (кўпчилик элементар зарралар 10^{-6} с тартибидаги вақт ичида яшайди) унинг ҳаракат тезлигига боғлиқ равишда ортиб бориши керак:

$$\tau_{\mu^+} = \frac{\tau^{(0)}_{\mu^+}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

бу ерда $\tau^{(0)}_{\mu^+}$ — хусусий яшаш вақти (мюон билан боғланган саноқ системасидаги ўртача яшаш вақти); τ_{μ^+} — мюоннинг ўрганилаётган (мюонга нисбатан ҳаракатдаги) саноқ системасидаги ўртача яшаш вақти. Космик нурларнинг атмосферада ҳосил қилган мюонлар дастаси билан ўтказилган тажрибалар сўнгги муносабатнинг аниқ бажарилаётганини тасдиқлади (Мюонларнинг ўртача хусусий яшаш вақти 2 мкс атрофида бўлган).

Вақтнинг секинлашиши элементар зарралар тезлаткичларининг ишида муҳим аҳамиятга эга. Гап шундаки, зарядли заррани етарлича тезлаштириш учун у тезлантирувчи майдонда муайян масофани босиб ўтиши зарур. Масалан, ўртача хусусий яшаш вақти $2{,}5\cdot10^{-8}$ с бўлган π^+ — мезон ёруғлик тезлигига эга бўлган тақдирда ҳам атиги 7,5 м масофани босиб ўтар эди. Ваҳоланки, π^+ — мезон бориб уриладиган нишонлар бир неча ўн метр масофада жойлаштирилади. Мазкур зарралар нишонга бемалол етиб боради. Масалан, π^+ — мезон тезлиги ёруғлик тезлигидан унинг 10^{-6} ҳиссасига фарқ қилганда унинг ўртача яшаш вақти $\approx 1{,}25\cdot10^{-5}$ с га тенг бўлади. Бу вақт ичида у 1 км дан ортиқ масофани босиб ўтади.

3. **Кесма узунлигининг нисбийлиги.** K' системага нисбатан қўзғалмас бўлиб, X' ўқ бўйлаб жойлашган $l' = x_2' - x_1'$ узунликдаги стерженни кўрайлик, бу ерда x_2' ва x_1' — стержень учи ва охирининг t' пайтдаги координаталари. Стерженнинг мазкур (унга нисбатан қўзғалмас) K' системадаги $l_0 = l'$ узунлиги унинг «хусусий узунлиги» дейилади. Стерженнинг K системада ўлчанган узунлигини топайлик.

K системада ҳаракатсиз турган кузатувчи учун стержень v_0 тезлик билан ҳаракатланади. ҳаракатланаётган стержень узунлигини ўлчаш учун кузатувчи K системадаги пайтнинг ўзида стержень учи билан охирининг x_2 ва x_1 координаталарини ўлчаши зарур. Мазкур координаталар x'_1 ва x'_2 координаталар билан

$$x'_2 = \frac{x_2 - v_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{ва} \quad x'_1 = \frac{x_1 - v_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

муносабатлар орқали боғланган. Бу ифодалардан

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

муносабат келиб чиқади. $x_2 - x_1 = l$ белгилаш киритсак,

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2} \tag{49.14}$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, K системадаги кузатувчи, стерженнинг узунлиги $\sqrt{1-\beta^2}$ марта қисқарган, деган хулосага келади. Бу фикрни умумлаштириб, кесмага нисбатан ҳаракатланаётган инерциал саноқ системаларида кесма ҳаракат йўналишида қисқариб, ҳаракат тезлиги қанчалик катта бўлса, кесма шунча кўп қисқаради дейиш мумкин.

50-§. Тезликларни қўшишнинг релятивистик қонуни

Ньютон механикасида тезликларни

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \tag{50.1}$$

кўринишда қўшиш мумкин эди. Бу ерда $\vec{v}_0$ — K' системанинг K системага нисбатан тезлиги, $\vec{v}'$ — жисмнинг K' системага нисбатан, $\vec{v}$ эса K системага нисбатан тезлиги.

Релятивистик механикадаги тезликларни қўшиш қоидасини аниқлаш учун бирор моддий нуқта ҳаракатини ўрганайлик. Нуқтанинг ихтиёрий t пайтда K системадаги вазияти x, y ва z координаталар билан белгиланади. Нуқтанинг K системадаги тезлигининг мазкур система ўқларига проекцияларини

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Нуқтанинг ихтиёрий t' пайтда K' системадаги вазияти x', y' ва z' координаталар билан аниқланади. Нуқтанинг K' системага нисбатан тезлигининг X', Y' ва Z' ўқларга проекциясини

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (49.11) формулалардан

$$dx = \frac{dx' + v_0 dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy, \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + (v_0/c^2)\,dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

эканлиги келиб чиқади. Биринчи учта тенгламани тўртинчисига бўлиб, бир саноқ системасидан бошқа саноқ системасига ўтишга имкон берадиган тезликларни алмаштириш формулаларини ҳосил қиламиз:

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + (\beta/c)\,v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + (\beta/c)\,v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + (\beta/c)\,v'_x}, \qquad (50.2)$$

$v_0 \ll c$ бўлган ҳолда бу муносабатлар классик механикадаги (50.1) тезликларни қўшиш формулаларига айланади.

(49.12) формулалардан фойдаланиб, K' системадаги тезликларнинг K системадаги тезликлар орқали ифодасини келтириб чиқариш мумкин:

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - (\beta/c)v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-(\beta/c)v_x}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-(\beta/c)v_x}. \qquad (50.3)$$

Бу формулалар (50.2) муносабатлардан v_0 олдидаги ишора билангина фарқ қилади.

Жисм X ўқига параллел ҳаракатланганда унинг K системага нисбатан v тезлиги v_x билан K' системага нисбатан v' тезлиги эса v'_x билан бир хил бўлиб қолади. Бу ҳолда тезликларни қўшиш қоидаси

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}} \qquad (50.4)$$

кўринишга келади.

Жисм K' системага нисбатан $v' = c$ тезлик билан ҳаракатланганда унинг K системага нисбатан тезлиги

$$v = \frac{c + v_0}{1 + (v_0 c/c^2)} = c$$

эканлиги келиб чиқади. Бундай натижанинг келиб чиқиши табиий, чунки Лоренц алмаштиришлари ёруғликнинг барча саноқ системалардаги тезлиги бир хил бўлади деган фикрга асосланган. (50.4) ифодада $v' = v_0 = c$ деб олсак,

$$v = \frac{c+c}{1+\frac{c \cdot c}{c^2}} = c$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, қўшилаётган v' ва v_0 тезликлар c дан катта бўлмаганда натижавий тезлик ҳам c дан катта бўлмайди.

(50.4) ифодадан кўринадики, v_0 ва v' тезликлар ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлганда (моддий жисмларнинг одатдаги тезликларида) тезликларни қўшишнинг релятивистик қоидаси классик механикадаги тезликларни қўшиш қоидасига ўтади.

51- §. Релятивистик механикада импульс ва энергия

Классик механиканинг асосий қонуни ҳисобланган Ньютоннинг иккинчи қонуни Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант бўлиши (ўз шаклини сақлаши) ёки бўлмаслигини аниқлайлик. Текширишлар шуни кўрсатадики, мазкур қонуннинг одатдаги кўриниши Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант эмас, яъни бир-бирига нисбатан жуда катта тезлик билан ҳаракатланаётган саноқ системаларидаги механик ҳодисалар турлича содир бўлади. Бу ҳол эса нисбийлик принципига зид. Бундай бўлишига сабаб шуки, Галилей алмаштиришлари каби, Ньютоннинг иккинчи қонуни ҳам тақрибий бўлиб, жисмлар ва саноқ системалари унча катта бўлмаган тезликлар билан ҳаракатланган ҳоллар учунгина ўринли бўлади. Шунинг учун мазкур қонунни Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант бўладиган кўринишда ёзиш зарур.

А. Эйнштейн жисмнинг инерциал саноқ системасидаги импульсини

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (51.1)$$

кўринишда ёзилса, Ньютоннинг иккинчи

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (51.2)$$

қонуни Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант бўлишини исботлади ($\vec{v}$ — жисмнинг мазкур саноқ системасидаги тезлиги, m_0 — унинг системага нисбатан ҳаракатланмаган ҳолдаги массаси, c — ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги).

Шундай қилиб, Ньютон иккинчи қонунининг релятивистик шакли

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\vec{F} \tag{51.3}$$

кўринишга эга бўлади. Шуни таъкидлаш керакки, релятивистик ҳолда $m\vec{a}=\vec{F}$ муносабатни қўллаб бўлмайди. Шу билан бирга, умумий ҳолда $\vec{a}$ тезланиш билан $\vec{F}$ куч ҳам бир хил йўналишга эга бўлмайди.

(51.1) формуладан кўринадики, $v \ll c$ бўлганда, яъни ёруғлик тезлигидан анча кичик тезликларда релятивистик импульс Ньютон механикасидаги $\vec{p}=m_0\vec{v}$ импульс билан мос келади. (51.3) ифодада қатнашган

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{51.4}$$

катталик *«релятивистик масса»* (катта тезлик билан ҳаракатланаётган жисм массаси) деб аталади. Албатта, $v \to 0$ бўлганда $m \to m_0$ бўлади. m_0 катталик эса *«тинчликдаги масса»* деб юритилади. Тезлик релятивистик ортиб борганда массанинг ортиб боришини электронлар, протонлар ва махсус тезлаткичларда катта тезликларгача тезлатилган бошқа зарралар билан ўтказилган жуда кўп тажрибаларда текшириб кўрилган. Бундан ташқари, мазкур боғланиш турли хил элементар зарраларнинг тўқнашиши бўйича ўтказилган тажрибаларда ҳам тасдиқланган.

(51.4) формуладаги $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ катталикни қаторга ёйсак: $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=(1-\beta^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta''+\ \ldots$ ҳосил бўлади. $\beta \ll 1$ бўлган ҳолларда мазкур қатордаги иккита ҳад билан чекланиш мумкин;

$$m=m_0\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)=m_0+\frac{m_0\beta^2}{2}=m_0+$$

$$+\frac{m_0v^2}{2}\cdot\frac{1}{c^2}=m_0+\frac{E_к}{c^2}. \tag{51.5}$$

Бу формуладан кўринадики, ҳаракатланаётган жисм массаси тинчликдаги массаси билан унинг кинетик энергиясини белгилаб берадиган $m_к$ массаси йиғиндисига тенг:

$$m = m_0 + m_к,$$

бу ерда $m_к = \frac{E_к}{c^2}$.

Ньютон механикасидаги каби релятивистик механикада ҳам масса жисм инертлигининг ўлчови ҳисобланади. (51.5) ифодадан кўринадики, ҳаракат тезлиги қанча катта бўлса, бу тезликни ўзгартириш шунча қийин бўлади. Яъни жисмнинг инертлиги доимий бўлмай, тезлик ортиб бориши билан инертлик ҳам ортиб боради. Жисмнинг тезлиги ёруғлик тезлигига яқинлашиб борганда унинг инертлиги шу қадар тез ортадики, бундан кейин тезликни орттириб бўлмай қолади. Ёруғлик тезлигига эришиб бўлмаслигини шу тарзда тушунтириш мумкин.

Энергиянинг релятивистик ифодасини топиш учун (51.3) тенгламани моддий нуқтанинг $d\vec{s} = \vec{v}dt$ кўчишига кўпайтирамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Бу ифоданинг ўнг қисми заррачани кўчиришда dt вақт ичида бажарилган dA ишга тенг. 17-§ да тенг таъсир этувчи кучнинг бажарган иши зарра кинетик энергиясини орттиришга сарфланиши кўрсатилган эди. У ҳолда

$$dE_к = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\vec{v}dt = \vec{v} \cdot d\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

ифода ҳосил бўлади. $\vec{v}d\vec{v} = d(v^2/2)$ эканлигини ҳисобга олсак, мазкур ифода

$$dE_к = \vec{v}\left\{\frac{m_0 d\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0 v\left(\vec{v}\, d\vec{v}/c^2\right)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\right\} = \frac{m_0 d(v^2/2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{m_0 c^2 d(v^2/c^2)}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}} = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

кўринишга келади. Ҳосил бўлган муносабатни интеграллаймиз:

$$E_к = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \text{const}. \qquad (51.6)$$

Кинетик энергия мазмунига кўра, $v = 0$ бўлганда $E_к = 0$ бўлиши зарур. У ҳолда интеграллаш доимийси $-m_0 \cdot c^2$ га тенглиги келиб чиқади. Шундай қилиб, кинетик энергиянинг релятивистик ифодаси

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \qquad (51.7)$$

кўринишга келади.

Кичик ($v \ll c$) тезликларда (51.7) ифоданинг шаклини ўзгартириш мумкин:

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{m_0v^2}{2},$$

яъни, мазкур ҳолда кинетик энергиянинг классик механикадаги ифодаси келиб чиқади. Шундай бўлиши табиий, чунки ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлган тезликларда релятивистик механиканинг ҳамма формулалари Ньютон механикасининг мос формулаларига ўтиши керак.

Бирор v тезлик билан ҳаракат қилаётган эркин заррани олайлик. У (51.7) формула билан ифодаланадиган кинетик энергиядан ташқари, яна қўшимча

$$E_0 = m_0c^2 \qquad (51.8)$$

энергияга ҳам эга бўлишини исботлаш мумкин. У ҳолда эркин зарранинг тўла энергияси $E = E_к + E_0 = E_к + m_0c^2$ ифода билан аниқланади. (51.7) формулани эътиборга олсак,

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (51.9)$$

ифода ҳосил бўлади.

Зарра тезлиги $v = 0$ бўлганда (51.9) ифода (51.8) кўринишга келади. Шу сабабли $E_0 = m_0c^2$ катталик *тинчликдаги энергия* (ёки *жисмнинг хусусий энергияси*) деб аталади. Бу энергия зарранинг ички энергиясини ифодалаб, унинг бир бутун жисм сифатидаги ҳаракатига боғлиқ эмас. Шуни ҳам назарда тутиш керакки, зарранинг тўла E энергияси ҳам, тинчликдаги E_0 энергияси ҳам унинг ташқи майдондаги потенциал энергиясини ўз ичига олмайди.

Қўзғалмас жисмнинг физик ҳолати ўзгарганда хусусий энергиянинг бир қисми бўлган ички энергияси ўзгариши билан унинг тинчликдаги энергияси ҳам ўзгариши керак. Бироқ, қиздириш, электрлаш, магнитлаш ва ҳоказолар макроскопик жисмларнинг тўла энергиясини сезиларли даражада ўзгартирмайди. Масалан, бирор миқдордаги водороднинг тинчликдаги массасини 1% га ўзгартириш учун уни 10^7 К температурагача қиздириш зарур.

(51.1) ва (51.9) тенгламалардан v' тезликни чиқариб юбориб, тўла энергиянинг импульс орқали ифодасини ҳосил қиламиз:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2\, c^2}. \qquad (51.10)$$

Зарранинг импульси $p \ll m_0 c$ бўлганда бу ифода қуйидаги шаклга келади:

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2} \approx m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right] =$$

$$= m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}. \qquad (51.11)$$

Ҳосил бўлган ифода кинетик энергиянинг Ньютон механикасидаги $E_к = \frac{p^2}{2m_0}$ ифодасидан $m_0 c^2$ ҳад билан фарқ қилади.

52-§. Масса билан энергия орасидаги боғланиш

Релятивистик массанинг (51.11) ифодасидан фойдаланиб, (51.9) формулани

$$E = mc^2 \qquad (52.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан жисмнинг энергияси билан унинг релятивистик массаси ҳамма вақт бир-бирига пропорционал бўлади деган хулоса келиб чиқади. Жисм энергиясининг ΔE ўзгариши унинг релятивистик массаси $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ га ўзгариши билан биргаликда содир бўлади ва аксинча релятивистик массанинг ўзгариши энергиянинг мос ўзгариши билан бирга содир бўлади. Мазкур фикр *релятивистик масса билан энергиянинг боғланиши қонуни* дейилади.

Релятивистик масса билан энергия орасидаги пропорционаллик, зарралар релятивистик массаларининг сақланиши ҳақидаги қонун билан тўла энергияларининг сақланиши ҳақидаги қонун тенг кучли бўлишига олиб келади. Шу маънода релятивистик массанинг сақланиш қонунини алоҳида қонун деб ҳисоблаб бўлмайди.

Жисм хусусий энергияси билан унинг массаси орасидаги (51.8) боғланиш ядро физикасидаги қатор тажрибаларда тасдиқланган. Маълумки, атомларнинг ядролари протонлар ва нейтронлардан ташкил топган. Протонларнинг сони Z элементнинг Менделеев даврий системасидаги ўрнини; протонлар ва нейтронлар сонларининг йиғиндиси $Z+N$ эса элементнинг масса сонини (ядронинг энг яқин бутун сонгача яхлитланган ҳамда массанинг атом бирликлари билан ўлчанган массаси) белгилайди.

Классик тасаввурларга кўра, ядронинг массаси уни ташкил этувчи зарралар массаларининг йиғиндисига тенг. Тажрибалар эса барча ядролар учун

$$m_я < Zm_p + Nm_n \qquad (52.2)$$

шарт бажарилишини кўрсатди, бу ерда $m_я$, m_p, m_n — ядронинг, протон ҳамда нейтроннинг тинчликдаги массалари. Мазкур тенгсизликни c^2 га кўпайтириб, зарраларнинг хусусий энергиялари орасидаги муносабатни топамиз:

$$E_я < E_p + E_n. \qquad (52.3)$$

Мазкур муносабат асосида шундай хулосага келиш мумкин:

1. Зарралар бирикиб ядро ҳосил қилганда ҳар бир ядро ҳисобига

$$\Delta E = (E_p + E_n) - E_я \qquad (52.4)$$

миқдорда энергия ажралади. У ядро бирикишидаги нурланиш энергияси бўлиши ёки вужудга келган янги ядронинг мазкур бирикиш пайтида олган кинетик энергияси бўлиши мумкин:

2. Ядрони элементар зарралар (протон ва нейтронлар)га ажратиш учун унга ΔE дан кам бўлмаган (52.4) миқдорда энергия бериш зарур (чунки бўлиниш маҳсулотлари кинетик энергияга ҳам эга бўлиши мумкин). Мазкур ΔE катталик *боғланиш энергияси* деб аталади. ΔE ўрнига

$$\Delta E = c^2\Delta m \qquad (52.5)$$

деб ёзиш мумкинлиги сабабли, кўпинча ядро Δm *масса дефекти (тақчиллиги)га* эга деб юритилади.

Мазкур масалалар курснинг «Квант физикаси» бўлимида муфассал ўрганилади.

53-§. Релятивистик механикада энергия ва импульснинг сақланиши қонунлари

23-§ да классик тўқнашишлар кўриб чиқилган эди. Тўқнашишлар уч хил бўлиши мумкин:

1. Ноэластик тўқнашишлар натижасида зарралар бир бутун бўлиб ҳаракат қилиб, кинетик энергия қисман ички энергияга айланади.
2. Эластик тўқнашишлар натижасида кинетик энергия зарралар орасида қайта тақсимланади, зарралар бир-биридан ажралиб кетади.

3. Шундай тўқнашишлар ҳам борки, кинетик энергия қисман ички энергияга айланса-да, зарралар бир-биридан ажралиб кетади. Бундай тўқнашишлар нисбатан кўпроқ учраса-да, ҳисоблар анча мураккаблигидан бундай тўқнашишларни ўрганмаган эдик.

Бу тўқнашишларнинг ҳаммасида ҳам зарраларнинг массаси ўзгармайди деб ҳисобланган эди.

Релятивистик тезликларда содир бўладиган тўқнашишларда релятивистик импульс ҳамда тўла энергия сақланади. Бироқ, бунда ўзаро таъсирлашишлар шу қадар кучли бўладики, зарраларнинг тинчликдаги массаси сезиларли даражада ўзгариши, яъни янги зарралар пайдо бўлиши мумкин. Албатта, бу ҳолда ҳисоблар мураккаб бўлади. Шунинг учун энг оддий ҳоллардан бирини кўриб чиқамиз.

Частотаси ν бўлган фотон m_0 массали тинч турган эркин электронга урилган ҳолни кўрайлик. Тўқнашиш натижасида электроннинг олган тезлигини $\vec{v}$ билан белгилайлик. У ҳолда импульснинг сақланиш қонуни

$$\frac{h\nu}{c} = m_0c\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{53.1}$$

кўринишга эга бўлади. Тўла энергиянинг сақланиш қонуни эса

$$h\nu + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{53.2}$$

бўлади. (53.1) ифодадан $h\nu$ ни топиб, (53.2) га қўямиз:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{ёки} \quad 1-\beta = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Мазкур тенгламанинг ечимларидан бири $\beta = 0$. Лекин бундай бўлиши мумкин эмас, чунки у импульснинг сақланиш қонунига зид. Тенгламанинг яна бир ечими $\beta = 1$. Бу эса Эйнштейннинг биринчи постулатига зид.

Демак, эркин электрон фотонни юта олмас экан. Бу фикр тажриба натижалари билан тўла мос келади.

Махсус нисбийлик назарияси жуда кўп тажрибаларда синовдан ўтиб, ҳозирги пайтда техникада кенг қўлланилмоқда. Масалан, ядровий энергетикада, зарядланган зарралар тезлаткичларини лойиҳалашда, рентген ва гамма нурларидан фойдаланишда ва бошқа соҳаларда мазкур назария хулосаларини ҳисобга олиш зарур бўлади.

Иккинчи космик тезлик (11,2 км/с) билан ҳаракатланаётган 1500 кг массали ракетанинг энергияси $\Delta E = 10^{11}$Ж га (кинетик энергия ҳисобига), массаси эса $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 10^{-6}$ кг га ортади. Бу эса унинг тинчликдаги массасининг $6{,}8 \cdot 10^{-10}$ қисмига тенг. Бу ҳолда классик механика қонунларидан фойдаланиш, яъни ракетанинг массасини ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин.

Шундай қилиб, махсус нисбийлик назарияси (релятивистик механика) классик механиканинг қонун ва тасаввурларини рад қилмайди, балки уларни ривожлантириб, умумлаштиради ҳамда классик механиканинг қўлланилиш чегараларини белгилаб беради.

XI боб

ТЕБРАНИШЛАР

54- §. Гармоник тебранма ҳаракат

Муайян вақт оралиқларида такрорланадиган ҳаракатлар *тебранма ҳаракат* ёки *тебраниш* деб аталади. Масалан, осма соат маятнигининг ёки мотор поршенининг ҳаракати тебранма ҳаракат бўлади. Кўпчилик физик ҳодисаларда турли табиатга эга бўлган, бироқ умумий қонуниятларга бўйсунадиган ва умумий усуллар билан ўрганиладиган тебранишлар рўй беради. Мазкур бўлимда ўрганиладиган механик тебранишларнинг асосий қонуниятлари физиканинг бошқа бўлимларидаги ўзгача физик табиатли тебранишларни ўрганиш учун асос бўлиб хизмат қилади.

Тебранма ҳаракат мобайнида ўзгараётган физик катталикларнинг сон қийматлари тенг вақтлар ичида такрорланиб турса, бундай тебраниш *даврий тебраниш* дейилади.

Моддий нуқта ҳаракатининг характерига кўра тебранишлар гармоник ва ногармоник тебранишларга бўлинади. Тебранишни характерловчи координата (силжиш, бурилиш бурчаги, оғиш бурчаги ва ҳ. к.) синус ёки косинус қонуни бўйича ўзгарса, тебранма ҳаракат *гармоник тебраниш* дейилади:

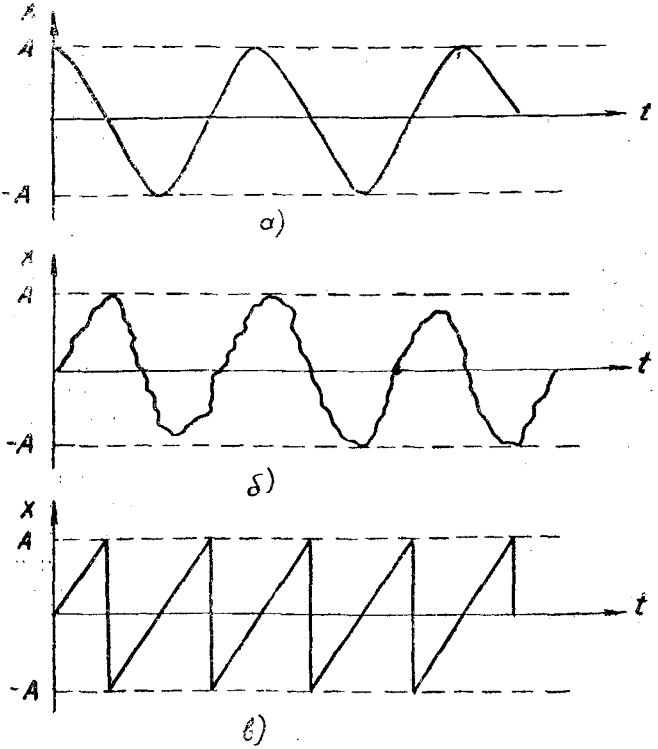
$$x = A \cos \omega t \qquad (54.1)$$

ёки

$$x = A \sin \omega t, \qquad (54.2)$$

бу ерда A — *тебраниш амплитудаси* бўлиб, у айтиб ўтилган координатанинг энг катта қийматини кўрсатади. Гармоник тебранишлар графиги синусоида кўринишида бўлади (106- *а* расм). Координата бошқача қонун бўйича ўзгарганда ногармоник тебраниш содир бўлади. 106- *б, в* расмларда ногармоник тебранишлар графиклари келтирилган.

Барча турдаги тебранишлар орасида гармоник тебраниш алоҳида ўрин тутади. Ж. Фурье кўрсатишича, ҳар қандай кўринишдаги тебранишга гармоник тебранишларнинг қўшилиши натижаси деб қараш мумкин. Шундай қилиб, гармоник тебраниш энг содда тебранма ҳаракат бўлиб, ҳар қандай мураккаб тебранишни гармоник тебранишларга келтириш мумкин. (54.1) ёки (54.2) ифода *гармоник тебранишларнинг кинематик тенгламаси* дейилади. Нуқта силжиши x нинг сон қийматлари $-A$ дан $+A$ гача ўзгаради. Кинематик тенгламада синус (ёки ко-



106-расм.

синус) белгиси остида ωt катталик моддий нуқтанинг муайян пайтдаги силжишини ифодалайди ва *тебраниш фазаси* деб аталади.

Нуқта вазияти тебраниш фазаси 2π га ўзгаришига мос келган вақт оралиқларида такрорланиб туради. Тебранишни характерловчи барча физик катталикларнинг сон қийматлари такрорланиб турадиган энг қисқа вақт оралиғи *тебраниш даври* дейилади. $\omega(t+T)=\omega t+2\pi$ шартдан

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{54.3}$$

келиб чиқади.

Вақт бирлиги ичидаги тебранишлар сони *тебранишлар частотаси* дейилади:

$$\nu=\frac{1}{T}. \tag{54.4}$$

$$\omega=2\nu\pi=\frac{2\pi}{T} \tag{54.5}$$

катталик тебранишларнинг *циклик (доиравий) частотаси* деб аталади. 107-*а* расмда силжишнинг вақтга боғланишини ифодаловчи гармоник тебранишлар графиги кўрсатилган. (54.1) ифодадан вақт бўйича ҳосила олсак:

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin\omega t=A\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{54.6}$$

ҳосил бўлади. Бундан кўринадики, тебранаётган нуқтанинг тезлиги ҳам гармоник қонун билан ўзгариб, унинг фазаси силжиш фазасидан $\pi/2$ га олдинда бўлади (107-*б* расм).

(54.6) ифодадан вақт бўйича ҳосила олсак:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos\omega t=A\omega^2\cos(\omega t+\pi). \tag{54.7}$$

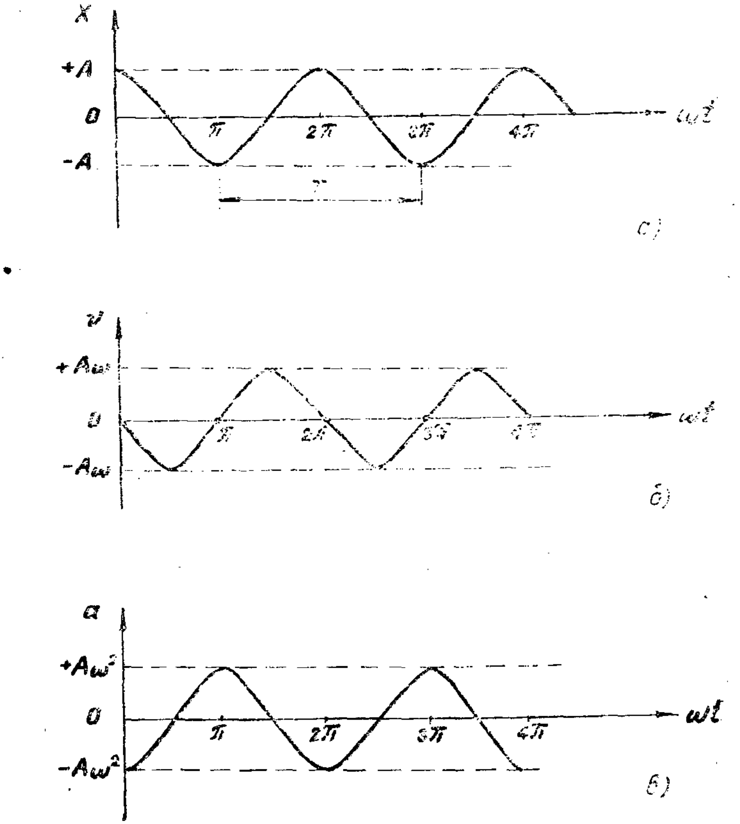
(54.1) ва (54.7) ифодаларни таққослашдан нуқтанинг силжиши ва тезланиш фазалари ўзаро қарама-қарши эканлиги келиб чиқади (107-*а*, *в* расм).

Шундай қилиб, гармоник тебранишларда иштирок этаётган моддий нуқтанинг тезлиги ва тезланиши ҳам гармоник тарзда ўзгарар экан.

Вақт саноғи бошини ихтиёрий танлаб олинадиган умумий ҳолда гармоник тебранишларни

$$x=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{64.8}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда α — *тебранишларнинг бошланғич фазаси* ($t=0$ пайтдаги фаза). Албатта, бу ҳолда (54.6), (54.7) ифодаларда ҳам бошланғич фаза ҳисобга олиниши зарур. *Гармоник тебранишлар тенгламаси*



107-расм.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (54.9)$$

кўринишга эга бўлади. Бунга (54.8) ифодадан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб ҳамда мос ифодаларни (54.9) тенгламага қўйиб, ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Агар бошланғич $t = 0$ пайтдаги нуқтанинг силжиши ($x = x_0$) ва тезлиги ($v = v_0$) маълум бўлса, бу шартларга кўра тебранишнинг амплитудасини ва бошланғич фазасини топиш мумкин. $t = 0$ пайт учун (54.8) ва (54.9) ифодалардан $x_0 = A\cos\alpha$, $v_0 = -A\omega\sin\alpha$ га эга бўламиз. Бундан

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \qquad (54.10)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{v_0}{x_0\omega} \qquad (54.11)$$

келиб чиқади.

Мисол учун, моддий нуқта мувозанат ҳолатидан чиқарилиб, турткисиз ($v_0 = 0$) қўйиб юборилса, $x_0 = A$, $\alpha = 0$ ва $x = A\cos\omega t$ ҳосил бўлади. Агар нуқта мувозанат ҳолатидан туртки билан чиқарилиб, у v_0 тезлик олган бўлса, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $A = \frac{v_0}{\omega}$ ва $x = A\sin\omega t$ ҳосил бўлади ($x_0 = 0$). Биринчи ҳолда вақт саноғи боши силжиш энг катта қийматга эришган пайтга, иккинчи ҳолда эса унинг мувозанат вазиятидан ўтиш пайтига мос келади.

Шундай қилиб, умумий ҳолда тебранишнинг амплитудаси ва бошланғич фазаси нуқтанинг бошланғич силжиши ва бошланғич тезлиги билан белгиланади.

55-§. Бир йўналишдаги тебранишларни қўшиш

Жисм бир вақтнинг ўзида бир неча гармоник тебранишларда иштирок этган ҳолларни ўрганишда тебранишларни тасвирлашнинг *вектор диаграммаси* усулидан фойдаланиш қулай. Вектор диаграммани чизиш учун OX ўқни ўтказамиз (108-*а* расм). O нуқтадан бошлаб сон қиймати тебраниш амплитудасига тенг бўлиб, OX ўқ билан тебранишнинг бошланғич фазасига тенг бурчак ҳосил қиладиган кесма жойлаштирамиз. Бу кесма *амплитуда вектори* деб аталади.

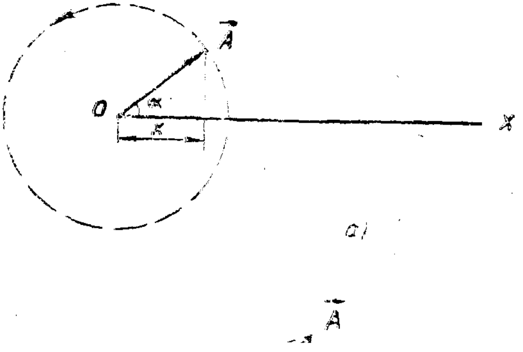
Бошланғич фаза мусбат бўлганда α бурчак соат стрелкасига тескари йўналишда, манфий бўлганда эса соат стрелкаси йўналишида олинади. 108-а расмдан кўринадики, амплитуда векторининг OX ўққа проекцияси $t = 0$ пайтдаги бошланғич силжиш ($x_0 = A\cos\alpha$) га тенг.

Шу усулда чизилган амплитуда векторини ω бурчакли тезлик билан айлантирилса, амплитуда вектори учининг абсциссаси вақт бўйича $x = A\cos(\omega t + \alpha)$ қонун билан ўзгаради. Бундан кўринадики, амплитуда вектори учининг абсциссаси амплитудаси A, доиравий частотаси ω ва бошланғич фазаси α бўлган гармоник тебранишда иштирок этади.

Моддий нуқта бир вақтнинг ўзида йўналишлари ва частоталари бир хил, бошланғич фазалари турлича бўлган иккита:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \alpha_1), \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \alpha_2) \qquad (55.1)$$

гармоник тебранишларда иштирок этаётган бўлсин. Нуқтанинг муайян пайтдаги натижавий силжиши нуқтанинг ик-



ди. Шу сабабли натижавий амплитуда ҳам ўзгариб туради, яъни натижавий тебраниш ногармоник бўлади.

Бир йўналишга эга бўлган ҳар хил частотали иккита гармоник тебранишлар қўшилаётган бўлсин. Уларнинг фазалари айирмаси вақт ўтиши билан ўзгариб тургани сабабли, саноқ боши сифатида тебранишларнинг бошланғич фазалари мос келган пайтни танлаб олиш мумкин:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha).$$

Масалани соддалаштириш мақсадида, иккала тебранишларнинг амплитудалари ўзаро тенг ($A_1 = A_2$) деб олайлик. У ҳолда натижавий тебраниш учун

$$x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \alpha\right) \qquad (55.5)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ерда

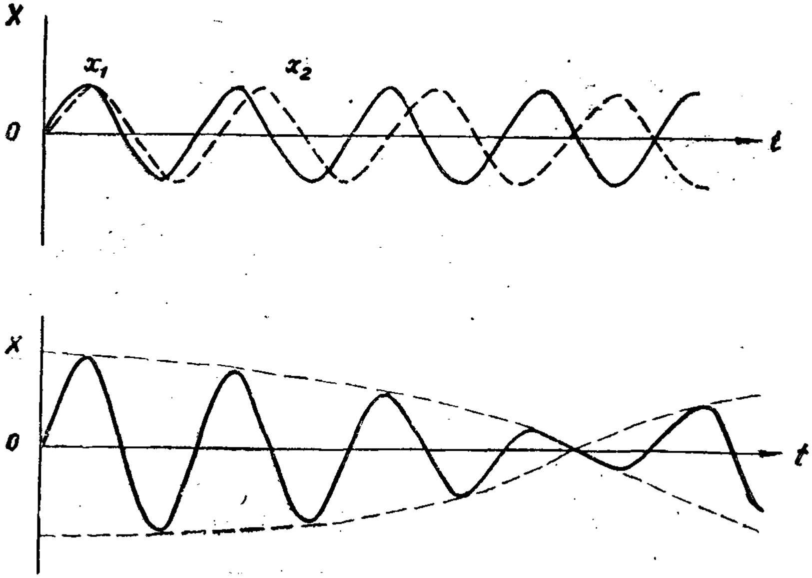
$$A = \left| 2A_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \qquad (55.6)$$

формула натижавий тебраниш амплитудасининг вақт бўйича ўзгариш қонунини ифодалайди.

Бир йўналишга эга бўлган, аммо частоталари ҳар хил бўлган икки гармоник тебранишларни қўшиш натижасида нодаврий тебранишлар ҳам вужудга келиши мумкин. Масалан, қўшилувчи тебранишларнинг частоталари сон жиҳатдан бир-бирига жуда яқин бўлганда *тепкили тебранишлар* деб аталадиган ҳодиса кузатилади.

Бу ҳолда $\omega_2 - \omega_1$ частоталар айирмаси уларнинг $\omega_1 + \omega_2$ йиғиндисидан анча кичик бўлганидан, натижавий тебраниш-

иган даврий тебраниш



111-расм.

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \qquad (55.7)$$

келиб чиқади. Натижавий тебраниш амплитудасининг ўзгариш частотаси *тепкили тебранишлар чатотаси* дейилади. У ҳолда

$$\nu_т = \frac{1}{T'} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \nu_2 - \nu_1,$$

яъни мазкур частота қўшилувчи тебранишлар частоталари айирмасига тенг.

Гармоник тебранишларни ўрганиш мобайнида уларни қўшишга ёки ташкил этувчиларга ажратишга тўғри келади. Комплекс сонлар назариясидан фойдаланиб, гармоник тебранишларни комплекс шаклда ифодалаш билан қўйилган масалаларни анча осон ҳал қилиш мумкин.

Математика курсидан маълумки, комплекс сонни

$$\tilde{z} = A \cdot e^{i\varphi} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (55.8)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда A ва φ — ҳақиқий сонлар, $i = \sqrt{-1}$, A — *комплекс сонининг модули*, φ эса унинг *аргументи* деб аталади.

Комплекс сонларни кўпайтириш қоидасига мувофиқ

$$\tilde{z} = \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

бу ерда $\tilde{z}_1 = A_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $\tilde{z}_2 = A_2 \cdot e^{i\varphi_1}$.

Бундан кўринадики, комплекс сонларни кўпайтирганда уларнинг модуллари ўзаро кўпайтирилиб, аргументлари эса қўшилади.

Тебранишларнинг комплекс шаклдаги ифодасидан фойдаланиб, иккита бир хил йўналишдаги

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \quad \text{ва}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

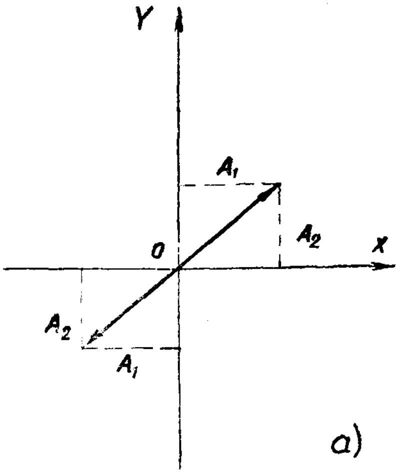
гармоник тебранишларнинг қўшилишини кўриб чиқайлик:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = A_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)}.$$

Натижавий тебраниш амплитудасини топиш учун бу ифодани унга қўшма бўлган ифодага кўпайтирамиз (бунда комплекс сон модулининг квадрати ҳосил бўлади):

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x}^* = A^2 = \left[A_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)}\right]\left[A_1 e^{-i(\omega t+\alpha_1)} + + A_2 e^{-i(\omega t+\alpha_2)}\right].$$

Бундан $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left[e^{i(\alpha_2-\alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2-\alpha_1)}\right]$ (55.9)



$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

муносабатдан топиш мумкин.

(56.1) ифодалардан ва $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ шартдан фойдаланиб, натижавий силжишнинг ўзгариш қонунини топиш мумкин:

$$s = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \cos (\omega t + \alpha).$$

2. Қўшилувчи тебранишлар фазалари қарама-қарши бўлсин, яъни $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm \pi$. Бу ҳолда (56.2) тенглама

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

кўринишга келади. Бундан:

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x, \qquad (56.4)$$

яъни натижавий тебраниш 112-*б* расмда тасвирланган тўғри чизиқ бўйлаб содир бўлади.

3. Тебранишларнинг бошланғич фазалари бир-биридан чорак даврга фарқ қилсин, яъни $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm \frac{\pi}{2}$. Бу ҳолда (56.2) тенглама

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \qquad (56.5)$$

кўринишга келади. Бу — ярим ўқлари қўшилувчи тебранишлар амплитудаларига тенг бўлган эллипс тенгламасидир (112-*в* расм). $\alpha_2 - \alpha_1 = + \frac{\pi}{2}$ бўлганда моддий нуқтанинг натижавий ҳаракати мазкур эллипс бўйлаб соат стрелкаси йўналишида содир бўлади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун қўшилувчи тебранишларни

$$x = A_1 \cos (\omega t + \alpha),$$

$$y = A_2 \cos \left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -A_2 \sin (\omega t + \alpha)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

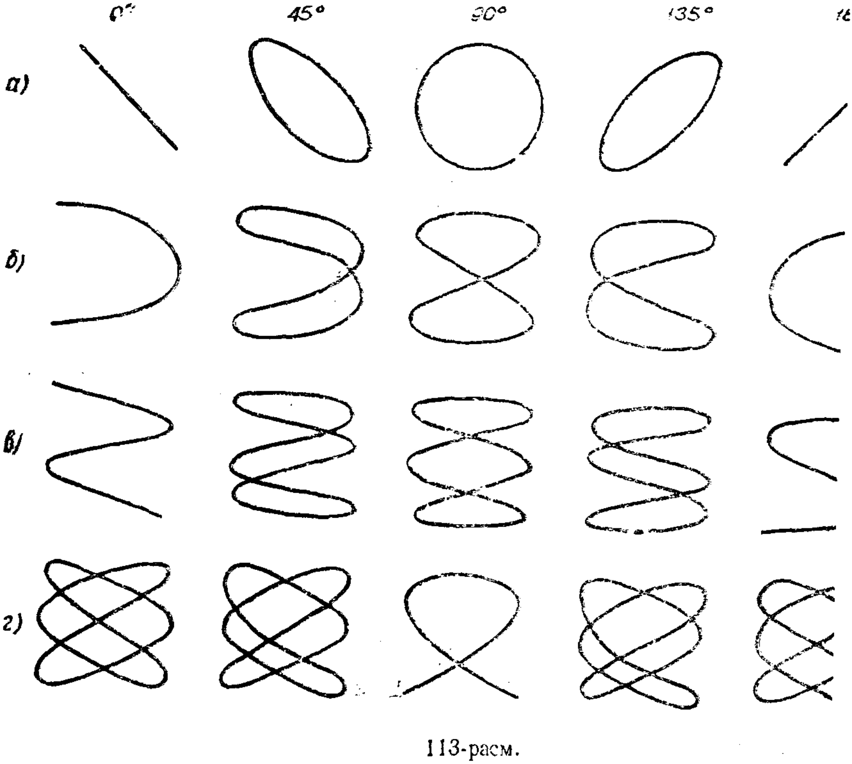
Бошланғич пайтда ($\alpha = 0$) моддий нуқта 1 вазиятда бўлади. Вақт ўтиши билан x нинг қийматлари камайиб боради, y эса манфий қийматларни қабул қилади. Бундан нуқта соат стрелкаси бўйлаб ҳаракат қилади, деган хулоса келиб чиқади. Худди шу тарзда $\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ бўлганда натижавий ҳаракат мазкур эллипс бўйлаб соат стрелкасига тескари йўналишда содир бўлишини исботлаш мумкин.

Қўшилувчи тебранишларнинг амплитудалари ўзаро тенг бўлганда эллипс айланага айланади.

Қўшилувчи тебранишлар фазаларининг айирмаси айтиб ўтилган ҳоллардагидан бошқача бўлганда OX ва OY ўқларга нисбатан симметрик бўлмаган эллипслар ҳосил бўлади.

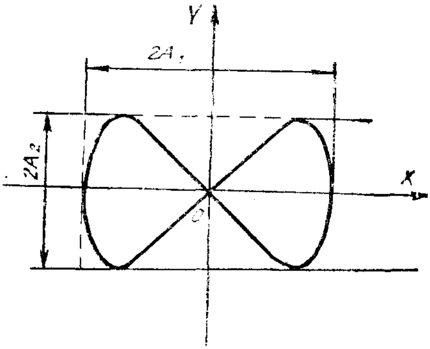
Шундай қилиб, ҳар хил частотали иккита ўзаро тик тебранишларни қўшиш умумий ҳолда нуқтанинг эллипс бўйлаб ҳаракатига олиб келар экан. Баъзи хусусий ҳолларда мазкур эллипс айланага ёки тўғри чизиққа айланади.

Айтиб ўтилган жараёнларни тажрибада кузатиш мумкин. Бундай жараённи ипга осилган шарчага ўзаро тик йўналишда бирин-кетин иккита зарба бериш билан амалга ошириш мумкин. Худди шунга ўхшаш тажрибани электрон-нурли трубкадаги электронлар дастаси билан



113-расм.

ҳам бажарса бўлади. Бунинг учун дастани вертикал ва горизонтал йўналишида бошқариш клеммаларига иккита гармоник электр тебранишларини улаш кифоя.



114-расм.

Частоталари ҳар хил бўлган иккита ўзаро тик тебранишлар қўшилганда **Лиссажу шакллари** деб аталадиган мураккаб траекториялар ҳосил бўлади. Уларнинг шакли қўшилаётган тебранишларнинг амплитудалари, частоталари ва бошланғич фазалари орасидаги муносабатга боғлиқ. 113-расмда частоталарининг нисбати: а) 1:1; б) 1:2, в) 1:3, г) 2:3 бўлиб, фазалари бир-биридан 0, 45, 90, 135 ва 180° га силжиган ҳоллар учун ўзаро перпендикуляр иккита тебранишларни қўшишдан ҳосил бўлган Лиссажу шакллари келтирилган. Шакллардан кўринадики, қўшилаётган тебранишларнинг частоталари бир-бирига каррали бўлганда Лиссажу шакллари томонлари тебранишлар иккиланган амплитудаларига тенг бўлган тўғри тўрт бурчакка ички чизилган ёпиқ эгри чизиқлардан иборат бўлади. 114-расмда частоталар 1:2 нисбатда, фазалар эса 90° га фарқ қилгандаги Лиссажу шакли кўрсатилган. Бу ҳолда *OX* ўқи бўйлаб амалга ошадиган тебранишнинг битта даври мобайнида моддий нуқта фақат бир марта энг катта $+A_1$ ва $-A_1$ қийматларни қабул қилади. Шу вақтнинг ичида нуқта *OY* йўналишдаги тебранишда иштирок қилиб, A_2 ва $-A_2$ қийматларга икки мартадан эришади. Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси тўғри тўртбурчакнинг *OY* дан A_1 масофадаги томонларининг ҳар бирига бир мартадан, *OX* дан A_2 масофадаги томонларнинг ҳар бирига эса икки мартадан уринар экан.

Бошқача қилиб айтганда, Лиссажу шаклларининг координата ўқларини кесиб ўтиш сони тебранишлар частоталарига тескари пропорционал. Шунинг учун, Лиссажу шаклларининг кўринишига қараб маълум частотага кўра номаълум частотани топиш мумкин. Бу усул ўлчаш техникасида кенг қўлланилади.

57- §. Тебраниш системалари

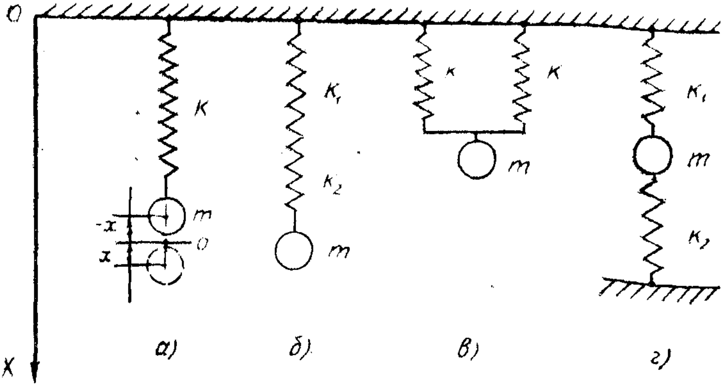
Кўпинча турли хил тебранма ҳаракатлар пайтида жисм хоҳлаганча узоқ вақт давомида (бирор ташқи куч таъсир қилмагунча) ҳаракатсиз туриши мумкин бўлган турғун мувозанат ҳолатига эга бўлади. Жисм мазкур мувозанат ҳолатидан бироз силжиганда уни ана шу ҳолатга *қайтарувчи куч* таъсирида мувозанат ҳолатига томон ҳаракат қила бошлайди. Жисмнинг инертлиги таъсирида у мувозанат ҳолатида тўхтаб қололмайди ва мувозанат ҳолати атрофида тебранма ҳаракат қила бошлайди.

Шундай қилиб, турғун мувозанат ҳолатининг борлиги, жисмни ана шу ҳолатга қайтарувчи кучнинг вужудга келиши ва инертликнинг борлиги туфайли жисмнинг *эркин (хусусий) тебранма ҳаракати* юзага келади.

Бир-бири билан ўзаро боғланган ҳамда тебранма ҳаракат қила оладиган жисмлар тўплами *тебраниш системаси* дейилади. Пружинага ёки ипга осилган металл шарча, горизонтал ўққа осилган қаттиқ жисм энг содда тебраниш системаларига мисол бўла олади. Шарчанинг вазияти фақат битта катталик, унинг x силжиши билан характерланади деб ҳисоблайлик (115- *а* расм). У ҳолда системанинг потенциал энергияси x силжишнинг функцияси бўлади:

$$E_{\text{п}} = E_{\text{п}}(x).$$

Системанинг мувозанат ҳолатидан силжиши жуда оз бўлганда тебранишлар *кичик тебранишлар* деб аталади.



115-расм.

Кичик тебранишларда вужудга келадиган қайтарувчи кучни топайлик. Бунинг учун x ни мувозанат ҳолатидан бошлаб ўлчаб, $E_п(x)$ функцияни Маклорен қаторига ёямиз:

$$E_п(x) = E_п(0) + \frac{x}{1!} E'_п(0) + \frac{x^2}{2!} E''_п(0) + \frac{x^3}{3!} E'''_п(0) + \ldots,$$

бу ерда $E'_п(0)$, $E''_п(0)$ ва ҳоказолар $E_п$ дан вақт бўйича олинган 1 —, 2 — ва ҳ.к. тартибли ҳосилаларнинг $x = 0$ ҳолатдаги қийматлари.

x нинг кичик қийматларида қаторнинг учта ҳади билан чекланиб, x нинг юқорироқ даражалари иштирок этган ҳадларни ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Турғун мувозанат ҳолатида системанинг потенциал энергияси минимал қийматга эга бўлиб, у $x = 0$ нуқтада минимумга эга деб ҳисобласак, $E'_п(0) = 0$ ва $E'_п(0) > 0$ келиб чиқади. $E_п(0) = b$ ва $E''_п(0) = k$ — (b ва k — доимий сонлар) белгилашларни киритиб, $E_п(x) = b + \frac{kx^2}{2}$ ифодани ҳосил қиламиз. Потенциал энергияни мувозанат ҳолатидан бошлаб ҳисобласак, $b = 0$ ва

$$E_п = \frac{kx^2}{2} \qquad (57.1)$$

ифода келиб чиқади.

Маълумки, қайтарувчи куч сон жиҳатдан потенциал энергиядан тескари ишора билан олинган ҳосилага тенг (18- §)

$$F = -\frac{dE_п}{dx} = -kx. \qquad (57.2)$$

Шундай қилиб, кичик тебранишларда системани мувозанат ҳолига қайтарувчи куч x силжишга пропорционал бўлиб, унга тескари йўналган бўлади. k коэффициентни *қайтарувчи куч коэффициенти* деб аталади. Масалан, 115-*а* расмда тасвирланган пружинали маятникда қайтарувчи куч бўлиб пружинанинг эластиклик кучи, пропорционаллик коэффициенти бўлиб эса пружинанинг бикрлиги хизмат қилади. Муайян кучлар таъсирида ўзининг мувозанат ҳолати атрофида тебранадиган жисм *маятник* деб аталади.

Эластиклик кучи бўлмаса-да, силжишга пропорционал бўлиб, системани мувозанат ҳолатига қайтарувчи кучларни *квазиэластик кучлар* дейилади.

Кичик тебранишларда пружинали маятникнинг ҳаракати гармоник тебраниш бўлиб, доиравий тебранишлар частотаси

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

формула билан топилишини кўрсатиш мумкин. Бу ердаги k — пружинанинг бикрлиги бўлиб, у

$$F = -kx$$

кўринишдаги Гук қонунидан топилади (x — пружинанинг деформацияси, m — маятникнинг массаси). Потенциал ва кинетик энергияларнинг $E_п = \frac{kx^2}{2}$ ва $E_к = \frac{mv^2}{2}$ формулалар билан ифодаланишини ҳисобга олиб (m ва v — пружинага осилган жисм массаси ва тезлиги), пружинали маятникнинг ихтиёрий пайтдаги вазияти учун энергиянинг сақланиш қонунини ёзамиз:

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \text{const}.$$

Тебранишлар тенгламасини ҳосил қилиш учун мазкур ифодадан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$2kx \cdot \frac{dx}{dt} + 2mv\,\frac{dv}{dt} = 0.$$

Бу ифодани $v = \frac{dx}{dt}$ га қисқартириб, $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$kx + m\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Мазкур тенгламани (54.9) ифод билан таққослаш шуни кўрсатадики, пружинали маятникнинг кичик тебранишлари гармоник характерга эга бўлиб, б тебранишларнинг доиравий частотаси

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

га тенг экан.

Маятник иккита пружинани «кетма-кет» улаб ҳосил қ линган бўлса (115-*б* расм), жисм x га силжиганда пружи налар ҳар хил чўзилади, лекин уларнинг деформациялар йиғиндиси юкнинг силжишига тенг:

$$x = x_1 + x_2.$$

Бу ҳолда барча эластиклик кучлари бир хил бўлади: $F_1 = F_2 = F$, $F_1 = -k_1x_1$, $F_2 = -k_2x_2$, $F = -kx$, бу ерда F -- массаси m бўлган юкка таъсир қилаётган куч. Шу сабабли

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

тенглик ҳосил бўлади, яъни тебранишлар частотаси

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2}{(k_1+k_2)m}}$$

бўлади, иккала пружина эса биргаликда бикрлиги $k = \frac{k_1 . k_2}{k_1+k_2}$ бўлган битта пружина билан тенг кучли бўлади.

Пружиналар «параллел» уланиб, уларнинг бикрликлари ҳар хил бўлганда мураккаб тебранишлар вужудга келади. Шунинг учун ҳар иккала пружина бир хил бикрликка эга бўлган ҳол билан чекланамиз (115-*в* расм). Юк силжиганда иккита эластиклик кучи вужудга келади, уларнинг йиғиндиси

$$F = -2kx$$

бўлиб, тебранишлар частотаси

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

га тенг, яъни мазкур ҳолдаги пружиналар бикрлиги $2k$ га тенг бўлган битта пружина билан тенг кучли бўлади.

115-*г* расмда юкнинг ҳар иккала томонига биттадан пружина маҳкамланган ҳол кўрсатилган. Бу ҳолда юк силжиганда унга иккита куч таъсир қилиб, ҳар иккала куч ҳам мувозанат ҳолати томонга йўналган. Тўла эластиклик кучини

$$F = -kx = -(k_1 + k_2)\,x$$

формуладан топиш мумкин, яъни тебранишлар частотаси

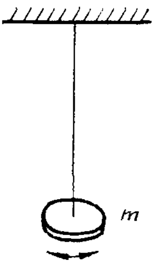
$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

га тенг бўлади.

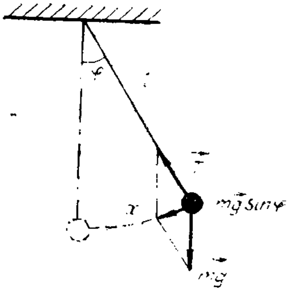
Юк осилган ипнинг буралиши асосий роль ўйнаб, унинг чўзилиши ҳисобга олмайдиган даражада кичик бўлганда буралма тебранишлар вужудга келади. Масалан, ипга осилган симметрик жисм (диск) *буралма маятник*ни ҳосил қилади (116- расм). Дискни горизонтал текисликда бирор α бурчакка бурсак, ипда юкни бошланғич ҳолатга қайтарадиган кучлар вужудга келади. Бураліш бурчаги кичик бўлганда мазкур кучларнинг моменти α га пропорционал бўлиб (эластик деформация), ҳаракат қонунини айланма ҳаракат динамикасининг асосий қонуни (33- §) ёрдамида келтириб чиқариш мумкин:

$$I\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-D\cdot\alpha, \qquad (57.3)$$

бу ерда I — юкнинг инерция моменти, D — бураліш доимийси $\left(D=\frac{M}{\alpha}\right)$. (57.3) формула пружинали маятник ҳаракат қонуни билан бир хил шаклга эга бўлганидан, уларнинг ечимлари ҳам ўхшаш бўлади. Бундан кўринадики, буралма маятник ҳам гармоник тебранма ҳаракат қилиб, тебранишлар частотаси



116-расм.



117-расм.

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{I}} \qquad (57.4)$$

га тенг бўлади.

Чўзилмайдиган вазнсиз ипга осилган моддий нуқтадан иборат система *математик маятник* деб аталади. Ингичка узун ипга осилган кичик оғир шарчадан иборат маятникни амалда математик маятник деб ҳисоблаш мумкин (117- расм). Шарчага $\overrightarrow{mg}$ оғирлик кучи ва ипнинг $\vec{T}$ таранглик кучи таъсир қилади.

Маятник мувозанат ҳолатидан φ бурчакка оғганда оғирлик кучининг $mg\sin\varphi$ ташкил этувчиси қайтарувчи куч ролини ўйнайди. У ҳолда динамиканинг иккинчи қонунини

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

кўринишда ёзиш мумкин. Кичик оғишларда $x = \varphi\, l$ деб олиш мумкинлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \qquad (57.5)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу ҳолда тебранишлар гармоник бўлмайди. Лекин маятникнинг кичик тебранишларида $\sin\varphi = \frac{x}{l} \approx \varphi$ деб ҳисоблаш мумкин эканлигидан, (57.5) тенгламани

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,x \qquad (57.6)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Мазкур тенглама гармоник тебранишларни ифодалаб, тебранишлар частотаси ва даврини $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ҳамда

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (57.7)$$

формулалардан топиш мумкин.

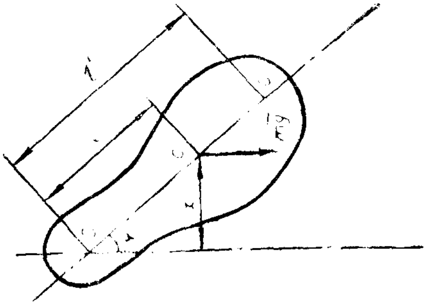
Шундай қилиб, кичик тебранишлар пайтида математик маятникнинг тебранишлар частотаси ва даври тебранишлар амплитудасига ва маятник массасига боғлиқ бўлмай, фақат маятник ипининг узунлигига ва мазкур жойдаги эркин тушиш тезланишигагина боғлиқ бўлади.

Математик маятникнинг тебранишлари кичик тебранишлар бўлмаганда ҳаракат тенгламаси (57.5) кўринишда бўлиб, мазкур ногармоник тебранишларнинг даври

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right) \qquad (57.8)$$

формула билан топилади. Бу ерда φ_0 — маятникнинг максимал оғиш бурчаги. $\varphi_0 \leqslant 15°$ бўлганда (57.7) формула билан ҳисоблашдаги нисбий хатолик 0,5 % дан ортмайди.

Энди физик маятникнинг хусусий тебранишларини кўрайлик. Оғирлик кучи билан устма-уст тушмайдиган қўзғалмас нуқта атрофида тебрана оладиган абсолют қаттиқ



118-расм.

жисм *физик маятник* деб аталади (118-расм). Маятник мувозанат ҳолатидан φ бурчакка оғганда уни мувозанат ҳолатига қайтаришга интиладиган айлантирувчи M момент вужудга келади. Маятникнинг C оғирлик маркази O осилиш нуқтасидан l масофада жойлашган бўлса, $M = mgl\sin\varphi$ бўлади (бу ерда m — маятник массаси). Айланма ҳаракат динамикасининг асосий қонунидан (33-§) фойдаланиб,

$$I\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi \qquad (57.9)$$

тенгламани ёзиш мумкин. Бу ерда I — маятникнинг осилиш нуқтаси орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти.

Кичик тебранишлар бўлган ҳол учун $\sin\varphi\approx\varphi$ бўлиб, қайтарувчи момент оғиш бурчагига пропорционал бўлади:

$$M = mgl\varphi.$$

У ҳолда (57.9) тенглама

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgl}{I}\varphi \qquad (57.10)$$

кўринишга келади. Бу ҳол учун $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$ деб ҳисобласак,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \qquad (57.11)$$

тенглама ҳосил бўлади.

Бу тенглама гармоник тебранишлар тенгламаси бўлиб, мазкур тебранишлар даври

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad (57.12)$$

формуладан топилади.

Шундай қилиб, оғиш бурчаги кичик бўлганда физик маятник гармоник тебранма ҳаракат қилиб, бу тебранишларнинг частотаси ва даври маятник массасига, унинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментига, айланиш ўқи билан оғирлик маркази орасидаги масофага ҳамда берилган жойдаги эркин тушиш тезланишига боғлиқ бўлади.

(57.7) ва (57.12) формулаларни таққослаб, математик маятник ипининг узунлиги

$$l' = \frac{I}{ml} \tag{57.13}$$

га тенг бўлганда физик ва математик маятниклар бир хил давр билан тебранади, деган хулосага келиш мумкин. l' катталик *физик маятникнинг келтирилган узунлиги* дейилади.

C оғирлик маркази билан O осилиш нуқтасини туташтирувчи тўғри чизиқда O нуқтадан l' масофада жойлашган O' нуқта физик маятникнинг *тебраниш маркази* дейилади. Штейнер теоремасига (32-§) кўра, $I = I_0 + ml^2$ бўлади, бу ерда I_0 — маятникнинг *айланиш ўқига параллел бўлиб, оғирлик маркази орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти.* У ҳолда $l' = \frac{I_0}{ml} + l$, яъни физик маятникнинг тебраниш маркази ҳамма вақт оғирлик марказига нисбатан осилиш нуқтасидан узоқроқда жойлашган бўлади ($l' > l$).

Ниҳоят, шуни таъкидлаш зарурки, бирор тебраниш системаси кичик тебранишларнинг доиравий частотаси ёки даврини топиш учун Ньютоннинг II қонунидан, айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламасидан ёки энергиянинг сақланиш қонунидан фойдаланиш мумкин.

58- §. Тебранма ҳаракат энергияси

Тебраниш системаси хусусий гармоник тебранма ҳаракат қилаётган бўлсин. Ишқаланиш кучлари бўлмаганда гармоник тебранишлар чексиз узоқ давом этиши мумкин. Системанинг тўла механик энергияси тебранаётган элемент (жисм) нинг кинетик энергияси ҳамда унинг вазияти билан боғлиқ бўлган потенциал энергиясидан иборат бўлади. Тебранишлар мобайнида бу энергияларнинг ҳар бири даврий равишда ўзгариб туради. Масалан, 57- § да ўрганилган пружинали, математик, физик ва буралма маятник тебранишларида энг катта оғишга мос келган ҳолатда кинетик энергия нолга тенг, чунки бунда системанинг ҳаракат тезлиги нолга тенг бўлиб, потенциал энергия эса максимал қийматга эга бўлади. Мувозанат вазиятида потенциал энергия энг кичик қийматга эга бўлиб, кинетик энергия максимумга эришади.

Система

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0) \qquad (58.1)$$

қонун бўйича тебранаётган бўлсин.

Системанинг кинетик энергияси

$$E_к = \frac{mv^2}{2} \qquad (58.2)$$

га, потенциал энергияси эса (57-§)

$$E_п = \frac{kx^2}{2} \qquad (58.3)$$

га тенг.

(58.2) ва (58.3) формулаларга x ва v қийматларини қўйсак,

$$E_к = \frac{mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha_0)}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha_0)}{2} \qquad (58.4)$$

ва

$$E_п = \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha_0)}{2} \qquad (58.5)$$

муносабатлар ҳосил бўлади ($k = m\omega^2$).

(58.4) ва (58.5) формулаларни таққослаб, кинетик ва потенциал энергия қийматлари $\pi/2$ га тенг фаза фарқи билан тебранишини кўриш мумкин. Демак, энг катта оғишдаги кинетик энергиянинг минимумига потенциал энергиянинг максимуми мос келади.

(58.4) ва (58.5) ифодаларни

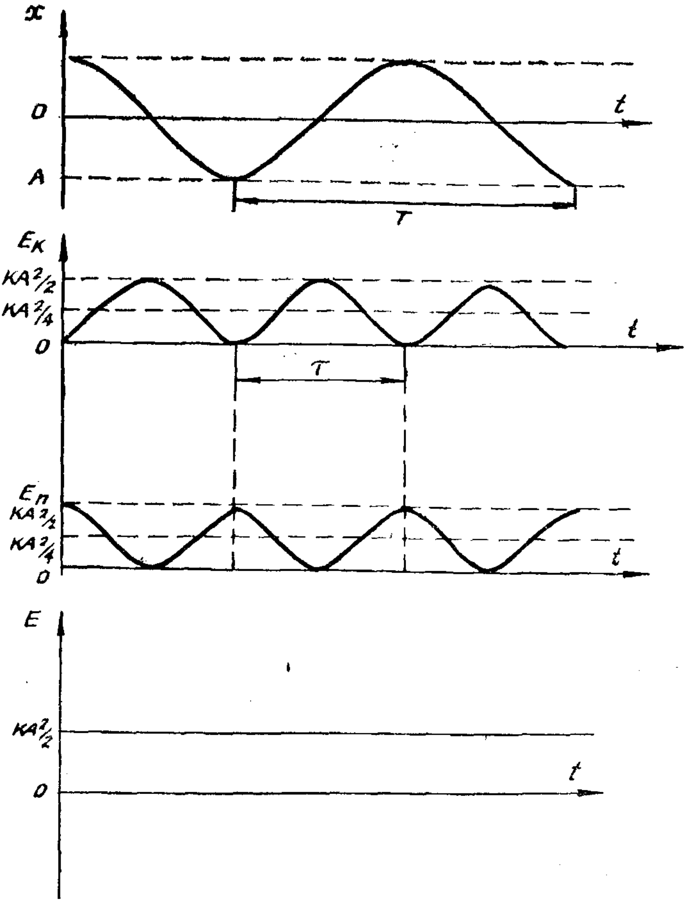
$$E_к = \frac{kA^2}{4} - \frac{kA^2}{4}\cos(2\omega t + \alpha_0) \qquad (58.6)$$

ва

$$E_п = \frac{kA^2}{4} + \frac{kA^2}{4}\cos(2\omega t + \alpha_0) \qquad (58.7)$$

кўринишга келтириш мумкин.

Шундай қилиб, кинетик ва потенциал энергиялар ўртача $\frac{kA^2}{4}$ қиймат атрофида система тебранишлари частотасидан икки марта катта частота билан тебранади, бунда улар сис-



119-расм.

тема тебранишларининг ҳар ярим даврида нолдан $\frac{kA^2}{2}$ гача ўзгаради.

(58.6) ва (58.7) ифодаларни қўшиб, системанинг тўла энергиясини топамиз:

$$E = E_{к} + E_{п} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \text{const}. \qquad (58.8)$$

(58.8) формуладаги катталиклар система учун доимий бўлганидан, гармоник тебранма ҳаракат қилаётган системанинг тўла энергияси ўзгармайди, деган хулосага келамиз.

119-расмда гармоник тебранишлар (119-*а* расм), тебранаётган система кинетик (119-*б* расм), потенциал (119-*в* расм) ва тўла (119-*г* расм) энергияларининг вақт бўйича ўзгариши кўрсатилган. Расмдан кинетик ва потенциал энергияларнинг тебраниш τ даври система тебранишларининг T давридан икки марта кичик (частотаси эса икки марта катта) эканлигини кўриш мумкин.

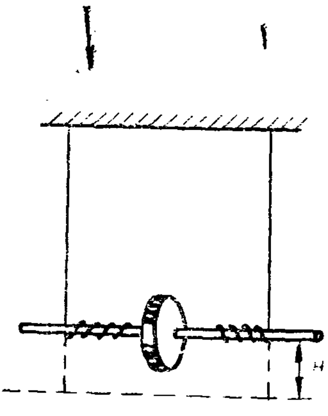
(58.8) формуладан кўринадики, гармоник тебранма ҳаракатнинг тўла энергияси тебранишлар амплитудасининг ҳамда частотасининг квадратига тўғри пропорционал бўлади.

(58.8) муносабат тебранма ҳаракат учун энергия исрофи бўлмаган ҳол учун энергиянинг сақланиш ва бир турдан иккинчи турга айланиш қонунини ифодалайди.

59-§. Сўнувчи тебранишлар

Ҳар қандай реал тебранишларда тебранишларнинг энергияси ишқаланиш кучларини енгиш ҳамда ҳаракат бўлаётган муҳит зарраларини тебратиш учун сарфланиб боради. Бунда тебранишлар амплитудаси ва тезлиги камая бориб, тебранишлар сўнади.

Буни Д. Максвелл маятниги билан амалга ошириладиган тажрибада намойиш қилиш мумкин. Мазкур маятник, ўқига ўраб қўйилган иккита ипга осиб қўйилган дискдан (120-расм) иборат бўлиб, у вертикал йўналишда тўғри чизиқли ҳамда ўз ўқи атрофида айланма тебранма ҳаракат қилади. Маятникни ипга ўраб, уни мувозанат ҳолатидан бирор H баландликка кўтарганда унга mgH миқдорда потенциал энергия берамиз. Мувозанат ҳолатига тушиб, потенциал энергияси кинетик энергияга айланган маятник тўхтамай, яна юқорига кўтарилади, ип эса яна ўққа ўралади. Лекин энди маятник



120-расм.

аввалгидан кўра кичикроқ баландликка кўтарилади, чунки маятник энергиясининг бир қисми ҳаво қаршилигини ҳамда ипларнинг ўққа ишқаланиш кучини енгишга сарфланади. Амплитудаси камайиб борадиган муайян тебранишлардан сўнг маятник мувозанат ҳолатида тўхтайди.

Қатъий айтганда, сўнувчи тебранишлар гармоник характерга эга бўлмайди, ҳатто уларни даврий тебранишлар деб ҳам айтиш қийин, чунки бир даврдан сўнг тебранишни характерловчи катталиклар айнан такрорланмайди. Лекин энергия сарфи жуда ҳам оз бўлганда сўнувчи тебранишларни тахминан даврий деб ҳисоблаш мумкин.

Система мувозанат ҳолати орқали кетма-кет икки марта бир томонга ўтиши оралиғида ўтган вақт *сўнувчи тебранишлар даври* деб аталади.

Силжиш, тезлик ва тезланишнинг бир давр ичида олган энг катта қийматлари *сўнувчи тебранишлар амплитудаси* деб аталади.

Сўнувчи тебранишлар амплитудасининг камайиш қонуни қаршилик кучларининг характерига боғлиқ. Кичик тебранишлар бўлган ҳол амалда катта аҳамиятга эга. Бунда тебранма ҳаракат тезлиги кичик бўлиб, қаршилик кучи тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлади (33-§).

Система квазиэластик куч таъсирида қаршилиги тезликка чизиқли боғлиқ бўлган муҳитда тебранаётган бўлсин. У ҳолда динамиканинг иккинчи қонунини мазкур система учун

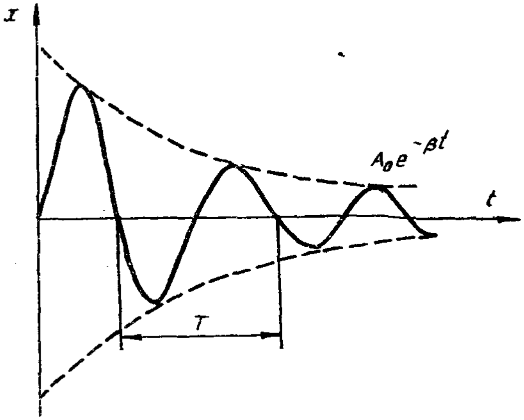
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \qquad (59.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда r — қаршилик коэффициенти. Мазкур тенглама чизиқли қаршиликли муҳитдаги эркин тебранишларнинг дифференциал тенгламаси деб юритилиб, унинг ечими

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (59.2)$$

кўринишга эга. Мазкур функция графиги 121-расмда келтирилган. $\beta = \frac{r}{2m}$ катталик *сўниш кўрсаткичи* дейилади.

Сўнувчи тебранишлар частотаси:



121-расм.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}} \qquad (59.3)$$

га тенг. Бу ифодага сўниш кўрсаткичини киритсак, у

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \qquad (59.4)$$

кўринишга келади, бу ерда $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ — сиетеманинг муҳит қаршиликка эга бўлмагандаги эркин хусусий тебранишлари частотаси (57-§).

(59.2) формуладан кўринадики, мазкур ҳолда тебранишлар амплитудаси экспоненциал тарзда камайиб боради:

$$A=A_0e^{-\beta t}. \qquad (59.5)$$

Амплитуданинг вақт бўйича ўзгариб бориши график равишда сўнувчи тебранишлар графигини чегаралаб турувчи чизиқ орқали тасвирланади (121-расмдаги пунктир чизиқ). Сўнувчи тебранишлар ω частотаси ва β сўниш кўрсаткичи тебранувчи системанинг ва муҳитнинг хоссаларига боғлиқ. A_0 бошланғич амплитуда ва φ_0 бошланғич фаза сўнмайдиган эркин тебранишлардагидек, бошланғич шартлар билан белгиланади.

(59.3) формулага асосан, сўнувчи тебранишлар даври:

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m}}}>T_0=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}. \qquad (59.6)$$

Шундай қилиб, сўнувчи тебранишлар даври мазкур системанинг сўниш йўқ бўлган ҳолдаги тебраниш давридан бирмунча катта бўлади. Буни қаршилик кучлари таъсирида ҳаракатнинг секинлашиши билан тушунтириш мумкин.

Бир-биридан бир даврга фарқ қилувчи амплитудалар нисбатини топайлик:

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta (t+T)}} = e^{\beta T} = \text{const}, \qquad (59.7)$$

яъни сўнувчи тебранишларнинг бир-биридан бир даврга фарқ қиладиган амплитудаларининг нисбати тебраниш охиригача ўзгармайди. Мазкур нисбатнинг натурал логарифми *сўнишнинг логарифмик декременти* деб аталади:

$$\delta = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T = \frac{r}{2m} \cdot T. \qquad (59.8)$$

Демак, амплитуданинг камайиб бориш тезлигини характерлайдиган сўнишнинг логарифмик декременти қаршилик коэффициентига тўғри пропорционал, система массасига эса тескари пропорционал бўлади.

Система тўла энергиясининг бир давр ичида исроф бўлган (сочилган) энергияга нисбатини ифодаловчи

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E_T} \qquad (59.9)$$

катталик *системанинг асллиги* дейилади. Қанчалик кам энергия сочилса, системанинг асллиги шунчалик катта бўлади. Энергия исрофи бўлмаган идеал ҳолларда система асллиги чексиз катта бўлади.

Системанинг асллиги билан сўнишнинг логарифмик декременти орасида $Q = \frac{\pi}{\delta}$ муносабат борлигини исботлаш мумкин.

Шундай қилиб, системанинг асллиги сўнишнинг логарифмик декрементига тескари пропорционал бўлади.

Одатда тебранишларнинг энергияси 100 марта (амплитудаси 10 марта) камайганда тебранишлар амалда сўнган деб ҳисобланади.

$$\frac{E_0}{E} = 100 = e^{2\delta N},$$

формуладан фойдаланиб, системанинг тўла тебранишлар сонини аниқлаш мумкин.

Бундан

$$\ln 100 = 2\delta N,$$

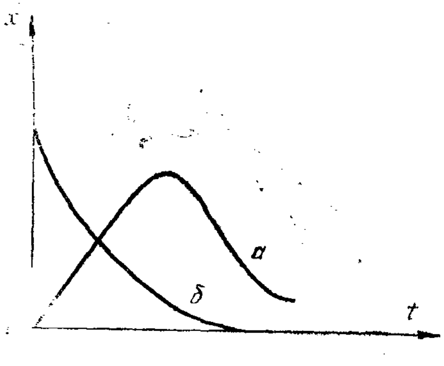
ёки

$$N = \frac{\ln 100}{2\,\delta} = \frac{1}{\delta \cdot \ln e} \approx 0{,}74Q \qquad (59.10)$$

ифода келиб чиқади. Масалан, асллиги анча яхши бўлган камертонни резонанс қутича устига ўрнатилса (бунда ҳавода товуш тебранишларини ҳосил қилиш учун сарфланаётган энергия миқдори ортади) унинг асллиги, тўла тебранишлар сони ҳам анча камаяди. Яна бир мисол: Фуко тажрибаси намойиш қилинадиган маятникнинг асллигини бир неча юз бирликка етказиш мумкин. Ана шу маятникка қанотчалар ўрнатилса, унинг асллиги 10—15 марта камаяди.

Шу пайтгача биз сўниш унча катта эмас, яъни $\omega_0 > \beta$ деб ҳисобладик. Агар сўниш катта ($\omega_0 < \beta$) бўлса, ҳаракат даврий характерга эга бўлмай қолади. Бу ҳолни мукаммал таҳлил қилиб ўтирмасдан баъзи хулосаларни санаб ўтиш билан чекланамиз. Бунда система турткн билан мувозанат ҳолатидан чиқарилса, у бирор энг катта оғишгача ҳаракатланиб, сўнгра асимптотик равишда мувозанат ҳолатига яқинлашиб боради (122-расм, *a* — эгри чизиқ). Агар системани дастлаб мувозанат ҳолатидан чиқариб, сўнгра ўз ҳолига қўйиб берилса, у секин-аста яна мувозанат ҳолатига қайтади (157-расм, *б* — эгри чизиқ).

Баъзан сўниш кўрсаткичини камайтириш зарур бўлади (масалан, Фуко тажрибасида Ер шари сезиларли бурчакка бурилгунга қадар маятникнинг тебранишлари сўнмаслиги керак). Сўниш кўрсаткичини тебранаётган жисм массасини орттириш ёки муҳит қаршилигини камайтириш билан камайтириш мумкин $\left(\beta = \frac{r}{2m}\right)$.



122-расм.

Кўпинча вужудга келган тебранишларни (масалан, ўлчов асбоби стелкасининг, автомобиль кузовининг кеманинг тебранишларини) тезроқ сўндириш зарур бўладиган ҳоллар ҳам учрайди. Тебранишларнинг сўнишини кучайтириш имконини берадиган мосламалар *демпферлар* ёки *амортизаторлар* дейилади. Масалан, автомашиналарнинг амортизатори майда тешикчалари бўлган поршень ҳаракатланиши мумкин бўлган мой (ёки бирор бошқа қовушоқ суюқлик) билан тўлдирилган цилиндрдан иборат. Поршеннинг штоки (дастаси) автомобиль кузови билан, цилиндр эса ғилдирак ўқи билан бириктирилган бўлади. Поршень ўз ҳаракати давомида цилиндр ичидаги қовушоқ суюқликнинг катта қаршилигига учраганлиги сабабли, кузовнинг юзага келган тебранишлари тезда сўнади.

60- §. Мажбурий тебранишлар. Резонанс

Сўнувчи тебранишлар фақат системанинг ўзида вужудга келадиган эластиклик ва ишқаланиш кучлари таъсирида содир бўлади. Амалда ташқи кучлар ёрдамида юзага келтириладиган сўнмас тебранишлар катта аҳамиятга эга. Бу ҳолда тебранишларнинг ҳаракат тенгламаси

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx + F_т \qquad (60.1)$$

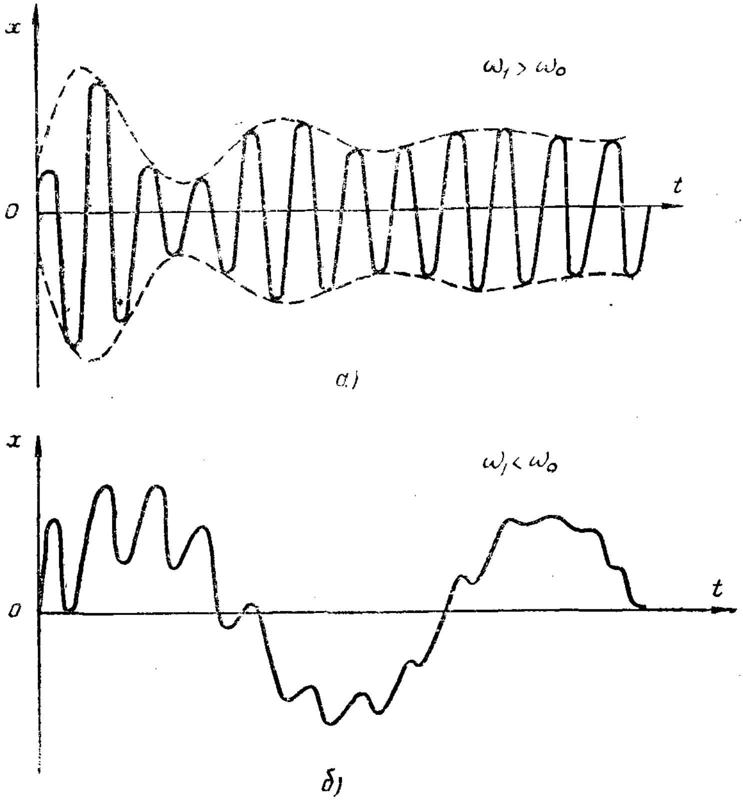
кўринишга эга бўлади. Ташқи $F_т$ куч доимий бўлганда у фақат мувозанат ҳолатини муайян масофага силжитиб, тебранишлар ана шу мувозанат ҳолати атрофида давом этади.

Даврий ўзгарувчи ташқи куч таъсиридаги тебранма ҳаракат алоҳида аҳамиятга эга бўлиб, *мажбурий тебранишлар* деб аталади. Масалан, ипга осилган шарчага даврий турткилар бериб турилса, тебранишлар характери ўзгаради. Турткилар шарчанинг мувозанат ҳолатидан ўтаётган пайтга мос келиб, унинг ҳаракат йўналишида бўлса, шарча борган сари кучлироқ тебранади. Турткилар частотаси билан маятникнинг хусусий частотаси мос келмаса, баъзи турткилар ҳаракатни тезлатиб, бошқалари эса секинлаштиради. Бунда маятникни сезиларли даражада кучли тебратиб бўлмайди.

Синус қонуни бўйича ўзгарувчи

$$F_т = F_0 \sin\omega_1 t \qquad (60.2)$$

куч таъсирида вужудга келадиган энг содда кўринишдаги мажбурий тебранишларни кўрайлик. Бу ерда F_0 — ташқи куч амплитудаси, ω_1 — унинг циклик (доиравий) частотаси. У ҳолда (60.1) тенглама



123-расм.

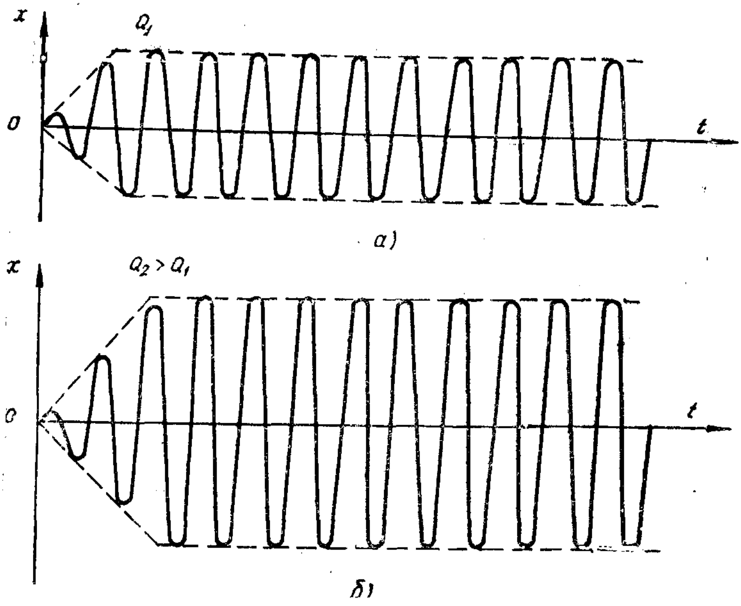
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\cdot\frac{dx}{dt} + F_0\sin\omega_1 t$$

кўринишга келади. Бу тенгламани m га бўлиб, одатдаги $\left(\frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{r}{m} = 2\beta\right)$ белгилашларни киритсак, доимий коэффициентли бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega_1 t \qquad (60.3)$$

дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Даврий ўзгарувчи куч таъсирида мазкур кучнинг ω_1 ўзгариш частотасига эга бўлган тебранишлар вужудга келиши табиий. Лекин, тажрибалар кўрсатишича, бундай тебраниш-



124-расм.

лар секин-аста қарор топади. 123-расмда $\omega_1 \neq \omega_0$ бўлган, 124-расмда эса $\omega_1 = \omega_0$ бўлган ҳоллардаги ташқи куч амплитудаси бир хил бўлиб, система асллиги ҳар хил бўлгандаги мажбурий тебранишларнинг қарор топиши тасвирланган. 124-расмдан кўринадики, ташқи кучнинг ω_1 ўзгариш частотаси системанинг ω_0 хусусий тебранишлари частотасига тенг бўлганда амплитуда монотон ортади, тебранишларнинг қарор топиш вақти ҳам ортади, система асллиги ортиши билан эса тебраниш амплитудаси ортиб боради.

(60.3) тенглама система эркин тебранишларининг (59.1) тенгламасидан x га боғлиқ бўлмаган ўнг қисмдаги ҳад билан фарқ қилади. Бундай тенгламанинг ечими (59.1) тенгламанинг ечими бўлган умумий $x_1(t)$ ечим билан (60.3) тенглама хусусий $x_2(t)$ ечимининг йиғиндисига тенг:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \qquad (60.4)$$

Тенгламанинг умумий $x_1(t)$ ечими (59.2) формула билан аниқланиб, системанинг хусусий сўнувчи тебранишларини ифодалайди. Етарлича катта вақт оралиғида хусусий тебранишлар амалда сўниб бўлади ва (60.4) ифоданинг иккинчи ҳадигина қолади (бу ҳолни 123-*а* ва 123-*б* расмларда яққол кўриш мумкин).

$x = x_2(t)$ ифода (60.3) тенгламанинг хусусий ечими бўлиб, системанинг мажбурий тебранишларини ифодалайди. Мазкур ечимни

$$x_2(t) = A\sin(\omega_1 t + \alpha)$$

кўринишда ахтарамиз, бу ерда A ва α — тебранишнинг ҳозирча номаълум бўлган амплитудаси ва бошланғич фазаси.

$x_2(t)$ нинг вақт бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топиб, (60.3) дифференциал тенгламага қўйсак,

$$\left[(\omega_0^2 - \omega_1^2)\ A\cos\alpha - 2\beta\omega_1 A\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right]\sin\omega_1 t +$$
$$+ [2\beta\omega_1 A\cos\alpha + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\ A\sin\alpha]\cos\omega_1 t = 0$$

ифода ҳосил бўлади. Бу тенглик ихтиёрий t пайтда бажарилиши керак, бунинг учун эса, $\sin\omega_1 t$ ва $\cos\omega_1 t$ лар олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши керак:

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)\ A\cos\alpha - 2\beta\omega_1 A\sin\alpha - \frac{F_0}{m} = 0,$$
$$2\beta\omega_1 A\cos\alpha + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\ A\sin\alpha = 0. \qquad (60.5)$$

Иккинчи тенгламадан

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\beta_1\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \qquad (60.6)$$

келиб чиқади. Бу ифодадаги α $x_2(t)$ ни (60.3) тенгламанинг тўла ечимига айлантирадиган қийматга эга бўлиши зарур. Номаълум A катталикни аниқлаш учун (60.5) ифодаларни квадратга кўтариб, қўшамиз. Ҳосил бўлган ифодадан:

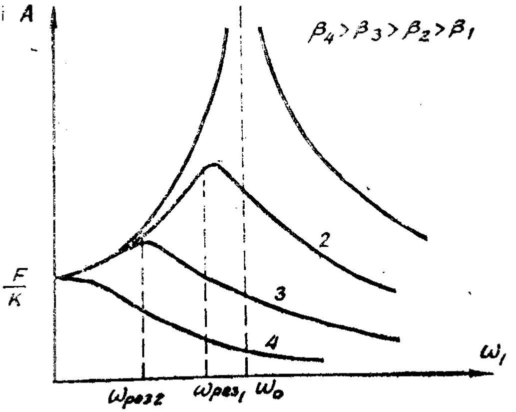
$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}} \qquad (60.7)$$

келиб чиқади.

Демак, системага ташқи (60.2) куч таъсир қилса, унда мажбурий

$$x = A\sin(\omega_1 t + \alpha) \qquad (60.8)$$

тебранишлар вужудга келар экан. Бундан кўринадики, мажбурий тебранишлар ташқи куч частотасига тенг частота билан содир бўладиган, амплитудаси (60.7) формула билан аниқланадиган гармоник тебранишлардан иборат. Лекин, x силжиш ташқи мажбур қилувчи кучга нисбатан фаза бўйи-



125-расм.

ча α га фарқ қилади, яъни мажбур қилувчи куч максимумга эришган пайтда силжиш энг катта қийматга эга бўлмаслиги, ҳатто нолга тенг бўлиши $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right.$ бўлганда$\left.\right)$ ҳам мумкин.

Мажбурий тебранишлар амплитудаси ва фазасини батафсилроқ кўриб чиқайлик. (60.7) формуладан кўринадики, амплитуда системанинг эркин тебранишлар частотаси ω_0 билан мажбур қилувчи куч частотаси ω_1 орасидаги муносабатга боғлиқ. Бундан ташқари, амплитуда мажбур қилувчи кучнинг амплитудаси F_0 ва сўниш кўрсаткичи β га ҳам боғлиқ. 125-расмда F_0 ва m нинг муайян қийматлари учун сўниш кўрсаткичи β нинг ҳар хил қийматларидаги A нинг ω_1 га боғланиши келтирилган.

$\omega_1=0$ (доимий куч) бўлганда (60.7) ифодадан $A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ доимий силжиш келиб чиқади (бу фикр хусусий тебранишлар сўниб бўлган, яъни мажбурий тебранишлар қарор топган ҳол учун ўринли).

$\omega_1 \rightarrow \infty$ бўлганда амплитуда нолга интилади. Мажбур қилувчи куч частотасининг муайян қийматида амплитуда (берилган β учун) максимал қийматга эришади. *Мажбур қилувчи кучнинг муайян частотасида мажбурий тебранишлар амплитудасининг кескин ортиб кетиши ҳодисаси* *резонанс* деб аталади. Частотанинг мазкур қиймати *резонанс частотаси*, амплитуданинг унга мос келган қиймати эса *резонанс амплитудаси* деб юритилади. Резонанс частотасини топиш учун (60.7) ифода махражида бўлган илдиз остидаги ифодадан ω_1 бўйича ҳосила олиб, уни нолга тенглаштирамиз:

$$-4\,(\omega_0^2-\omega_1^2)+8\beta^2=0.$$

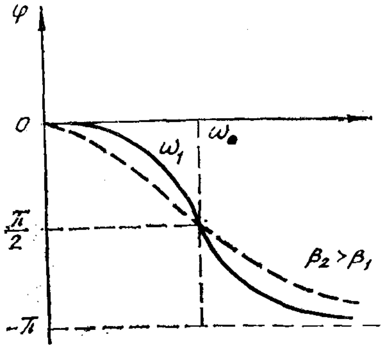
Бу тенгламадан резонанс частотаси

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \qquad (60.9)$$

га тенг эканлиги келиб чиқади. Бу ифодани (60.8) га қўйиб, резонанс амплитудасини топамиз:

$$A_{\text{рез}}=\frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}. \qquad (60.10)$$

Бу формулалардан кўринадики, резонанс частотаси ҳам, резонанс амплитудаси ҳам системанинг сўниш кўрсаткичига боғлиқ экан. β нолга яқинлашиб борганда резонанс частотаси орта бориб, системанинг эркин тебранишлари ω_0 частотасига интилади. Бунда резонанс амплитудаси орта бориб, $\beta=0$ да чексиз катта бўлади. Албатта, амалда тебранишлар амплитудаси чексиз катта бўлиши мумкин эмас, чунки одатда барча системаларда қаршилик кучлари мавжуд бўлади. Системадаги сўниш кичик ($\beta\approx 0$) бўлганда резонанс эркин тебранишлар частотасида ($\omega_{\text{рез}}\approx\omega_0$) юз беради деб ҳисоблаш мумкин. Сўниш жуда катта бўлганда резонанс ҳодисаси йўқолади. ω_1 ортиб бориши билан мажбурий тебранишлар амплитудаси монотон равишда камайиб боради (125-расм, 4-эгри чизиқ).

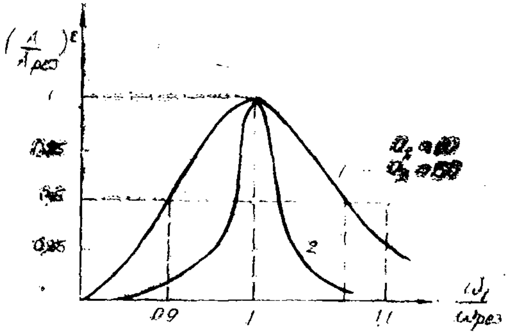


126-расм.

Силжиш билан мажбур қилувчи куч орасидаги фаза фарқи (60.6) формула билан аниқланади. $\omega_1<\omega_0$ бўлганда силжиш фаза жиҳатдан мажбур қилувчи кучдан орқада қолади (α — манфий). ω_1 частота ω_0 га яқинлашиб борганда бу фарқ орта бориб, $\omega_1=\omega_0$ да $\alpha=-\frac{\pi}{2}$ бўлиб қолади (126-расм).

$\omega_1 \gg \omega_0$ бўлганда силжиш ва мажбур қилувчи куч тебранишлари қарама-қарши фазада бўлиб қолади ($\alpha = -\pi$). Расмда пунктир чизиқ билан сўниш каттароқ ($\beta_2 > \beta_1$) бўлган ҳолга мос келган эгри чизиқ келтирилган.

Биринчи қарашда амплитуда максимал (резонанс) бўлган ҳолда силжиш билан куч орасидаги фаза фарқи — $\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлиши ғайри табиий ҳол бўлиб кўриниши мумкин. Гап шундаки, бу ҳолда тезлик билан мажбур қилувчи куч тебранишлари бир хил фазада бўлади. Яъни тезлик энг катта қийматга эга бўлганда (мувозанат ҳолатидан ўтаётганда) куч ҳам энг катта қийматга эга бўлиб, ҳаракат йўналиши билан мос келади. Жисм ҳаракат йўналишини ўзгартирганда куч ҳам йўналишини ўзгартириб, яна ҳаракат йўналиши билан мос бўлади. Бундай шароитда кучнинг бажарган иши тўлалигича кинетик энергияни орттиришга сарф бўлади, тебраниш амплитудаси эса орта бориб, энг катта қийматга эришади. Шу пайтдан бошлаб кучнинг бажарган иши тўлалигича ишқаланишни енгишга кетадиган энергияни қоплашга сарфланади.



127-расм.

127-расмда тебранаётган жисм амплитудаси квадратининг мажбур қилувчи куч частотасига боғланишининг графиги келтирилган. Мазкур график *резонанс эгри чизиғи* деб аталади. Расмда система асллигининг қийматлари ҳам кўрсатилган.

$\left(\frac{A}{A_{рез}}\right)^2 = 0,5$ бўлган ҳолдаги $h = \frac{2\Delta\omega}{\omega_{рез}}$ катталик *резо-*

нанс эгри чизиғининг кенглиги дейилади. Бу катталик система аслиги билан боғланган. Бинобарин, (60.7) ва (60.10) ларни ҳисобга олсак, $2 = 1 + \frac{(\omega_1^2 - \omega_{рез}^2)^2}{4\beta^2\omega_1^2}$ келиб чиқади ($\omega_{рез} \approx \omega_0$ деб олдик). Бу ифодадан

$$2\beta\omega_1 \approx 2\beta\omega_0 \approx 2\omega_0\Delta\omega$$

тенгликни келтириб чиқариш мумкин.

Шундай қилиб, резонанс эгри чизигининг кенглиги учун

$$h = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\beta}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \qquad (60.11)$$

формула ҳосил бўлади. Резонанс эгри чизиғидан фойдаланиб h ни осонгина топиш мумкин. Бу эса система асллигини аниқлашнинг жуда қулай усули ҳисобланади.

(60.11) формуладан кўринадики, системанинг асллиги қанчалик юқори бўлса, резонанс эгри чизиғи шунчалик тор бўлиб, резонанс амплитудаси катта бўлади.

Шуни ҳам айтиш керакки, фақат ташқи турткилар частотаси системанинг эркин тебранишлари частотасига яқин бўлгандагина эмас, балки унга каррали бўлганда ҳам резонанс юз бериши мумкин.

Резонанс ҳодисаси кўпинча жуда фойдали бўлади: ундан акустикада мусиқа асбоблари товушини кучайтиришда; радиотехникада частоталари билан фарқ қиладиган кўпгина сигналлар орасидан муайян частотали сигнални ажратиб олишда; кўп каналли телеграфда ва бошқа жойларда фойдаланилади. Мазкур тебраниш системалари жуда катта асллика эга бўлади.

Лекин, бир қатор ҳолларда резонанс жуда катта деформациялар ва емирилишга олиб келиши, машиналар ва фундаментларни тебрантириши мумкин. Машиналарнинг айланувчи қисмлари, самолёт ва кемалар двигателларининг ўқлари аниқ мувозанатлашмаганлиги сабабли, ўзгарувчан куч таъсирига учраб, бутун конструкцияни тебрантиришлари мумкин. Шунинг учун конструкторлар қурилмани шундай лойиҳалашлари керакки, тўла қурилмада ҳам, унинг алоҳида қисмларида ҳам кескин резонанс ҳодисалари юз бермаслиги зарур. Резонансни йўқотиш учун асллиги жуда кичик бўлган системалардан фойдаланиш зарур. Бунинг учун системанинг инертлиги ёки эластиклик хоссалари кучсиз ($m \to 0$ ёки $k \to 0$) бўлиши зарур. Бунда системанинг хусусий частотаси жуда катта ёки жуда кичик $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ бўлиб, резонанс ҳодисаси юз бермайди.

61-§. Ночизиқли системалардаги тебранишлар. Автотебранишлар

Юқорида кўриб чиқилган барча тебранишлар системанинг хоссалари ва ташқи таъсирларга боғлиқ бўлади. Тебранишлар мобайнида системанинг параметрлари доимий бўлиб, тебранаётган жисмларга таъсир қилаётган кучлар мазкур параметрларнинг чизиқли функциялари бўлса, тебраниш системаси ва тебранишлар **чизиқли система** ва **чизиқли тебранишлар** деб аталади. Масалан, қайтарувчи кучлар ёки моментлар мувозанат ҳолатидан оғишларнинг чизиқли $F = -kx$ ва $M = -D \cdot \varphi$ функциялари орқали ифодаланадиган даражада кичик бўлиб, m, k, I, D параметрлар тебранишлар мобайнида ўзгармаса, 57-§ да ўрганилган системаларни чизиқли система деб ҳисоблаш мумкин. Фақат гармоник тебранишларгина эмас, балки қайтарувчи куч силжишнинг чизиқли функцияси ($F = -kx$), қаршилик кучи эса тезликнинг чизиқли функцияси ($F_{иш} = -rv$) бўлган ҳолдаги сўнувчи тебранишлар ҳам чизиқли тебраниш бўлиши мумкин. Бунда эластиклик коэффициенти k ва ишқаланиш коэффициенти r тебранишлар мобайнида ўзгармас бўлиши муҳим. Хусусан, ишқаланиш коэффициенти тезликнинг биринчи даражасига эмас, жуда катта тезликларда бўлганидек, унинг иккинчи даражасига пропорционал бўлса, тебранишлар чизиқли бўлмайди.

Чизиқли тебраниш системаларининг энг муҳим хусусияти шуки, бундай системага бир вақтнинг ўзида бир нечта даврий ўзгарувчи куч таъсир қилаётган бўлса, система параметрлари ўзгармас бўлгани туфайли бошқа кучларнинг борлиги ёки йўқлигидан қатъи назар, ҳар бир куч ўзининг таъсирини кўрсатади. Масалан, бошқа кучлар йўқлигида бирор куч таъсирида x_1, иккинчи куч таъсирида x_2 ва ҳ. к. силжишлар содир бўлса, мазкур кучлар баравар таъсир қилган ҳолдаги натижавий силжиш $x_1 + x_2 + \ldots$ йиғиндига тенг бўлади. Бу ҳол суперпозиция принципи бўлиб, ночизиқли системаларда мазкур принцип амалга ошмайди. Бинобарин, муайян куч таъсирида x_1 силжиш содир бўлиб, системанинг параметрларини бир оз ўзгартирган бўлсин. У ҳолда параметрлар илгаригидек қолганда x_2 силжишни юзага келтирадиган иккинчи куч энди x_2' силжишни ҳосил қилади. Мазкур силжиш биринчи куч таъсирида система параметрлари қай даражада ўзгарганига боғлиқ бўлади.

Чизиқли ва ночизиқли системаларнинг бир-биридан фарқи мажбурий тебранишлар характерида ҳам намоён бўлади: ташқи синусоидал куч чизиқли системаларда гармоник тебранишларни вужудга келтиради, ночизиқли системадаги тебранишлар эса, мажбурий тебранишлар амплитудаси қанчалик катта бўлса, гармоник тебранишлардан шунчалик кучли фарқ қилади.

Ночизиқли система параметрлари ҳаракат ҳолатига боғлиқ бўлади. Бундай системалардаги тебранишларни ўрганишнинг мураккаблиги шундаки, улар ночизиқли дифференциал тенгламалар билан ифодаланади. 57- § да келтирилган пружинали маятникка таъсир қилаётган куч эластиклик чегарасидан катта бўлсин. У ҳолда

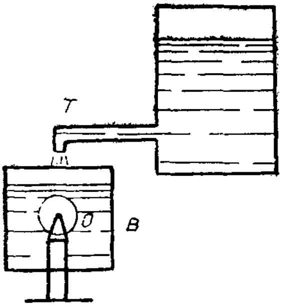
$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

ифодадаги бикрлик доимий бўлмай, кучга боғлиқ бўлади: $k = f(F)$. Мазкур масалани илгари баён қилинган усуллар билан ҳал қилиб бўлмайди. Система бир-бирига тескари йўналишдаги ҳаракатларида ўзини ҳар хил тутади. (44-§да ўрганилган гистерезис ҳодисаси намоён бўлади).

Ночизиқли системаларнинг муҳим хусусиятларидан яна бири шуки, унда ташқи куч частотасидан бошқа частотадаги тебранишлар ҳам вужудга келиши мумкин: баъзи системаларда доимий кучлар таъсирида ҳам сўнмайдиган тебранишларни ҳосил қилиш мумкин.

Ночизиқли дифференциал тенгламаларни ечишнинг аниқ усуллари мавжуд эмас, бунда тақрибий усуллар қўлланилади. Бу ерда биз баъзи оддий системалардаги тебранишларни умумий ҳолда кўриб чиқамиз.

128- расмда *А* энергия манбаи (сув қуйилган идиш), *Т* труба орқали сув тўлдириладиган *В* цилиндр идишдан иборат система тасвирланган, *В* идиш унда сув йўқлигида турғун мувозанатда бўладиган ҳолда *О* ўқ атрофида айлана оладиган қилиб ўрнатилган. Мазкур идиш сув билан тўлдирилиб борган сари унинг оғирлик маркази кўтарила бориб, мувозанат бузилади. Идиш тўнтарилиб, ундаги сув оқиб кетади, идиш яна аввалги ҳолатига қайтади. Тебранишлар даври сувнинг қуйилиш тезлигига ва айланиш ўқининг вазиятига



128-расм.

боғлиқ. Системанинг чизиқлимаслиги шундан иборатки, идишга таъсир қилаётган айлантирувчи моментнинг ундаги сувнинг массасига боғланиши мураккаб (идиш сув билан тўлдирилиб борган сари масса марказининг айланиш ўқига нисбатан вазияти ўзгара боради).

Мажбурий тебранишларда ташқаридан ишқаланишни енгишга сарфланадиган энергияни бериб туриш ташқи даврий ўзгарувчи кучлар томонидан амалга оширилади ва бошқарилади. Шу туфайли тебранишларнинг частотаси ва амплитудаси ана шу ташқи кучлар томонидан белгиланади. Лекин ташқаридан бериб туриладиган энергияни системанинг ўзи бошқариб тура олса, доимий куч ёрдамида ҳам сўнмайдиган тебранишларни вужудга келтириш мумкин, бунинг учун ташқи кучни, унинг томонидан бажариладиган иш мусбат бўладиган қилиб даврий равишда узиб-улаб ёки таъсирини ўзгартириб туриш зарур.

Тебранаётган жисм ўз ҳаракат йўналишини ўзгартирган заҳоти ташқи кучни системадан «узиб» қўйиш зарур. Бунда манфий иш бажарилишининг, яъни тебранаётган жисмдан энергия манбаига энергиянинг қайта узатилишининг олди олинган бўлади. Бундай вазифани бажарадиган қурилмалар ёрдамида фақат ташқи кучдан энергия олишгина эмас, балки айнан ишқаланишни енгиш учун зарур бўладиган миқдорда энергияни олиб, қатъий амплитудали сўнмайдиган тебранишларни вужудга келтириш ҳам амалга оширилади.

Ташқи манбадан олинаётган энергияни автоматик равишда бошқарадиган системалар автотебранишли системалар, уларда содир бўлаётган сўнмайдиган тебранишлар эса *автотебранишлар* деб аталади. Соатлар, электр қўнғироқлар, лампали генераторлар ана шундай системалар ҳисобланади.

Маятникли соат ҳам автотебраниш системаси ҳисобланади. Бундай соат тишли ғилдиракка эга бўлиб, унинг тишларига махсус шакл берилган. Ғилдирак ҳаракатланганда унинг тишлари махсус шаклли пластинани гоҳ тутиб қолиб, гоҳ бўшатиб юборади. Мазкур пластинка ҳамда маятник ўққа ўрнатилган. Тишли ғилдирак занжирга осилган юк ёрдамида ҳаракатга келтирилади. Маятник тебранаётганда унинг тишлари пластинани тутиб турган пайтда пластинкага таъсир қилаётган кучнинг таъсир чизиғи айланиш ўқи орқали ўтиб, айлантирувчи момент нолга тенг бўлади. Пластина тишдан ажралаётганда, у билан маятникка қисқа вақт ичида осилиб турган юк ҳосил қилган айлантирувчи момент таъсир қилиб, маятникнинг энергиясини орттиради. Қурилмани маятникнинг ярим даврда йўқотган энергияси айлантирувчи момент таъсирида узатилган энергияга айнан тенг бўладиган қилиб тайёрланади. Ҳар даврда маятникка икки марта, у мувозанат ҳолатидан ўтаётган пайтда туртки берилади.

Тебраниш мобайнида системанинг параметрлари даврий равишда ўзгарганда *параметрик тебранишлар* вужудга келади. Масалан, ҳайинчакда учганда бошланғич туртки таъсирида олинган тебраниш амплитудасини орттириш мумкин. Бунинг учун ҳайинчак оғиши энг катта бўлганда ўтириб, мувозанат ҳолатидан ўтаётганда туриб олиш кифоя. Бунда киши турган пайтдаги потенциал энергиянинг ортиши у ўтириб олган пайтдаги энергиянинг камайишидан ортиқ бўлади, чунки киши ўтираётган пайтда вертикалга нисбатан оғган бўлиб, тураётган пайтда вертикал ҳолатда бўлади. Потенциал энергиянинг ўзгариши эса кўчишнинг вертикал йўналишга проекцияси билан белгиланади.

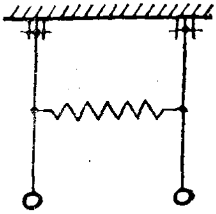
Шундай қилиб, ҳар бир давр мобайнида система икки мартадан энергия олади. Бунда олинган энергия ишқаланишни енгишга сарфланадиган энергиядан ортиқ бўлса, тебраниш амплитудаси ортиб боради. Ҳар иккала катталик тенглашгач тебранишлар турғун бўлиб, қарор топади. Бу мисолда ҳайинчакда учаётган кишининг инерция моменти ўзгарувчан параметр ролини ўйнайди.

Автотебранишлар каби параметрик тебранишлар ҳам қатъий гармоник тебранишлар бўлмайди, бироқ, амплитуда етарли даражада кичик бўлганда уларни гармоник тебраниш деб, системани эса чизиқли система деб ҳисоблаш мумкин.

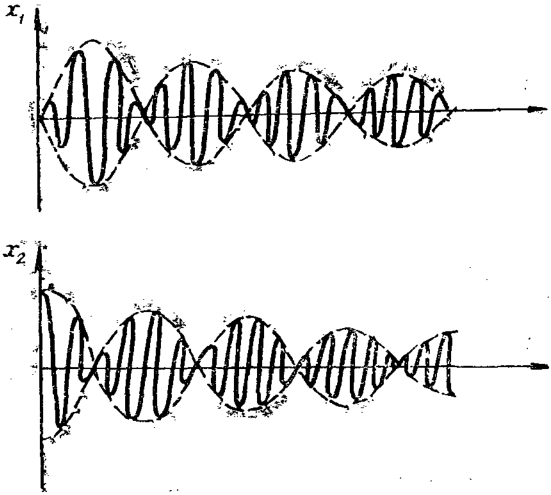
XII боб
ТЎЛҚИНЛАР

62-§. Боғланган системаларда тебранишлар. Тебранишларнинг эластик муҳитда тарқалиши

Моддий нуқта ёки макроскопик жисм тебранишларини ўрганишда битта координатани билиш кифоя бўлган эди. Кўп ҳолларда бир вақтнинг ўзида ўзаро боғланган бир неча жисмларнинг тебраниши содир бўлади. Бундай ҳолларда системани бир неча тебраниш системаларидан



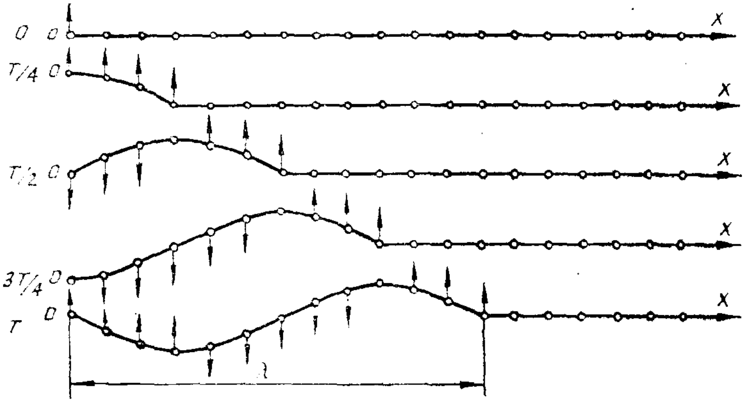
129-расм.



130-расм.

иборат деб ҳисоблаш мумкин. Бунда бир системанинг тебранишлари бошқа система тебранишларига таъсир қилиши ва аксинча бўлиши мумкин. Мураккаб системани ташкил қилаётган алоҳида системалар *парциал системалар* деб юритилади.

Бир-бири билан енгил пружина орқали боғланган иккита бир хил маятникдан иборат тебраниш системасини кўрайлик (129- расм). Маятниклар вертикал вазиятда бўлганда пружина деформацияланмаган бўлсин. Системанинг тебраниши ҳар иккала маятникларнинг оғиш бурчаклари билан белгиланади. Маятниклардан бирини мувозанат вазиятидан четга чиқариб, ҳар иккала маятникни қўйиб юборилса, тез орада иккинчи маятник ҳам тебрана бошлайди, чунки пружина гоҳ чўзилиб, гоҳ сиқилиб, иккинчи маятникни ҳам тебрантиради. Бошланғич пайтда биринчи маятникни тебрантиришда берилган энергия секин-аста иккинчи маятникни тебрантириш учун сарф бўлади. Натижада биринчи маятник тебранишлари амплитудаси камайиб, иккинчи маятникники эса ортиб боради. Муайян вақтдан сўнг биринчи маятник бутунлай тўхтаб, иккинчиси энг катта амплитуда билан тебрана бошлайди. Ишқаланишни енгишга сарфланадиган энергия жуда оз бўлганда мазкур амплитуда тахминан би-



131-расм.

ринчи маятникнинг бошланғич пайтдаги амплитудасига тенг бўлади. Шундан сўнг маятникларнинг роли алмашади. Бу жараён даврий равишда такрорланиб туради (130- расм).

Маятникларнинг бошланғич оғишлари бир хил бўлганда ҳар иккала маятник бир хил фазада, бир хил амплитуда ва частота билан тебранади. Бунда пружина деформацияланмай, маятникларнинг тебранишига таъсир қилмайди, яъни маятниклар бир-бири билан энергия алмашмай тебранади.

Агар бошланғич пайтда маятникларни қарама-қарши томонга бир хил бурчакка оғдириб қўйиб юборилса, маятниклар қарама-қарши фазада, лекин аввалгидагидан каттароқ частота билан тебранади. Бунда пружина гоҳ чўзилиб, гоҳ сиқилади, лекин унинг ўртасидаги нуқта жойидан қўзғалмайди, маятниклар бу сафар ҳам бир-бири билан энергия алмашмай тебранади.

Кўриб ўтилган ҳар иккала ҳолда ҳам маятниклар гармоник тебранма ҳаракат қилади. Боғланган системадаги бундай тебранишлар *нормал тебранишлар* дейилади.

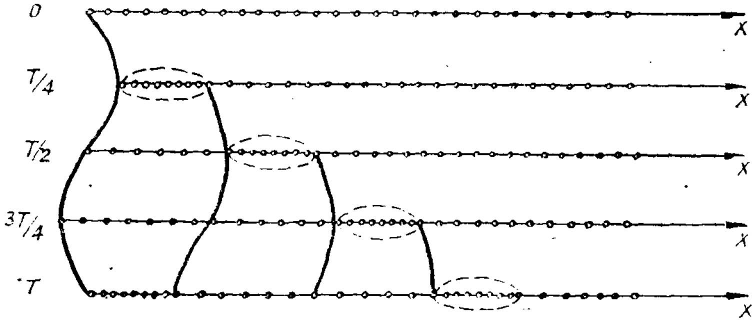
Бошланғич шартлар ихтиёрий бўлган ҳолда системада бир вақтнинг ўзида ҳар иккала тебраниш ҳам вужудга келади. Умуман, боғланган системадаги парциал системалар сони *n* та бўлса, ундаги нормал тебранишлар частотаси *n* хил бўлиши мумкин.

Стержень ва торни ҳам жуда кўп сонли чексиз кичик элементлардан иборат боғланган система деб қараш мумкин. Бу ҳолда вужудга келадиган нормал тебранишлар частотаси уларнинг ўлчамларига, зичлигига ва материалларининг эластик хусусиятларига боғлиқ.

Тебранишларнинг муҳитда тарқалиш жараёни *тўлқин* деб аталади. Физикада ҳар хил табиатга эга бўлган механик, электромагнит ва ҳ. к. тўлқинлар билан иш кўрилади. Шунга қарамай, уларнинг тарқалиш қонуниятлари кўп жиҳатдан бир-бирига ўхшаш бўлади, шунинг учун уларни механик тўлқинлар мисолида ўрганиш мумкин.

Механик тўлқинлардаги тебранишларнинг тарқалиши қаттиқ, суюқ ёки газ ҳолатидаги муҳит заррачалари ўзаро таъсирининг натижасидир.

Муҳит заррачалари орасидаги ўзаро таъсир тебранишларни узатиш пайтида вужудга келадиган эластиклик кучлари орқали амалга оширилса, тўлқин *эластик тўлқин* деб аталади. Товуш, ультратовуш ва сейсмик тўлқинлар бунга мисол бўла олади.



132-расм.

Муҳитда тўлқин ҳосил қилиш учун тўлқин манбаи, яъни муҳитнинг бирор жойида заррачалар тебранишини юзага келтирувчи ташқи жисм бўлиши зарур. Тўлқин манбаи муҳитнинг бирор қисмида тебранишларни ҳосил қилса, заррачаларнинг ўзаро таъсирлашиши туфайли бу тебранишлар секин-аста бошқа заррачаларга ҳам узатилади. Бунда тебранаётган ҳар бир заррача кейинги заррачага муайян мажбур қилувчи куч билан таъсир қилади. Демак, муҳит заррачалари бир хил, яъни мажбур қилувчи куч частотаси (манбанинг тебраниш частотаси) билан тебранади.

131-расмда бир-биридан чорак даврга $\left(\frac{T}{4}\text{га}\right)$ фарқ қиладиган бешта кетма-кет пайт учун эластик муҳитдаги тўлқиннинг тарқалиш схемаси кўрсатилган. Стрелкалар заррачаларнинг ҳаракат йўналишини кўрсатади. Мувозанат ҳолатидан четлаганда 0 заррача қўшни заррачани ҳам эргаштиради. Лекин инерцияси туфайли қўшни заррача ўша заҳоти эмас, балки бир оз кечикиш билан ҳаракатга келади. Ўз навбатида, мазкур заррача навбатдаги заррачани эргаштириб, у ҳам ўз навбатида бир оз кечикиш билан ҳаракатга келади ва ҳ. к. Шу тарзда борган сари кўпроқ заррачалар тебрана бошлайди.

Тебранишлар бир онда узатилмаганлиги туфайли, заррачалар турли фазалар билан тебраниб, чўққилар ва чуқурликлардан иборат тўлқинни ҳосил қилади.

Муҳитнинг заррачалари тўлқин билан бирга кўчмайди, балки муайян T давр билан мувозанат ҳолати атрофида тебранади.

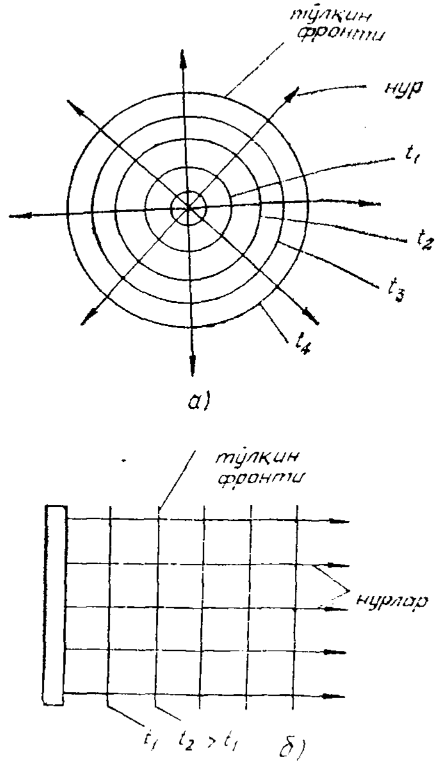
Муҳитнинг заррачалари тўлқин тарқалиш йўналишига перпендикуляр йўналишда тебранса, тўлқин *кўндаланг тўлқин* дейилади. Тўлқин ҳаракати йўналишида тебранишлар содир бўлса, тўлқин *бўйлама тўлқин* деб аталади.

132-расмда бўйлама тўлқиннинг тарқалиш схемаси тасвирланган. Бундай тўлқин навбатлашиб келадиган сиқилиш (улар пунктир чизиқлар билан тасвирланган) ва сийраклашишлардан иборат бўлиб, улар тўлқин тарқалиши йўналишида ҳаракатланади.

Кўндаланг тўлқинда муҳит қатламлари бир-бирига нисбатан силжийди, яъни бунда силжиш деформацияси тўлқинлари вужудга келади. Эластиклик кучлари фақат ўз шаклини сақлашга интиладиган қаттиқ жисмлардагина вужудга келади. Газлар ва суюқликларда бундай кучлар вужудга келмайди (силжиш модули нолга тенг), шунинг учун уларда кўндаланг тўлқинлар тарқалмайди.

Бўйлама тўлқинда муҳит қатламлари навбат билан зичлашиб, сийраклашади. Бу эса улар ҳажмининг ўзгаришига олиб келади, яъни бўйлама тўлқинлар ҳажмий деформация тўлқинларидир. Ҳажмнинг ўзгаришига қаршилик кўрсатадиган эластиклик кучлари қаттиқ жисмлар билан бир қаторда суюқликлар ва газларда ҳам вужудга келади. Шунинг учун бўйлама тўлқинлар қаттиқ жисмлар, суюқликлар ва газларда тарқалиши мумкин.

Тўлқинни бир жинсли изотроп эластик муҳитда (масалан, ҳавода) жойлашган ҳамда даврий равишда шишиб-сусайиб турган резина шар ҳосил қилаётган бўлсин. У ҳолда мазкур шар билан умумий марказга эга бўлган, ундан ташқарида жойлашган ҳар қандай сферик сиртнинг барча нуқталари бир хил фазада тебранади, яъни *сферик тўлқин* ҳосил бўлади. 133- *а* расмда мазкур тўлқиннинг тўртта пайтдаги кесими кўрсатилган. Муайян пайтда бир хил фазада тебранаётган нуқталар ҳосил қилган сирт *тўлқин фронти* дейилади. Тўлқин тарқалиш йўналишини белгилайдиган чизиқлар эса *нур* деб аталади.



133-расм.

Тўлқин манбаидан узоқ бўлган нуқталарда сферик тўлқин фронтининг унча катта бўлмаган қисми (138- *б* расм) амалда ясси бўлади. Бунда барча нурлар ўзаро параллел бўлиб, тўлқиннинг мазкур қисми *ясси тўлқин* деб аталади.

Табиати жиҳатдан ҳар хил бўлишига қарамасдан, кўпчилик тўлқинларнинг тарқалиши умумий қонуниятларга бўйсунади. Эластик тўлқинларни «умумлашган силжиш», яъни бирор скаляр катталик билан характерлаш мумкин. У бўйлама тўлқиндаги заррачаларнинг нур йўналишидаги силжишини, кўндаланг тўлқинлардаги заррачаларнинг нурга тик йўналишдаги силжишини, акустик тўлқинда эса вужудга келадиган ортиқча босимни ифодалайди.

Тебранишларни ўргангандаги каби, кичик силжишларга эга бўлган тўлқинлар билан чекланамиз. У ҳолда вужудга келадиган деформацияларни Гук қонунига бўйсунади, деб ҳисоблаш ҳамда уларга суперпозиция принципини қўллаш мумкин бўлади. Масалан, иккита тўлқин тарқалаётган бўлса, уларнинг ҳар бири, иккинчи тўлқин бўлмаган ҳолдагидек тарқалади, уларнинг қўшилиши натижасини эса мазкур тўлқинлардаги силжишларни бир-бирига қўшиш билан топиш мумкин.

63- §. Тўлқин тенгламаси

Чекланмаган муҳитда ҳеч қандай тўсиққа учрамай тарқалаётган тўлқин *югурувчи тўлқин* дейилади. Ясси югурувчи тўлқин тенгламасини тузайлик. Мазкур тенглама тўлқиндаги ихтиёрий нуқтанинг ихтиёрий пайтдаги силжишини аниқлашга имкон беради. Масалани соддалаштириш мақсадида X ўқининг мусбат йўналишида u тезлик билан тарқалаётган ясси тўлқинни кўрамиз.

Координаталар бошида жойлашган нуқта

$$\xi_0 = A\cos\omega t = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \qquad (63.1)$$

қонун бўйича тебранаётган бўлсин. Бу ерда ξ — «умумлашган силжиш» бўлиб, A — унинг амплитудаси.

Мувозанат ҳолатида x координатага эга бўлган нуқта эса

$$\xi = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \qquad (63.2)$$

қонун бўйича ҳаракатланади, чунки унинг ҳаракати аввалги нуқта ҳаракатидан $\tau = \frac{x}{u}$ вақтга кечикади. (62.2) тенгламани

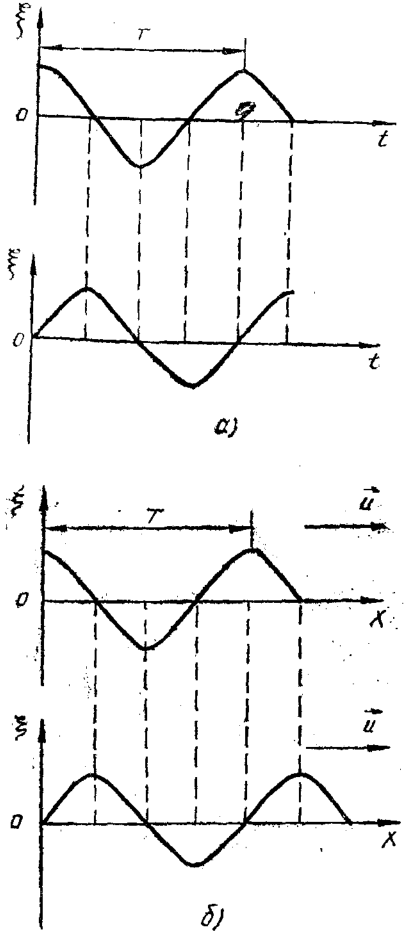
$$\xi = A\cos\left[2\pi\left(t/T - \frac{x}{\lambda}\right)\right] = A\cos(\omega t - kx) \qquad (63.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\lambda = uT$ — тўлқиннинг система нуқталари тебраниши даврига тенг вақт ичидаги тарқалган масофаси бўлиб, *тўлқин узунлиги* деб аталади.

Бир-биридан $\Delta x = \lambda$ масофада жойлашган нуқталар ихтиёрий пайтда бир хил фазада тебранади, чунки бу ҳолда мазкур нуқталар орасидаги фазалар фарқи $2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi$ бўлади. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$ коэффициент 2π м масофада жойлашадиган тўлқин узунликлари сонини ифодалаб, **тўлқин сони** деб аталади. (63.2) тенглама ясси тўлқин тенгламаси ҳисобланади. Мазкур тенглама мувозанат ҳолатдаги координатаси *x* бўлган нуқтанинг ихтиёрий *t* пайтдаги вазиятини, *t* берилган ҳолда эса тебранаётган барча нуқталарнинг мазкур пайтдаги вазиятини аниқлашга имкон беради.

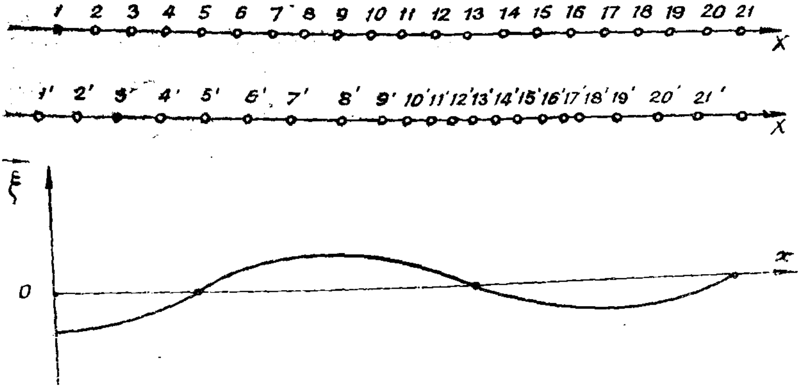
134- *а* расмда мувозанат ҳолатлари бир-биридан чорак тўлқин узунлигига $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ тенг масофада жойлашган икки нуқта силжишларининг графиклари тасвирланган: 134- *б* расмда эса ўша тўлқин нуқталарининг бир-биридан чорак даврга $\left(\frac{T}{4}\right)$ фарқ қиладиган пайтлардаги силжишлари кўрсатилган. Бошқача айтганда, мазкур расмни ясси югурувчи тўлқиннинг «оний фотосурати» деб аташ мумкин.

Бўйлама тўлқиндаги нуқталар силжишларини ҳам 134- *б* расмдаги каби тасвирлаш мумкин. Бунинг учун ҳар бир нуқтанинг мувозанат ҳолатидан силжишини вертикал йўналишга қўйиш зарур (135- расм). 135- расмдан кўринадики, бўйлама тўлқинда мазкур пайтда мувозанат ҳолатида бўлган (5, 13, 21) нуқталар яқинида муҳит зарраларининг зичлашиши ёки сийраклашиши вужудга келади, энг катта оғишга эга бўлган (1, 9, 17) нуқталар атрофида эса бу зарраларнинг бир-бирига нисбатан силжиши энг кичик миқдорда бўлади.



134-расм·

Айтиб ўтилганлардан кўринадики, (63.1) ифодада



135-расм.

қўлланилган умумлашган силжиш тушунчаси кўндаланг тўлқинлар билан бирга бўйлама тўлқинларни ҳам ифодалашга имкон беради.

Ясси бўйлама тўлқиннинг зичлиги ρ бўлган бир жинсли муҳитда тарқалиш тезлигини топамиз. Ўнг томонга ҳаракатланаётган ясси тўлқин фронтининг кесими t пайтда 1 вазиятда бўлсин (136- расм). Кесимнинг ҳаракати туфайли dt вақт ичида $dx = u\,dt$ масофада бўйлама зичлашиш бўлиб, S кесим орқали қўшимча $dm = d\rho\cdot u\cdot S\cdot dt$ массали элемент кўчиб ўтади. Мазкур элементнинг импульси

$$u\,dm = u^2 S d\rho\, dt$$

га тенг ҳамда деформацияланган муҳитда вужудга келиб, ўнг томонга йўналган куч импульсига тенг:

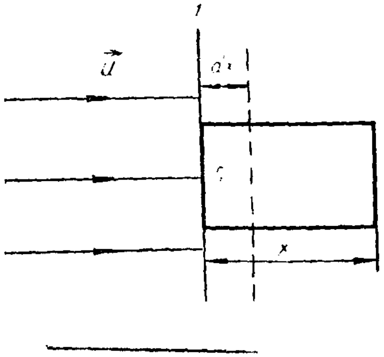
$$df\cdot dt = u^2 S d\rho\, dt.$$

Иккинчи томондан, мазкур куч 1 кесим чегарасидаги ортиқча dp босим билан белгиланади:

$$df = S\cdot dp.$$

Ҳар иккала тенгликдан тўлқиннинг тарқалиш тезлигини топиш мумкин:

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \qquad (63.4)$$



136-расм.

Бу ифодадан кўринадики, зичлашиш импульсининг бир жинсли яхлит муҳитда тарқалиш тезлиги босим ўзгаришининг муҳит зичлигининг ўзгаришига нисбати билан белгиланади.

(63.4) муносабатни келтириб чиқаришда муҳит хоссаларига ҳеч қандай чегара қўйилмади, фақат муҳит яхлит, бир жинсли ва эластик бўлиши талаб қилинди, холос. Демак, мазкур муносабат қаттиқ, суюқ ва газсимон муҳитлар учун ҳам ўринли бўлади. (63.4) формуладан фойдаланиб, бўйлама ўлчамлари кўндаланг ўлчамларидан анча катта бўлган (стержень, сим ва ҳ. к) эластик жисмдаги бўйлама тўлқиннинг тарқалиш тезлигини топайлик. (42.1) ва (42.4) формулаларга кўра, $\Delta p = \varepsilon E$ деб ёзамиз (E — Юнг модули). Бир жинсли жисмдаги эластик деформацияда зичликнинг $\Delta \rho$ ўзгариши нисбий деформацияга пропорционал, яъни $\Delta \rho = \varepsilon \rho$ (ρ — деформацияланмаган жисм зичлиги). $\Delta p = dp$, $\Delta \rho = d\rho$ дифференциал катталикларга ўтсак ҳамда dp ва $d\rho$ учун топилган ифодаларни (63.4) га қўйсак,

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{63.5}$$

яъни бўйлама тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги Юнг модулининг муҳит зичлигига нисбати билан белгиланиши келиб чиқади.

Кўндаланг тўлқинларнинг бирор муҳитда тарқалиш тезлиги муҳитнинг силжиш модули G билан белгиланади:

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{63.6}$$

Силжиш модули ҳамма вақт Юнг модулидан кичик бўлганидан (43-§), кўндаланг тўлқиннинг тарқалиш тезлиги бўйлама тўлқинникидан кичик бўлади. Масалан, кўндаланг тўлқиннинг пўлат стержендаги тарқалиш тезлиги бўйлама тўлқин тезлигидан икки марта кичик. Бу ҳолдан фойдаланиб, сейсмологлар кўндаланг тўлқинларнинг бўйлама тўлқинлардан кечикиб келиш вақтига кўра зилзила юз берган жойгача бўлган масофани аниқлашади.

Таранг тор (ёки резина ип) даги кўндаланг тўлқинлар

$$u = \sqrt{\frac{F}{m_0}} \tag{63.7}$$

тезлик билан тарқалади, бу ерда m_0 — тор узунлик бирлигининг массаси, F — унинг таранглик кучи.

Шуни айтиш керакки, тўлқиннинг тарқалиш тезлиги билан тўлқиндаги заррачаларнинг ҳаракат тезлиги бутунлай бошқа-бошқа нарсалардир. Кичик тебраниш амплитудаларида тўлқиннинг тарқалиш тезлиги амплитудага ва частотага боғлиқ эмас. Масалан, товуш ҳавода $u = 330$ м/с тезлик билан тарқалади, ҳаво молекулалари тезлигининг амплитудаси эса $v_m = 6 \cdot 10^{-5}$ м/с га тенг.

Металлардаги бўйлама тўлқинларнинг тезлиги 4500—5000 м/с, сувдаги тезлиги 1500 м/с, сув сиртидаги тўлқинлар эса $\approx 0{,}1$ м/с тезлик билан тарқалади.

Газлардаги эластик тўлқинлар

$$u = \sqrt{\frac{RT}{M}} \cdot \gamma \tag{63.8}$$

тезлик билан тарқалади, бу ерда M — газнинг моляр массаси, T — абсолют температура, R — газ доимийси, γ — адиабата кўрсаткичи. Ҳавонинг моляр массаси $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль бўлганидан, товушнинг 273 К температурада ҳавода тарқалиш тезлиги $u = 330$ м/с га тенглиги келиб чиқади.

(63.2) тенглама X ўқи бўйлаб тарқалаётган тўлқинни ифодалайди. Тўлқин қарама-қарши йўналишда тарқалганда қавс ичидаги ифоданинг иккинчи ҳади ўз ишорасини ўзгартиради (u ўрнига — u ёзилади).

Муҳитда сферик тўлқин тарқалганда заррачалар тебранишларининг амплитудаси тўлқин манбаигача бўлган r масофага тескари пропорционал тарзда камайиб боради. Сферик тўлқин тенгламаси

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \tag{63.9}$$

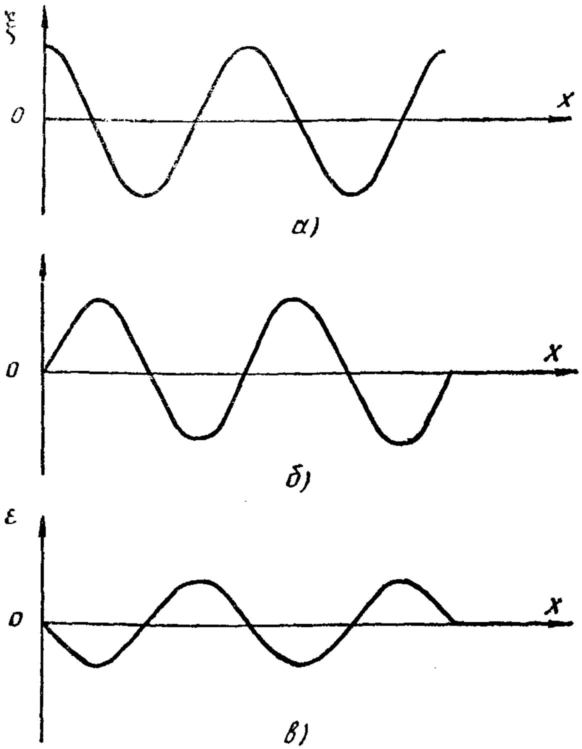
кўринишда бўлади, бу ерда A — тўлқин манбаидан 1 м масофадаги тебранишлар амплитудаси.

Заррачаларининг силжиши (63.3) тенглама билан ифодаланадиган тўлқиндаги тезликлар ва деформациялар қандай тақсимланганини кўрайлик. Муайян заррачанинг тўлқиндаги силжиш тезлигини (63.3) ифодадан вақт бўйича хусусий ҳосила олиб топиш мумкин:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx) =$$

$$= \omega A \cos\left[\omega t - kx) - \frac{\pi}{2}\right], \tag{63.10}$$

яъни, тўлқиндаги заррачалар тезлиги силжиш билан бир хил қонун бўйича ўзгариб, унга нисбатан фаза бўйича $\pi/2$ га силжиган бўлади. Заррачанинг тезлиги максимал қийматига эришганда унинг силжиши нолга тенг бўлиб қолади (137-a,



137-расм.

б расм). Бошқача айтганда, тезликлар тўлқини силжишлар тўлқинига нисбатан вақт бўйича $T/4$ га, фазода эса $\lambda/4$ га силжиган бўлади.

Чекланмаган эластик жисмда бўйлама тўлқин тарқалаётган бўлсин. Унда қалинлиги Δx бўлган қатлам олиб, қатлам четларидаги силжишларни ξ_1 ва ξ_2 билан белгилаймиз. Деформацияланганда қатламнинг қалинлиги $\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1$ га ўзгаради, қатлам қалинлигининг нисбий ўзгариши эса $\varepsilon = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$ га тенг бўлади. У ҳолда $\Delta x \to 0$ бўлганда $\varepsilon' = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ бўлади. Шундай қилиб, тўлқиндаги деформациянинг оний тақсимотини аниқлаш учун (63.3) ифодадан x координата бўйича ҳосила олиш мумкин:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = kA \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (63.11)$$

яъни тўлқиндаги нисбий деформациялар силжиши билан бир хил қонун бўйича ўзгариб, унга нисбатан фаза жиҳатдан π/2 га (тезликларга нисбатан тескари йўналишда) силжиган бўлади (137- *в* расм). Демак, деформациялар тўлқини тезликлар тўлқини билан қарама-қарши фазада бўлади. Масалан, заррачанинг мувозанат ҳолатидан силжиши энг катта қийматга эришган жойларда нисбий деформация билан тезлик нолга тенг бўлади. Заррачалар мувозанат ҳолатидан ўтаётган жойда эса нисбий деформация билан тезлик максимал қийматга эришади. Тезликнинг ишораси ўзгарган жойларда нисбий деформация ҳам ўз ишорасини ўзгартиради, яъни мусбат ва манфий деформациялар (сиқилиш ва чўзилишлар) навбатлашиб келади.

(63.2) тенгламадан фойдаланиб муҳитдаги тўлқин жараёнини ифодаловчи дифференциал тенгламани келтириб чиқариш мумкин. Бунинг учун мазкур ифодадан t вақт ҳамда x координата бўйича иккинчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 t} = -\omega^2 A \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right),$$

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 A}{u^2}\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right).$$

Бу ифодаларни таққослаб,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{63.12}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу дифференциал тенглама **тўлқин тенгламаси** деб аталади. У муҳитдаги сўнмас тўлқин жараёнининг тарқалишини ифодалайди (бунда нуқталарнинг ξ силжиши y ва z координаталарга боғлиқ эмас деб ҳисобланган). Муҳит заррачаларининг силжиши $\xi = \xi(x, y, z, t)$ бўлган ҳолда тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{63.13}$$

кўринишга эга бўлади.

Бирор физик катталик вақтга ва координаталарга боғлиқ бўлиб, унинг хусусий ҳосилалари тўлқин тенгламаси орқали боғланган ҳамма ҳолларда мазкур катталикнинг ўзгариш жараёни u тезлик билан тарқаладиган тўлқиндан иборат дейиш мумкин.

64- §. Тўлқин энергияси ва интенсивлиги. Группавий тезлик

Муҳитда тўлқин вужудга келганда унинг ўзаро боғланган заррачалари тўлқин тарқалиши йўналишида бир-бирига энергия узатади. Бунинг сабаби шуки, тўлқин тарқалаётган пайтда муҳитнинг айрим қисмлари деформацияланиб, бир-бирига куч билан таъсир қилади ҳамда муҳит заррачалари кўчиб, таъсир қилаётган кучлар иш бажаради.

Эластик муҳитда ясси синусоидал бўйлама тўлқин тарқалаётган бўлсин. Тўлқин соҳасида ҳамма нуқтасидаги деформациялар ва мазкур нуқталар тезликлари бир хил бўладиган даражада кичик бўлган dV ҳажм ажратайлик. Тўлқин ўтаётганда муҳитнинг мазкур бўлаги кинетик ва потенциал энергияга эга бўлади. Муҳитнинг зичлиги ρ, муҳит заррачалари силжишининг тезлиги эса $v = \frac{\partial\xi}{\partial t}$ га тенг бўлса, dV ҳажмдаги заррачаларнинг кинетик энергияси

$$dE_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\rho\, dV\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2$$

га тенг бўлади. (64.10) ифодани ҳисобга олсак,

$$dE_{\text{к}} = \frac{1}{2}\rho\, dVA^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx) \qquad (64.1)$$

келиб чиқади. dV ҳажмдаги муҳитнинг эластик деформация туфайли олган потенциал энергияси $dE_{\text{п}} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 dV$ га тенг (44- §), бу ерда $\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ — нисбий деформация, E — Юнг модули. (63.5) га асосан, Юнг модулини ρv^2 билан алмаштириб ҳамда $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ нинг (63.11) даги қийматини қўйсак,

$$dE_{\text{п}} = \frac{1}{2}\rho v^2 dVA^2k^2\sin^2(\omega t - kx)$$

ифода ҳосил бўлади. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ва $v = \nu\lambda = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$ эканлигидан $v^2k^2 = \omega^2$ келиб чиқади. Буни ҳисобга олсак,

$$dE_{\text{п}} = \frac{1}{2}\rho\, dVA^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx) \qquad (64.2)$$

эканлиги келиб чиқади.

(64.1) ва (64.2) ифодаларни таққослаб, муҳитнинг мазкур ҳажмидаги кинетик ва потенциал энергиялар ўзаро тенг бўлиб, улар бир хил фазада ўзгаради деган хулосани чиқариш мумкин. Тўлқин ҳаракати тебранма ҳаракатдан ана шу хусусияти билан фарқ қилади (тебранма ҳаракатда кинетик ва потенциал энергиялар қарама-қарши фазада ўзгарар эди, 58- § га қаранг).

Эластик муҳитда тўлқин вужудга келганда тарқалаётган нисбий деформациялар тўлқини потенциал энергияни, тезликлар тўлқини эса кинетик энергияни кўчириб ўтади.

(64.1) ва (64.2) ифодаларни қўшсак,

$$dE = dE_к + dE_п = \rho\, dV A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx) \qquad (64.3)$$

келиб чиқади, яъни тўлқин тарқалаётган эластик муҳитнинг ҳажм элементи муҳит зичлигига, заррачалар тебраниши амплитудасининг квадратига ҳамда мазкур тебранишлар частотасининг квадратига пропорционал бўлган механик энергияга эга бўлади.

Эластик муҳитдаги энергиянинг зичлиги

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx) \qquad (64.4)$$

га тенг бўлади. Амалда ҳажм элементида муайян пайтда нима бўлаётгани унчалик аҳамиятга эга эмас, вақт бўйича ўртача энергияни билиш муҳимроқ. (64.4) ифоданинг тебраниш даври мобайнидаги ўртача қийматини топсак (синус квадратининг бир даврдаги ўртача қиймати 0,5 га тенг)

$$< w > = \frac{1}{2} \rho (A\omega)^2, \qquad (64.5)$$

келиб чиқади.

Муҳитда энергиянинг кўчишини энергия оқими билан характерланади. Муайян сирт орқали вақт бирлиги ичида ўтаётган энергия *энергия оқими* деб аталади:

$$P = \frac{dE}{dt}. \qquad (64.6)$$

Энергия оқими скаляр катталик бўлганидан, у энергиянинг кўчиш йўналишини кўрсатмайди. Тўлқин соҳасининг берилган нуқтасидаги энергия кўчирилиши йўналишини характерлаш учун *энергия оқимининг зичлиги* деб юритиладиган вектор катталик киритилади. У тўлқин тарқалиши билан бир хил йўналишга эга бўлиб, сон жиҳатдан энергиянинг кичик dS сирт орқали dP оқимининг dS сиртнинг тўлқин тарқалиш йўналишига перпендикуляр текисликка проекцияси $dS_{\perp}$ юзасига нисбатига тенг.

У ҳолда энергия оқимининг зичлиги

$$I = \frac{dP}{dS_{\perp}} = \frac{dE}{dt \cdot dS_{\perp}} \tag{64.7}$$

эканлиги келиб чиқади. Бу катталикни *тўлқин интенсивлиги* деб юритилади. У 1 м^2 юзадан 1 с да ўтган энергияга (ёки кўндаланг кесим юзаси 1 м^2, узунлиги эса тўлқиннинг тарқалиш тезлиги u га тенг бўлган цилиндр ичидаги энергияга) тенг:

$$I = \langle w \rangle u = \frac{1}{2}(\rho u)(A\omega)^2. \tag{64.8}$$

Бундан кўринадики, тўлқин интенсивлиги иккита кўпайтувчига боғлиқ: улардан бири (ρu) муҳитни, иккинчиси эса тебранаётган нуқта хоссаларини характерлайди. $R = \rho u$ катталик *муҳитнинг солиштирма акустик қаршилиги* дейилади. Иккинчи кўпайтувчини тўлқинда ҳосил бўладиган ортиқча босим билан боғлаш мумкин. Энг катта сиқилишни Гук қонунига асосан топсак,

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{p_{\max}}{E}$$

келиб чиқади, бу ерда $\sigma_{\max}$ ва $p_{\max}$ — кучланиш ва ортиқча босим амплитудалари. У ҳолда

$$A\omega = \frac{p_{\max} \cdot u}{E} = \frac{p_{\max}}{R} \tag{64.9}$$

келиб чиқади. Буни ҳисобга олсак, тўлқин интенсивлиги учун

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{\max}}{R} \tag{64.10}$$

ифодага эга бўламиз.

(64.8) формуладан кўринадики, тўлқин интенсивлиги энергия ўртача зичлигининг тўлқин тарқалиш тезлигига кўпайтмасига тенг. $\vec{I}$ ва $\vec{u}$ векторлар бир хил йўналишга эга эканлигидан, мазкур ифодани

$$\vec{I} = \langle w \rangle \cdot \vec{u} \tag{64.11}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Одатда муҳитда алоҳида тўлқин эмас, бир қатор тўлқинлар группаси тарқалганлигидан, (64.11) формулада фазавий

$\vec{u}$ тезлик ўрнига группавий $\vec{u}_г$ тезликни қўйиш зарур:

$$\vec{I} = \langle w \rangle \cdot \vec{u}_г. \qquad (64.12)$$

Энергия оқими ва энергия оқимининг зичлиги ҳақидаги тушунчаларни биринчи бўлиб, Н. А. Умов (1846—1915) киритганлиги сабабли, энергия оқими зичлигининг вектори $\vec{I}$ *Умов вектори* деб юритилади.

Ихтиёрий кўринишдаги тўлқинни ҳар хил частотага эга бўлган бир қанча гармоник тўлқинларнинг қўшилиши натижаси, яъни гармоник тўлқинлар группаси деб қараш мумкин. Шу сабабли частоталари бир-биридан кам фарқ қиладиган икки (ёки ундан ортиқ) гармоник тўлқинларнинг қўшилиши алоҳида аҳамиятга эга.

Амплитудалари бир хил, частоталари эса бир-биридан кам фарқ қиладиган, OX ўқ бўйлаб тарқалаётган иккита тўлқиннинг қўшилишини кўрайлик. Алоҳида тўлқинларнинг фазавий тезликлари уларнинг тўлқин узунликларига боғлиқ (дисперсия мавжуд) деб ҳисоблайлик. Шубҳасиз, бу ҳолда ҳар иккала тўлқиннинг фазавий тезликлари ва тўлқин сонлари частотанинг функцияси бўлади. Мазкур тўлқинлар учун

$$\xi_1 = A\sin(\omega t - kx), \qquad \xi_2 = A\sin(\omega' t - k'x)$$

деб ёзиш мумкин. Бу тенгламаларни қўшиб, синуслар йиғиндиси формуласидан фойдалансак,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2}t - \frac{k - k'}{2}x\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t - \frac{k + k'}{2}x\right)$$

ифода ҳосил бўлади. $\omega \approx \omega'$ ва $k = k'$ эканлигидан,

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cdot\sin(kx - \omega t) \qquad (64.13)$$

келиб чиқади.

$\Delta\omega$ ва Δk жуда кичик бўлганлиги сабабли, мазкур ифодадаги $A' = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$ кўпайтувчи жуда секин ўзгарадиган катталик бўлиб, *тўлқинлар группасининг амплитудаси* деб юритилади.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ва $u = \frac{\lambda}{T}$ эканлигини ҳисобга олиб, тўлқинларнинг фазавий тезлигини тўлқин сони орқали ифодалаш мумкин:

$$u = \frac{\omega}{k}. \qquad (64.14)$$

Мазкур ҳолда мураккаб тўлқиннинг фазавий тезлиги уни ҳосил қилувчи гармоник тўлқинларнинг фазавий тезлигидан деярли фарқ қилмайди, яъни $u = \frac{\omega}{k} \approx \frac{\omega'}{k'}$. Амплитуда ($A'$) ўзгаришининг тарқалиш тезлиги (у фазавий тезликдан фарқ қилади) $\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = \mathrm{const}$ ифодадан топилиши мумкин (амплитуданинг муайян қийматини ифодалайдиган тенглама). Мазкур ифодани дифференциалласак,

$$\Delta\omega \cdot dt - \Delta k \cdot dx = 0,$$

ёки

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

келиб чиқади.

Частоталар фарқи (тўлқин сонлари фарқи ҳам) жуда кичик бўлганда мазкур ифода

$$u_{\text{г}} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \qquad (64.15)$$

кўринишга келади, бу ердаги $u_{\text{г}}$ катталик, *группавий тезлик* деб юритилади.

Шундай қилиб, группавий тезлик ω дан k бўйича олинган ҳосилага, фазавий тезлик эса ω/k нисбатга тенг. Иккита тўлқин ўрнига частоталари яқин бўлган бир қанча тўлқинлар қўшилганда ҳам (64.15) ифода ўринли бўлади.

Бирор тўлқин сигналини жўнатиш тўлқин шаклининг ўзгариши билан боғлиқ. Бу ўзгаришлар нисбатан секин содир бўлса, сигнал группавий тезлик билан тарқалади. Бошқача қилиб айтганда, группавий тезлик деганда тўлқин шаклидаги сигналнинг муҳитдаги узатилиш тезлиги тушунилади. Муайян пайтда алоҳида тўлқинларнинг фазалари мос келган жойларда тўлқинлар группасининг амплитудаси энг катта қийматга эришиб, энергия зичлиги ҳам максимал бўлади. Шундан сўнг фазалар орасидаги муносабат ўзгариб, мазкур жойдаги энергия зичлиги камаяди. Энг катта энергия зичлигига эга бўлган нуқта фазода группавий тезлик билан ҳаракатланади. Демак, энергия ютилиши бўлмаган ҳолларда группавий тезлик тўлқинлар группаси энергиясининг узатилиш тезлигини ифодалайди.

$$\omega = 2\pi\nu,\quad k = \frac{2\pi}{\lambda},\quad \nu = \frac{u}{\lambda}$$ бўлганлигидан, $$u_г = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\nu}{d(1/\lambda)} = \frac{d(u/\lambda)}{d(1/\lambda)} = u + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{du}{d(1/\lambda)},$$

ёки

$$u_г = u - \lambda\cdot\frac{du}{d\lambda} \qquad (64.16)$$

келиб чиқади.

Дисперсия бўлмаганда $\frac{du}{d\lambda} = 0$ бўлиб, $u_г = u$, яъни группавий тезлик фазавий тезлик билан мос келади. Дисперсия қанчалик кучли, яъни $\frac{du}{d\lambda}$ қанчалик катта бўлса, группавий тезлик фазавий тезликдан шунчалик кўп фарқ қилади. $\frac{du}{d\lambda}$ мусбат бўлганда группавий тезлик фазавий тезликдан кичик, $\frac{du}{d\lambda}$ манфий бўлганда эса ундан катта бўлади.

Сферик тўлқиннинг нуқтавий тўлқин манбаидан r масофада жойлашган тўлқин сирти орқали ўтаётган энергия оқимининг ютилишини ҳисобга олинмаса, энергия оқимининг ўртача қиймати доимий бўлиб, ўтказилган сферанинг радиуси қандай бўлишига боғлиқ эмас:

$$\langle P\rangle = I\cdot 4\pi r^2 = \mathrm{const}.$$

Сферик тўлқин сиртининг ҳамма нуқталарида энергия оқими зичлигининг вектори сиртга перпендикуляр бўлиб, унинг ўртача қиймати

$$\langle I\rangle = \frac{\langle P\rangle}{4\pi r^2}$$

бўлади, яъни энергия оқимининг ўртача зичлиги тўлқинлар манбаигача бўлган масофа квадратига тескари пропорционал. Бундан, сферик тўлқин амплитудасининг тўлқинлар манбаигача масофага тескари пропорционал эканлиги келиб чиқади.

Муҳит энергияни сезиларли даражада ютадиган ҳолда dx масофани босиб ўтишда интенсивлик

$$-dI = \alpha I dx$$

миқдорга камаяди. Кесма бошида $I = I_0$ деб ҳисоблаб, мазкур ифодани $(0, x)$ кесма бўйлаб интеграллаcак, энергия ютилишининг интеграл қонуни келиб чиқади:

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha x}. \qquad (64.17)$$

Бу ифодадаги α катталик *энергияни ютиш коэффициенти* деб аталади. Ортиқча босим учун ҳам шунга ўхшаш қонунни ёзиш мумкин:

$$p = p_0 \cdot e^{-0,5 dx}.$$

Товуш (сферик) тўлқини ҳавода тарқалаётганда у ҳам ютилиш ҳисобига, ҳам тўлқин фронтининг катталашиши ҳисобига сусайиши мумкин. α коэффициент (ҳавода $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$) кичик бўлгани сабабли, 1 км гача масофада иккинчи сабаб асосий роль ўйнайди (бунда энергия миллионлаб марта камаяди). Катта масофаларда эса энергиянинг ютилиши ҳал қилувчи роль ўйнаб қолади.

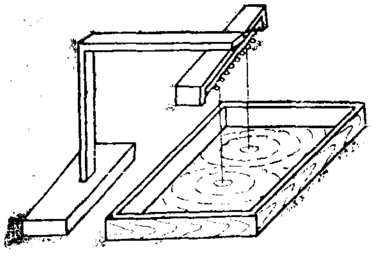
Ультратовушлар (частота 10^5 Гц дан ортиқ) соҳасида эса деярли ясси фронтли тўлқинларни ҳосил қилиш қийин эмас. Бунда тўлқин асосан унинг ютилиши ҳисобига сусаяди.

65- §. Тўлқинлар интерференцияси

Муҳитдан турли манбалардан келаётган бир неча тўлқин тарқалаётган бўлса, ҳар қайси тўлқин мустақил равишда, яъни бошқа тўлқинлар бўлмаган ҳолдагидек тарқалади. Ташланган иккита тош ҳосил қилган тўлқинларнинг сув сиртида тарқалишини кузатиб, бунга ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бир-бири билан кесишадиган ҳалқасимон тўлқинлар, аввалгича, маркази тош ташланган нуқтада жойлашган айланалар тарзида тарқалиб, бир манба ҳосил қилган тўлқиннинг тарқалишига иккинчи манба ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди.

Тўлқинлар суперпозицияси (қўшилиши) принципига кўра, муҳит заррачаларининг ихтиёрий пайтдаги силжиши уларнинг алоҳида тўлқинлар туфайли олган силжишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Бир жинсли муҳитда иккита когерент тўлқинлар тарқалаётган бўлсин. Частоталари бир хил бўлиб, бир хил фазага эга бўлган ёки фазалар фарқи доимий бўлган тўлқинлар *когерент тўлқинлар* дейилади. Бундай тўлқинларни ҳосил қиладиган манбалар эса *когерент манбалар* деб аталади.



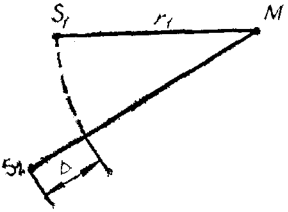
138-расм.

Когерент манбалар ва когерент тўлқинлар тушунчалари физик абстракция бўлиб, одатдаги манбалар ва тўлқинларни фақат муайян шароитлардагина когерент деб ҳисоблаш мумкин. Когерент манбаларни, масалан, горизонтал жойлашган пружинага осиб қўйилган иккита вертикал сим ёрдамида ҳосил қилиш мумкин. Уларни тебратиб, бирор идишдаги сув сиртига теккизиб қўйилса, иккита манбадан чиқиб тарқалаётган ва бир-бирига қўшилаётган, деярли когерент бўлган тўлқинларни кузатиш мумкин (138- расм).

Иккала сим орасидаги масофа улар томонидан ҳосил қилинаётган тўлқин узунлигидан катта бўлганда тўлқинлар қўшилиши туфайли сув бетида заррачалар жуда кучли тебранаётган ва деярли тебранмаётган соҳаларнинг навбатлашиб келишини кузатиш мумкин. Муайян жойларда тўлқинлар бир-бирини сусайтириб, бошқа жойларда эса уларнинг қўшилиши натижасида тебранишлар кучаяди.

Бу ҳодисани заррачаларнинг алоҳида тўлқинлар туфайли олган силжишлари қўшилиб, муҳит заррачалари натижавий тебранишлари амплитудаларининг даврий фазовий тақсимланиши вужудга келиши билан тушунтириш мумкин. Мазкур ҳодиса туфайли натижавий тебранишлар амплитудалари максимумлари ва минимумларининг навбатлашиб келишидан иборат *интерференцион манзара* кузатилади.

Турғун фазовий интерференцион манзарага олиб келадиган тўлқинларнинг қўшилиши ҳодисаси *тўлқинлар интерференцияси* дейилади.



139-расм.

Тўлқинлар интерференцияни вужудга келтирадиган шартларни аниқлайлик. Бир жинсли муҳитда иккита нуқтавий S_1 ва S_2 когерент манбалар сферик тўлқинлар тарқатаётган ҳолни кўрайлик (139-расм). Муайян M нуқтадаги иккала тўлқин фазаларининг фарқи

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \tag{65.1}$$

бўлади, бу ерда $r_2 - r_1 = \Delta$ масофа *тўлқинларнинг йўл фарқи* деб аталади. У ҳолда (60.1) формулани

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta \tag{65.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Иккала тўлқин соҳасининг ҳар бир нуқтасигача турлича йўл босиб ўтади, шунинг учун бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўтганда уларнинг фазалар фарқи ўзгариб боради. Фазалар фарқи

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta = \pm 2\pi n \tag{65.3}$$

бўлган нуқталарда ($n=0, 1, 2, \ldots$) муҳит заррачаларнинг ҳар иккала тўлқин туфайли вужудга келадиган тебранишлари бир хил фазада бўлиб, натижавий тебраниш амплитудаси максимал қийматга эришади. Мазкур амплитуда алоҳида тўлқинлар амплитудалари йиғиндисига тенг бўлади. Бундай нуқталарда тебранишлар бир-бирини кучайтириб, амплитудалари бир хил бўлганда натижавий тебранишлар энергияси алоҳида тебранишлар энергиясидан тўрт марта катта бўлади (55-§). Бундай нуқталарда тўлқинларнинг йўл фарқи

$$\Delta = \pm n\lambda \tag{65.4}$$

бўлади. Демак, тўлқинларнинг йўл фарқи нолга тенг ёки тўлқин узунлигига каррали бўлган нуқталарда тебранишлар амплитудаси максимал бўлади.

Фазалар фарқи ва тўлқинларнинг йўл фарқи мос равишда

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta = \pm\pi(2n+1), \tag{65.5}$$

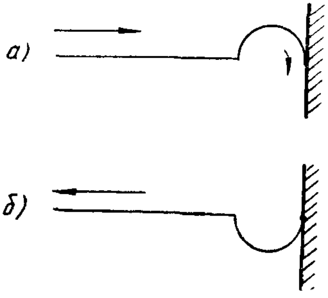
$$\Delta = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \tag{65.6}$$

бўлган нуқталарда заррачаларнинг ҳар иккала тўлқин туфайли вужудга келадиган тебранишлари қарама-қарши фазага эга бўлиб, натижавий тебраниш амплитудаси тўлқинлар амплитудалари айирмасига тенг бўлади (яъни минимал қийматга эришади). Бунда тўлқинларнинг амплитудалари бир хил бўлса, ҳар иккала тебранишлар бир-бирини сўндиради: натижавий тебранишлар энергияси ҳам нолга тенг бўлади. Демак, тўлқинларнинг йўл фарқи тоқ сонли ярим тўлқин узунлигига тенг бўлган нуқталарда тебранишлар амплитудаси минимал бўлади.

Тўлқин соҳасининг қолган ҳамма нуқталарида етиб келаётган тўлқинларнинг йўл фарқи қандай бўлишига қараб, натижавий тебранишлар амплитудаси $(A_1—A_2)$ дан то (A_1+A_2) гача бўлган қийматларни олиши мумкин. Тўлқинлар интерференцияси кузатилганда тўлқин майдонидаги нуқталарда заррачалар тебранишининг амплитудаси ҳамда энергияси ҳар хил бўлиши мумкин. Бунда баъзи нуқталарда энергиянинг камайиши ҳисобига бошқа нуқталарда энергия ортади, яъни энергия қайта тақсимланади.

Тўлқиннинг икки муҳит чегарасидан қайтишини кўрайлик. Муҳитнинг тўлқинлар киришига тўсқинлик қилиш хусусиятини муҳит зичлиги билан тўлқин тарқалиш тезлиги кўпайтмасига тенг бўлган (ρu) *тўлқин қаршилиги* деб аталадиган катталик билан характерлаш мумкин (64.8). Муҳитлар тўлқин қаршиликлари орасидаги муносабатга қараб, тўлқиннинг улар орасидаги чегарадан қайтиши ҳар хил бўлиши мумкин. Муҳитларнинг тўлқин қаршиликлари бир хил $(\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2)$ бўлган ҳолда тўлқиннинг қайтиши содир бўлмай, тўлқин тўлалигича иккинчи муҳитга тарқалади. $\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2$ бўлган ҳолда тўлқин фазаси π га ўзгариш билан («ярим тўлқинни йўқотиб») қайтади. $\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2$ бўлган ҳолда эса, тўлқин фазаси ўзгармасдан («ярим тўлқинни йўқотмай») қайтади.

Ярим тўлқин йўқоладиган ҳолни тушуниш учун таранг резина ип (ёки арқон) бўйлаб тарқалаётган тўлқинни кўрайлик (140-*а* расм). Ипнинг маҳкамланган учига етиб боргач, тўлқин ундан қайтади. Тўлқин қайтаётган пайтда ипнинг эгилган қисми юқорига йўналган бўлади. Бунда ип унинг учи маҳкамланган бирикмага юқорига йўналган куч билан таъсир қилади. Ньютоннинг учинчи қонунига биноан бирикма ўз навбатида ипга пастга йўналган эластиклик кучи билан таъсир қилади. Мазкур куч импульси айнан келаётган тўлқинга ўхшаш, лекин пастга йўналган қайтувчи тўлқинни вужудга келтиради



140-расм.

(140-*б* расм). Шундай қилиб, тўлқин ипнинг маҳкамланган учидан қайтганда унинг фазаси сакраб π га ўзгаради, бунда маҳкамланиш нуқтасида тўлқин узунлигининг ярми йўқолгандай бўлади.

66- §. Турғун тўлқин

Тушаётган ва қайтаётган тўлқинлар қўшилганда бир хил амплитуда ва частотага эга бўлиб, бир-бирига томон ҳаракатланаётган тўлқинларнинг интерференцияси туфайли турғун тўлқин ҳосил бўлиши мумкин. Бир учи маҳкамланган ипнинг иккинчи учини даврий равишда тебратилганда унда турғун тўлқин ҳосил бўлади (141-расм). Сўниш жуда оз бўладиган муҳитдаги бир хил амплитудали тушаётган ва қайтган тўлқинлар интерференциясини кўрайлик. Тушаётган ясси тўлқин *OX* ўқининг мусбат йўналишида, қайтган тўлқин эса қарама-қарши йўналишда тарқалаётган бўлсин. Ҳар иккала тўлқин бир хил фазага эга бўлган нуқтани координата боши деб, бошланғич фазалар нолга тенг бўлган пайтни эса вақт ҳисобининг боши деб олайлик. У ҳолда тушаётган ва қайтган тўлқин учун

$$\xi_1 = A_0 \sin(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A_0 \sin(\omega t + kx)$$

тенгламаларни ёзиш мумкин. Иккала тенгламани қўшиб, синуслар йиғиндиси формуласидан фойдалансак,

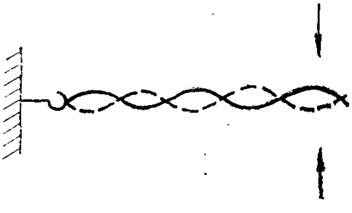
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A_0 \cos kx \cdot \sin \omega t$$

ифода ҳосил бўлади. Тўлқин сони $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\xi = \left|2A_0 \cos 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right| \cdot \sin \pi t \qquad (66.1)$$

формулага эга бўламиз.

Демак, ҳар бир нуқтадаги натижавий тебраниш гармоник тебраниш бўлиб, унинг частотаси бир-бирига томон ҳаракатланаётган тўлқинлар туфайли вужудга келадиган тебранишлар частотаси билан бир хил бўлади. Маз'кур тебраниш амплитудаси вақт бўйича ўзгармас бўлиб, *OX* ўқ бўйлаб



141-расм.

$$A = \left|2A_0 \cos 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right| \qquad (66.2)$$

қонун бўйича ўзгаради.

Шундай қилиб, (66.1) тенглама муҳит заррачаларининг ҳар хил нуқталарда турлича, лекин муайян нуқта учун ўзгармас амплитуда билан содир бўладиган, фазода қўзғалмас бўлган синусоидал тебранишларини ифодалайди. Мазкур тенгламада тўлқинни характерловчи катталиклардан бири, яъни фазанинг тарқалиш тезлиги (фазавий тезлик) бутунлай қатнашмайди. Шу сабабли (66.2) тенглама *турғун тўлқин тенгламаси* деб юритилади.

$$2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (66.3)$$

муносабат ўринли бўлган нуқталарда натижавий тебраниш амплитудаси максимал $2A_0$ қийматга эришади. Мазкур нуқталар *турғун тўлқин дўнгликлари* дейилади. (66.3) дан, дўнгликларнинг ўрни

$$x_д = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (66.4)$$

шарт билан аниқланиши келиб чиқади.

$$2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (66.5)$$

муносабат ўринли бўлган нуқталарда натижавий тебраниш амплитудаси ҳамма вақт нолга тенг бўлади. Мазкур нуқталар *турғун тўлқин тугунлари* деб аталади. Тугунлар ўрнини топамиз:

$$x_т = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (66.6)$$

(66.4) ва (66.6) формулалардан, қўшни дўнгликлар орасидаги масофа (қўшни тугунлар орасидаги масофа ҳам) $\lambda/2$ га тенг эканлигини топиш мумкин. Дўнгликлар билан унга қўшни бўлган тугунлар бир-бирига нисбатан

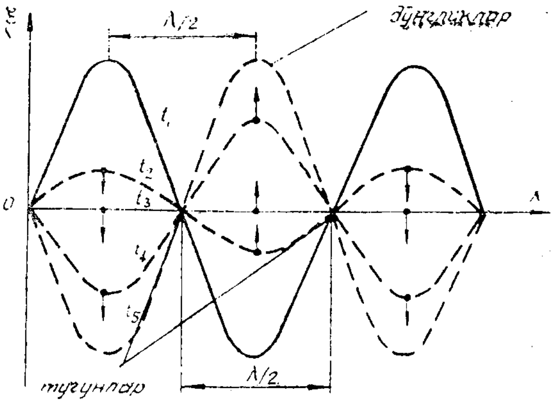
$$x_т - x_д = \frac{\lambda}{4}$$

масофага силжиган бўлади.

(66.1) тенгламадаги $\left|2A_0 \cos 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right|$ кўпайтувчи тугунлардаги ноль қийматлари орқали ўтганда ўз ишорасини ўзгартиради. Шунинг учун, муайян пайтда тугуннинг бир томонидаги силжиш мусбат бўлса, унинг иккинчи томонида манфий бўлади. Шу туфайли тугуннинг ҳар икки томонидаги тебранишлар фазаси π га фарқ қилади, яъни муайян тугуннинг иккала томонида жойлашган нуқталар қарама-қарши фазада тебранади. Иккита қўшни тугунлар орасидаги ҳамма нуқталарнинг тебраниш фазалари бир хил бўлади.

Турғун тўлқинлар кўндаланг ҳам, бўйлама ҳам бўлиши мумкин. 142-расмда кўндаланг турғун тўлқин тарқалаётган муҳит заррачаларининг турли пайтлардаги силжишлари тасвирланган. Стрелкалар муҳит заррачаларининг муайян пайтдаги тезликларини кўрсатади.

Турғун тўлқин тарқалиши мобайнида муҳит заррачалари тезликларининг ҳамда нисбий деформацияларнинг турғун тўлқинлари вужудга келади. (66.1) тенгламадан вақт бўйича ҳосила олиб, тезликлар тўлқинини ифодаловчи қонунни топамиз:



142-расм.

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = 2\omega A_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \omega t. \qquad (66.7)$$

(66.2) тенгламадан x бўйича ҳосила олиб эса нисбий деформацияларнинг турғун тўлқинини ифодаловчи қонунни топиш мумкин:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot A \sin 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} \cdot \sin \omega t. \qquad (66.8)$$

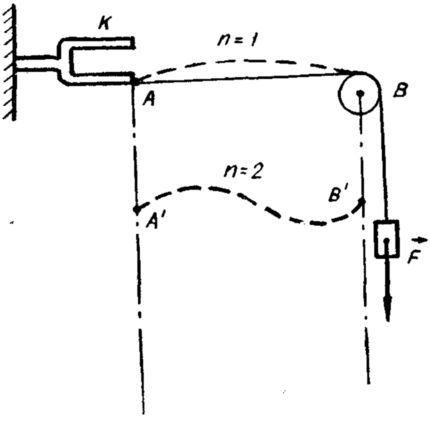
(66.7) ва (66.8) тенгламалардан кўринадики, тезликлар турғун тўлқинининг тугун ва дўнгликлари силжишлар тўлқинидаги тугун ва дўнгликлар билан мос келади. Нисбий деформация эса силжиш тугунларида энг катта қийматга эришиб, дўнгликларда нолга тенг бўлади.

Турғун тўлқиндаги ҳар иккала (тушган ёки қайтган) тўлқин қарама-қарши йўналишда бир хил миқдордаги энергияни олиб ўтади. Шунинг учун турғун тўлқиндаги натижавий энергия оқими нолга тенг бўлиб, қўшни тугунлар орасидаги турғун тўлқиннинг тўла энергияси ҳамма вақт бир хил бўлади.

Тугунлардаги заррачалар жойидан қўзғалмайди, шу сабабли улар орқали кинетик энергияни узатиб бўлмайди: дўнгликларда эса нисбий деформация вужудга келмаганидан, улар орқали потенциал энергияни узатиб бўлмайди. Турғун тўлқинда қўшни тугунлар орасидаги энергия фақат бир турдан иккинчи турга, яъни потенциал энергиядан кинетик энергияга ва аксинча ўтиши мумкин, холос. Бу энергия ўтишлари бир даврда икки марта содир бўлади.

Шуни айтиш керакки, турғун тўлқинда муҳит заррачаларининг ҳаракатини нормал тебранишларидан бири уйғотилган боғланган системанинг тебраниши деб қараш мумкин (62-§).

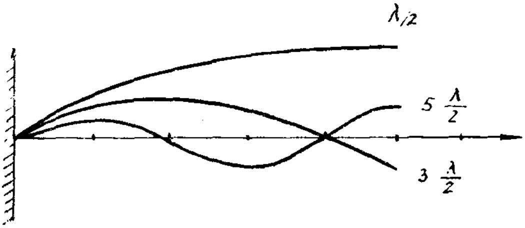
Турғун тўлқиннинг бир ўлчамли муҳит (ип) да ҳосил бўлишини қуйидаги тажрибада кузатиш мумкин. Электромагнит ёрдамида қўзғатиладиган *K* камертон деворга ўрнатилган бўлиб, унга зичлиги ρ, кўндаланг кесим юзаси *S* бўлган ипнинг бир учи маҳкамланган (143-расм). Ипнинг иккинчи учи блок орқали ўтказилган бўлиб, унга юк осилган. Тўлқиннинг тарқалиш тезлиги ипнинг таранглигига боғлиқ бўлганидан ((63.7) тенглама), осилган юкни ўзгартириш йўли билан ипда анча кучли турғун тўлқин ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун *AB* оралиқда бутун сонли ярим тўлқинлар жойлашиши зарур (ипнинг ҳар иккала учи маҳкамланган ёки иккала учи ҳам эркин бўлган ҳолда).



143-расм.

Ипнинг бир учи маҳкамланган бўлиб, иккинчи учи эркин бўлса, унинг узунлиги тоқ сонли чорак тўлқинларга каррали бўлиши керак, чунки бу ҳолда тўлқиннинг ипнинг бир учидан қайтишида айтиб ўтилган фазалар сакраши содир бўлади. Ипнинг узунлиги ва таранглигини ўзгартира бориб, тебраниш частотасини ўзгартирмаган ҳолда турли сондаги тўлқинларни ҳосил қилиш мумкин. Ҳосил бўлаётган тўлқинларнинг энг кичик частотаси асосий тонга, каттароқ частоталар эса юқори тон (обертон) ларга мос келади.

Ипда бутун сонли ярим тўлқинлар жойлашганда у камертон ҳосил қилаётган мажбурловчи куч билан резонансда тебраниб, тебраниш амплитудаси анча катта бўлиши мумкин. 143- расмда ҳосил бўлиши мумкин бўлган турғун тўлқинларнинг икки тури тасвирланган: $n=1$ да асосий тон уйғотилади (тебранишлар частотаси энг кичик қийматга эришади), $n=2$ да эса иккинчи обертон уйғотилади.



144-расм.

Иккала учи эркин бўлган стерженда ҳам ана шундай тебранишлар (тўлқинлар) ҳосил бўлади, фақат бу ҳолда $n=1$ бўлганда стержень учларида энг катта силжиш бўлиб, ўртасида эса силжиш кузатилмайди. Стержень учларидан бири маҳкамланган бўлиб, иккинчи учи эркин бўлганда эса (144- расм), стержень бўйлаб тоқ сонли чорак тўлқинлар жойлашган ҳолдагина кучли тебранишлар вужудга келади, чунки бунда стержень учларидан бирида силжиш бўлмай, иккинчисида энг катта силжиш бўлиши керак.

Турғун тўлқинлар ёрдамида тўлқин узунлигини осонгина топса бўлади. Тўлқин узунлиги аниқ бўлгач, тўлқин частотасини (тўлқиннинг тарқалиш тезлиги маълум бўлганда) ёки тўлқин тезлигини (частота маълум бўлганда) аниқлаш мумкин.

XIII боб

СУЮҚЛИКЛАР ВА ГАЗЛАР МЕХАНИКАСИ

67- §. Суюқлик ва газлардаги босим

Тартибсиз, хаотик ҳаракат қилиб, бир-бири билан жуда кучсиз боғланганлиги туфайли газ молекулалари эркин ҳаракат қилиб, ўзаро тўқнашишлар натижасида ҳар томонга сочилиб, бутун ҳажмни эгаллайди, яъни газнинг ҳажми у эгаллаб турган идиш ҳажми билан белгиланади.

Суюқлик ҳам газ сингари у қуйиб қўйилган идиш шаклини эгаллайди. Лекин суюқликларда молекулалар орасидаги ўртача масофа деярли ўзгармайди, шунинг учун амалда суюқлик ҳажми доимий сақланади.

Суюқлик ва газларнинг хоссалари кўп жиҳатдан бир-биридан фарқ қилса-да, бир қатор механик ҳодисаларни ўрганишда уларни бир хил параметрлар ва тенгламалар билан ифодалаш мумкин. Шу сабабли суюқлик ва газларни ўрганишда бир хил методлар қўлланилади.

Суюқлик ва газларнинг бир томонга йўналган ҳаракатини *оқиш* деб, ҳаракатланаётган суюқлик ёки заррачаларининг мажмуи эса *оқим* деб аталади.

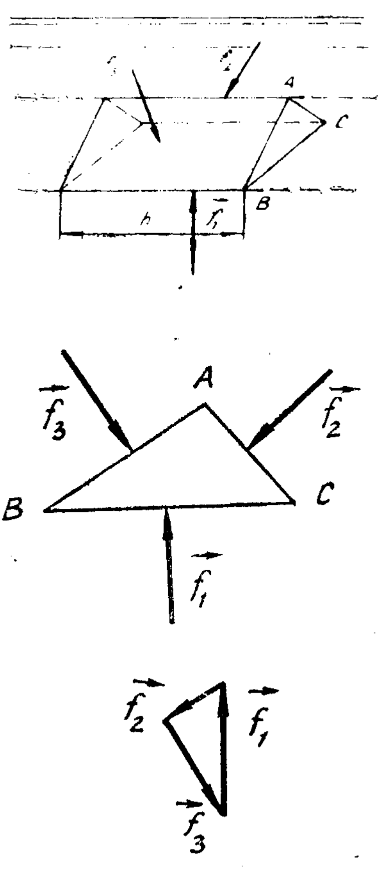
Механикада суюқлик ва газлар жуда катта аниқлик билан узлуксиз деб ҳисобланади. Суюқликнинг зичлиги босимга деярли боғлиқ эмас. Газларнинг зичлиги эса босимга жуда кучли боғланган. Тажрибалар кўрсатадики, кўпинча суюқликнинг сиқилувчанлигини ҳисобга олмаса ҳам бўлади, яъни зичлиги ҳамма нуқталарда бир хил бўлиб, вақт ўтиши билан ўзгармас бўлган, *сиқилмайдиган суюқлик* тушунчасидан фойдаланиш мумкин.

Суюқлик идишнинг бир қисмини эгаллаб, эркин газ билан чегараланган сиртга эга бўлса, эркин сиртнинг ҳамма нуқталаридаги таъсир этаётган кучлар сиртга перпендикуляр (тик) бўлгандагина суюқлик мувозанатда бўлади. Ҳақиқатан ҳам, сирт бўйлаб йўналган кучлар мавжуд бўлганда, улар суюқликнинг юқоридаги қатламларини ҳаракатга келтирган бўлар эди. Шу сабабли Ерга нисбатан ҳаракатсиз бўлган идишдаги суюқликнинг эркин сирти горизонтал бўлади.

Суюқлик ёки газ томонидан бирор юзага нормал йўналишда таъсир этаётган кучнинг мазкур юза катталигига нисбати билан ўлчанадиган физик катталик *суюқлик босими* деб аталади:

$$p = \frac{d\vec{F}}{d\vec{S}}, \qquad (67.1)$$

бу ерда $d\vec{F}$ — dS юзага таъсир қилаётган куч, $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$; $\vec{n}_0$ — элементар dS юзага ўтказилган нормаль йўналишидаги бирлик вектор.



145-расм.

Босимнинг СИ ўлчов бирликлар системасидаги бирлиги *паскаль* деб аталиб, бу бирлик 1 м^2 юзага нормаль бўйича йўналган ва бир текис тақсимланган 1 Н куч ҳосил қилган босимга тенг:

$$1\,\text{Па} = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Суюқлик сиртига фақат унга тик йўналган кучларгина таъсир қилганда С. Стевин (1548—1620) томонидан таклиф қилинган *қотиш принципи*дан фойдаланиш мумкин. Суюқлик ёки газнинг бирор қисми тинч турган бўлса ёки бир бутун бўлиб ҳаракатланаётган бўлса, мазкур ҳажмдаги айрим заррачаларнинг бир-бирига нисбатан вазияти ўзгармайди, яъни бу ҳажм қотиб қолган деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда мазкур ҳажмдаги суюқлик ёки газни қаттиқ жисм деб ҳисоблаб, унга қаттиқ жисм механикаси қонунларини қўллаш мумкин.

Босим скаляр катталик бўлиб, суюқлик ёки газнинг муайян нуқтасида dS юзанинг қандай жойлашган бўлишига қарамай, бир хил катталикка эга, яъни у изотропдир. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун мазкур нуқта атрофида ихтиёрий тарзда жойлашган уч ёқли призма ажратиб олайлик (145-

а, *б*-расм). Призманинг ёқларига уларга тик бўлган $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ ва $\vec{f}_3$ босим кучлари таъсир қилади. Бундан ташқари, призмага унинг ичида жойлашган суюқликнинг оғирлик кучи ҳам таъсир қилади. Призма ёқларини кичиклаштириб борганда унинг ҳажми ёқларининг юзларига нисбатан тезроқ камаяди. Шунинг учун етарли даражада кичик бўлган призмадаги суюқлик ёки газнинг оғирлигини ҳисобга олмай, босим кучлари бир-бири билан мувозанатлашади деб ҳисоблаш мумкин.

Босим кучлари векторидан ясалган учбурчак (145-*в* расм) *ABC* учбурчакка ўхшаш бўлгани сабабли (мос томонлари бир-бирига тик),

$$\frac{f_1}{BC}=\frac{f_2}{AC}=\frac{f_3}{AB}$$

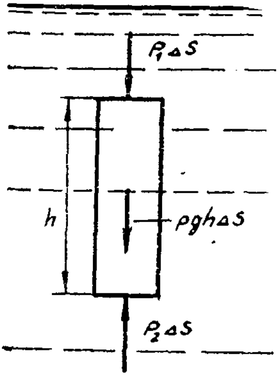
деб ёзиш мумкин. Бу ифодаларнинг махражларини призманинг *h* баландлигига кўпайтириб, мос ёқларнинг юзаларини ҳосил қиламиз, у ҳолда

$$p_1=p_2=p_3 \qquad (67.2)$$

ифода келиб чиқади. Яъни, суюқлик (газ) нинг ихтиёрий нуқтасидаги босим элементар юзанинг вазиятига боғлиқ эмас.

Энди тинч турган суюқлик (газ) даги босим қандай тақсимланганини кўрайлик. Суюқлик ичида баландлиги *h* бўлган вертикал цилиндрдан иборат ҳажмни ажратайлик (146-расм). Мазкур ҳажм чекли қийматга эга бўлганидан, унинг ичида жойлашган суюқлик оғирлигини ҳисобга олмай бўлмайди. Мазкур ҳажмдаги суюқлик тинч турганидан, цилиндрнинг ён сиртига таъсир қилаётган босим кучлари ўзаро мувозанатлашади, дейиш мумкин. Мазкур цилиндрга қотиш принципини қўллаб, кучлар мувозанати шартини ёзамиз:

$$p_2\cdot\Delta S=p_1\cdot\Delta S+\rho gh\Delta S.$$



146-расм.

Мазкур ифодани цилиндр асосининг ΔS юзасига бўлсак,

$$p_2 = p_1 + \rho gh \qquad (67.3)$$

формула ҳосил бўлади. Бу ерда суюқликнинг оғирлиги билан боғлиқ бўлган ρgh катталик *гидростатик босим* деб аталади. Демак, иккита сатҳдаги босимлар бир-биридан суюқлик (газ) вертикал устуни оғирлигининг шу устуннинг кўндаланг кесимига нисбатига тенг миқдорга фарқ қилар экан.

(67.3) формуладан кўринадики, тинч турган суюқлик (газ) нинг бир хил сатҳ (баландлик) га эга бўлган нуқталаридаги гидростатик босим бир хил бўлиб, суюқликнинг зичлигига ва идишдаги суюқлик устуни баландлигига боғлиқ, идишнинг шаклига эса боғлиқ бўлмайди.

Бир асосига мембрана (парда) қопланиб, иккинчи асоси эса ингичка резина най орқали манометр билан бирлаштирилган цилиндрчани суюқлик ичида кўчириб юриб, бир хил сатҳдаги нуқталарда босим бир хил бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Мазкур цилиндрни бир хил сатҳда кўчириб, уни ҳар хил йўналишларда бурганда ҳам манометрнинг кўрсатиши ўзгармайди.

(67.3) тенгламадан кўринадики, суюқлик ичида h чуқурликдаги гидростатик босим

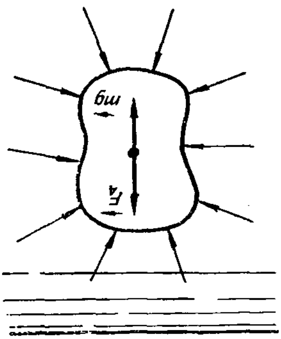
$$p = p_0 + \rho gh \qquad (67.4)$$

га тенг бўлади, бу ерда p_0 — ташқи босим (суюқликнинг эркин сиртига бўлган босим).

Ташқи босим Δp_0 га ўзгарса, суюқликнинг ихтиёрий нуқтасидаги босим ҳам айнан шунча миқдорга ўзгаради, яъни *ташқи кучларнинг суюқлик сиртига кўрсатадиган босими суюқлик томонидан ҳамма йўналишда бир хил узатилади.* Мазкур хулоса *Паскаль қонунини* ифодалайди.

Гидравлик пресслар ва кўтаргичлар, мой ва ҳавонинг сиқилиши билан ишлайдиган гидравлик ва пневматик тормозларнинг ишлаши Паскаль қонунига асосланган. Суюқлик (газ) нинг ҳар хил сатҳларида босим ҳар хил бўлиши натижасида уларга киритилган жисмга сиқиб чиқарувчи куч таъсир қилади.

Сиқиб чиқарувчи куч катталигини топиш учун фикран суюқликдаги жисмни (147-расм) олиб ташлаб, ўрнини суюқлик билан тўлдирайлик. Мазкур ҳажмга қотиш принципини қўлласак, бу ҳажмга унинг оғирлигига тенг бўлиб, оғирлик марказига қўйилган $\overrightarrow{mg}$ куч таъсир қилади. Лекин мазкур ҳажм мувозанатда бўлгандан, унга оғирлик кучини мувозанатловчи $\vec{F}_A$ сиқиб чиқарувчи куч ҳам қўйилган бўлиши



147-расм.

керак. Бундан кўринадики, суюқлик (газ) ичида жойлашган жисмга ана шундай куч таъсир қилиши керак. Мазкур куч *Архимед кучи* деб аталиб, у жисм ҳажмига тенг ҳажмдаги суюқлик оғирлигига тенг бўлади, яъни:

$$F_A = \rho V g, \qquad (67.5)$$

бу ерда ρ — суюқлик зичлиги, V — жисмнинг ҳажми. Юқоридаги мулоҳазалар асосида *Архимед қонунини* шундай таърифлаш мумкин: *суюқлик (ёки газ) га киритилган жисмга таъсир қиладиган босим кучларининг тенг таъсир этувчиси жисм ҳажмидаги суюқлик оғирлигига тенг ҳамда мазкур ҳажмни тўлдирадиган суюқликнинг оғирлик марказига қўйилган бўлиб, тик юқорига йўналган бўлади.*

Суюқлик (ёки газ) га киритилган жисм бир жинсли бўлганда унинг зичлиги суюқлик зичлигидан катта бўлган ҳолда жисм чўкади, суюқлик зичлигидан кичик бўлганда суюқлик бетига қалқиб чиқади, тенг бўлганда эса суюқлик ичида сузади. Жисм суюқлик бетига қалқиб чиққан ҳолда жисм ҳажмининг бир қисми суюқлик остида бўлганда мувозанат юзага келади.

Аэростатнинг кўтарилиши ҳам Архимед кучига асосланган. Аэростат томчи шаклидаги қобиқдан иборат бўлиб, зичлиги ҳаво зичлигидан кичик бўлган газ билан тўлдирилади. Бунда кўтариш кучи аэростатнинг оғирлигидан катта бўлса, у юқорига кўтарилади. Аэростат кўтарилиб борган сари атмосфера босими камайиб, унинг қобиғига таъсир қилаётган босимлар фарқи ортиб кетади. Бунинг натижасида қобиқ ёрилиб кетмаслиги учун қобиқнинг остида кичик тешик қолдирилади. Кўтариш кучи оғирлик кучига тенглашгач (газнинг бир қисми чиқиб кетиб, босимлар тенглашади), кўтарилиш тўхтайди.

Шуни ҳам таъкидлаш кераки, идишдаги суюқликка унинг оғирлик кучидан ташқари бошқа кучлар ҳам таъсир қилаётган бўлса, суюқликнинг бир хил сатҳда жойлашган нуқталаридаги босим бир хил бўлмаслиги ҳам мумкин. Бунга идиш билан бирга айланаётган суюқликни мисол қилиш мумкин (46-§).

Суюқлик вазнсизлик ҳолатида бўлганда (28-§) эса босимнинг оғирлик кучи туфайли ўзгариши содир бўлмайди. Бундан ташқари, мазкур ҳолда Архимед кучи ҳам йўқолади.

68- §. Узлуксизлик тенгламаси. Бернулли тенгламаси

Суюқлик ёки газ қатламлари бир-бири билан аралашиши мумкин эканлиги уларнинг ҳаракатини ўрганишни қийинлаштиради. Мазкур ҳаракатни ўрганишнинг икки хил усулидан фойдаланиш мумкин. Биринчи усулда (Лагранж усули) суюқлик айрим заррачаларининг фазодаги ҳаракатини кузатиб, уларнинг кўчишлари, тезликлари ва тезланишлари аниқланади. Шу асосда муайян ҳажмдаги суюқликнинг ҳаракати ўрганилади. Иккинчи усулда (Эйлер усули) эса, суюқлик айрим заррачаларининг ҳаракати эмас, балки суюқлик заррачаларининг фазодаги муайян қўзғалмас нуқталардаги тезликлари аниқланади.

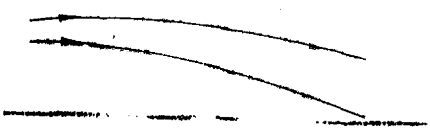
Кўпинча Эйлер усулидан фойдаланилади. Бу усулда фазонинг муайян нуқталаридаги суюқлик оқимининг тезлиги нуқта координаталарига ва вақтга боғлиқ бўлади:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},\ t)$$

бу ерда $\vec{r}$ — мазкур нуқтанинг радиус-вектори. Бу ҳолда $\vec{v}$ суюқлик оқимининг тезлигини ифодалайди.

Фазонинг ҳар бир нуқтасидаги суюқлик оқимининг тезлиги вақт ўтиши билан ўзгармаса, суюқликнинг ҳаракати *стационар (барқарор) оқиш* дейилади. Стационар оқишда фазонинг ихтиёрий нуқтаси орқали ўтаётган барча суюқлик заррачалари бир хил тезликка эга бўлади.

Оқимдаги тезликлар тақсимланиши *оқим чизиқлари* орқали тасвирланиб, мазкур чизиқларга ихтиёрий нуқтада оқим тезлиги вектори $\vec{v}$ уринма бўйлаб йўналган бўлади (148-расм). Мазкур чизиқлар ёрдамида тезликнинг йўналишинигина эмас, балки унинг катталигини ҳам тасвирлаш мумкин. Бунинг учун оқим чизиқларининг зичлиги мазкур нуқтадаги оқим тезлигига про-



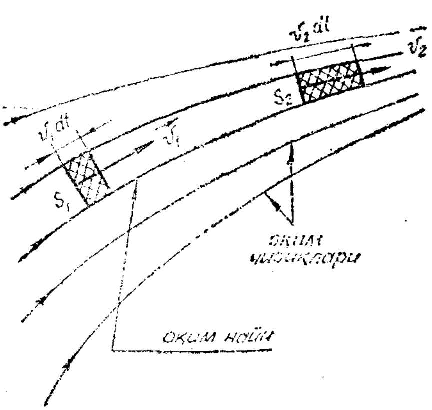
148-расм.

порционал қилиб олинади. Шу туфайли оқим тезлиги кичикроқ бўлган нуқталардаги *оқим чизиқлари* тезлик каттароқ бўлган нуқталардагига қараганда сийракроқ бўлади. Стационар оқиш бўлганда оқим чизиқлари заррачаларнинг траекториялари билан мос келади, чунки бу ҳолда заррачаларнинг траекториялари ҳам, оқим чизиқлари ҳам вақт ўтиши билан ўзгармайди, оқим чизиғига тушиб қолган заррача эса ҳамма вақт мазкур чизиқ бўйлаб ҳаракатланади.

Стационар оқиш кузатилаётган оқимда суюқликнинг оқим чизиқлари билан чегараланган қисми ажратиб олинса, унинг сиртини суюқликни ўтказмайдиган най деб ҳисоблаш мумкин, чунки мазкур най ичидаги заррачалар ундан ташқарига чиқолмайди, ундан ташқаридаги суюқлик заррачалари эса ичкарига киролмайди. Бундай найнинг кўндаланг кесими етарлича кичик қилиб олинса, мазкур кесимнинг ҳамма нуқталаридаги суюқлик тезлигини бир хил деб ҳисоблаш мумкин. Суюқлик ичида олинган бундай ингичка найлар *оқим найлари* деб, уларнинг ичидаги суюқликни эса *шарра* деб аталади.

Оқимнинг ҳар бир нуқтасидаги тезлик вақт ўтиши билан ўзгариб турган ҳолда суюқликнинг ҳаракати *ностационар (беқарор) оқиш* дейилади. Шунинг учун суюқликнинг ностанционар оқишида оқим чизиқлари ҳар хил пайтда суюқликнинг ҳар хил заррачалари орқали ўтиб, уларнинг траекториялари билан мос келмайди.

Оқиш стационар бўлганда бир хил вақт оралиқларида оқим найининг ҳамма кесимлари орқали бир хил миқ-



149-расм.

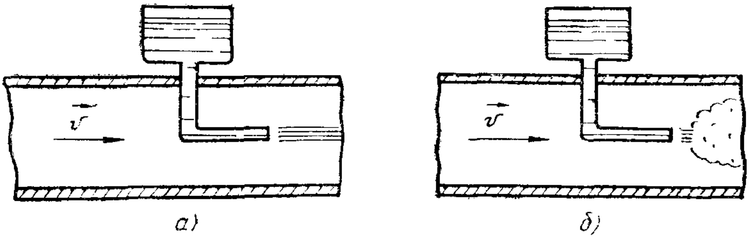
дорда суюқлик оқиб ўтади. 149-расмдан кўринадики, dt вақт ичида оқиб ўтган суюқлик массасини

$$dm = \rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt = \text{const} \qquad (68.1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда S_i — най кесимининг юзаси, v_i — мазкур кесимдаги оқим тезлиги, ρ_i — суюқлик зичлиги. (68.1) ифода *узуксизлик тенгламаси* дейилади. Сиқилмайдиган суюқлик бўлган ҳолда ҳамма нуқталарда унинг зичлиги бир хил бўлиб, суюқлик ҳажмининг сақланиш қонунини ифодаловчи

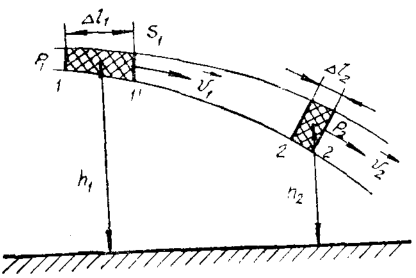
$$S_i v_i = \text{const} \qquad (68.2)$$

узлуксизлик тенгламаси ҳосил бўлади. Бу ифодадан оқиш тезлиги най кесимининг юзасига тескари пропорционал эканлиги келиб чиқади. Суюқлик оқаётган найнинг кесими ўзгарса, оқим тезлиги ҳам ўзгариб, бу оқаётган суюқликка қандайдир куч таъсир қилаётганидан дарак беради. Демак, оқим тезлиги кичик бўлган кесимдаги босим тезлик каттароқ бўлган кесимдагига қараганда ортиқ бўлади.



150-расм.

Суюқликнинг оқиши икки турли бўлиши мумкин эканлигига тажрибада ишонч ҳосил қилиш мумкин: горизонтал жойлашган шиша най орқали оқаётган сув оқимининг тезлигини ўзгартириш мумкин бўлсин. Сувнинг оқиши характерини ўрганиш учун оқим ичига рангли суюқлик шаррачасини йўналтирайлик (150-расм). Оқим тезлигини ўзгартириб, кичик тезликларда рангли шаррача сувда ёйилиб кетмай, ўз шаклини сақлаб қолишини кўриш мумкин. Бу эса суюқликнинг зарралари бир қатламдан иккинчи қатламга ўтмаётганлигидан дарак беради. Бу ҳолда оқиш қатламли бўлади: суюқликнинг қатламлари бир-бири билан аралашмай, бир-бирига сирпанади. Суюқликнинг бундай ҳаракати *ламинар оқиш* деб аталади.



151-расм.

Сувнинг оқиш тезлигини орттириб бориб, мазкур тезлик муайян қийматга эришганда рангли шаррача найнинг бутун кесими бўйлаб ёйилиб кета бошлайди (191- *б* расм). Бу эса суюқлик қатламлари бир-бирига аралаша бошлаганидан дарак беради. Суюқликнинг бундай ҳаракати *турбулент оқиш* деб юритилади.

Идеал суюқликнинг стационар оқиши қонунларини ўрганайлик. Қовушоқлиги бўлмаган суюқлик *идеал суюқлик* деб аталади. Бундай суюқлик оқимида қатламлар орасидаги ички ишқаланиш ҳисобга олмайдиган даражада кичик бўлади.

Идеал сиқилмайдиган суюқликнинг стационар оқимидаги найнинг *1* ва *2* кесимлар орасидаги қисмини кўрайлик (151-расм). Мазкур кесимлардаги босимлар ва оқим тезликларини мос равишда p_1, p_2; v_1, v_2 билан белгилаймиз. S_1 ва S_2 — кесимларнинг юзалари. Кесимларнинг горизонтга нисбатан баландликлари h_1 ва h_2 бўлсин.

Энергиянинг сақланиш қонунига кўра, оқим найининг берилган қисмидан оқиб ўтаётган суюқлик энергиясининг ўзгариши ташқи кучларнинг бажарган ишига тенг. Мазкур ҳолда оғирлик кучи ҳамда суюқлик томонидан найнинг берилган қисмига кўрсатилаётган босим кучлари ташқи кучлар ҳисобланади. Оқим найининг ён деворларига таъсир қилаётган босим кучлари иш бажармайди, чунки улар доимо суюқлик заррачаларининг ҳаракати йўналишига тик бўлади. Шу сабабли фақат 1 ва 2 кесимларга таъсир қилаётган

$$f_1 = p_1 \cdot S_1, \quad f_2 = p_2 \cdot S_2 \tag{68.3}$$

босим кучларигина иш бажаради.

Δt вақт оралиғида суюқлик шаррасининг мазкур қисми 1 кесимдан $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$ ва 2 кесимдан $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$ масофага, яъни *1'* ва *2'* кесимлар орасига кўчиб ўтади.

Кичик вақт оралиғида Δl_1 ва Δl_2 масофалар ҳам кичик бўлиб, найнинг *1* ва *1'* ҳамда *2* ва *2'* кесимлари орасидаги қисмларини цилиндр шаклида деб ҳисобласа бўлади. У ҳолда мазкур цилиндрларнинг ҳажмлари

$$\Delta V_1 = S_1 v_1 \Delta t, \qquad \Delta V_2 = S_2 v_2 \Delta t$$

га тенг бўлади. Узлуксизлик тенгламасига кўра, бу ҳажмлар ўзаро тенг:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2.$$

Стационар оқиш мобайнида суюқлик шаррасининг *1'* ва *2* кесимлар орасидаги қисмининг энергияси ўзгармайди. Шу сабабли, шарранинг ажратиб олинган қисми энергиясининг ўзгариши *1* ва *1'* кесимлар орасидаги суюқлик массаси энергиясининг *2* ва *2'* кесимлар орасидаги ҳолатда кўчишдаги ўзгаришига тенг. ΔV_1 ҳажмдаги суюқлик массасининг энергияси

$$\Delta E_1 = \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot g \cdot h_1 = \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1\right) \cdot \Delta V_1.$$

Айнан шундай массага эга бўлган, 2 ва 2' кесимлар орасида жойлашган суюқлик энергияси эса

$$\Delta E_2 = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2\right) \cdot \Delta V_2$$

бўлади. Яъни, мазкур суюқлик массаси энергиясининг ўзгариши

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2\right) \cdot \Delta V_2 - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1\right) \cdot \Delta V_1$$

бўлади. Бу ўзгариш босим кучларининг бажарган ишига тенг (оғирлик кучининг бажарган иши потенциал энергиянинг ўзгариши сифатида ҳисобга олинган):

$$\left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2\right) \cdot \Delta V_2 - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1\right) \cdot \Delta V_1 = A. \qquad (68.5)$$

1 кесимга таъсир қилаётган $f_1 = p_1 S_1$ босим кучи оқим бўйлаб йўналганлиги сабабли мусбат иш бажаради, *2* кесимга таъсир қилаётган $f_2 = p_2 S_2$ босим кучи эса манфий иш бажаради, яъни

$$A = f_1 \cdot \Delta l_1 - f_2 \cdot \Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = p_1 \cdot \Delta V_1 - p_2 \cdot \Delta V_2$$

деб ёзиш мумкин. Бу ифодани (68.5) формулага қўйсак ($\Delta V_1 = \Delta V_2$):

$$\frac{\rho v_2^2}{2}+\rho g h_2-\frac{\rho v_1^2}{2}-\rho g h_1=p_1-p_2$$

ёки

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho g h_1+p_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+\rho g h_2+p_2 \qquad (68.6)$$

ифодага эга бўламиз.

1 ва *2* кесимлар ихтиёрий равишда танлаб олинганлиги туфайли, суюқлик найининг ихтиёрий кесими учун

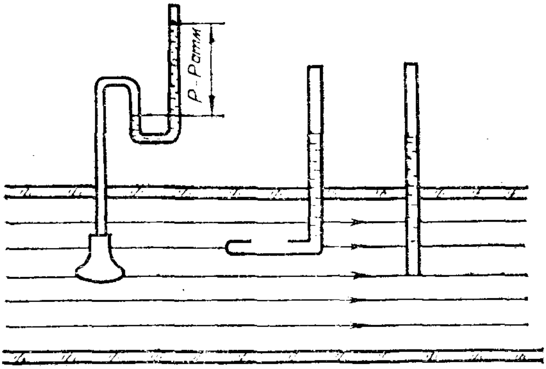
$$\frac{\rho v^2}{2}+\rho g h+p=\text{const} \qquad (68.7)$$

деб ёзиш мумкин.

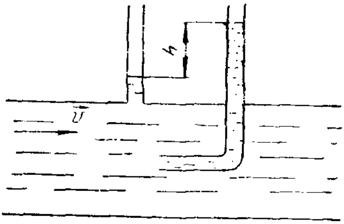
Мазкур тенглама 1738 йилда Д. Бернулли томонидан топилган бўлиб, *Бернулли тенгламаси* деб юритилади.

Келтирилган мулоҳазалардан, Бернулли тенгламаси механик энергия сақланиш қонунининг натижаси эканлиги кўринади. У сиқилмайдиган ва қовушоқ бўлмаган (идеал) суюқликнинг стационар оқими учунгина тўғри бўлиб, идеал суюқлик динамикасида муҳим роль ўйнайди. Лекин, мазкур тенглама реал суюқлик ва газларнинг стационар оқимидаги босим ва тезликлар тақсимотини ҳам ифодалаши мумкин. Сиқилувчанлик ва қовушоқлик қанчалик кичик бўлса, мазкур тақсимот ҳақиқатга шунчалик яқин бўлади.

Бернулли тенгламасидаги ҳадларнинг физик маъносига тўхталамиз. Аввало, бу ҳадларнинг ҳаммаси босим ўлчамлигига эга. p ҳад ҳаракатланаётган суюқлик ичи-



152-расм.



153-расм.

даги босимни ифодалаб, *статик босим* деб юритилади. Аслида, статик босимни ҳаракатланаётган суюқликка нисбатан қўзғалмайдиган, яъни суюқлик билан бирга ҳаракатланаётган маномер ёрдамида ўлчаш керак. Лекин амалда статик босимни мембранаси ёки манометрик найи тешигининг текислиги оқим чизиқларига параллел жойлашган қўзғалмас манометр (152- расм) ёрдамида ўлчаш мумкин.

(68.7) тенгламага кўра, статик босимни

$$p = \text{const} - \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h \qquad (68.8)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. $v = 0$ ва $h = 0$ бўлган ҳолда $p = p_0$ деб олсак, $p_0 = \text{const}$ ифода ҳосил бўлади. Бундан, Бернулли тенгламасидаги доимий тинч турган суюқликнинг ҳисоб боши сифатида қабул қилинган сатҳдаги статик босимига тенг эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, (68.8) ифодага кўра, оқаётган суюқликдаги статик босим оқим тезлигининг ортиши ва суюқлик найининг кўтарилиши туфайли камаяр экан.

Динамик босим деб ном олган $\frac{\rho v^2}{2}$ ҳад суюқликнинг ҳаракати туфайли статик босим қанча миқдорга камайганини кўрсатади. Динамик босимни ўлчаш учун кесими оқим чизиқларига тик жойлашган найдан фойдаланилади (153-расм). Мазкур най *Пито найи* деб аталади, унда тормозланган суюқликнинг кинетик энергияси потенциал энергияга айланади, суюқликнинг кўтарилиш баландлиги эса $p + \frac{\rho v^2}{2}$ йиғиндининг ўлчови бўлиб хизмат қилади.

Бундай манометрларнинг кўрсатишига (сатҳларнинг h фарқига) асосланиб, найдаги оқим тезлигини ва вақт бирлиги ичида оқиб ўтган суюқлик ва газ миқдорини ўлчашда ҳам ана шу усулдан фойдаланилади.

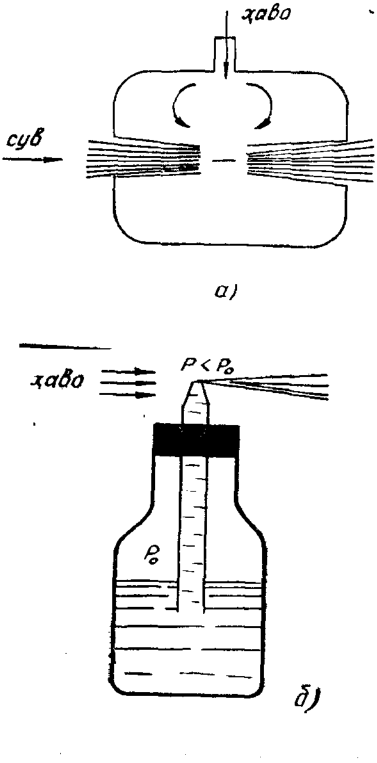
Бернулли тенгламасидаги $\rho g h$ ҳад *гидростатик (гидравлик) босимни* ифодалайди.

Суюқлик найи горизонтал бўлган ҳолда ($h_1 = h_2$) Бернулли тенгламаси

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2 \qquad (68.9)$$

кўринишга келади. Бу ифодадан, шарра торайган жойларда (оқим тезлиги ортганда) босим камайиши, ва аксинча, шарра кенгайган жойларда босимнинг ортиши келиб чиқади. Бу ҳолда ҳамма кесимларда статик ва динамик босимларнинг йиғиндиси ўзгармайди, шу сабабли ҳамма вақт шаррадаги босим тинч турган суюқликдаги босимдан кам бўлади.

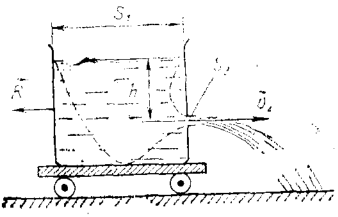
Шарра торайган жойларда най ҳаво билан туташган бўлса, мазкур жойдаги босим ҳаво босимидан камайиб кетган ҳолларда суюқлик шаррасига ҳаво кириб келади. Бу ҳодисага асосланиб сув шаррали насослар ясалади (154- расм). Найнинг ингичка учидан катта тезлик билан чиқаётган сув шарраси ҳавони сўриб олиб, ўзига эргаштиради. Бу усул билан ҳавоси сўриб олинаётган идишдаги босимни 1 мм сим. уст. гача пасайтириш мумкин.



154-расм.

Торайган шарранинг сўриб олиш хусусияти пульверизаторлар ва карбюраторларда ҳам қўлланилади. Уларнинг сув шаррали насосдан фарқи шуки, бунда кучли ҳаво оқимидаги босим идиш ичидаги p_0 босимдан камайиб кетиб (154- *б* расм), суюқлик най орқали кўтарилади ва ҳаво оқимига эргашиб, унга қўшилиб кетади.

Бернулли тенгламасини қўллаб, суюқликнинг оғирлик кучи таъсирида идишдаги тешикдан оқиб чиқиш тезлигини аниқлаш мумкин. Суюқлик қуйилган кенг очиқ идиш аравача устига ўрнатилган бўлсин. Идиш деворининг пастки қисмида S_2 кесими идишнинг кўндаланг S_1 кесимига нисбатан анча кичик бўлган тешик очилган бўлсин (155-расм). Суюқлик сирти ёнидаги босим атмосфера босимига тенг бўлади. Идиш унчалик узун бўлмаса, суюқликнинг тешикдан оқиб чиқаётган шарраси сиртига ҳам айнан шундай босим таъсир қилади. Узлуксизлик тенгламаси (68.2)га кўра, суюқликнинг сиртидаги v_1 оқим тезлиги чиқаётган шаррадаги v_2 тезликка нисбатан жуда кичик бўлади. Мазкур ҳол учун Бернулли тенгламаси



155-расм.

$$p_1 + \frac{pv_1^2}{2} + \rho g h = p_1 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда $h = h_1 - h_2$ — идишдаги суюқлик сиртининг тешикка нисбатан баландлиги $v_1 \ll v_2$ бўлганидан, v_1 ни ҳисобга олмаса ҳам бўлади, у ҳолда

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (68.10)$$

ифода келиб чиқади, яъни суюқлик сиртидан h чуқурликда жойлашган тешикдан оқиб чиқаётган шаррадаги тезлик шунча баландликдан эркин тушаётган жисм тезлигига тенг бўлади. (68.10) ифода *Торичелли формуласи* деб аталади. Қовушоқлик туфайли реал суюқликларнинг оқиб чиқиш тезлиги мазкур формула ёрдамида ҳисоблаб чиқилган тезликдан кичик бўлиши мумкин: суюқлик қовушоқлиги қанчалик юқори бўлса, тезликлар фарқи шунчалик катта бўлади.

Суюқлик тешик орқали оқиб чиқаётганда аравача шарра оқимига тескари йўналишда ҳаракатга келади. Бунда тешик орқали оқиб чиқаётган суюқликнинг тезлиги ортиб, шарра муайян импульс олади. Тешик орқали Δt вақт ичида оқиб чиққан суюқлик массаси $\rho S_2 v_2 \Delta t$ га тенг бўлади, шарра билан олиб кетилаётган импульсни эса

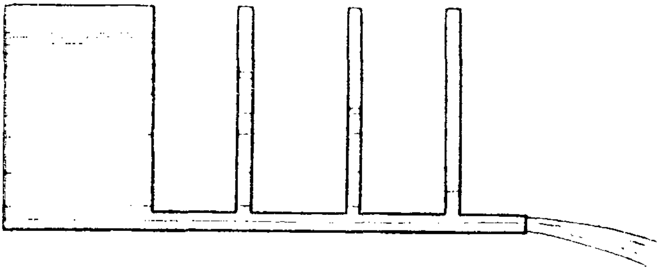
$$\vec{p} = (\rho S_2 v_2) \cdot \vec{v}_2 \cdot \Delta t$$

формула билан ифодалаш мумкин.

Импульснинг сақланиш қонунига асосан, ташқи кучлар бўлмаган ёки улар мувозанатда бўлган ҳолда, идиш ўрнатилган аравача ҳамда оқиб чиқаётган суюқликдан иборат системанинг импульси ўзгармаслиги керак. Бунинг учун аравачанинг идиш билан биргаликдаги импульси ҳам $\vec{p}$ га ўзгариши керак. Демак, суюқлик томонидан идишга ён томондан, шарра оқимига тескари йўналган, тенг таъсир этувчиси эса $\vec{R} = -(\rho S_2 v_2)\vec{v}_2$ га тенг бўлган босим кучлари таъсир этади (155-расм).

Торичелли формуласини қўллаб, мазкур кучни аниқлаш мумкин:

$$R = \rho S_2 v_2^2 = 2\rho h S_2. \qquad (68.11)$$



156-расм.

Бу кучни суюқлик шаррасининг *реакция кучи* ёки *реактив куч* деб юритилади. (68.11) ифодадан кўринадики, реакция кучи идиш тешигини беркитиб турадиган қопқоққа таъсир қиладиган босим кучидан икки марта ортиқ. Буни суюқлик оқиб чиқаётганда унинг ичидаги босимнинг қайта тақсимланиши билан тушунтириш мумкин.

Суюқлик букилган най бўйлаб оққанда ҳам шарра реакцияси вужудга келади. Найнинг кесими ўзгармаса, суюқликнинг импульси ўзгармаслиги мумкин, лекин бунда импульс йўналиши ўзгариши туфайли реакция кучи пайдо бўлиши мумкин. Масалан, букилган водопровод крани орқали ҳар секундда μ массали сув оқиб чиқаётган бўлса, кранга

$$\vec{F} = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

миқдорда реакция кучи таъсир қилади.

69-§. Қовушоқ суюқлик ҳаракати

Айнан бир жисм бўлаклари (қисмлари) бир-бирига нисбатан ҳаракатланганда вужудга келадиган ва мазкур ҳаракатга тўсқинлик қиладиган ишқаланиш *ички ишқаланиш* деб юритилади. Реал суюқлик ва газлардаги қўшни қатламлар бир-бирига нисбатан ҳаракатланганда ҳам ички ишқаланиш кузатилади.

Реал суюқликларда ички ишқаланиш мавжуд эканлиги ўзгармас кесимли горизонтал қувур орқали суюқлик оққанда босимнинг камайиб боришида намоён бўлади (156-расм). Бу тажрибадан, ишқаланишни енгиш учун ташқи кучлар (қувур учларида босимлар фарқи) қўйилиши зарур эканлиги кўринади. Идеал суюқликлар горизонтал қувур бўйлаб оққанда эса босимлар фарқи бўлмас эди. Мазкур тажрибада горизонтал қувур кесими бир хил бўлиб, унга бир хил масофада статик босимни ўлчайдиган манометрлар ўрнатилган. Тажриба, қўйилган босимлар фарқи кесимлар орасидаги масофага пропорционал бўлиб, қувур радиусини орттирганда бу фарқ кескин камайишини кўрсатади. Шу сабабли етарлича кенг қувурларда ўтказилган тажрибаларда ишқаланиш кучларини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Суюқликнинг бевосита қувур деворларига тегиб турган қатлами унга ёпишиб, деярли ҳаракат қилмайди. Суюқликнинг ички қатламлари эса, қувур деворларидан узоқлашган сари ортиб борадиган тезлик билан ҳаракатланади. Ички қатламларнинг бир-бирига нисбатан ҳаракати натижасида каттароқ тезлик билан ҳаракатланаётган қатлам кичикроқ тезлик билан ҳаракатланаётган қатламга тезлатувчи куч билан, кичикроқ тезлик билан ҳаракатланаётган қатлам эса, аксинча тормозловчи куч (ҳаракат йўналишига қарама-қарши йўналган ички ишқаланиш кучи) билан таъсир қилади. Шу сабабли суюқликни қувур бўйлаб ҳаракатлантираётган ташқи кучлар иш бажариб, бу ишнинг бир қисми ички ишқаланиш кучларини енгиш учун сарфланади.

Ньютон, қувур бўйлаб унинг деворини ҳўллайдиган (девор ёнидаги ҳаракат тезлиги нолга тенг) реал суюқликнинг ламинар оқими пайтида қатламлар тезлиги кесим бўйлаб қувур ўқига томон ортиб боришини кўрсатди. Бунда қўшни қатламлар орасида

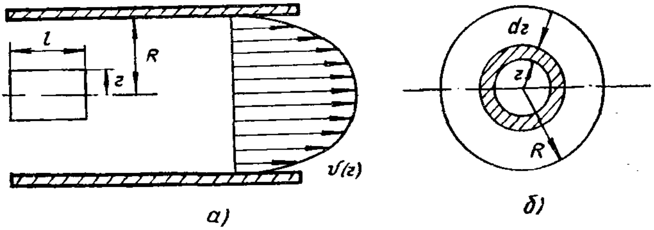
$$F_{\text{и}} = \eta \cdot \frac{dv}{dr} \cdot dS \qquad (69.1)$$

катталикдаги ишқаланиш кучи вужудга келади, бу ерда dS — бир-бирига тегиб турган қатламларнинг юза элементи, η — суюқликнинг динамик қовушоқлиги (ички ишқаланиш коэффициенти, 38- §), $\frac{dv}{dr}$ — оқим тезлиги қувур ўқидан унинг деворига томон қандай суръат билан ўзгариб боришини кўрсатувчи катталик.

Ички ишқаланиш коэффициентининг ўлчов бирлигини (69.1) формуладан келиб чиқадиган

$$\eta = \frac{F}{dS \cdot \frac{dv}{dr}}$$

муносабат ёрдамида аниқлаш мумкин. Қовушоқлик коэффициентининг СИ системадаги бирлиги сифатида тезликнинг ўзгариш суръати $\frac{dv}{dr} = \frac{1\ \text{м/с}}{1\ \text{м}}$ бўлганда унинг юзаси $S = 1\ \text{м}^2$ бўлган қатламига 1Н га тенг ички ишқаланиш кучи таъсир қиладиган суюқлик қовушоқлиги қабул қилинган бўлиб 1Па·с га тенг. СГС системадаги ўлчов бирлиги ҳам айнан ана шундай усул билан аниқланиб, мазкур ўлчов бирлигига *пуаз* (Пуазейль шарафига) деб ном берилган (1П = 0,1 Па·с).



157-расм.

Қовушоқ суюқликнинг R радиусли горизонтал қувур бўйлаб ламинар оқишини кўрайлик (157-*а* расм). Оқим тезлиги қувур ўқи бўйлаб йўналган бўлиб, у фақат қувур ўқигача бўлган r масофагагина боғлиқ бўлади. Суюқлик ичида ўқи қувур ўқи билан мос келадиган, узунлиги l ва радиуси r бўлган цилиндр шаклидаги ҳажмни фикран ажратиб оламиз. Ташқи томондан мазкур цилиндрнинг ён сиртига $F_п = 2\pi r l\eta \cdot \frac{dv}{dr}$ катталикдаги (ўққа параллел бўлган йўналишдаги) ички ишқаланиш кучи таъсир қилади. Оқим стационар бўлгани сабабли, ички ишқаланиш кучи цилиндрнинг қарама-қарши бўлган асосларига таъсир қилаётган босим кучлари фарқи билан мувозанатлашиши керак:

$$2\pi r l\eta \frac{dv}{dr} + (p_1 - p_2)\pi r^2 = 0,$$

бу ифодадан эса

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr$$

келиб чиқади.

Мазкур ифодани интеграллаб,

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta} \cdot r^2 + C$$

формулани ҳосил қиламиз. C доимий қийматини топайлик. $r = R$ бўлганда (қувур девори ёнида) суюқлик тезлиги нолга тенг бўлиб,

$$C = \frac{(p_1 - p_2) \cdot R^2}{4l\eta}$$

эканлиги келиб чиқади.

Демак, суюқлик оқими тезлигининг қувур кесими бўйлаб ўзгариши

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2) \qquad (69.2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, яъни қувурнинг кесими бўйлаб оқим тезлиги параболик қонун билан ўзгариб (157-расм), девор ёнида нолга тенг, қувур ўқида эса максимал

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} \cdot R^2 \qquad (69.3)$$

қийматга эга бўлади.

У ҳолда (69.2) формулани

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (69.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(69.4) формула ёрдамида қувурнинг кўндаланг кесими орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтган суюқлик ҳажми, яъни *суюқлик оқимини* топиш мумкин. r радиусли ҳалқа

(157-*б* расм) орқали вақт бирлиги ичида ҳажми ҳалқанинг $2\pi rdr$ юзи билан $v(r)$ оқим тезлиги кўпайтмасига тенг бўлган миқдорда суюқлик оқиб ўтади:

$$dQ = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\cdot 2\pi rdr.$$

Бу ифодани r бўйича интеграллаб, суюқлик оқими учун

$$Q = \int_0^R v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)2\pi rdr = \frac{1}{2}\pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0 \quad (69.5)$$

формулага эга бўламиз (S — қувур кесимининг юзи). Мазкур катталикни оқим тезлигининг кесим бўйича ўртача $\langle v\rangle$ қиймати билан кесим юзи кўпайтмаси кўринишида ҳам ёзиш мумкин:

$$Q = S\cdot\langle v\rangle. \quad (69.6)$$

(69.5) ва (69.6) ифодаларни таққосласак,

$$\langle v\rangle = \frac{1}{2} v_0 \quad (69.7)$$

муносабат келиб чиқади, яъни ламинар оқимда оқим тезлигининг кесим бўйича ўртача қиймати қувур ўқидаги тезликнинг ярмига тенг экан.

(69.7) формулага (69.3) ифодани қўйсак,

$$\langle v\rangle = \frac{p_1 - p_2}{8l\eta}\cdot R^2 \quad (69.8)$$

формула ҳосил бўлади.

(69.5) формулага (69.3) ифодани қўйиб,

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l} \quad (69.9)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу муносабат *Пуазейль формуласи* дейилади.

(69.9) формуладан кўринадики, суюқликнинг қувур орқали оқими қувур радиусига жуда кучли боғлиқ бўлади (водопровод жўмраги ёрдамида сув оқимини осонгина бошқариш мумкинлигини эсланг).

Мазкур ифодадан, суюқликнинг қувур кесими орқали оқими қувурнинг бирлик узунлигига мос келган $(p_1 - p_2)/l$ босим фарқига пропорционал, суюқликнинг η қовушоқлигига эса тескари пропорционал эканлиги кўринади. Суюқлик ҳамда газларнинг қовушоқлигини аниқлаш усулларидан бири Пуазейль формуласига асосланган. Бунда суюқлик ёки газ муайян радиусли қувур орқали ўтказилиб, босимлар фарқи ҳамда Q оқим ўлчанади. Тажрибада олинган натижалар асосида η қовушоқлик ҳисоблаб топилади.

70-§. Рейнольдс сони

Қовушоқ суюқлик нисбатан кичик тезлик билан ҳаракатланганда ёки суюқлик (ёки газ) тор найларда ҳаракатланганда ламинар оқим кузатилади (68-§).

Муайян қувур бўйлаб ҳаракатланаётган суюқлик тезлиги муайян *чегаравий тезлик*дан ортганда оқим беқарор бўлиб, ламинар оқим турбулент оқимга ўтади. Бунда оқимнинг ҳар бир нуқтасидаги тезлик вақт ўтиши билан тартибсиз тарзда ўзгариб туради. Турбулент оқим тезлиги деганда мазкур тезликнинг вақт бўйича ўртача қиймати назарда тутилади.

Турбулент оқимда кўп миқдорда уюрмалар ҳосил бўлади. Бунда йирик уюрмалар беқарор бўлиб, нисбатан барқарорроқ бўлган майда уюрмаларга бўлиниб туради. Бундай майда уюрмаларда қовушоқлик муҳим ўрин тутиб, бунинг натижасида уларнинг энергиялари диссипацияланади.

Баён қилинган ҳодисалар суюқлик оқими бирор жисмни айланиб ўтганда ҳам (ёки бирор жисм суюқлик ичида ҳаракатланганда ҳам) кузатилади: оқим тезлиги кичик бўлганда оқим чизиқлари мазкур жисмни айланиб ўтишда эгилади, лекин суюқлик қатламлари аралашиб кетмайди. Оқим тезлиги орта бориши билан турбулентлик пайдо бўлади, жисмни айланиб ўтиш эса мураккаблашади.

Оқим табиатини тасвирлаш учун О. Рейнольдс (1842—1912) суюқлик бирлик ҳажми кинетик энергиясининг тўсиқни енгишга сарфланган энергияга нисбатини қўллади. Суюқлик ичида шар шаклидаги жисм ҳаракатланаётган ҳолни кўрайлик.

Шарнинг кинетик энергияси

$$W \sim \rho R^3 v^2 \qquad (70.1)$$

га тенг, бу ерда ρ, R ва v — мос равишда шарнинг зичлиги, радиуси ва тезлиги. Вақт бирлиги ичида қаршиликни енгишда бажарилган иш ҳаракатланаётган жисмнинг ҳаракат тезлигига пропорционал. Шар ҳаракатланган ҳолда

$$A \sim R^2 \eta v \qquad (70.2)$$

ифода ҳосил бўлади.

Мазкур катталикларнинг ўлчамликка эга бўлмаган

$$Re = \frac{W}{A} = \frac{R\rho v}{\eta} \tag{70.3}$$

нисбати *Рейнольдс сони* дейилади.

Оқимнинг ғалаёнланиши унча катта бўлмаган кичик тезликларда оқим ламинар табиатга эга бўлиб, бу ҳол Рейнольдс сонининг кичик қийматларига мос келади. Оқим тезлиги (айни пайтда Рейнольдс сони ҳам) орта бориши билан жараён мураккаблашади, оқим турбулент табиатга эга бўла бошлайди. Рейнольдс сонининг қиймати критик қийматга етгач, оқим амалда тўласича турбулент характерга эга бўлади. Масалан, суюқлик силлиқ доиравий қувур бўйлаб оққанда $Re_{кр} \approx 2300$ бўлади. Бунда Рейнольдс сони қайси катталик (оқим тезлиги ёки жисм кўндаланг ўлчамининг ортиши ёки суюқлик қовушоқлигининг камайиши) ҳисобига ортгани муҳим эмас. Рейнольдс сонининг анча катта қийматларида қаршиликни (ишқаланишни) енгишга кетадиган сарф нисбатан камайиб, турбулентлик айтарли даражада сезиларли бўлмай қолади.

Мазкур мулоҳазаларни суюқликнинг қувурдаги ҳаракатига ҳам қўллаш мумкин. Суюқлик η қовушоқлигининг унинг ρ зичлигига

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

нисбати *кинематик қовушоқлик* дейилади (бир-биридан фарқлаш учун η катталик *динамик қовушоқлик* деб юритилади). У ҳолда Рейнольдс сонини

$$Re = \frac{Rv}{\nu} \tag{70.4}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

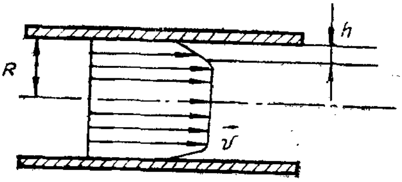
Оқим ламинар бўлганда жисмнинг суюқликдаги ҳаракатига кўрсатиладиган қаршилик кучи тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлади (38-§). Турбулент оқимда қаршилик кучи ортади, ҳаракатланаётган жисм суюқликка энергияси ва импульсининг нисбатан катта қисмини узатади. S юзага эга бўлган ясси пластина, сиртига нормал бўлган v тезлик билан суюқлик ичида ҳаракатланаётган ҳолни кўрайлик. У ҳолда dt вақт ичида пластина $Svdt$ ҳажмдаги суюқликни суради. Сурилган суюқлик массасини мазкур ҳажмни суюқликнинг ρ зичлигига кўпайтириб топиш мумкин. У ҳолда суюқликка берилган импульс

$$dp = \rho S v^2 dt$$

га тенг бўлади, пластинага таъсир қилаётган қаршилик кучи эса

$$f' = \frac{dp}{dt} = \rho S v^2,$$

яъни тезликнинг квадратига пропорционал бўлади. Қаршилик кучининг аниқроқ ифодаси



158-расм.

$$f = C_x \rho S v^2 \qquad (70.5)$$

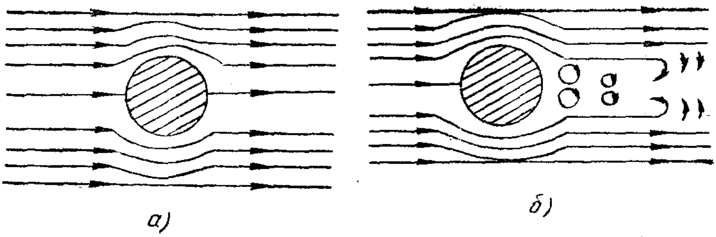
кўринишга эга, бу ерда C_x — ҳаракатланаётган жисм шаклига боғлиқ бўлган пропорционаллик коэффициенти.

Суюқликнинг доиравий кесимга эга бўлган қувур бўйлаб турбулент оқимида унинг алоҳида зарралари мураккаб ҳаракат қилса ҳам суюқлик умуман олганда қувур ўқи бўйлаб оқади. Бунда қувурнинг деворига яқин жойлардаги оқим тезлиги нолдан муайян v қийматгача ортиб боради. Суюқликнинг бу қатлами қалинлиги қувурнинг радиусидан анча кичик бўлади (158-расм).

71-§. Жисмларнинг суюқлик ва газларда ҳаракати

Идеал суюқлик шарсимон жисмни айланиб оқаётган бўлсин (159- *а* расм). Қовушоқлиги бўлмагани туфайли идеал суюқлик тўласича шар сирти бўйлаб сирпаниб ҳаракатланади. Оқим чизиқлари ҳам оқим йўналишида, ҳам кўндаланг йўналишда симметрик тарзда жойлашади. Шу сабабли, Бернулли тенгламасига кўра босимлар тақсимоти ҳам симметрик бўлади. Натижада шар сиртига бўлаётган босим кучларининг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлади. Бошқа шаклга эга бўлган жисмлар учун ҳам айнан шундай фикрни айтиш мумкин. У ҳолда идеал суюқлик ичида текис ҳаракатланаётган жисмга ҳам қаршилик кучи таъсир қилмаслиги керак. Бу хулосани *Эйлер парадокси* деб юритилади.

Реал суюқликлар қовушоқликка эга бўлганлиги туфайли, улар жисм сирти бўйлаб эркин сирпаниб ҳаракатлана олмайди. Оқим тезлиги кичик (Рейнольдс сони критик қийматдан кичик) бўлганда суюқликнинг юп-



159-расм.

қагина қатлами жисм сиртига ёпишиб, чегара қатламини ҳосил қилади. Мазкур қатламдан ташқарида суюқлик оқими идеал суюқлик оқимидан фарқ қилмайди. Чегара қатламида суюқликнинг тезлиги нолдан оқим тезлигининг қийматигача ортиб боради. Бунинг натижасида жисм суюқлик оқимига таъсир қила бошлайди. Ўз навбатида, суюқлик ҳам жисмга муайян куч билан босади. Тажрибалар кўрсатадики, қовушоқлик билан боғлиқ бўлган мазкур кучларнинг тенг таъсир этувчиси оқим бўйлаб йўналиб, оқим тезлигига пропорционал бўлади:

$$F = c_x v, \tag{71.1}$$

бу ерда c_x — суюқликнинг қовушоқлигига, жисмнинг шакли ва ўлчамларига ҳамда унинг оқимдаги вазиятига боғлиқ бўлган пропорционаллик коэффициенти. Стокс аниқлашича, унчалик катта бўлмаган тезликларда шар шаклидаги жисм учун мазкур коэффициент

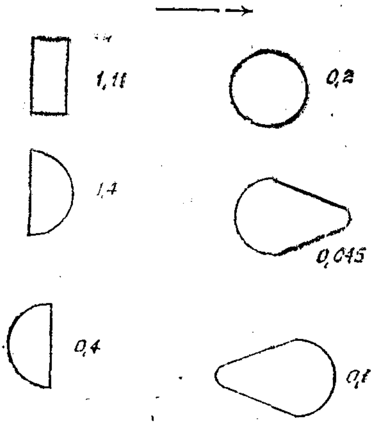
$$c_x = 6\pi\eta r \tag{71.2}$$

кўринишга эга.

Оқим тезлиги ортиб бориши билан чегара қатламининг қалинлиги кескин камайиб кетади. Мазкур боғланиш

$$\delta = \frac{l_x}{\sqrt{Re}} \tag{71.3}$$

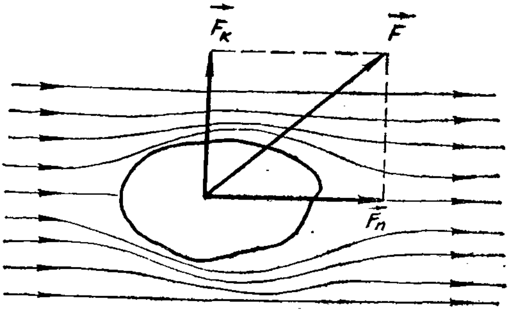
формула билан ифодаланади, бу ерда l_x — жисмнинг оқим йўналишидаги ўлчами. Масалан, радиуси 0,1 м бўлган шарсимон жисм сувда ($\eta = 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 10^3$ кг/м^2) 1 мм/с тезлик билан ҳаракатланганда $\delta = 10^{-2}$; мазкур жисм ҳавода ($\eta = 2\cdot10^{-5}$ Па·с, $\rho = 1{,}3$ кг/м^3) 30 м/с тезлик билан ҳаракатланганда эса $\delta = 7\cdot10^{-4}$ м бўлади. Кўпинча амалда ана шундай кичик қалинликлар билан иш кўрилади. Қовушоқлик кучлари таъсирида суюқликнинг чегара қатламидаги оқими характери кескин ўзгаради. У тўлалигича жисм сиртига сирпаниб ўтмай қўяди, суюқлик оқими жисм сиртидан ажралади. Бунда суюқлик зарралари кинетик энергиясининг бир қисми қовушоқлик кучларини енгишга сарф бўлади, чегара қатлами ичида эса тескари йўналишдаги оқим пайдо бўлади. Бунинг натижасида уюрмалар ҳосил бўлади (159-расм). Жисм орқасидаги уюрмали соҳадаги босим оқим жисмга урилаётган соҳадаги босимдан кичик бўлади, яъни суюқлик оқими томонидан жисмга кўрсатилаётган натижавий босим кучи суюқликнинг оқими йўналишида бўлади. Мазкур куч *босим қаршилиги* деб юритилади. Шундай қилиб, ҳаракатланаётган суюқлик томонидан унинг ичида жойлашган жисмга кўрсатилаётган қаршилик қовушоқлик ва босим қаршиликларидан иборат бўлади. Бу қаршилик *пешона қаршилиги* деб аталиб, кўп жиҳатдан жисм шаклига боғлиқ бўлади. Бунда суюқликнинг оқиб ўтиши ва уюрма ҳосил бўлиши турлича бўлади, бир хил кесимга эга бўлиб, шакллари ҳар хил бўлган жисмларнинг пешона қаршиликлари бир-биридан кескин фарқ қилиши мумкин. 160-расмда ана шундай жисмларнинг c_x қаршилик коэффициентлари берилган (стрелка билан оқим йўналиши кўрсатилган).



160-расм.

Жисм томчи шаклида бўлганда юқориги ва пастки сиртлардан оқимлар ажралиб чиқаётган нуқталар орасидаги масофа ҳамда жисм орқасидаги уюрмалар соҳаси жуда кичик бўлади. Шу сабабли жисм орқасида босимнинг сезиларли камайиши юз бермай, босим қаршилиги кичик бўлади. Бу ҳолда пешона қаршилиги асосан қовушоқлик қаршилигидан иборат бўлади.

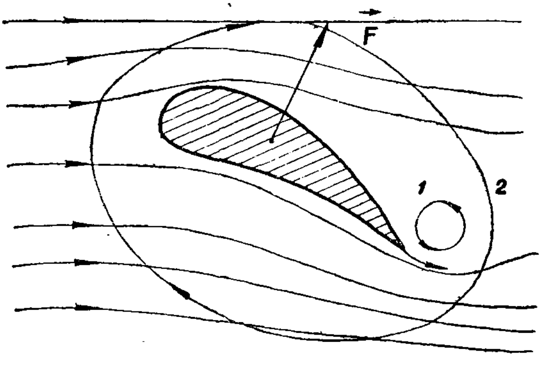
Суюқлик ёки газда ҳаракатланаётган жисмга таъсир қиладиган $\vec{F}$ куч умумий ҳолда ҳаракат йўналишига бирор бурчак остида йўналган бўлади. Мазкур кучни оқим йўналишидаги $\vec{F}_п$ пешона қаршилигига ва оқимга перпендикуляр бўлган $\vec{F}_к$ *кўтариш кучи*га ажратиш мумкин (161-расм).



161-расм.

Самолётнинг юқорига кўтарилиши унинг қанотига таъсир қиладиган кўтариш кучига асосланган. Самолёт қаноти кесимининг кўтариш кучи назариясини Н. Е. Жуковский (1847—1921) яратган. У самолёт қаноти ёнидаги ҳаво оқими иккита: силлиқ сирпанувчи оқим ва вужудга келадиган уюрмали оқимдан иборат деб қараш мумкин деган фикрни олға сурди.

Уюрмали оқимнинг ҳосил бўлишини импульс момен-



162-расм.

тининг сақланиш қонуни ёрдамида тушунтириш мумкин. Ҳаракат бошлангунга қадар қанот билан суюқлик (ёки газ) дан иборат системанинг импульс моменти нолга тенг. Ҳаракат бошлангач, қанотнинг орқа томондаги қирғоғи ёнида *1* уюрма пайдо бўлади (162-расм). Муайян вақтдан сўнг мазкур уюрма қанотдан узилиб, орқага олиб кетилади. Узилиб кетиш пайтида ажралиб чиққан суюқлик (газ) массаси муайян импульс моментига эга бўлади. Импульс моментининг сақланиш қонунига кўра, қолган суюқлик (газ) тескари йўналишга эга бўлган импульс моменти олади, қанот атрофида уюрмали оқим бўлади. Бунда суюқлик зарралари берк траектория бўйлаб илгариланма ҳаракат қилади.

Қанот атрофидаги *2* уюрмали оқим рўпарадан келаётган оқим билан қўшилади. Қанотнинг устига ҳар иккала оқим бир йўналишда бўлганидан оқим тезлиги ортади, қанот остида эса улар қарама-қарши йўналишда бўлганидан, оқим тезлиги камаяди. Бу ҳол эса, Бернулли тенгламасига кўра, қанотнинг остида босимнинг ортишига, қанот устида эса, босимнинг камайишига олиб келади. Шу тарзда самолёт қанотини кўтарувчи куч пайдо бўлади.

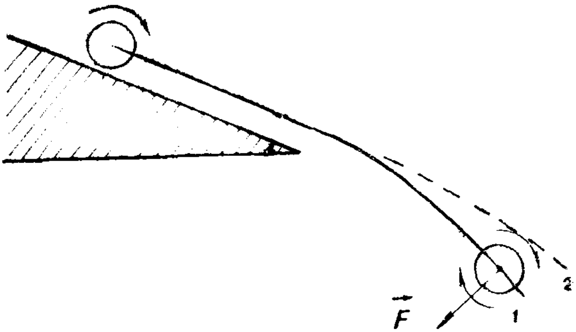
Шуни ҳам таъкидлаш зарурки, уюрма ҳосил бўлиши учун самолётнинг учиб кетиш ва қўниш пайтидаги тезлиги етарлича катта бўлиши зарур. Шу сабабли учиш майдончаси етарлича катта ўлчамга эга бўлади.

Қўшимча горизонтал винтга эга бўлган вертолётлар эса горизонтал йўналишда тезлиги бўлмаган ҳолда ҳам учиб кетиши, қўниши ёки ҳавода муаллақ туриши мумкин. Бироқ уларнинг горизонтал йўналишдаги тезлиги унча катта бўлмайди.

Самолёт горизонтал йўналишда текис учаётган пайтда двигателнинг тортиш кучи пешона қаршилиги кучини, кўтариш кучи эса оғирлик кучини мувозанатлайди.

Руллар ва қанотлардаги қўзғалувчи қисмларнинг вазиятини ўзгартириш йўли билан учиш пайтида самолётга таъсир қилаётган кучлар нисбатини ҳамда учиш режимини танлаб олиш мумкин.

Айланаётган цилиндр шаклидаги жисм суюқлик ёки газда илгариланма ҳаракат қилганда бу ҳаракатга тик йўналишдаги кўтариш кучи вужудга келади. Мазкур куч таъсирида жисм бошланғич ҳаракати йўналишидан оғади. Бу ҳодиса *Магнус эффекти* дейилади. Масалан, қия текисликдан юмалаб тушаётган енгил



163-расм.

цилиндр (163-расм) *2* траектория бўйлаб эмас, *1* траектория бўйлаб ҳаракатланади (*2* траекторияни қия текисликдан нисбатан оғирроқ цилиндрни юмалатиб кўриб аниқлаш мумкин).

XIV боб

АКУСТИКА АСОСЛАРИ

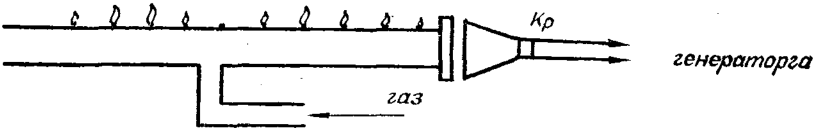
72-§. Товушнинг табиати. Товуш тезлиги

Товуш деганда эластик муҳит зарралари тебранишларининг муҳит бўйлаб тўлқин сифатида тарқалиши тушунилади.

Киши қулоғи одатда 16 дан 20000 Гц гача частотадаги тўлқинларни сезади. Шунинг учун частоталари мазкур оралиқда бўлган тўлқинлар *товуш тўлқинлари* деб аталади. 16 Гц дан кичик бўлган частотали тўлқинлар *инфратовушлар,* 20000 Гц дан катта частотали тўлқинлар эса *ультратовушлар* дейилади. Частоталари 10^9 дан 10^{13} Гц гача бўлган тўлқинлар *гипертовушлар* деб аталади.

Физиканинг товуш ҳодисаларини ҳамда уларнинг бошқа физик ҳодисалар билан алоқасини ўрганадиган соҳаси *акустика* дейилади. Товуш тўлқинларининг физик табиати бир хил бўлса-да, частотасига қараб улар ўзига хос хусусиятларга эга. Масалан, юқори частоталарда тўлқин узунлиги шунчалик қисқа бўладики, у баъзи мураккаб молекулалар ўлчамларига яқин бўлиб қолади. Шу сабабли бундай тўлқинлар ўзи тарқалаётган модда билан жуда кучли таъсирлашади.

Бир қатор тажрибалар ёрдамида товуш тўлқин табиатига эга эканлигини намойиш қилиш мумкин. Шиша қалпоқ остига қўнғироқ жойлаштириб, сўнгра ҳавоси сўриб олинса, товуш эшитилмай қолади. Бу тажриба товуш тарқалиши учун эластик муҳит бўлиши шарт эканлигидан далолат бўлади. Товушнинг тўлқин хоссасига эга бўлишини интерференция бўйича ўтказиладиган тажрибалар ҳам тасдиқлайди. Бунга суюқлик қуйилган шиша най ичида ҳосил бўладиган турғун тўлқинларда вужудга келадиган резонанс ҳодисаси мисол бўла олади. Бунинг учун най тубида сув оқиб чиқиб кета оладиган тешик қўйилади. Сув сатҳи пасайиб борган сари най устидаги камертон тебранишлари натижасида най ичида ҳосил бўлган товуш тўлқинлари гоҳ кучайиб, гоҳ сусаяди.



164-расм.

Газ устунидаги турғун тўлқинларни бошқа усул билан ҳам ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун бир учи беркитилиб, иккинчи учига резина мембрана парда ўрнатилган горизонтал металл най олинади (164-расм). Найнинг устки томонида бир-бирига яқин жойлашган жуда кичик диаметрли тешикчалар, остки томонида эса газли баллонга уланадиган найча жойлашган. Тажриба пайтида аввал найга газ юбориб, тешикчалардан чиқаётган газ ёқиб қўйилади. Бунда газ алангалари бир хил баландликда ёнади. Шундан сўнг *М* мембрана ёнида жойлашган *Кр* радиокарнай товуш генераторига улаб қўйилади. Генератор частотасини ўзгартириб, найда турғун тўлқин ҳосил қилиш мумкин. Бунда най ўқи бўйлаб товуш босими ҳар хил бўлиб, босим тугунлари ва дўнгликлари ҳосил бўлади. Шу сабабли най ўқи бўйлаб ёниш шароити ҳам турлича бўлади. Мазкур тажриба ёрдамида товуш тўлқинининг узунлигини ҳам аниқлаш мумкин.

Тажрибада акустик системаларнинг резонанс хоссаларини ҳам кузатиш мумкин. Мисол тариқасида камертон тебранишларини *кўрайлик.* Қўлда тутиб турилган камертон тебратилса, аранг эшитиладиган товуш ҳосил бўлади, чунки бунда камертоннинг тебранаётган оёқчалари юзаси кичик бўлиб, товушнинг муҳитга узатилиши кучсиз бўлади. Камертонни унга қўшиб бериладиган резонанс қутиси устига ўрнатилса, тебранишни узатадиган сирт катталашиб, тарқатиладиган товуш кескин кучаяди. Камертон бошқа частотага мўлжалланган қутича устига ўрнатилганда эса товуш сезиларли даражада кучаймайди, чунки бунда резонанс рўй бермайди.

Ҳавода бошқа газларда бўлганидек, фақат бўйлама тўлқинлар тарқалиши мумкин (62-§). Шу сабабли, ҳаводаги товуш тўлқини навбатлашиб келадиган сиқилиш ва сийраклaнишлардан иборат бўлади. Сиқилганда ҳавонинг босими, шу билан бирга эластиклиги ҳам ортади, сийраклашганда эса унинг эластиклиги камаяди. Шу билан бирга, ҳаво қизийди ёки совийди. Бироқ температуранинг тўлқин туфайли ўзгариши сезиларли бўлмайди.

(62.4) формула ёрдамида товушнинг ҳаводаги тезлигини аниқлаш мумкин $\left(u^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}\right)$. Адиабатик жараёнда газнинг ҳажми билан босими Пуассон тенгламаси $pV^\gamma = \text{const}$ орқали боғланган, бу ерда γ — газнинг ўзгармас босимдаги ва ўзгармас ҳажмдаги иссиқлик сиғимлари нисбати. Газнинг зичлиги унинг ҳажмига тескари пропорционал эканлигидан, Пуассон тенгламасини $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$ кўринишда ёзиш мумкин. Мазкур ифодани дифференциаллаб, $\frac{1}{\rho^\gamma} dp - \gamma \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} d\rho = 0$ муносабатни ҳосил қиламиз. Бундан $\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$ келиб чиқади $\left(\frac{dp}{d\rho} \approx \frac{\Delta p}{\Delta \rho}\right)$. У ҳолда товушнинг ҳаводаги тезлиги учун

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad (72.1)$$

ифода ҳосил бўлади. Бу ифода *Лаплас формуласи* дейилади.

Мазкур формулада босим қатнашса ҳам, товуш тезлиги босимга боғлиқ бўлмайди: босим ортганда ҳавонинг зичлиги ҳам ортади, яъни $\frac{p}{\rho}$ нисбат ўзгармайди.

Қуруқ ҳаво учун $\gamma = 1{,}4$ эканлигини ҳисобга олсак, 0°С температурада товуш тезлиги учун Лаплас формуласи $u] = 332$ м/с қийматни беради. Бу эса тажриба натижаларига жуда ҳам яхши мос келади. (72.1) формулада Менделеев-Клайперон тенгламасидан фойдалансак, товуш тезлиги учун

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (72.2)$$

ифода ҳосил бўлади. Бу формуладан, температура кўтарилганда товуш тезлиги ортиши келиб чиқади. Товушнинг тезлиги фақат ҳавонинг температурасигагина эмас, унинг намлигига ҳам боғлиқ бўлади, чунки сув буғи учун $\gamma = 1{,}32$, моляр массаси эса $M = 18$. Шу сабабли ҳавонинг намлиги ортиб борганда товуш тезлиги ҳам ортади.

(72.1) ва (72.2) формулалар бошқа газлар ва газ аралашмалари учун ҳам ўринли. Масалан, 0° С температурада товушнинг кислороддаги тезлиги 315 м/с, карбонат ангидридда 258 м/с, водородда эса 1265 м/с га тенг. Моляр массаси маълум бўлган газдаги товуш тезлигини ўлчаб, (72.2) формула ёрдамида мазкур газ учун иссиқлик сиғимлари нисбатини аниқлаш мумкин.

Газларда бўлганидек, суюқликларда ҳам фақат бўйлама тўлқин тарқалиши мумкин (62-§). Суюқликдаги товуш тезлигини $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ формула ёрдамида аниқлаш мумкин, бу ерда E — суюқликнинг ҳажмий эластиклик модули, ρ — унинг зичлиги. Ҳажмий эластиклик суюқликнинг сиқилувчанлигига тескари пропорционал бўлганидан

$$u = \sqrt{\frac{1}{k\rho}} \qquad (72.3)$$

деб ёзиш мумкин, бу ерда k — суюқликнинг сиқилувчанлиги, яъни суюқлик ҳажмининг босим 1 Па га ўзгаргандаги нисбий ўзгариши.

Қаттиқ жисмларда бўйлама тўлқинлар билан бир қаторда кўндаланг тўлқинлар ҳам тарқалиши мумкин (62-§). Бўйлама тўлқинлар учун товушнинг қаттиқ жисмдаги тезлигини $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ формуладан, кўндаланг тўлқинлар учун эса $u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ формуладан топилади, бу ерда G — силжиш модули. Қаттиқ жисмлардаги бўйлама товуш тўлқинларининг тезлиги кўндаланг товуш тўлқинларнинг тезлигидан деярли икки марта ортиқ бўлади.

Зилзила пайтида қайд қилинаётган жойга аввал бўйлама тўлқинлар, сўнгра кўндаланг тўлқинларнинг етиб келиши ҳам мазкур фикрни тасдиқлайди.

Турли хил газлар, суюқликлар ва қаттиқ жисмлардаги товуш тезлигини ўлчаш, унинг частотага боғлиқ эмаслигини, яъни товуш тўлқинларида дисперсия бўлмаслигини кўрсатади. Юқори частотали ультратовушларда эса аҳвол бошқача бўлади: кўп атомли газлар ва органик суюқликларда ультратовуш тўлқинларининг дисперсияси кузатилади. Айнан шундай ҳодисани тўлқин узунлиги стержень узунлиги билан бир хил тартибда бўлганда ингичка стерженларда ҳам кузатилган.

73-§. Товушнинг интенсивлиги. Товушнинг тарқалиши

Эластик муҳит бўйлаб товуш тарқалганда товуш тарқалмаган пайтдагига нисбатан ортиқча босим ҳосил бўлиб, уни *товуш босими* деб аталади. Товуш босими учун

$$p = \rho\omega Au \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad (73.1)$$

ифодани (ясси тўлқин учун) келтириб чиқариш мумкин, бу ерда ρ — муҳит зичлиги, ω — тебраниш (тўлқин) частотаси, A — тўлқин амплитудаси.

$$p_0 = \rho\omega Au \qquad (73.2)$$

катталик *товуш босимининг амплитудаси* деб аталади.

Товушнинг интенсивлиги (бирлик юза орқали 1 с да олиб ўтилаётган энергия) учун

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u = \frac{p_0^2}{2\rho u} \qquad (73.3)$$

ифода келиб чиқади (64-§). Бундан кўринадики, ясси товуш тўлқинининг интенсивлиги товуш манбаигача бўлган масофага боғлиқ эмас экан. Амалда товуш тўлқинлари энергиясининг муҳит томонидан ютилиши натижасида товуш манбаидан узоқлашиб борган сари тўлқин амплитудаси ва товуш интенсивлиги камайиб боради.

Муҳитда координатаси x бўлган нуқтада амплитудаси A_0 бўлган ясси товуш тўлқини тарқалаётган бўлсин. Амплитуданинг dx масофадаги dA камайиши dx га ва A_0 га пропорционал деб фараз қилайлик, яъни — $dA = \beta A_0 dx$ бўлсии, бу ерда β — сўниш коэффициенти. Мазкур тенгламани интеграллаб,

$$A = A_0 e^{-\beta x} \qquad (73.4)$$

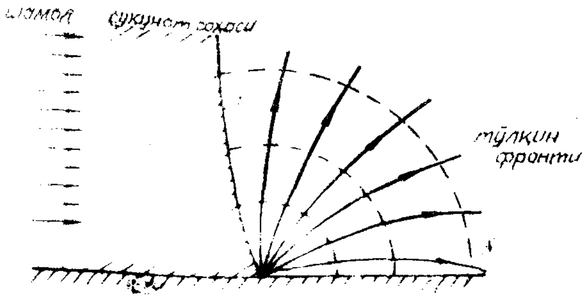
ифодани ҳосил қиламиз, яъни ясси товуш тўлқини амплитудаси муҳитда экспоненциал қонун бўйича сўнади. (73.3) ифодани ҳисобга олсак,

$$I = I_0 e^{-2\beta x} \qquad (73.5)$$

формула келиб чиқади. Сўниш коэффициенти частотага боғлиқ бўлиб, товуш частотасининг квадратига пропорционал равишда ортиб боради. Кучли портлашлар одатда кенг частоталар спектрига эга. Лекин частотаси катта бўлган товуш тўлқинлари кучли ютилиб, узоқ масофага етиб бормайди. Паст частотали тўлқинлар эса кам ютилиб, узоқ масофаларга етиб боради. Шу туфайли портлаш бўлган жойдан узоқ бўлган масофада портлаш кучсиз ҳамда бўғиқроқ (паст частотали) эшитилади. Бундан ташқари, у муҳитнинг динамик қовушоқлигига, температурасига ва бошқа катталикларга ҳам боғлиқ.

Газдаги ультратовушнинг тўлқин узунлиги (частотаси 1 МГц га яқин) атмосфера босимидаги молекулаларнинг ўртача эркин югуриш масофаси билан бир хил тартибда бўлади, шунинг учун бундай қисқа тўлқинларда ($\lambda \approx 3 \cdot 10^{-7}$ м) газни яхлит эластик муҳит деб ҳисоблаб бўлмайди.

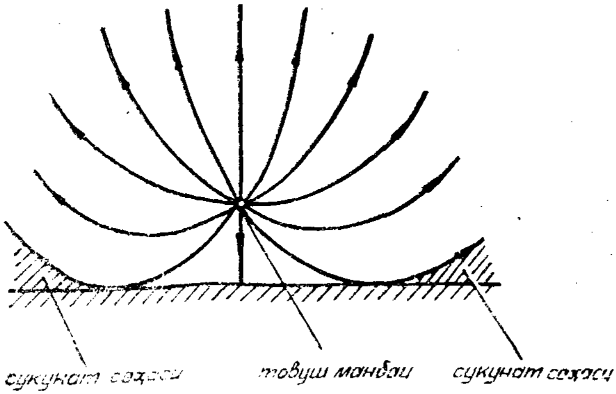
Товушнинг ҳавода ютилишини ҳисоблаш шуни кўрсатадики, 20°С температурада частотаси 1000 Гц бўлган тўлқин тахминан 115 км масофада *e* марта сусаяди. Иссиқлик ўтказувчанлик ҳисобга олинганда бу масофа 81 км гача қисқаради. Лекин амалда товуш атмосферада бунга қараганда анча тез сусаяди. Бунинг сабаби шуки, шамол, ҳавонинг температураси ва намлиги, ҳар хил зичликка эга бўлган қатламларнинг борлиги товушнинг тарқалишига таъсир қилади. 165- расмда товушнинг тарқалишига шамол қандай таъсир кўрсатиши тасвирланган. Бир жинсли муҳитда нуқтавий манбадан тарқалаётган сферик тўлқин ҳамма йўналишларда бир хил тезликка эга бўлиши керак. Лекин шамол эсаётган бўлса, унинг тезлиги билан тўлқин тезлиги ўзаро геометрик тарзда қўшилади. Ер сиртида ишқаланиш бўлиши туфайли шамолнинг Ер сирти ёнидаги тезлиги кичик бўлиб, баландлик ортиши билан катталашиб боргани сабабли, тўлқин фронтининг айрим қисмлари Ерга нисбатан ҳар хил тезлик билан ҳаракатланиб, товуш тўлқинларининг синиши кузатилади.



165-расм.

Тўлқин шамолга қарши бурчак остида тарқалганда, нурлар юқорига томон эгилади (*а*), қарама-қарши томонда эса ерга томон эгилади (*б*). Шунинг учун товуш шамолга рўпара бўлган томонга нисбатан шамолга тескари томонда узоқроқ масофада эшитилади.

166- расмда товушнинг баландлик ортиши билан температураси камаядиган ҳавода тарқалиши тасвирланган. Иссиқ ҳавода товуш совуқ ҳаводагига нисбатан каттароқ тезлик билан тарқалади ((72.2) тенглама). Натижада товуш тўлқинидаги нурлар юқорига қараб эгилади. Ер сирти яқинидаги ҳаво қатламининг



166-расм.

температураси юқоридаги қатламлар температурасига қараганда пастроқ бўлганда (бундай ҳол кечалари, ҳаво очиқ бўлганда кузатилади, чунки бунда нурланиш туфайли Ер сирти ва унга яқин ҳаво қатламлари тезда совийди) нурлар Ер сиртига томон эгилади. Шунинг учун иссиқ кундагига нисбатан товуш ойдин кечада узоқроқ масофадан эшитилади.

Кўпчилик товуш манбалари паст частотадаги (инфратовуш) тўлқинларни тарқатади. Портлашлар, двигатель шовқини, шамол ва бошқалар ана шундай манбаларга мисол бўла олади. Мазкур тўлқинлар частотаси паст бўлганидан, улар узоқ масофаларгача етиб бориши мумкин. Ҳаводаги ядро портлашларини қайд қилишда мазкур тўлқинларнинг ана шу хусусиятидан фойдаланилади. 50—70 км баландликда атмосферада озон қатлами бўлиб, мазкур қатлам иссиқлик нурланишини жуда кучли ютади, натижада унинг температураси (50—70°С) кескин ортади. Кучли портлашнинг товуши мазкур қатламга етиб боргач, ундан қайтиб, Ер сиртига қайтиб келади. Ер сирти бўйлаб тарқалаётган товуш сиртнинг ғадир-будурликлари ҳамда ҳавонинг турбулент оқими туфайли вужудга келадиган зичликнинг нотекисликларида сочилиб, жуда тез сўнади. Шунинг учун портлаш манбаи атрофида товуш яхши эшитиладиган соҳалар билан товуш эшитилмайдиган соҳалар навбатлашиб келади.

Ҳаводагига нисбатан товуш сувда узоқроқ масофаларга етиб боради. Сувда ёруғлик ва радио тўлқинлари жуда тез (амалда бир неча ўн метр масофада) сўнади, шу сабабли сув остида сигнал юборишнинг ягона усули сифатида товуш ва ультратовуш тўлқинларидан фойдаланилади. Мазкур тўлқинларнинг сувда тарқалишини ўрганадиган соҳа *гидроакустика* деб аталади.

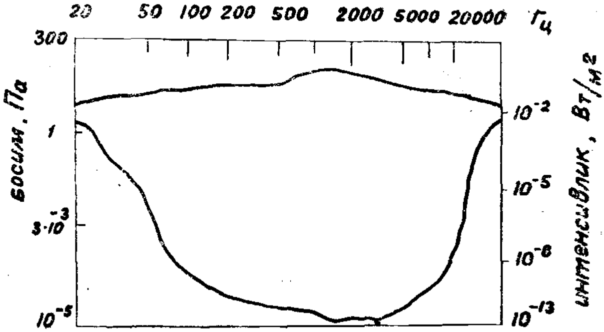
74- §. Товушнинг объектив ва субъектив характеристикалари

Товуш икки хил турдаги: унинг киши томонидан ҳис қилиниши хусусиятларига боғлиқ бўлмаган (объектив) ҳамда киши томонидан ҳис қилинишига асосланган (субъектив) катталиклар билан характерланиши мумкин. Албатта, ҳар иккала турдаги катталиклар ўзаро муайян тарзда боғланган бўлади.

Товушнинг ν частотаси, спектрал таркиби ҳамда I интенсивлиги унинг объектив характеристикалари ҳисобланади. Товушнинг интенсивлиги товуш босими p_m амплитудасига тўғри пропорционал, акустик қаршиликка эса тескари пропорционал ((73.3) тенглама) бўлади.

Товушнинг спектрал таркиби мазкур товуш қандай частотадаги тебранишлардан таркиб топганини ҳамда улар орасида амплитудалар қандай тақсимланганини кўрсатади. Масалан, мусиқий товуш чизиқли спектрга, шовқин эса туташ спектрга эга.

Нормал ҳолатдаги кишининг қулоғи 20 гц дан 20 кГц гача бўлган частотадаги товушларни сезади, лекин унинг турли частотадаги товушларга сезгирлиги ҳар хил. 167-расмда пастки график одам қулоғи сезадиган энг кичик босим p_0 (ёки интенсивлик I_0) ни ифодалайди. Мазкур катталиклар *эшитиш бўсағаси* дейилади. $\nu \approx 3000$ Гц частота атрофида график минимумга эга бўлиб, у



167-расм.

$$p_0 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Па}, \quad I_0 \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$$

га тенг.

Юқоридаги график қулоқда оғриқ ҳосил қиладиган босим (ёки интенсивлик)ни ифодалайди. Уни *оғриқ бўсағаси* деб аталади. Мазкур босим частотага деярли боғлиқ бўлмай,

$$p_{\max} \approx 30 \text{ Па}, \quad I_{\max} \approx 10 \text{ Вт/м}^2$$

га тенг.

Иккала графиклар оралиғидаги тебранишларни қулоқ эшитиши мумкин. Одатда мазкур соҳанинг унчалик катта бўлмаган қисмигина ишлатилади.

Киши қулоғи эшитадиган интенсивликлар нисбати $\frac{I_{max}}{I_0} = 10^{13}$ га тенг, кўпчилик ўлчов асбоблари учун эса мазкур нисбат $10^2 — 10^3$ тартибида бўлади.

Эшитиладиган ўртача интенсивликни (частота 1000 Гц бўлганда) 10^{-4} Вт/м² га тенг деб қабул қилиш мумкин. У ҳолда (73.3) тенглама асосида товуш босими амплитудасини ҳисоблаб топсак,

$$p_m = \sqrt{2\rho u I} \approx 0{,}3 \text{ Па},$$

яъни мазкур босим атмосфера босимининг $3 \cdot 10^{-6}$ қисминигина ташкил қилади.

Товуш интенсивлигини *товуш қаттиқлиги* деб аталадиган субъектив катталик билан характерлаш мумкин. 167- расмдан кўринадики, товушнинг ҳис этилиши унинг частотасига боғлиқ. Бирор частотада каттароқ интенсивликка эга бўлган товуш бошқа частотадаги кичикроқ интенсивликдаги товушдан кучсизроқ ҳис қилиниши мумкин.

Товушнинг қаттиқлигини товуш интенсивлигининг мазкур частотадаги эшитиш бўсағасига мос бўлган I_0' интенсивликка нисбатининг ўнли логарифми орқали ифодалаш мақсадга мувофиқ, яъни товушнинг қаттиқлигини

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0'} \qquad (74.1)$$

формула билан аниқлаш мумкин бўлиб, мазкур катталик *товуш қаттиқлиги даражаси* дейилади. Унинг ўлчов бирлиги *фон* деб аталади (баъзан *децибел* деб ҳам юритилади).

Эшитилиш диаграммаси (167-расм) нинг энг кенг жойида интенсивлик 10^{12} марта ўзгарса-да, товушнинг қаттиқлик даражаси ўзгариши $L = 120$ фонга тенг. Частота 100 Гц бўлганда эшитиш бўсағаси $I_0' = 10^{-8}$ Вт/м² бўлиб, максимал қаттиқлик даражаси $L = 80$ фонга тенг бўлади.

Шундай қилиб, товушнинг қаттиқлик даражаси муайян частотадаги товуш интенсивлиги ана шу частотадаги эшитиш бўсағасидан неча марта ортиқ эканини кўрсатади.

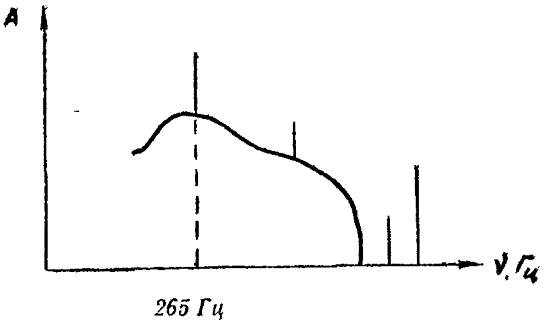
5- жадвалда баъзи товушларнинг баландликлари ва интенсивликлари кўрсатилган (1000 Гц учун).

Товушнинг объектив харакатеристикаси бўлган частотаға *товуш тонининг юксаклиги* деб аталадиган субъектив характеристика мос келади. Товуш мураккаб бўлмаса, унинг юксаклигини миқдор жиҳатдан баҳолаш мумкин: частота қанча юқори бўлса, товуш шунчалик юксак бўлади. Товуш мураккаб бўлганда эса унинг юксаклигини фақат сифат жиҳатдангина баҳолаш мумкин. Чунки товуш манбалари бир эмас, бир қатор частотадаги товушни чиқариб, энергия ҳар хил частотадаги тебранишлар орасида маълум тарзда тақсимланган бўлади. Муайян частотадаги тебранишга бошқа частоталардаги тебранишларга қараганда анча кўп энергия тўғри келса, мазкур частота асосий частота ҳисобланиб, товушнинг юксаклиги ана шу частота билан белгиланади.

Ниҳоят, объектив характеристика ҳисобланган товушнинг мураккаб спектрал таркибига *тембр* деб аталадиган субъектив характеристика мос келиб, уни миқдор жиҳатдан баҳолаб бўлмайди.

5-жадвал

	L, дБ	I, Вт/м^2
Эшитиш бўсағаси	0	10^{-12}
Пичирлаш	20	10^{-10}
Қаттиқ гапириш	70	10^{-5}
Оркестр товуши	100	10^{-2}
Оғриқ бўсағаси	130	10



168-расм.

Бир хил тондаги товуш чиқарадиган турли мусиқа асбоблари тембрлари билан фарқ қилади. 168-расмда асосий тони 265 Гц га тенг бўлган товуш чиқараётган роялнинг спектри кўрсатилган: унда туташ ва чизиқли спектрлар аралашган бўлиб, энг кўп энергия 265 Гц га мос келади. Шундай қилиб, товушнинг тембри унинг гармоник спектри билан белгиланиб, унинг ўзига хос хусусиятларини характерлайди. Масалан, рояль билан ғижжак товушини бир-биридан осонгина ажратиш мумкин, чунки улар турлича обертонларга эга бўлиб, гармоник спектрлари ҳар хил. Товушнинг тембрини аниқлаш учун уни гармоник ташкил этувчиларга ажратиш, яъни товушнинг спектрини аниқлаш керак.

Одам қулоғининг ажойиб хусусиятларидан бири шуки, у товушнинг юксаклиги ва амплитудасини сезади, лекин мураккаб товушдаги фазалар силжишини сезмайди. Бу хусусият Ом томонидан кашф қилинган. Товушнинг бу хусусиятини концерт залида ўтирган тингловчилардан турли мусиқа асбобларигача бўлган масофалар ҳар хил бўлишига қарамай, товушларнинг ҳамма тингловчилар томонидан бир хил ҳис қилинишида кўриш мумкин.

Кишининг қулоғи иккита бўлгани товуш манбаининг кишига нисбатан қандай йўналишда жойлашганини аниқлаш имконини беради. Бу ҳодиса *бинаурал эффект* дейилади. Товуш манбаининг ўрнини унгача бўлган масофа ва вертикал ҳамда горизонтал текисликлардаги бурчаклар билан аниқланади. Горизонтал текисликда киши бурчакни 3° гача аниқликда сезиши мумкин. Вертикал текисликдаги бурчак ва манбагача бўлган масофа нисбатан анча ноаниқ ҳис қилинади.

Муайян унли товушни чиқарганда (у қандай частотада айтилишига қарамай), унинг спектрида албатта шундай бир ёки иккита частота бўладики, паст тонлардан юқори тонларга ўтганда улар деярли ўзгармайди. Бу частоталар мазкур *унли товушнинг формантлари* дейилади. Ҳар бир унли товуш ўзининг формантларига эга бўлади.

Бирор (масалан, 33 айл/мин) тезликда товуш ёзилган граммпластинкани каттароқ (масалан, 45 айл/мин) тезликда айлантирилганда ҳамма частоталар, жумладан унли товушларнинг формантлари ҳам (келтирилган мисолда 1,35 марта) ортади. Мазкур ўзгариш унча катта бўлмаганда алоҳида товушлар бир оз юксакроқ эшитилса-да, лекин нутқни тушунса бўлади. Пластинкани янада тезроқ (масалан, 78 айл/мин тезлик билан) айлантирилса, ҳамма тонларнинг юксаклиги ортиши билан бирга, нутқни умуман тушуниб бўлмай қолади, чунки формантларнинг частоталари жуда кучли ўзгарганидан, бир хил унли товушлар бошқа унлига айланади.

Киши нутқидаги товушларнинг ҳосил бўлиши жуда ҳам мураккаб жараён ҳисобланади: гапираётганда биз беихтиёр томоғимиздаги товуш пайчалари ҳолатини ўзгартириб, улар орқали ҳаво чиқарамиз. Оғиз бўшлиғига чиқаётган ҳаво оқими унда автотебранишларни ҳосил қилади. Оғиз бўшлиғининг хусусий частоталари тил, тиш, лаб ҳамда танглай ҳолатига боғлиқ бўлади. Оғиз бўшлиғида товуш резонанси содир бўлиб, кучли товуш чиқади.

75-§. Товуш манбалари ва қабул қилувчи қурилмалар

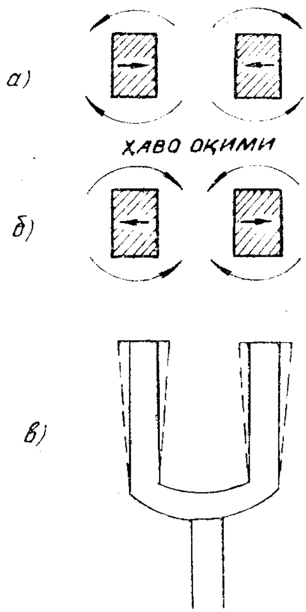
Эластик муҳитда товуш частотасида тебранаётган ҳар қандай жисм товуш манбаи бўлиб хизмат қилиши мумкин. Ипга осиб қўйилган енгил шарчани товуш чиқараётган камертон оёқчаларига яқинлаштирилганда унинг сакраб кетишидан тебранаётган жисмгина товуш тарқатади деган хулосага келиш мумкин. Турли мусиқа асбобларида асбоб қутисига маҳкамланган тор, пуфлаб чалинадиган асбоблар, ҳуштаклар ҳамда одамнинг овоз чиқариш аъзосида эса — муайян ҳажмли ҳаво устуни товуш манбаи бўлиб хизмат қилади. Радиокарнайларда товуш муайян шаклдаги тебранувчи эластик сирт томонидан ҳосил қилинади.

Товушни ҳосил қилиш ва қабул қилиш турли хил қурилмалар ёрдамида амалга оширилиб, улар икки турга: хусусий частоталарда ишлайдиган ҳамда мажбур қилувчи частоталарда ишлайдиган қурилмаларга бўлинади.

Камертонлар, торлар ва турли хил мусиқа асбобларида қўлланиладиган ҳаво устунлари хусусий частоталарда ишлайди. Торнинг хусусий тебраниш частотасини унинг таранглигини ёки узунлигини ўзгартириш билан ўзгартириш мумкин. Бундан ташқари, торнинг қўзғатилган жойига қараб, ҳосил бўладиган обертонларнинг нисбий интенсивликлари, яъни товушнинг тембри ўзгариши мумкин. Жисмнинг товуш ҳосил қилиш қобилияти кўп жиҳатдан жисм сиртининг катталигига боғлиқ. Тебранаётган жисмнинг сирти тўлқин узунлигига нисбатан қанчалик катта бўлса, у товушни шунчалик яхши тарқатади. Сирти кичик бўлгани туфайли, тор жуда кичик интенсивликдаги товуш ҳосил қилади. Иккала учи қисиб қўйилган торни бирор буюм билан уриб, бунга ишонч ҳосил қилиш мумкин.

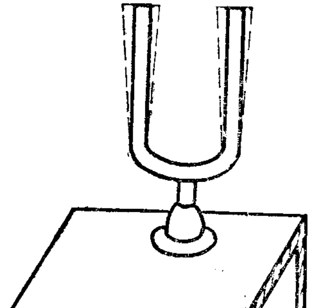
Тебранаётган торнинг бир томонидаги ҳаво сиқилади, иккинчи томонида эса у сийраклашади. Бунда тор тебраниши энергиясининг асосий қисми ҳавода товуш тўлқинини ҳосил қилишга эмас, балки тор яқинидаги ҳавони унинг бир томонидан иккинчи томонига «ҳайдашга» сарфланади.

Камертон ҳам кичик интенсивликдаги товушни тарқатади. Камертон оёқчалари тебранганда энергия деярли тўласича унинг ёнида жойлашган ҳаво қатламини бир томондан иккинчи томонга «ҳайдаш» га сарфланади (169-расм). Бундан ташқари, камертоннинг ҳар иккала оёқчаси қарама-қарши фазада тебрангани туфайли улар томонидан ҳосил қилинган товуш тўлқинлари бир-бирини сусайтиради. Оёқчалардан бирининг ҳосил қилаётган тўлқин тўсиб қолинса (масалан, унга картон трубка кийгизиб қўйилса) товуш кучаяди.



169-расм.

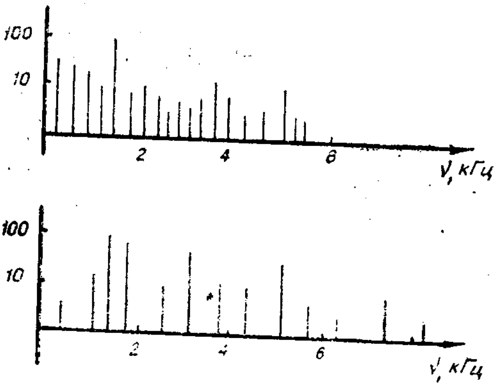
Торлар ва камертонлар ҳосил қилаётган товуш интенсивлигини орттириш учун уларни етарлича катта сиртга эга бўлган товуш тарқатувчи жисмга маҳкамланади. Масалан, камертон товушини кучайтириш учун одатда резонанс қутичага ўрнатилади (170-расм). Камертон тебранишлари қутича деворларига узатилиб, унинг ичидаги ҳаво устунининг мажбурий тебраниши вужудга келади. Натижада камертон ҳосил қилаётган товушга нисбатан



170-расм.

анча катта интенсивликдаги товуш тарқалади. Камертон тебранишининг қутичадаги ҳаво устунига узатилиши самаралироқ бўлиши учун резонанс ҳодисасидан фойдаланилади. Бунинг учун резонанс қутичанинг узунлиги камертон томонидан ҳавода ҳосил қилинаётган тўлқин узунлигининг чорагига тенг қилиб олинади. Бу ҳолда қутичадаги ҳаво устуни тебранишларининг асосий частотаси камертон тебранишлари частотасига яқин бўлиб, *акустик резонанс* амалга ошади. Резонанс қутичанинг бир томони берк бўлганлигидан, босимнинг тенглашиши юз бермайди, тарқатилаётган товуш эса катта интенсивликка эга бўлади.

Товушнинг торли мусиқа асбобларидаги тарқалиши ҳам шунга ўхшаш тарзда содир бўлиб, уларнинг қобиқлари ўзига хос резонанс қутиси ролини ўйнайди. Торлар ўз тебранишларини асбоб қобиғига ҳамда унинг ичидаги ҳавога узатгани туфайли рояль, ғижжак, рубоб ва бошқа асбоблар етарли катта интенсивликдаги товушни ҳосил қилади.



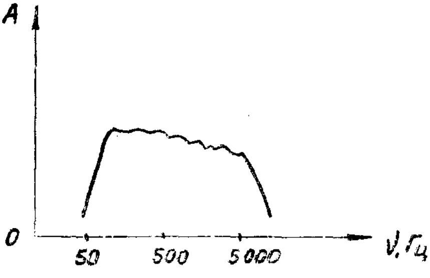
171-расм.

171-расмда виолончель ва скрипкада ҳосил бўладиган товушларнинг акустик спектрлари (амплитудалари нисбий бирликларда) кўрсатилган. Мусиқа асбоблари ҳосил қилаётган товушларнинг спектрал таркиби бир-биридан фарқ қилгани туфайли уларнинг товушини бир-биридан осонгина ажратиб олиш мумкин.

Пуфлаб чалинадиган мусиқа асбобларидаги найда жойлашган ҳаво устуни тебранганда товуш тарқалади. Бунда ҳар иккала учи очиқ ёки бир учи очиқ бўлган найлардан фойдаланилади. Товуш найнинг берк учидан тўласича қайтади, очиқ учидан қайтганда эса тўлқин қисман ташқарига тарқалади. Товушнинг найнинг очиқ учидан қайтишига сабаб шуки, най учига яқин жойлашган ҳавода босим тенглашиб, бунда най учидаги сийраклашган жойга ташқаридан ҳаво зарралари интилади, яъни най учидаги деформация ишораси ўзгаради — сиқилиш сийракланиш билан алмашади ва ҳоказо. Бу эса, тўлқиннинг қайтганидан далолат беради. Деформация ишорасининг ўзгариш вақти товуш тўлқинининг даврига нисбатан қанчалик кичик бўлса, товушнинг қайтиши шунчалик кучлироқ бўлади. Бунинг учун найнинг диаметри тўлқин узунлигидан анча кичик бўлиши керак.

Товуш интенсивлигини орттириш учун баъзи мусиқа асбобларида пластиналар ёки мембрана (парда)лар қўлланилади. Масалан, роялда бу мақсадда катта ёғоч пластинадан, дўмбира ва доираларда эса чарм пардалардан фойдаланилади.

Ҳар хил товушларни такрорлайдиган ва қабул қиладиган акустик асбоблар ҳам мавжуд. Уларга телефонлар ва радиокарнайлар ҳамда микрофонлар киради. Мазкур асбоблар мажбурий тебранишларга асосланган бўлиб, резонанс ҳодисаси уларнинг ишини кескин ёмонлаштириши мумкин. Шунинг учун бундай асбоблар жуда кенг частоталар соҳасидаги товушларни бузмасдан (ўзгартирмасдан) такрорлаш қобилиятига эга бўлиши керак. Резонанснинг мавжудлиги қурилманинг частота характеристикасининг нотекис бўлишига, яъни товушнинг ҳар хил частоталардаги ташкил этувчилари (таркибий қисмлари) интенсивликлари орасидаги ҳақиқий муносабатнинг бузилишига олиб келади. Резонанс ҳодисасининг бундай зарарли таъсиридан қутулиш учун қурилма учун характерли бўлган хусусий частоталарни йўқотиш (бу жуда мураккаб иш) ёки системанинг асллигини кескин камайтириш керак. Амалда айнан ана шу иккинчи усулдан фойдаланилади. Камертоннинг бирор нарса билан уриб қўйилган-



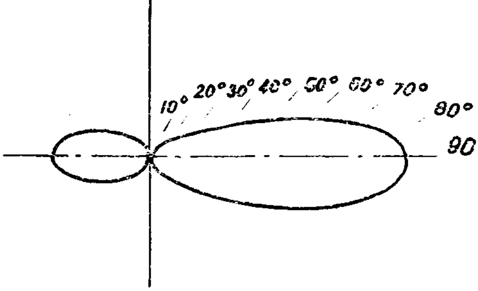
172- расм.

дан кейинги ва радиокарнайнинг ток манбаидан узиб қўйилгандан кейинги тебранишларининг давом этиш вақтларини таққослаб, уларнинг аслликлари орасидаги фарқни яққол сезиш мумкин.

172-расмда юқори сифатли радиокарнайнинг амплитуда — частота характеристикаси, яъни тарқатилаётган товуш амплитудасининг частотага боғланиши тасвирланган. Расмдан кўринадики, мазкур карнай муайян частоталар оралиғидаги товушни деярли бузмасдан такрорлайди.

Товуш манбаининг частота характеристикасидан ташқари, унинг йўналганлик характеристикаси (товуш интенсивлигининг йўналишга боғлиқлиги) ҳам муҳим роль ўйнайди. Бундай характеристикани аниқлаш учун ҳар хил йўналишдаги товуш интенсивликларини муайян масштабда мазкур йўналишлар бўйлаб жойлаштириб ҳамда уларнинг учларини силлиқ эгри чизиқ билан туташтирилиб, *йўналганлик диаграммасини* ҳосил қилиш мумкин. Тарқатилаётган тўлқин узунлигининг товуш манбаининг кўндаланг ўлчами (диаметри)га нисбати қанчалик катта бўлса, мазкур диаграмма шунчалик ўткир (учли) бўлади. (173-расмда кучли йўналганликка эга бўлган товуш манбаининг диаграммаси кўрсатилган). Шунинг учун товуш манбаларининг паст частоталар учун диаграммаси кенгроқ бўлади. Оддий радиокарнайларда йўналганлик унчалик кучли бўлмайди.

Турли хил *микрофонлар* энг кенг тарқалган товуш қабул қилиш қурилмалари ҳисобланади. Улар мембранага таъсир қилаётган товуш тебранишлари ёрдамида занжирдаги ток кучини бошқаришга имкон беради.



173-расм.

Микрофоннинг частота характеристикаси (чиқишдаги кучланишнинг товуш босими амплитудаси бир хил бўлгандаги частотага боғланиши) эшитиладиган частоталар соҳасида доимий бўлиши керак.

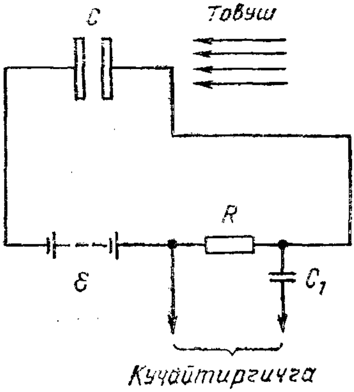
Радиокарнайлар, телефонлар ва микрофонларнинг тузилиши ва ишлашини кўриб чиқайлик. Ҳозирги пайтда энг кўп тарқалган *динамик карнай* радиал йўналишда магнит майдон ҳосил қиладиган доимий магнит (ёки электромагнит) ҳамда конус шаклидаги катта мембрана (диффузор) билан боғланган, мазкур магнит майдонда ҳаракатлана оладиган ғалтакдан иборат. Ғалтак орқали товуш частотасидаги ток ўтганда у Ампер кучи таъсирида мажбурий тебраниб, диффузорни ҳам тебрантиради. Диффузор эса ўз навбатида атрофдаги муҳитда эластик товуш тўлқинини ҳосил қилади.

Кенг тарқалган *электромагнит телефон* пўлат мембрана ҳамда унинг яқинида жойлашган доимий магнитдан иборат. Доимий магнит устига ғалтак ўралган бўлиб, ғалтак орқали товуш частотасидаги ток ўтказилади. Доимий токнинг $\vec{B}_0$ индукцияси ўзгарувчан ток ҳосил қилаётган ўзгарувчан магнит майдони индукциясининг $\vec{B}_m$ амлитудасидан анча катта бўлади. Доимий магнит билан мембрананинг ўзаро таъсир кучи магнит индукциясининг квадратига пропорционаллигидан

$$F \sim (B_0 + B_m \cos \Omega t)^2 = B_0^2 + 2B_0 B_m \cos \Omega t + \frac{B_m^2}{2} + \frac{B_m^2}{2} \cos 2\Omega t$$

ифода келиб чиқади. Шундай қилиб, мазкур телефон ишлаганда унинг ҳосил қилган товуши бузилиб чиқади, чунки асосий Ω частотадан ташқари, иккиланган 2Ω частотали товуш ҳам ҳосил бўлади. Лекин бу товушнинг амплитудаси нисбатан кичик бўлади. Доимий магнит олиб қўйилса (юқоридаги ифоданинг сўнгги иккала ҳади қолади холос), частотанинг иккилангани яққол сезилади, лекин бу ҳолда ғалтакдан катта ток ўтказишга тўғри келади.

Электромагнит телефон ғалтагини доимий ток занжирига улаб, мембрана олдида товуш босимини ҳосил қилинса, у микрофон вазифасини ҳам бажариши мумкин. Мембрана билан магнит қутблари орасидаги масофа (оралиқ) ўзгарганда магнит индукцияси ҳам ўзгариб, ғалтак занжирида токнинг товуш частотасидаги ўзгарувчан ташкил этувчиси вужудга келади.



174-расм.

Лентали микрофонларда қўзғалувчи ғалтак мембрана ролини ўйнайдиган, қатма-қат қилиб букланган (гофрировка қилинган) юпқа (қалинлиги бир неча микрометр) лента билан алмаштирилган. Мазкур микрофон анча кучсиз товушларни ҳам сезади.

Жуда сезгир бўлган *кўмирли микрофонлар* ҳам кенг тарқалган. Улардаги мембрана кўмир кукуни солинган капсулага тиралиб туради, тебранганда эса кукуннинг қаршилигини ўзгартиради. Микрофон трансформатор орқали телефон тармоғи билан боғланган доимий ток занжирига уланади. Ток кучининг ўзгарувчан ташкил этувчиси трансформаторнинг иккиламчи чулғамида индукция ЭЮҚ ни ҳосил қилади.

Конденсаторли микрофонда эса мембрана бир вақтнинг ўзида доимий ЭЮҚ манбаи занжирига R резистор билан кетма-кет уланган C конденсатор қопламаларидан бири бўлиб ҳам хизмат қилади (174-расм). Мембрана тебранганда конденсаторнинг сиғими (заряди ҳам) ўзгариб, занжирда ўзгарувчан ток вужудга келади. Резисторда ҳосил бўладиган ўзгарувчан $U = IR$ кучланиш C_1 конденсатор ёрдамида ажратиб олиниб, кучайтиргичга ёки телефон тармоғига берилади.

Пьезоэлектрик микрофонларда товуш босими таъсирида пьезоэлектрик (сегнет тузи, махсус керамика ёки кварц) билан тўлдирилган конденсатор қопламаларида ўзгарувчан ЭЮҚ вужудга келади. Бундай микрофонлар кичик ўлчамларга эга бўлиб, асосан яхши эшитмайдиган кишиларга мўлжалланган эшитиш қурилмаларида ишлатилади.

Тескари пьезоэлектрик ҳодиса (пьезоэлемент қопламаларига ўзгарувчан кучланиш берилганда механик тебранишларнинг вужудга келиши) ультратовуш тўлқинларини ҳосил қилишда қўлланилади.

Мураккаб товушнинг частота бўйича таркибини аниқлаш (таҳлил қилиш) учун акустик резонансдан фойдаланилади. Ана шу мақсадда Гельмгольц ҳажмли резонаторлар тўплами (комплекти)ни тайёрлайди. Мураккаб товуш таркибига кирган оддий тон (товуш)лар уларнинг частоталари билан бир хил частотага эга бўлган резонаторни қўзғатади. Ҳозирги пайтда мазкур усул ўзининг техникадаги аҳамиятини йўқотган. Товуш спектрини таҳлил қилувчи замонавий қурилмаларда дастлаб товуш тебранишлари электр тебранишларига айлантирилиб, сўнгра улар электр занжирлари ёрдамида таҳлил қилинади.

Табиатда акустик анализаторлар муҳим аҳамиятга эга. Табиий эшитиш аъзоларининг асосий қисми хусусий частоталари ҳар хил бўлган бир неча минг толаларга эга бўлиб, суюқлик билан тўлдирилган ковак (бўшлиқ) ичида жойлашган мембрана (парда) дан иборат. Товушнинг таркибига қараб, резонанс туфайли частотаси мос бўлган толалар тебрана бошлайди, натижада мос толалардаги асаб элементлари қўзғалиб, мияга сигнал беради.

Муайян манба томонидан ҳосил қилинаётган товушнинг интенсивлиги фақат манбанинг хусусиятларигагина боғлиқ бўлмасдан, у жойлашган хонага ҳам боғлиқ бўлади. Хона ичидаги фазонинг ҳар бир нуқтасига манбадан келаётган товуш билан бир қаторда хона деворларидан кўп марта қайтган (диффуз) товуш ҳам етиб келади. Товуш манбаининг таъсири тўхтаган заҳоти диффуз товуш йўқолмайди. Бу ҳолни деворлардан қайтган тўлқинларнинг муайян вақт давомида келиб туриши билан тушунтириш мумкин. Товуш манбаи таъсири тўхтагандан кейин ҳам товушнинг ана шундай «чўзилиши» ҳодисаси *реверберация* деб аталади. Товуш манбаининг таъсири тўхтаган пайтдан то хонада товушнинг тўла йўқолишигача кетган вақт *реверберация вақти* дейилади. Шартли равишда, реверберация вақти товуш интенсивлигининг миллион марта камайиши учун кетган вақт оралиғига тенг деб ҳисобланади.

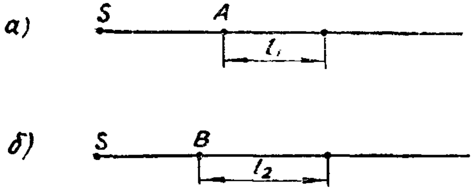
Реверберация вақти хонанинг муҳим акустик хусусияти ҳисобланади. Реверберация вақти жуда катта (бир неча секунд) бўлганда хона жуда янгроқ бўлиб, кишининг нутқи ноаниқ эшитилади. Бунда нутқнинг ҳар бир янги бўғини (одатда бўғинлар давом этадиган вақт 0,1—0,3 с) тингловчилар томонидан сўниб улгурмаган бир қатор аввалги бўғинлар билан аралашган ҳолда қабул қилинади. Бундай хонада кучли бўлса ҳам, мусиқа ноаниқ эшитилади. Реверберация вақти жуда қисқа бўлганда эса товуш жуда тез сўнади. Нутқ ҳамда мусиқа бундай хоналарда кучсиз ва бўғиқ эшитилади.

Муайян хона учун энг яхши «акустикани» таъминлаш учун хонадан қандай мақсадда фойдаланилишига қараб, унга энг мақбул бўлган реверберация вақти танлаб олинади.

76- §. Доплер ҳодисаси

Шу пайтгача биз товуш манбалари тинч ҳолатда деб ҳисоблаган эдик. Товуш манбаи ва қабул қилувчи қурилма товуш тарқалаётган муҳитга нисбатан ҳаракатсиз бўлганда қабул қилинаётган тебранишнинг частотаси тебраниш манбаининг ν_0 частотасига тенг бўлади. Лекин манба ҳаракатланса, манзара ўзгаради. Масалан, вокзал перронида туриб, яқинлашиб келаётган поезд сигналининг тони юксаклашиб, узоқлашаётганда эса унинг пасайишини сезиш мумкин. Демак, товуш манбаининг ҳаракати қабул қилинаётган тўлқин частотасини ўзгартиради. 1942 йили X. Доплер (1803—1853) қабул қилинаётган товушнинг ν частотаси товуш манбаи ҳамда қабул қилувчи қурилманинг муҳитга нисбатан ҳаракати тезлигига боғлиқ бўлишини аниқлади: улар бир-бирига яқинлашаётганда мазкур частота манбаининг ν_0 частотасидан юқори, бир-биридан узоқлашаётганда эса ундан паст бўлади. Мазкур ҳодиса *Доплер ҳодисаси* деб юритилади.

Доплер ҳодисасини 1,5—2 м узунликдаги ип учига боғлаб, товуш генераторига улаб қўйилган телефонни ип билан айлантириб, намойиш қилиш мумкин: телефон даврий равишда кузатувчиларга яқинлашиб, улардан узоқлашиб туради, натижада эшитилаётган товушнинг юксаклиги гоҳ ортиб, гоҳ камайиб туради.



175-расм.

Мазкур ҳодисани ўрганишда товушнинг, кузатувчининг ҳамда манбанинг тезлигини товуш тарқалаётган муҳитга нисбатан оламиз. Кузатувчи ва ν_0 частотали S товуш манбаи (тўлқин узунлиги $\lambda_0 = \frac{u}{\nu_0}$) тинч ҳолатдаги муҳитда жойлашган дейлик. Товуш манбаи ҳам, А кузатувчи ҳам ҳавога нисбатан тинч турган бўлса (175-расм), кузатувчи ёнидан 1 с ичида товушнинг u тезлигига тенг бўлган l_1 кесмага тенг узунликдаги тўлқинлар ўтади (175-*а* расм). Мазкур тўлқинлар сони $N_0 = \frac{u}{\lambda_0} = \nu_0$ бўлади. Кузатувчи манбага $v_\text{к}$ тезлик билан яқинлашаётган бўлса, у 1 с дан сўнг В нуқтада бўлади. У ҳолда кузатувчи ёнидан 1 с ичида l_2 узунлиги сон жиҳатдан $u+v_\text{к}$ га тенг бўлган тўлқинлар ўтади. Уларнинг сони

$$N = \frac{u+v_\text{к}}{\lambda_0} = \nu_0\left(1+\frac{v_\text{к}}{u}\right) = \nu_1 \qquad (76.1)$$

га тенг бўлади. Демак, қабул қилинаётган товушнинг частотаси ортади.

Кузатувчи товуш манбаидан узоқлашаётганда қабул қилинаётган тўлқинлар сони (яъни товуш частотаси) камаяди. У ҳолда товушнинг частотаси

$$\nu_2 = \nu_0\left(1-\frac{v_\text{к}}{u}\right) \qquad (76.2)$$

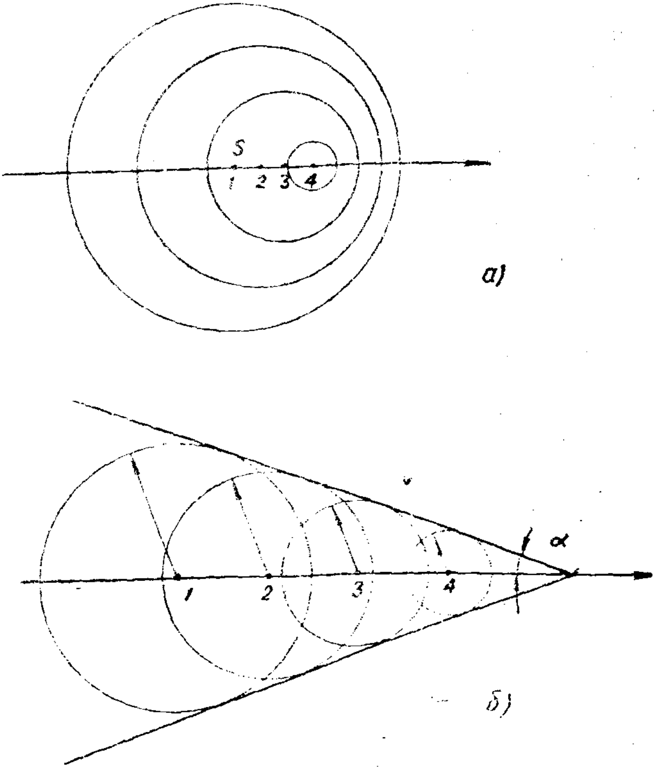
га тенг бўлади.

Энди кузатувчи муҳитга нисбатан ҳаракатсиз бўлиб, манба унга $v_\text{м}$ тезлик билан яқинлашаётган ҳолни кўрайлик. Кузатувчи томонидан қабул қилинаётган λ тўлқин узунлиги λ_0 га қараганда $\Delta\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v_\text{м}}{u}$ миқдорда қисқаради. Частота билан тўлқин узунлиги орасида $\nu = \frac{u}{\lambda}$ муносабат мавжуд бўлганидан, кузатувчи томонидан қабул қилинаётган товуш частотаси

$$\nu_3 = \nu_0\frac{\lambda_0}{\lambda_0-\Delta\lambda} = \nu_0\frac{1}{1-\Delta\lambda/\lambda_0} = \nu_0\frac{1}{1-v_\text{м}/u} \qquad (76.3)$$

га тенг бўлади, яъни товуш частотаси ортади. Манба кузатувчидан узоқлашаётганда эса қабул қилинаётган тўлқин узунлиги ортади, частотаси эса камайиб,

$$\nu_4 = \nu_0\frac{1}{1+v_\text{м}/u} \qquad (76.4)$$



176-расм.

га тенг бўлиб қолади. (76.1) — (76.4) муносабатларни бирлаштириб,

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm v_к/u}{1 \mp v_м/u} \qquad (76.5)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу ифодада юқоридаги ишоралар манба билан кузатувчининг ўзаро яқинлашишига, пастдагилари эса узоқлашишига мос келади.

Товуш манбаининг $v_м$ тезлиги товушнинг u тезлигидан кичик бўлганда 176-расмда тасвирланган манзарани кузатиш мумкин: 1, 2 ва ҳ. к. рақамлар товуш манбанинг ҳар хил пайтдаги вазиятларини ифодалайди. У ҳолда X ўқда жойлашган кузатувчига манба тарқатаётган товушлар табиий кетма-кетликда етиб боради. Товуш манбаи кузатувчидан узоқлашаётган ҳолда эса мазкур манзаранинг ўзи такрорланади, фақат энди кузатувчи X ўқининг манфий йўналишида жойлашган бўлади. Мазкур расмдан, товуш манбаи кузатувчидан узоқлашганда қабул қилинаётган товуш частотаси пасайиши, яқинлашганда эса мазкур частота ортишини кўриш мумкин.

Кузатувчининг тезлиги товуш тезлигига тенг бўлганда ($v_к = u$) кузатувчига бўлаётган босим ўзгармайди, яъни товуш қабул қилинмайди. $v_к > u$ бўлган ҳолда эса кузатувчи товуш тўлқинини қувиб ўтади, қабул қилинаётган товуш частотаси эса

$$\nu = \nu_0 (v_к / u - 1)$$

га тенг бўлади.

Товуш манбаи ёки қабул қилувчи қурилма (кузатувчи) уларни бирлаштирувчи тўғри чизиқ бўйлаб эмас, балки бошқача йўналишда ҳаракатланса, Доплер ҳодисаси тезликларнинг мазкур тўғри чизиққа проекцияси билан белгиланади.

Товуш манбаи ва қабул қилувчи қурилма ҳаракатланмай, муҳитнинг ўзи ҳаракатланганда, унинг тезлиги товуш тезлигига (бир хил йўналишда бўлганда) қўшилади ёки товуш тезлигидан (қарама-қарши йўналишда бўлганда) айирилади. Шунинг учун товушнинг суюқлик ёки газ оқимидаги тезлигини ўлчаб, оқимнинг тезлигини аниқлаш мумкин.

Товуш манбаи муҳитда товуш тезлигидан катта тезлик билан ҳаракатланган ҳолни кўрайлик. Албатта, бундай ҳолда товуш тўлқинлари товуш манбаидан орқада қолади, шу сабабли манба олдида товуш тўлқинлари бўлмайди, тўлқин фақат манба орқасида ҳосил бўлади. Мазкур ҳол 176-*б* расмда тасвирланган. 1, 2, 3, ва 4 нуқталар билан товуш манбаининг тенг вақт оралиқлари ўтган пайтлардаги ўрни кўрсатилган. Уларнинг ҳар бирига ўша пайтда манба томонидан тарқатилган сферик тўлқинларнинг маркази деб қараш мумкин. Товуш манбаи *К* нуқтага етиб борган пайтгача мазкур (*1*—*4*) нуқталарда тарқатилган тўлқинлар ҳар хил масофага тарқалиб улгуради. Бу тўлқинлар ўзаро қўшилиб, конус сиртини ҳосил қилади. Муҳитнинг манба томонидан қўзғатилган ҳамда ҳали қўзғалмаган қисмларини чегаралаб турган мазкур сирт зарбали тўлқиннинг фронтидир. Зарбали тўлқин одатдаги товуш тўлқинидан тубдан фарқ қилади. Улар муҳитнинг кучли сиқилган ҳамда фазода тарқалаётган соҳаси бўлиб, товуш тўлқинидаги каби даврий характерга эга эмас.

Товуш манбаи $v_м$ тезлик билан ҳаракатланиб *1* нуқтадан К нуқтага $4t$ вақт ичида етиб борган бўлсин. Бу вақт ичида *1* нуқтадан тарқалган сферик товуш тўлқини $4ut$ масофага етиб боради (u — товуш тезлиги). У ҳолда зарбали тўлқин фронти билан товуш манбаининг ҳаракат йўналиши орасидаги α бурчакни

$$\sin\alpha = \frac{4ut}{4vt} = \frac{u}{v} \qquad (76.6)$$

муносабатдан топиш мумкин.

Кема сув сиртидаги тўлқиннинг тарқалиш тезлигидан катта тезлик билан ҳаракатланганда унинг тумшуғидан тарқалаётган тўлқин зарбали тўлқинга мисол бўла олади.

Портлашлар рўй берганда, кучли электр разрядлари бўлганда ва бошқа ҳолларда зарбали тўлқинлар ҳосил бўлади. Ҳар қандай жисм муҳитда товуш тезлигидан катта тезлик билан ҳаракатланганда, гарчи улар товуш манбаи бўлмаганда ҳам, зарбали тўлқин ҳосил бўлади. Шунинг учун товуш тезлигидан катта тезлик билан ҳаракатланган ҳар қандай жисм портлаш товушига ўхшаш қисқа ва кескин товуш ҳосил қилади. Бу ҳодиса товуш тезлигидан катта тезлик билан учаётган самолёт учиб ўтганда жуда кучли намоён бўлади.

Кейинроқ Доплер ҳодисаси оптикада ҳам юз беришини кўрамиз. Лекин ёруғлик тарқалишининг ўзига хос хусусиятлари туфайли мазкур ҳодиса оптикада бошқачароқ мазмун касб этади.

77- §. Ультратовуш ва инфратовуш

Амалда частотаси 1МГц дан юқори бўлган ультратовушлар кўпроқ қўлланилади. Иккала учи маҳкамланмаган пўлат пластинкада ана шундай частоталардаги хусусий тебранишларни ҳосил қилиш учун пластинканинг узунлиги $l = \frac{u}{2v} = 3$ мм тартибда бўлиши керак (u — товушнинг пўлатдаги тарқалиш тезлиги).

Одатдаги товуш тўлқинларининг узунлиги уларни ҳосил қилаётган манбаларнинг ўлчамларидан анча катта бўлгани сабабли бундай товуш манбаларининг йўналганлик диаграммаси жуда кенг бўлади (75- §). Ультратовуш тебранишлари ҳосил қилинганда эса анча кучли йўналганликка эришиш мумкин.

Ультратовушларни ҳосил қилиш учун одатда механик, пьезоэлектрик ва магнитострикцион манбалардан фойдаланилади. Одатдаги *ҳуштак* ультратовушнинг энг оддий механик манбаи ҳисобланади. Ундаги ҳаво оқими ҳуштак бўшлиғининг учларидан қайтиб, товушни ҳосил қилади. Ҳуштак бўшлиғининг ўлчамлари ҳаво оқими тебранишларини ҳамда ҳосил бўладиган товушнинг частотасини белгилайди. Мазкур ўлчамлар қанчалик кичик бўлса, ҳосил бўладиган товуш шунчалик юқори тонли бўлади. Ҳуштак ўлчамларини кичрайтира бориб ультратовушни ҳосил қилиш мумкин. Катта интенсивликдаги товуш ва ультратовуш тўлқинларини ҳосил қиладиган *сиренада* эса двигатель (мотор) четларида тешикчалари бўлган дискни айлантиради. Мазкур диск рўпарасида жойлашган қўзғалмас дискда ҳам ана шундай тешикчалар бўлиб, мазкур тешикчаларга сиқилган ҳаво йўналтирилади. Ҳаво оқимини айланаётган диск даврий равишда узиб туради. Натижада қўзғалмас диск тешикчалари олдида даврий равишда ўзгариб турувчи ҳаво босими ҳосил бўлиб, кучли ультратовуш вужудга келади.

Пьезоэлектрик ультратовуш манбаларининг тузилиши пьезоэлектрик ҳодисага асосланган. Бир қатор моддалар (кварц, турмалин, барий титанати ва б.) нинг кристаллари ажойиб хусусиятга эга. Мазкур кристаллардан муайян тарзда пластинка кесиб олиб, улар чўзилиб ёки сиқилса, пластинканинг муайян сиртларида электр зарядлари (бир ёқда мусбат, қарама-қарши ёқда эса манфий заряд) ҳосил бўлади. Бу ҳодиса *пьезоэлектрик ҳодиса* дейилади. Мазкур ҳодисанинг тескариси ҳам содир бўлиши мумкин: пластинканинг қарама-қарши ёқлари металл қатлами билан қопланиб, уларни ўзгарувчан кучланиш манбаига улаб қўйилса, пластинка гоҳ сиқилиб, гоҳ чўзилади. Пластинка сиртининг бундай тебранишлари муҳитда ультратовуш тўлқинини вужудга келтиради. Бундай манбалар ёрдамида ҳосил бўладиган ультратовушлар унчалик катта интенсивликка эга бўлмайди.

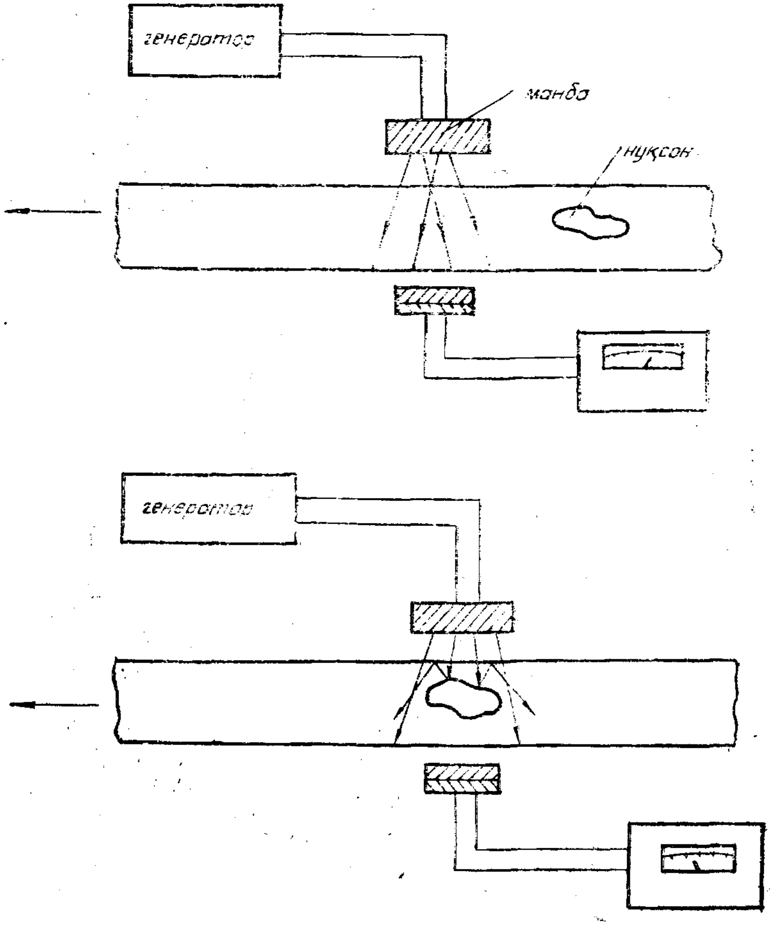
Бир қатор ферромагнит моддалар (никель, темир, кобальт ва уларнинг қотишмалари) магнит майдони таъсирида сиқилиш ва чўзилиш хусусиятига эга. Мазкур ҳодиса *магнитострикция* деб аталиб, бундай манбалар ёрдамида катта интенсивликдаги ультратовушларни вужудга келтириш мумкин. Никель стерженни ғалтак ичига жойлаштириб, ғалтак орқали ўзгарувчан ток ўтказилса, ўзгарувчан магнит майдони ҳосил бўлиб, стержень учига маҳкамланган пластинка токка мос равишда эгилади, яъни механик тебранишлар вужудга келади.

Ультратовуш товушга хос бўлган ҳамма хоссаларга эга. Шу билан бирга, ультратовушларнинг тўлқин узунлиги қисқа бўлгани сабабли, улар одатдаги товуш тўлқинларига хос бўлмаган хусусиятларга ҳам эга бўлади. Улар кучли йўналганликка эга бўлганидан, кучли йўналган ингичка ультратовуш дасталарини ҳосил қилиш мумкин. Частотаси юқори бўлгани туфайли, ультратовуш муҳитда кучли ютилиб (ютилиш частотанинг квадратига ва муҳитнинг кинематик қовушоқлигига пропорционал), тезда сўниши мумкин. Ультратовуш ҳавода шунчалик тез сўнадики, сигнал узатиш ва алоқа мақсадларида ундан амалда фойдаланиб бўлмайди. Акустик хоссалари бўйича сув ҳаводан кескин фарқ қилади. Сувнинг кинематик қовушоқлиги кичик бўлгани сабабли ультратовуш сувда ҳаводагига нисбатан деярли 1000 марта кучсиз ютилади. Шунинг учун ультратовушнинг кучли йўналишга эга бўлган дасталари гидроакустикада кенг қўлланилади. Бу мақсадда электромагнит тўлқинларни қўллаб бўлмайди, чунки улар сувда жуда кучли ютилади.

Ультратовушнинг қўлланилиш соҳалари жуда ҳам кўп. Биз уларнинг энг асосийларинигина ўрганамиз.

Ультратовуш манбаининг кучли йўналганликка эга бўлиши мумкинлигидан ҳамда ультратовуш сувда жуда кучсиз ютилганидан фойдаланиб катта масофаларда (бир неча километргача) сув ости алоқасини ўрнатиш мумкин. Масалан, денгиз ва дарё чуқурлигини ўлчайдиган *эхолот* ҳам ана шу тарзда ишлайди. Эхолотнинг ультратовуш манбаи кеманинг остига ўрнатилиб, қисқа импульс кўринишидаги сигнал вертикал пастга томон йўналтирилади. Денгиз тубидан акс-садо сифатида қайтган импульс қабул қилувчи қурилмага етиб келади. Импульснинг денгиз тубига бориб келиши учун кетган вақтни ва ультратовушнинг сувда тарқалиш тезлигини билган ҳолда, денгизнинг кема турган жойдаги чуқурлигини аниқлаш мумкин. Эхолотдан балиқларнинг тўпланган жойини аниқлашда ҳам фойдаланиш мумкин. *Гидролокатор* сигнални ихтиёрий йўналишда жўнатиш имконини беради. Кемага ўрнатилган гидролокатор сув ости музликлари, сув ости кемалари ва бошқалар ҳақида хабар бериши мумкин.

Ультратовуш ёруғлик учун шаффоф бўлмаган (ўта олмайдиган) моддаларда ҳам тарқалиши мумкин бўлганидан, уни шаффоф бўлмаган жисмларни ўрганишда қўллаш мумкин. Масалан, ультратовуш ёрдамида 10 метр қалинликдаги металл ичини «кўриш» мумкин. Ультратовушли дефектоскопияга (нуқсонларни ўрга-

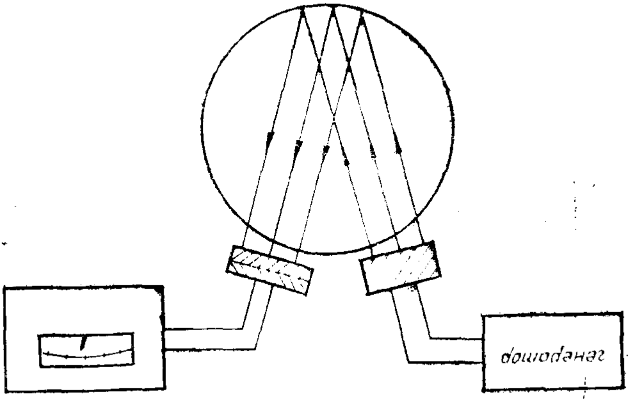


177-расм.

надиган соҳа) 1927 йилда рус физиги С. Я. Соколов асос солган. Бунда соя усули ва ультратовуш импульси усулидан фойдаланилади.

Соя усулида ультратовуш манбаини текширилаётган жисм сиртларидан бирига яқинлаштирилиб, унинг қарама-қарши сиртига қабул қилувчи қурилма ўрнатилади. Жисм ичида нуқсонлар бўлмаса, ультратовуш тўласича жисм орқали ўтиб, қабул қилиш қурилмасига етиб боради (177-*а* расм). Жисм ичида бирор нуқсон (масалан, ковак) бўлса қабул қилиш қурилмаси гўё нуқсоннинг «соя» сида қолгандай бўлади, шунинг учун у ультратовушни қайд қилмайди, ёки ультратовуш интенсивлиги кескин камайганини кўрсатади (177-*б* расм).

Ҳозирги пайтда импульсли дефектоскопия усули кенг тарқалган. *Импульсли дефектоскопнинг* иш принципи эхолотга ўхшайди. Бу усулда жисмнинг муайян сиртига ёнма-ён қилиб ҳам ультратовуш манбаи, ҳам қабул қилиш қурилмаси ўрнатилади (178-расм). Ультратовуш манбаи текширилаётган жисмга қисқа импульс кўринишидаги ультратовуш тўлқинларини юборади. Нуқсон бўлмаса, тўлқин жисмнинг қарама-қарши ёқидан қайтиб, қабул қилиш қурилмасида қайд қилинади (179-*а* расм). Тўлқин йўлида ковак ёки ёриқ кўринишидаги нуқсон бўлса, қабул қилиш қурил-



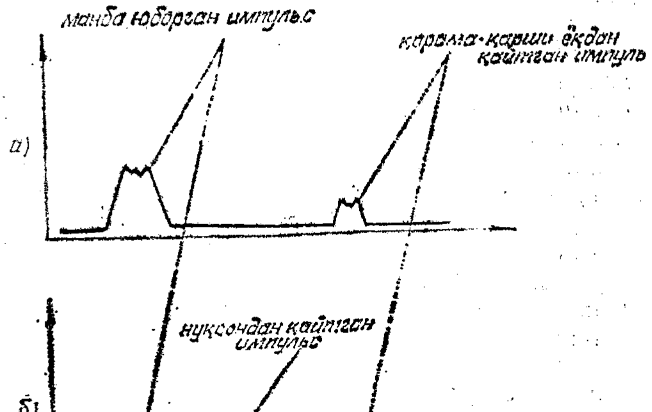
178-расм.

маси аввал нуқсондан қайтган, сўнгра қарама-қарши ёқдан қайтган импульсни қайд қилади (179-*б* расм). Мазкур усул билан металл ичида бир неча метр ичкарида бўлиб, бир неча миллиметрли ўлчамга эга бўлган нуқсонларни аниқлаш мумкин.

Ультратовуш дефектоскопияси усули тирик организм аъзолари (юрак, кўз соққаси ва ҳ. к.) ни текширишда ҳамда баъзи касалликларни, масалан, хавфли ўсмаларни аниқлашда ҳам кенг қўлланилади.

Ультратовуш моддаларнинг хоссалари ва структураларини (тузилишларини) ўрганишда ҳам кенг қўлланилади. Ультратовуш тўлқинларининг электромагнит тўлқинлардан афзаллиги шуки, уларнинг тарқалиш тезлиги анча кичик бўлгани туфайли, частоталар бир хил бўлганда ультратовуш тўлқинларининг узунлиги анча қисқа бўлади.

Тўлқин энергияси оқимининг зичлиги частотанинг квадратига пропорционал бўлганидан (64- §), тебраниш амплитудаси унчалик катта бўлмаган ҳолларда ҳам ультратовуш тўлқинида анча юқори зичликдаги энергия оқимига эришиш мумкин. Бунда суюқлик заррачалари жуда катта тезланиш олиб, суюқлик ичида кавитацион пуфакчалар ҳосил қилади; бундай пуфакча-



179-расм.

лар йўқолиш пайтида эса жуда катта босимлар ҳосил бўлиб, зарбали тўлқинни вужудга келтиради. Бу тўлқинлар таъсирида қаттиқ ва суюқ материаллар майда бўлакчаларга бўлиниб кетади. Бу ҳодисани эмульсия ва суспензиялар тайёрлашда қўллаш мумкин.

Мазкур усулдан суюқликка ботирилган жисм сиртини турли пардалар ва ифлосликлардан тозалашда, кристаллар ўсишини бошқаришда ва бошқаларда фойдаланиш мумкин.

Ҳозирги пайтда ультратовуш фақат техникада эмас, балки биология ҳамда медицинада ҳам кенг қўлланилмоқда.

Частоталари 20 Гц дан кичик бўлган товуш тўлқинлари *инфратовуш* соҳасини ташкил қилади. Мазкур соҳа ҳозирча етарли даражада ўрганилмаган. Ультратовушдан фарқли ўлароқ, инфратовуш юксак ўтиш қобилиятига эга. Хусусан, атмосферада инфратовуш бир неча ўн минг километрга тарқалиши мумкин. Бунинг сабаби шуки, инфратовуш атмосферада жуда кучсиз ютилади ҳамда кам сочилади. Инфратовушнинг атмосферада кам сочилишини тўлқин узунлиги жуда катталиги туфайли мазкур тўлқинлар учун муҳит бир жинслироқдай бўлиб қолиши билан тушунтириш мумкин.

Энг сўнгги тадқиқотлар кўрсатишича, инфратовуш кишилар ва ҳайвонларнинг аҳволига жуда кучли таъсир қилади.

Табиий шароитларда вулқон отилганда, зилзила пайтида инфратовуш пайдо бўлади. Шу сабабли вулқон отилиши ҳамда зилзила бўлиши олдидан ҳайвонлар таҳликага тушади. Инфратовушларга асосланиб зилзиланинг марказини ҳам аниқлаш мумкин. Денгиз сирти тўлқинланиб турганда сув сирти бўйлаб эсган шамол ҳавода сув сиртидаги тўлқин узунлигига тенг узунликдаги тебранишларни ҳосил қилади. Бу тебранишлар айнан инфратовуш соҳасида бўлиб, шамол тезлигидан ҳамда сув сиртидаги тўлқинлар тарқалиш тезлигидан катта тезлик билан тарқалиб қирғоққа етиб келади ҳамда довул яқинлашиб келаётганлигидан дарак беради.

Инфратовуш ҳавода юқори частотали товушларга нисбатан анча кучсиз ютилганлиги сабабли портлаш ва оғир қуроллардан отиш пайтида ҳосил бўлган инфратовушлар ёрдамида жуда узоқ масофадаги портлаш ёки отиш жойининг йўналишини ҳам аниқлаш мумкин.

Инфратовушни сезиш ва унинг қувватини ўлчашда одатдаги усулларни қўллаб бўлмайди. Жуда паст частотадаги инфратовушни ўта сезгир барометр ёрдамида қайд қилиш мумкин. Нисбатан юқорироқ частотали инфратовушларни эса одатда катта ўлчамли микрофонлар ёрдамида қайд қилинади. Умуман олганда, инфратовушни қайд қиладиган асбоблар анча мураккаб тузилишга эга бўлади.

Фойдаланилган ва тавсия этиладиган адабиёт рўйхати

1. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. «Высшая школа», М., 1986.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. I т. «Наука», М., 1982.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. I т. «Наука», М., 1989.
4. Александров Н. В., Яшкин А. Я. Курс общей физики. Механика. «Просвещение», М., 1978.
5. Архангельский М. М. Курс физики. Механика. «Просвещение», М., 1975.
6. Гершензон Е. М., Малов Н. Н. Курс общей физики. Механика. «Просвещение», М., 1987.
7. Шебалин О. Д. Физические основы механики и акустики. «Высшая школа». М., 1981.

МУНДАРИЖА

Кириш

I боб. Моддий нуқта кинематикаси

II боб. Моддий нуқта динамикаси

III боб. Иш ва энергия

IV боб. Моддий нуқталар системасининг динамикаси

V боб. Бутун олам тортишиш қонуни

VI боб. Қаттиқ жисм динамикаси

VII боб. Ишқаланиш кучлари

VIII боб. Эластиклик кучлари

IX боб. Ноинерциал саноқ системаларда ҳаракат

X боб. Махсус нисбийлик назариясининг асослари

XI боб. Тебранишлар

XII боб. Тўлқинлар

XIII боб. Суюқликлар ва газлар механикаси

XIV боб. Акустика асослари

РАҲМАТУЛЛАЕВ МАҲБУБЖОН

УМУМИЙ ФИЗИКА КУРСИ

Механика

Педагогика институтларининг физика ихтисослиги талабалари учун

Тошкент «Ўқитувчи» 1995

Таҳририят мудири *Ў. Ҳусанов*
Муҳаррирлар *М. Пўлатов, Х. Пўлатхўжаев*
Кичик муҳаррир *Х. Зоиржонова*
Расмлар муҳаррири *Т. Қаноатов*
Тех. муҳаррир *Т. Скиба*
Мусаҳҳиҳа *З. Ғуломова*

ИБ № 6292

Теришга берилди 22.06.94. Босишга рухсат этилди 6.02.95. Формати 84 × 108/32,
Кегли 10 шпонсиэ. Литератури. гарнитураси. Тип. қоғози. Юқори босма усулида
босилди. Шартли б. л. 18,48. Шартли кр.-отт. 18,69. Нашр л 14,86. Нусхаси 7500.

«Ўқитувчи» нашриёти, Тошкент, Навоий кўчаси, 30, Буюртма №09—51—93.

Ўзбекистон Республикаси Давлат Матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати,
Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1995.