VIII BOB
KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

1-§. Kombinatorikaning asosiy qoidalari

1. Kombinatorikada nima o‘rganiladi? $A = \{1, 2, 3\}$ va $B\{a, b\}$ to‘plamlar elementlaridan shunday juftliklar tuzaylikki, ulardagi birinchi o‘rinda A ning tartib bilan olingan elementi, ikkinchi o‘rinda B ning tartib bo‘yicha olingan elementi yoziladigan bo‘lsin. Hosil bo‘ladigan juftliklar to‘plamini $A\times B$ orqali belgilasak,

$$A\times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Agar birinchi o‘ringa B elementlari qo‘yiladigan bo‘lsa, yozilish tartibi bilan oldingisidan farq qiladigan

$$B\times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

to‘plam hosil bo‘ladi.

$(1, a)$, $(1, b)$, ... juftliklar (ikkitaliklar) tarkibidagi elementlar shu juftlikning *komponentalari* yoki *koordinatalari* deyiladi (lotincha *componentis* – tashkil etuvchi).

Shu kabi berilgan A, B, C to‘plamlar elementlaridan tartiblangan *uchtaliklar*, umuman, k ta to‘plam elementlaridan tartiblangan *k taliklar* to‘plami tuziladi. k ta har xil elementli to‘plam uzunligi $n = k$ ga teng deyiladi. Masalan, $(1, 9, 25)$ va $(\sqrt{1}, \sqrt{81}, \sqrt{625})$ uchliklar teng va bir xil uzunlikda ($n = 3$), komponentalari: $1 = \sqrt{1}$, $9 = \sqrt{81}$, $25 = \sqrt{625}$. Lekin (a, b, c) va (c, a, b) uchliklarning uzunliklari va koordinatalari bir xil bo‘lsa-da, lekin ular teng emas, chunki koordinatalar turli tartibda joylashgan. $(1, 2, 3)$ va $(1, 2, 3, 4)$ lar uzunligi har xil, demak o‘zlari ham teng emas.

k talikda komponentalar to‘plamlardan va boshqa narsalardan iborat bo‘lishi ham mumkin. Shunga ko‘ra $(\{a, b\}, c)$ va $(\{b, a\}, c)$ ikkitaliklar teng, chunki $\{a, b\}$ va $\{b, a\}$ bitta to‘plam. Lekin $((a, b), c)$ va $((b, a), c)$ ikkitaliklar teng emas, chunki (a, b) juftlik (b, a) juftlikka teng emas. (a, b, c), $((a, b), c)$, $(a, (b, c))$ lar ham har xil: birinchisi uchtalik, ikkinchi va uchinchisi har xil ikkitaliklar.

Birorta ham komponentaga ega bo‘lmagan (ya’ni 0 uzunlikdagi) k talik *bo‘sh k talik* deyiladi. To‘plamda elementlarning tartibi rol o‘ynamaydi, k talikda rol o‘ynaydi, to‘plamda elementlar takrorlanmasligi kerak, k talikda koordinatalar takrorlanishi mumkin.

1 - m i s o l. $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ to‘plamlardan quyidagi ikkitaliklar to‘plamlarini tuzish mumkin:

$$\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$
$$\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\},$$
$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

2 - m i s o l. 1) 40 xil bolt va 13 xil gaykadan bittadan olinib necha xil juftlik tuzish mumkin?

2) 1 dan 150 gacha natural sonlar orasida 2, 5, 7 sonlaridan hech biriga bo‘linmaydigani qancha?

3) 1, 2, ..., 9 raqamlaridan nechta uch xonali nomerlar tuzish mumkin?

Bu tur masalalar fan, texnika va ishlab chiqarishda ko‘plab uchraydi. Ular bilan matematikaning sohalaridan biri — *kombinatorika* shug‘ullanadi. Yuqoridagi kabi masalalarni yechish haqida 2-§ da alohida to‘xtalamiz.

M a s h q l a r

8.1. $A = \{2, 3, 4, 1\}$ to‘plam elementlaridan ikki xonali sonlar tuzing. Qanday k taliklar hosil bo‘ladi? Ularning komponentalarini ko‘rsating.

8.2. Uchtaliklar tengmi?

1) $(1, \{1, 2, 3\}, 2, 3)$, $(1, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\})$;

2) $(1, \{1, 2, 3\}, 2, 3)$, $(1, \{2, 1, 3\}, 2, 3)$.

2. Ko‘paytmani topish qoidasi. Ushbu masalani qaraylik:

1 - m i s o l. Birinchi elementi $A = \{a, b, c\}$ to‘plamdan, ikkinchi elementi esa $B = \{2, 3\}$ to‘plamdan olingan juftliklar tuzamiz. Bunday juftliklar oltita bo‘ladi:

$$\text{3 ta satr} \left\{ \underbrace{\begin{matrix} (a, 2), & (a, 3), \\ (b, 2), & (b, 3), \\ (c, 2), & (c, 3), \end{matrix}}_{\text{2 ta ustun}} \right.$$

A va B to‘plamlar elementlari sonini mos ravishda $n(A)$, $n(B)$ orqali, juftliklar sonini esa $n(A \times B)$ orqali belgilasak, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ ekanligini ko‘ramiz.

Bu tur masalalarni yechishda quyidagi teoremadan foydalanamiz.

T e o r e m a . *A va B chekli to'plamlar elementlaridan tuzilgan juftliklar soni shu to'plamlar elementlari sonlarining ko'paytmasiga teng:*

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B). \qquad (1)$$

I s b o t . $A = \{a_1, ..., a_m\}$ va $B = \{b_1, ..., b_k\}$ bo'lsin. Ular bo'yicha quyidagi juftliklarni tuzish mumkin:

$$m \text{ ta satr} \begin{cases} (a_1, b_1), \ ..., \ (a_1, b_k), \\ \text{.............................} \\ \underbrace{(a_m, b_1), \ ..., \ (a_m, b_k)}_{k \text{ ta ustun}} \end{cases}$$

jami $mk = n(A) \cdot n(B)$ ta juftlik tuziladi.

Umuman, m ta $A_1, ..., A_m$ chekli to'plamlardan tuziladigan m taliklar soni jami

$$n(A_1 \times ... \times A_m) = n(A_1) \cdot ... \cdot n(A_m) \qquad (2)$$

ta bo'ladi.

2 - m a s a l a . 32 har xil harf va 10 ta turli raqamdan tarkibida oldin uch harf, ulardan keyin ikki raqam bo'ladigan nomerlardan qancha tuzish mumkin?

Y e c h i s h . Harflar to'plamini A, raqamlar to'plamini B orqali belgilaylik. Ulardagi elementlar soni $n(A) = 32$, $n(B) = 10$. Talab qilinayotgan har bir nomer $A \times A \times A \times B \times B$ beshtalik bo'ladi. (2) formula bo'yicha ularning soni

$$n(A \times A \times A \times B \times B) = 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 10 \cdot 10 = 3276800 \text{ ta.}$$

Umuman, *agar l talikning birinchi komponentasi n_1 usul bilan tanlanishi mumkin bo'lsa, uning ixtiyoriy tanlanishida ikkinchi komponenta n_2 usul bilan tanlansa, oldingi ikki komponentaning ixtiyoriy tanlanishida uchinchi komponenta n_3 xil usul bilan tanlansa, umuman, to l-komponentagacha shunday qilinsa, hosil bo'ladigan l taliklar soni $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_l$* ta bo'ladi.

3 - m a s a l a . Nechta har xil raqamli uchtalik tuzish mumkin?

Y e c h i s h . Har xil raqamli uchtaliklarni tuzishda birinchi komponentani 10 xil usul bilan, har bir shunday tanlashda ikkinchi komponentani 9 xil usul bilan, oldingi ikki raqamning har bir shunday tanlashda uchinchi raqam ham 9 xil usul bilan tanlanadi. Jami bunday uchtaliklar soni $10 \cdot 9 \cdot 9 = 810$ ta bo'ladi.

Mashqlar

8.3. To‘rt xil bolt va uch xil gaykadan bittadan olib necha xil juftliklar tuzish mumkin?

8.4. «Daftar» so‘zidan undosh va unli harflarni necha xil usul bilan tanlab olish mumkin? «Qalam» so‘zidan-chi?

8.5. 2 kitob, 3 daftar va 4 qalam bor. Ulardan bittadan olinib komplektlar tuzilmoqchi. Bu ishni necha xil usul bilan qilish mumkin?

8.6. Savatda 10 dona olma va 8 dona nok bor. Vali undan yo olmani, yo nokni oladi, shundan so‘ng Noila qolgan mevalardan ham olma, ham nokni oladi. Bunday tanlashlar soni qancha bo‘lishi mumkin? Valining qaysi tanlashida Noilaning tanlash imkoni katta bo‘ladi?

2-§. Kombinatorikaning asosiy formulalari

1. O‘rinlashtirishlar. $m = 4$ ta elementli $X = \{1,3,5,7\}$ to‘plam elementlaridan ikki xonali sonlar, ya’ni juftliklar tuzaylik: 13, 15, 17, 35, 37, 57, 31, 51, 71, 53, 73, 75. Bu sonlar tartiblangan qism-to‘plamlardan iborat. Ular jamining sonini A_4^2 ta deb belgilaymiz (o‘qilishi: «4 elementdan 2 tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlar soni»). Bizda $A_4^2 = 12$ bo‘lmoqda. Ixtiyoriy m uchun bu sonni hisoblash formulasini topaylik. Har qaysi juftlikning birinchi komponentasi yo 1, yo 3, yo 5, yo 7, ya’ni uni $m = 4$ ta ixtiyoriy tanlash imkoni bor. Agar birinchi komponenta tanlangan bo‘lsa, ikkinchi komponentani tanlash uchun $m - 1 = 3$ xil tanlash imkoni qoladi. Demak, jami juftliklar soni $A_4^2 = 4 \cdot (4-1)$ ta, ya’ni $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ ta bo‘ladi.

m ta elementli X to‘plam elementlaridan k tadan olib tuzilgan *o‘rinlashtirishlar* deb, X to‘plamning k uzunlikdagi tartiblangan qism-to‘plamlariga aytiladi, bunda $k \le m$. Ularning soni:

$$A_m^k = m(m-1)...(m-(k-1)). \tag{1}$$

Haqiqatan, 1- komponenta ixtiyoriy tartibda m xil tanlanadi. U holda 2- komponenta uchun $m - 1$ xil tanlanish va hokazo oxirgi k- komponenta uchun $m - (k - 1)$ tanlanish imkoni qoladi va bunda hech qaysi komponenta takror tanlanmaydi. Barcha k

uzunlikdagi o‘rinlashtirishlar soni ko‘paytmani hisoblash qoidasiga muvofiq (1) formula bo‘yicha topiladi.

Yuqorida qaralgan misolga qaytaylik. Lekin endi berilgan $m = 4$ ta elementli $X = \{1, 3, 5, 7\}$ to‘plam elementlaridan komponentalari takrorlanadigan juftliklarni ham tuzish talab qilinsin. Ular:

$$\begin{cases} 11 & 13 & 15 & 17 \\ 33 & 35 & 35 & 31 \\ 55 & 53 & 57 & 51 \\ 77 & 75 & 73 & 71 \end{cases} \quad \text{Jami } 4 \cdot 4 = 4^2 = 16 \text{ ta juftlik.}$$

Umuman, m ta elementli X to‘plam elementlaridan tuzilgan tak-rorlanadigan k ta komponentali k taliklar soni k ta bir xil to‘plam to‘plam $X \times X \times \ldots \times X$ elementlarining soniga teng (2-§, 2-band, 2-teorema). Bu son k ta $n(X)$ ko‘paytuvchi ko‘paytmasidan iborat:

$$n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots \cdot n(X) = (n(X))^k = m^k.$$

m elementli X to‘plamning elementlaridan tuzilgan va komponentalari takrorlanadigan k taliklar m elementdan k tadan olib tuzilgan *takrorli o‘rinlashtirishlar* deyiladi. Ularning sonini $\overline{A}_m^k$ orqali belgilaymiz (A harfi ustidagi chiziqcha elementlar takrorlanishi mumkinligini ko‘rsatadi). Ushbu formula isbot qilindi:

$$\overline{A}_m^k = m^k. \qquad (2)$$

1 - m i s o l. 30 o‘quvchisi bo‘lgan sinfdan boshliq, yordamchi va kotib necha xil usul bilan saylanishi mumkin?

Y e c h i s h. Bunday ixtiyoriy saylash 30 elementdan 3 tadan olinib tuziladigan takrorsiz o‘rinlashtirish, ya’ni komponentalari takrorlanmaydigan uchtalik bo‘ladi. Bundagi tanlash usullari soni:

$$A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360 \text{ ta.}$$

2 - m i s o l. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlaridan nechta uch xonali nomerlar tuzish mumkin?

Y e c h i s h. Bunday nomerlar $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to‘plam elementlari qatnashadigan uchtaliklardan iborat. Ularning soni (2) formula bo‘yicha $\overline{A}_9^3 = 9^3 = 729$ ga teng.

3 - m i s o l. $n(X) = k$ va $n(Y) = l$ bo‘lsin. X to‘plamni Y to‘plamga akslantirishlar sonini topamiz.

Y e c h i s h. X to‘plam elementlarini nomerlaymiz: $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. X to‘plamni Y ga o‘tkazuvchi har qaysi f akslantirishga o‘sha elementlarning obrazlari (nusxalari)dan tuzilgan

$$(f(x_1), \ldots, f(x_k))$$

k talik mos. Va, aksincha, Y to‘plam elementlaridan tuzilgan $(y_1, \ldots, y_k)$ k talikning berilishi f akslantirishni bir qiymatli aniqlaydi: x_j element y_j ga o‘tadi. Demak, X to‘plamni Y to‘plamga akslantirishlar soni Y to‘plam elementlaridan tuzilgan k taliklar soniga teng. $n(Y) = l$ bo‘lganidan (2) formula bo‘yicha bu son l^k ga teng.

4 - m i s o l. 5 ta har xil daftarni uch bola o‘rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

Y e c h i s h. Taqsimlashning har bir usuli daftarlar to‘plamini bolalar to‘plamiga akslantirishdan iborat. Bunday akslantirishlar soni $3^5 = 243$.

Umuman, k ta elementli X to‘plamni m ta elementli Y to‘plamga akslantirishni k ta elementni m quti bo‘yicha joylashtirilishi deb tushuntirish mumkin. Bunday joylashtirishlar soni m^k ga teng bo‘ladi.

5 - m i s o l. $\{a, b, c, d\}$ to‘plamning barcha qism to‘plamlarini yozamiz.

Y e c h i s h. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$, jami 16 ta.

Bu misolda $2^4 = 16$ bo‘lmoqda. Umuman, k ta elementli to‘plamning qism to‘plamlari soni 2^k ta bo‘lishini matematik induksiya bo‘yicha isbot qilish qiyin emas.

Mashqlar

8.7. a, b, d, e, f harflaridan qancha uch harfli so‘z tuzish mumkin? Har qaysi so‘zda albatta b harfi bo‘lishi talab qilinsachi?

8.8. Sexda 6 ishchi ishlaydi. Ulardan uch kishiga uch turli, ya’ni har bir kishiga bir xildan buyum tayyorlashni necha usul bilan topshirish mumkin?

8.9. 8 ta har xil kitobdan 3 tasi necha xil usul bilan tanlanishi mumkin?

8.10. Qo‘mitaga 7 kishi saylangan. Ular orasidan rais, yordamchi, kotib necha usul bilan tanlanishi mumkin?

8.11. Agar har bir o‘quvchiga bittadan ortiq kitob berilmasa, 6 ta kitobni 10 o‘quvchiga necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

8.12. 6 raqamiga ega bo'lmagan besh xonali nomerlardan qancha bo'ladi? 0 va 6 raqamiga ega bo'lmaganlari-chi?

8.13. 10 ta har xil detalni 3 ta qutiga necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

8.14. Komplektdagi 14 ta detaldan 4 tasida «1», 4 tasida «2», 3 tasida «3» va qolgan 3 tasida «4» belgi qo'yilgan. Komplektdan 4 ta detalni tanlab olish va ularni biror tartibda joylashtirish yo'li bilan belgilarning nechta har xil kombinatsiyasini tuzish mumkin?

2. Takrorsiz o'rin almashtirishlar. $X=\{1, 3, 5\}$ to'plam bo'yicha 135, 315, 351, 153, 531, 513 o'rinlashtirishlar tuzilgan bo'lsin. Bu uchtaliklarda komponentalar takrorlanmagan, bir martadan kelgan, yozilish tartibi bilangina farq qiladi. Umuman, takrorsiz o'rinlashtirishlarda komponentalar soni k shu X to'plamning jami elementlari soni m ga teng, ya'ni $m = k$ bo'lsa, o'rinlashtirishlar bir xil elementli bo'lib, elementlarning yozilish tartibi bilan farq qilinadigan bo'ladi. Bizning misolda ularning soni $A_4^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ta. Ularda elementlar takrorlanmaydi, faqat o'rinlari almashadi.

m ta elementdan *tuzilgan takrorsiz o'rin almashtirish* deb, shu elementlardan m tadan olib tuzilgan o'rin almashtirishlarga aytiladi. Ularning soni R_m orqali belgilanadi (fransuzcha *permutation* — o'rin almashtirish). Ta'rif bo'yicha

$$P_m = A_m^m, \text{ yoki } P_m = m(m-1)...(m-m+1) = m(m-1)\cdot ... \cdot 1 = \\ = m!, \quad \text{yoki} \quad P_m = m! \qquad (1)$$

1-misol. 3 detalni 3 qutiga necha xil tartibda joylashtirish mumkin?

Yechish. Detallarni x_1, x_2, x_3 orqali, qutilarni 1, 2, 3 orqali belgilaylik. Natijada (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1) o'rin almashtirishlar olinadi. Ularning soni $R_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ta.

Mashqlar

8.15. 7 xil kitobni 7 o'quvchiga necha usul bilan tarqatish mumkin?

8.16. Hech qanday ikki komanda bir xil ochko olmagan bo'lsa, 8 komandani turnir jadvaliga necha usul bilan joylashtirish mumkin?

8.17. Qutiga 6 xil *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, *G* detal ketma-ket joylashtirilishi kerak. Agar *B* ning *A* dan oldin joylashtirilishi mumkin bo'lmasa, unda detallar necha xil usul bilan joylashtirilishi mumkin? Agar *B* detal *A* dan keyin joylashtirilishi talab qilinsachi?

3. Takrorsiz kombinatsiyalar. Endi *X* to'plam elementlaridan *k* taliklar emas, balki qism-to'plamlar tuzaylik. Ular o'z tarkiblaridagi elementlari bilan bir-birlaridan farq qiladi. Masalan, $X = \{a, b, d, e, f\}$ to'plam bo'yicha tuzilgan $k = 3$ ta elementli $\{a, d, f\}$, $\{a, e, f\}$, $\{b, d, e\}$ uchtaliklar biz aytayotgan qism to'plamlardandir.

m ta elementli *X* to'plamning *k* ta elementli qism to'plamlari shu elementlardan *k* tadan olib tuzilgan *takrorsiz kombinatsiyalar* deyiladi. Ularning sonini C_m^k orqali ko'rsatamiz (fransuzcha *combination* — kombinatsiya).

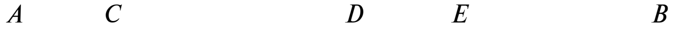
1 - m i s o l . {a, b, d, e, f} to'plam bo'yicha har birida uchtadan har xil element bo'lgan 10 ta kombinatsiya tuzish mumkin: {a, b, d}, {a, b, e}, {a, b, f}, {a, d, e}, {a, d, f}, {a, e, f}, {b, d, e}, {b, e, f}, {b, d, f}, {d, e, f}.

Kombinatsiyalar sonini hisoblash formulasini chiqaraylik. Yuqoridagi misolda ko'rsatilganicha berilgan 5 elementdan 3 tadan olib jami 10 kombinatsiya hosil qilinadi. Lekin har bir kombinatsiyadan oltitadan o'rin almashtirish tuzish mumkin. Masalan, bitta {a, b, d} kombinatsiyadan (a, b, d), (a, d, b), (b, a, d), (b, d, a), (d, a, b), (d, b, a), jami oltita o'rin almashtirish hosil bo'ladi. Bunga qaraganda jami 5 elementdan uchtadan olib tuzilgan takrorsiz o'rinlashtirishlar soni $6 \cdot 10 = 60$ ta, ya'ni VIII bob, 2-§, (1) formulaga asosan $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ ta bo'ladi. Biz $A_5^3 = C_5^3 \cdot 3!$ ga ega bo'lamiz. Bundan C_5^3 topiladi.

Umuman, *m* elementdan *k* tadan olib tuzilgan o'rinlashtirishlar soni $A_m^k = k! C_m^k$ bo'ladi, bundan kombinatsiyalar soni uchun ushbu formulalar olinadi:

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{k!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \quad (1)$$

yoki



VIII.1-rasm.

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \qquad (2)$$

2 - m i s o l. 20 o‘quvchidan 3 kishilik qo‘mitani necha usul bilan tanlash mumkin?

Y e c h i s h. Tanlashlar soni: $C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$.

3 - m i s o l. k ta a harfiga va n ta b harfiga ega bo‘ladigan $k+n$ taliklar sonini topamiz.

Y e c h i s h. $k+n$ taliklar tarkibi ma’lum. Ular harflarning tartibi bilangina bir-biridan farq qiladi. Bu tartib a harflari turgan o‘rinlarni ko‘rsatish bilan bir qiymatli aniqlanadi (chunki qolgan o‘rinlarni b lar egallaydi). Boshqacha aytganda, o‘rinlarning $(k + n)$ ta elementli to‘plamida k ta elementli (k uzunlikdagi) qism to‘plam tanlanishi kerak. Bu esa C_{k+1}^k usul bilan qilinish mumkin.

4 - m i s o l. AB kesmada C, D, E nuqtalar belgilangan (VIII.1-rasm). Jami nechta kesma hosil bo‘ladi? (bunga AB kesma ham kiradi).

Y e c h i s h. Nuqtalar soni 5 ta. Har ikki nuqta izlanayotgan kesmalardan birini beradi. Bunda ikki nuqtaning yozilish tartibi rol o‘ynamaydi. Masalan, AC va CA — bitta kesma. Shunday qilib, $\{A, B, C, D, E\}$ to‘plamning ikki elementli qism to‘plamlari sonini aniqlashimiz kerak. Ular $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ ta.

Binomial koeffitsiyentlarning ayrim xossalarini keltiramiz:

1) $(x + a)^m$ binom yoyilmasida har qaysi $x^{m-k}a^k$ ifoda oldida turgan koeffitsiyent C_m^k kombinatsiyalar soniga teng. Haqiqatan, agar $(x + a)^m = = (x + a)(x + a) \cdot ... \cdot (x + a)$ (m ta ko‘paytuvchi) ko‘paytmadagi qavslar daraja ko‘rsatkichlaridan foydalanilmay va ko‘paytuvchilarni o‘rin almashtirmay ochilsa, natijada x va a harflaridan tuzilgan m uzunlikdagi barcha m taliklarning yig‘indisi hosil bo‘lar edi. Masalan,

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a) =$$
$$= xxx + xxa + xax + xaa + axx + axa + aax + aaa.$$

Qo‘shiluvchilardan, masalan, $k = 2$ ta a harfiga va $m - k = = 3 - 2 = 1$ ta x harfiga ega bo‘ladiganlarini sanasak, ular 3 ta. Bu esa (1) formula bo‘yicha hisoblab topilganiga teng: $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$.

Umuman, yoyilma tarkibida $x^{m-k}a^k$ ga ega bo‘lgan hadiga o‘xshash, ya’ni $m - k$ ta x harfiga va k ta a harfiga ega bo‘lgan m taliklar soni $C^k_{(m-k)+k}$ ga, ya’ni C^k_m ga teng. Shunday qilib,

$$(x+a)^m = C^0_m x^m + C^1_m x^{m-1} a + \ldots + C^k_m x^{m-k} a^k + \ldots + C^m_m a^m \quad (3)$$

bo‘ladi.

2) Agar (3) yoyilmaga $x = a$ ni qo‘ysak, quyidagi hosil bo‘ladi:

$$C^0_m + C^1_m + \ldots + C^k_m + \ldots + C^m_m = 2^m. \quad (4)$$

3) Agar (2) tenglikdan foydalansak:

$$C^{m-k}_m = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = C^k_m, \quad C^{m-k}_m = C^k_m. \quad (5)$$

Mashqlar

8.18. 20 kishi ichidan 4 vakilni necha usul bilan saylash mumkin?

8.19. Bir aylanada yotgan 5 ta nuqta ustidan nechta vatar o‘tkazish mumkin?

8.20. Bir kishida 10 ta kitob, ikkinchisida 12 ta kitob bor. Almashtirish uchun ularning har biri necha usul bilan 3 tadan kitob tanlashlari mumkin?

8.21. Lotereya biletidagi 49 nomerdan 5 tasini necha xil usul bilan o‘chirish mumkin? Necha holda tanlangan 5 ta nomerdan uchtasi tirajdan keyin topilgan bo‘ladi? Necha holda 5 ta nomer to‘g‘ri topilgan bo‘ladi?

8.22. Binom yoyilmasi va Muavr formulalaridan foydalanib, ayniyatlar isbot qilinsin:

1) $S = C^1_n - 3C^3_n + 3^2 C^5_n - 3^3 C^7_n + \ldots = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$;

2) $2^{n-1} = 1 + C^2_n + C^4_n + \ldots = C^1_n + C^3_n + \ldots$;

3) $C^0_n + C^1_n \cos\varphi + C^2_n \cos 2\varphi + \ldots + C^n_n \cos n\varphi = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \cos \frac{n\varphi}{2}$.

4. Takrorli o‘rin almashtirishlar. Jami $k = 3$ ta a_1, a_2, a_3 elementdan $P_k = P_3 = 3! = 6$ ta o‘rin almashtirishlar tuzish mumkinligini bilamiz:

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3),$$
$$(a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1).$$

Bu uchtaliklarda har bir element faqat bir martadan qatnashmoqda: $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Endi shu elementlardan (a_1, a_1, a_1, a_2, a_3, a_3), (a_1, a_2, a_3, a_1, a_1, a_3) oltiliklar tuzilgan bo‘lsin. Bular ham faqat elementlarning tartibi bilangina farq qiluvchi o‘rin almashtirishlardan iborat. Lekin bu holda a_1 element $k_1 = 3$ marta, a_2 element $k_2 = 1$ marta, a_3 element $k_3 = 2$ marta takrorlanmoqda va $k = k_1 + k_2 + k_3 = 6$. O‘rin almashtirishlarni yozishni yana davom ettirish mumkin. Ularning sonini $P(k_1, k_2, k_3)$, ya’ni $R(3, 1, 2)$ orqali belgilaylik, bunda (3, 1, 2) yozuv oltitaliklar tarkibida a_1 element 3 marta, a_2 element 1 marta, a_3 element 2 marta takrorlanishini ko‘rsatadi. $P(3, 2, 1)$ takrorli o‘rin almashtirishlar sonini topish talab qilinsin.

Ta’rif. *Takrorli o‘rin almashtirish* deb, tarkibida a_1 harfi k_1 marta, ..., a_m harfi k_m marta qatnashuvchi $k = k_1 + k_2 + ... + k_m$ uzunlikdagi har qanday k talikka aytiladi. Takrorli o‘rin almashtirishlar sonini $P(k_1, ..., k_m)$ orqali belgilanadi.

$P(3, 1, 2)$ sonini topishning yo‘llaridan biri o‘sha oltitaliklarning hammasini tuzish va sanash. Lekin a_j komponentalar soni va k_j takrorlanishlar ko‘p bo‘lsa, bu yo‘l noqulaydir. Umuman, $P(k_1, ..., k_m)$ ni hisoblash uchun formula kerak bo‘ladi.

k talik tarkibida k_1 ta o‘ringa a_1 harfini $C_k^{k_1}$ usul bilan o‘rin almashtirish orqali yozish mumkin. U holda qolgan $k - k_1$ ta o‘ringa a_2 ni $C_{k-k_2}^{k_2}$ usul bilan o‘rin almashtirib yoziladi. Shu kabi, a_3 ni $C_{k-k_1-k_2}^{k_3}$, ..., a_m ni $C_{k-k_1-...-k_{m-1}}^{k_3}$ usul bilan o‘rin almashtirib yozish mumkin.

Jami o‘rin almashtirishlar soni ko‘paytirish qoidasiga muvofiq,

$$P(k_1, \; ..., \; k_m) = C_k^{k_1} \cdot C_{k-k_1}^{k_2} \cdot \; ... \; \cdot C_{k-k_1-...-k_{m-1}}^{k_m}$$

ta bo‘ladi. Topilgan munosabatni soddalashtiraylik. Shu maqsadda $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ formuladan foydalanamiz. Natijada

$$P(k_1, \; ..., \; k_m) = \frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} \cdot \frac{(k-k_1)!}{k_2!(k-k_1-k_2)!} \cdot \; ... \; \cdot \frac{(k-k_1 ...-k_{m-1})!}{k_m!(k-k_1-...-k_m)!},$$

bunda $(k - k_1 - ... - k_m)! = 0! = 1!$ yoki qisqartirishlardan so‘ng

$$P(k_1, \; ..., \; k_m) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}, \tag{1}$$

bunda $k = k_1 + k_2 + ... + k_m$.

Takrorsiz o‘rin almashtirishlar (1) formulaning $k_1 = k_2 = ... = = k_m = 1$ bo‘lgan xususiy holidir.

1 - m i s o l. Bandning boshida qaralgan misolda talab qilingan barcha oltiliklar soni:

$$P(3,\ 1,\ 2) = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60.$$

2 - m i s o l. 30 ta detalni 5 ta har xil qutiga 6 tadan necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

Y e c h i s h. Masalaning shartiga ko‘ra $k = 30$, $k_1 = k_2 = ... = k_5 = = 6$, $m = 5$. (1) formula bo‘yicha usullar soni:

$$P(6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6) = \frac{30!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}.$$

3 - m i s o l. Yuqoridagi misolda qutilar bir xil bo‘lsa-chi?

Y e c h i s h. Qutilar har xil bo‘lganda oldingi misol natijasiga ko‘ra jami o‘rin almashtirishlar soni $P(6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6) = \frac{30!}{(6!)^5}$ ta edi. Qutilar bir xil bo‘lsa, qutilarni almashtirish detallarni joylash-tirish usullari soniga ta’sir qilmaydi. Bunga qaraganda joylash-tirish usullari soni 5! marta kamayadi.

J a v o b: $\frac{1}{5!} P(6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6) = \frac{30!}{5(6!)^5}$.

4 - m i s o l. «Raketa» so‘zida harflar o‘rni almashtirilsa, nechta «so‘z» hosil bo‘lishi mumkin?

Y e c h i s h. Ikki hol bo‘lishi mumkin:

1 - h o l. «a» harfi $k_2 = 2$ marta takrorlanmoqda. Ulardan biri ikkinchisi bilan o‘rin almashganda «so‘z» o‘zgarmay qolaveradi. Shu sababli hosil bo‘ladigan «so‘z»lar soni takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun yuqorida chiqarilgan (1) formula bo‘yicha topiladi:

$$P(1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1) = \frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 360.$$

2 - h o l. Hosil bo‘ladigan «so‘z»larda harflar faqat bir martadan qatnashsa, ya’ni takrorlanmasa, buning uchun, masalan, ikkala „a“ harfi ikkita alohida olingan element deb qabul qilinsa, takrorsiz o‘rin almashtirishlarga ega bo‘lamiz. Bu holda ularning soni 2-band, (1) formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$P = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Izlanayotgan sonni (1) formula bo‘yicha ham topish mumkin edi:

$$P(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)=\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=720.$$

Takrorsiz o‘rin almashtirishlar soni uchun 2-band, (1) formula ushbu bandda chiqarilgan (1) formulaning xususiy holidan iborat.

(1) formula bo‘yicha $P(m-k,\ k)=\frac{m!}{(m-k)!\cdot k!}=C_m^k$ bo‘ladi. Bu tenglikdan foydalanib, Nyuton binomi formulasini quyidagicha yozamiz:

$$(x+a)^m=P(m,\ 0)x^m+P(m-1,\ 1)x^{m-1}a+\ldots+P(0,\ m)a^m,$$

yoki

$$(x+a)^m=\sum_{k=0}^{m}P(m-k,\ k)x^{m-k}a^k, \tag{2}$$

yoki, umuman:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^k=\sum P(k_1,\ \ldots,\ k_t)x_1^{k_1}\ldots x_t^{k_t}, \tag{3}$$

bunda k va t – ixtiyoriy sonlar, $k_1+,\ \ldots,\ +k_t=k$ – nomanfiy butun sonlar yig‘indisi, xususan, $x_1=x_2=\ldots=1$ da $t^k=\sum P(k_1,\ \ldots,\ k_t)$ bo‘ladi.

5-misol. 1) $(a+b+c)^2$; 2) $(a+b+c)^3$; 3) $(a+b+c)^4$ ifodalarni (3) formuladan foydalanib yoyamiz.

1) $(a+b+c)^2=\sum P(k_1,\ k_2,\ k_3)a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}$, bunda yig‘indi barcha $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ uchtaliklarga nisbatan tuziladi va $k=k_1+k_2+$ $+k_3=2$. Uchtaliklar:

(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1).

Ulardagi takrorlanishlar soni:

$$P(0,\ 0,\ 2)=P(0,\ 2,\ 0)=P(2,\ 0,\ 0)=\frac{2!}{0!\cdot 0!\cdot 2!}=1,$$

$$P(1,\ 1,\ 0)=P(1,\ 0,\ 1)=P(0,\ 1,\ 1)=\frac{2!}{1!\cdot 1!\cdot 0!}=2.$$

Natijada ifoda ushbu ko‘rinishga keladi:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

2) Yechish yuqorida ko‘rsatilganidek. Bunda $k=k_1+k_2+k_3=$ $=3$. Uchtaliklar:

(3,0,0), (0,3,0), (0,0,3), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (0,1,2), (0,2,1), (1,1,1).

Ulardagi takrorlanishlar soni:

$$P(0,\ 0,\ 3)=P(0,\ 3,\ 0)=P(3,\ 0,\ 0)=\frac{3!}{0!\cdot 0!\cdot 3!}=1,$$

$$P(2,\ 1,\ 0)=P(2,\ 0,\ 1)=P(1,\ 2,\ 0)=P(1,\ 0,\ 2)=$$

$$=P(0,\ 1,\ 2)=P(0,\ 2,\ 1)=\frac{3!}{2!\cdot 1!\cdot 0!}=3,$$

$$P(1,\ 1,\ 1)=\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}=6.$$

Natijada:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3bc^2+3b^2c+6abc.$$

3) $k=k_1+k_2+k_3=4$. Uchtaliklar:

(4, 0, 0), ..., (3, 1, 0), ..., (2, 2, 0), ..., (2, 1, 1), ..., (1, 1, 2).

Uchtaliklarning takrorlanishlari soni:

$$P(4,\ 0,\ 0)=...=P(0,\ 0,\ 4)=\frac{4!}{4!\cdot 0!\cdot 0!}=1,\ P(3,\ 1,\ 0)=...=\frac{4!}{3!\cdot 1!\cdot 0!}=4,$$

$$P(2,\ 2,\ 0)=...=\frac{4!}{2!\cdot 2!\cdot 0!}=6,\ P(2,\ 1,\ 1)=...=\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=12$$

va natijada:

$$(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4b^3a+4b^3c+4ac^3+$$
$$+4bc^3+6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2.$$

Mashqlar

8.23. «Uchburchak» so‘zidagi harflarni o‘rin almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin? «Almashtirish» so‘zidagini-chi? «Kombinatorika» so‘zidagini-chi?

8.24. O‘quvchining 3 ta ko‘k, 4 ta qora, 5 ta qizil qalami bor. Ulardan faqat bittasini necha xil usul bilan tanlashi mumkin?

8.25. Mukofot uchun bir kitobdan 4 dona, ikkinchisidan 3 dona, uchinchisidan 6 dona ajratilgan. Agar har kishiga bittadan ortiq kitob berilmaydigan bo‘lsa, bu mukofotni 30 kishi o‘rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

8.26. «Aylana» so‘zidagi «a» harfi qatorasiga uch marta kelmaydigan qilinib, necha xil usul bilan o‘rin almashtirish mumkin?

8.27. «Trigonometriya» so‘zidagi harflarni «o» harfi qatorasiga ikki marta kelmaydigan qilib, necha xil usul bilan o‘rin almashtirish mumkin?

8.28. 1) $(a+b+c)^4$; 2) $(a+b+c+d)^5$ yoyilmasidagi hadlar sonini toping va biror hadini yozing.

8.29. 1) $(a+b+c)^8$; 2) $(a+b+c+d)^{10}$ yoyilmasidagi eng katta koeffitsiyentni toping.

8.30. $(1+x+2x^2)^8$ yoyilmasida x^6 oldidagi koeffitsiyentni toping.

5. Takrorli kombinatsiyalar. Elementlari soni $m=2$ ta bo'lgan $M\{a, b\}$ to'plam berilgan. a dan k_1 ta, b dan k_2 ta, jami $k=k_1+k_2=$ $=4$ ta olinib, elementlari bilan farq qiluvchi to'rttaliklar tuzaylik:

(a, a, a, a), bunda $k_1=4$, $k_2=0$, ya'ni tarkibi (4;0) ikkilik,
(a, a, a, b), bunda $k_1=3$, $k_2=1$, ya'ni tarkibi (3;1) ikkilik,
(a, a, b, b), bunda $k_1=2$, $k_2=2$, ya'ni tarkibi (2;2) ikkilik,
(a, b, b, b), bunda $k_1=1$, $k_2=3$, ya'ni tarkibi (1;3) ikkilik,
(b, b, b, b), bunda $k_1=0$, $k_2=4$, ya'ni tarkibi (0;4) ikkilik,

bunda elementlar tartibi rol o'ynamasin. Shunga ko'ra, masalan, $(a, a, a, a)=(a, a, a, b)=\ldots$ deb qabul qilinadi. Biz elementlari takrorlangan kombinatsiyalarga ega bo'lamiz. Ularning sonini $\bar{C}_m^k$ orqali belgilaylik. Bizda $\bar{C}_2^4=5$ bo'lmoqda. Bu sonni hisoblash yo'lini topish maqsadida to'rttalik tarkibidagi k_1 va k_2 sonlarini 1, vergullarni 0 orqali almashtiraylik. Masalan, tarkibi (3; 1) bo'lgan ikkitalik bo'yicha (1, 1, 1, 0, 1) beshtalikni hosil qilamiz, unda $k=4$ ta 1, $m-1=2-1=1$ ta 0 ishtirok etadi. Har qaysi beshtalikka aynan bitta ikkitalik mos va, aksincha, har qaysi ikkitalikka bitta beshtalik mos. Shunga ko'ra izlanayotgan ikkitaliklar soni $k=4$ ta 1 lar va $m-1=1$ ta 0 dan tuzilgan beshtaliklar soniga teng. Takrorli o'rin almashtirishlar formulasi bo'yicha bunday beshtaliklar soni $P(4;\ 1)=\frac{(4+2-1)!}{4!\cdot 1!}=\frac{5!}{4!}=5$.

m xil elementdan k tadan olinib, shunday k taliklar tuzilishi kerak bo'lsin-ki, ular hech bo'lmasa bir elementi bilan farq qilsin, bir xil elementlardan tuzilganlari esa teng hisoblansin (elementlarning tartibi ahamiyatsizdir). Bunday k taliklarga m elementdan k tadan olib tuzilgan *takrorli kombinatsiyalar* deyiladi. Ularning soni $\bar{C}_m^k$ orqali belgilanadi. Shu sonni topaylik.

Kombinatsiyaning har qanday tarkibi nomanfiy butun sonlardan tuzilgan m talik $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ bilan beriladi va bundagi k_1 son kombinatsiyadagi birinchi xil elementning, k_2 ikkinchi xil elementning, ..., k_m m- xil elementning sonini ko'rsatadi. Shunday qilib, $\bar{C}_m^k$ son m uzunlikdagi $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ sonli m talikdagi har qaysi k_i sonni k_i ta 1 lar ketma-ketligi bilan, har qaysi vergulni 0 bilan almashtiramiz (agar $k_i = 0$ bo‘lsa, 1 lar yozilmaydi). Natijada $k_1 + k_2 + ... + k_m = k$ ta 1 lar va $m - 1$ ta 0 dan iborat $k + m - 1$ talik hosil bo‘ladi (bundagi barcha k_i lar nomanfiy butun sonlardan iborat). Ularning har birida vergullar sonlarga nisbatan bitta kam bo‘lishi tushunarli. Masalan, (4, 1, 0, 2) to‘rttalikka (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1) o‘ntalik mos. Shunday qilib, izlanayotgan m talik $(k_1, k_2, ..., k_m)$ lar soni k ta 1 lar va $m - 1$ ta 0 dan tuzilgan $k + m - 1$ liklar soniga teng bo‘ladi. Takrorli o‘rin almashtirishlar formulasi bo‘yicha bunday $k + m - 1$ taliklar soni

$$P(k,\ m-1) = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}$$

ga teng, ya’ni

$$\bar{C}_m^k = C_{k+m-1}^k. \qquad (1)$$

M i s o l. 4 xil kitobdan necha usul bilan 7 kitobdan iborat to‘plam yozish mumkin?

Y e c h i s h. Izlanayotgan son $\bar{C}_4^7$ ga yoki C_{7+4-1}^7 ga teng. Jami $C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 120$ to‘p.

M a s h q l a r

8.31. Savdoda 5 xil qalam bor. Ulardan 8 ta qalamni necha xil usul bilan olish mumkin? 6 tasini-chi? 4 tasini-chi?

8.32. Tomonlari 3, 4, 5, 6 sm bo‘la oladigan uchburchaklardan nechta yasash mumkin?

T a k r o r l a s h g a d o i r m a s h q l a r

8.33. 8 olma, 4 ta nok va 8 ta shaftolidan necha xil usul bilan bir necha meva tanlab olinishi mumkin (bir turdagi mevalar bir-biridan farq qilinmaydi)?

8.34. Ikkita «a», uchta «o» va sakkizta «v» harfidan nechta bittadan kam bo‘lmagan harfga ega «so‘z»lar tuzish mumkin?

8.35. 12 ta har xil detalni uch qutiga joylashtirmoqdalar. Bunda birinchi qutiga 3 ta detal, ikkinchisiga 5 ta detal, uchinchisiga qolgan detallarning hammasi joylashtirilishi kerak. Bu ishni necha usul bilan qilish mumkin?

8.36. 16 o‘quvchiga kitob tarqatilishi kerak. 10 ta birinchi xil, 6 ta ikkinchi xil kitob bor. Lekin o‘quvchilardan 4 tasiga 1-xil kitob, 5 tasiga 2-xil kitob kerak emas. Agar: 1) o‘quvchilarga kitoblarning qanday xilini berish tartibi e’tiborga olinmasa; 2) ham 1-xil, ham 2-xil kitobni berish tartibi e’tiborga olinsa; 3) faqat 1-xil kitobni berish tartibi e’tiborga olinsa, o‘quvchilarga kitob necha xil usul bilan berilishi mumkin?

8.37. Agar har qaysi son ikkita juft va uchta toq raqamdan iborat bo‘lib, unda hech qaysi ikki raqam takrorlanmasa, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlaridan qancha besh xonali sonlarni tuzish mumkin?

8.38. 5 kishi ingliz tilini, 6 kishi fransuz tilini biladi. Ulardan birinchi guruhga 3 ingliz, ikkinchisiga 4 fransuz tilini biluvchi kirishi kerak, uchinchi guruh esa uch kishidan iborat bo‘lib, ular ingliz tilini ham, fransuz tilini ham biluvchi bo‘lishi mumkin. Bunday guruhlar necha turli usul bilan tuzilishi mumkin?

8.39. O‘n qutiga 10 detal bittadan, shu jumladan 1-xil detallardan 2 ta joylashtirilishi kerak. Joylashtirishlarni necha turli usul bilan 1-xil detallar ketma-ket kelmaydigan qilib bajarish mumkin?

8.40. 6 ta oq va 9 ta ko‘k marka bor. Necha turli usul bilan 3 ta oq va 3 ta ko‘k markani 6 ta nomerlangan joyga yopishtirish mumkin?

8.41. Qavariq n burchakda diagonallarining hech qanday uchtasi bir nuqtada kesishmasa, qolgan hollarda diagonallar qancha nuqtada kesishadi?

8.42. 1, 3, 5, 7, 9 toq raqamlardan tuziladigan va har birida bu raqamlar takrorlanmaydigan to‘rt xonali sonlardan nechta tuzish mumkin?

8.43. 8.42-mashqda raqamlarning takrorlanishi mumkin bo‘lsa-chi?

8.44. 8.42-mashqda agar tuziladigan to‘rt xonali sonda ikkitadan ortiq bir xil raqam bo‘lmasligi talab etilsa-chi?

8.45. 8.42-mashqda tuziladigan to‘rt xonali son 2000 dan katta bo‘lmasligi talab qilinsa-chi?

8.46. «Rohat» so‘zi harflaridan besh harfli nechta har xil «so‘z» tuzish mumkin («so‘z» deganda harflarning istalgan ketma-ketligi tushuniladi)?

8.47. «Traktor» so‘zining harflaridan yetti harfli nechta har xil «so‘z» tuzish mumkin?

8.48. Birinchi o‘rinda 3 raqami, ikkinchi, uchinchi, to‘rtinchi va beshinchi o‘rinlarda 0, 1, 2, 3, ..., 9 raqamlaridan istalgan biri turadigan telefon nomerlaridan nechta tuzish mumkin?

8.49. To‘rt qutiga 4 tadan detal va bir qutiga 5 detal tushadigan qilinib, 21 ta detalni 5 qutiga necha turli xil usul bilan joylashtirish mumkin?

8.50. «Beshburchak» so‘zidagi harflarni necha usul bilan o‘rin almashtirib, unli harflarni alfavit tartibida joylashtirish mumkin?

8.51. «Cho‘pon» so‘zidagi harflar necha xil o‘rin almashtirilib, ikki unli harf o‘rtasiga ikki undosh harf kelishi mumkin?

8.52. «Topologiya» so‘zidagi harflarni necha usul bilan o‘rin almashtirib, ikkita «o» harfi qatorasiga (yonma-yon) turmaydigan qilish mumkin?

8.53. «Marmar» so‘zidagi harflarni necha usul bilan almashtirilib, ikkita bir xil harf ketma-ket kelmaydigan qilish mumkin?

8.54. 8 ta «a» va 8 ta «b» harfini necha usul bilan bir qatorga joylashtirib, ixtiyoriy $k \le 16$ uchun oldingi k ta harflar orasida «b» harfiga qaraganda kam bo‘lmaydigan qilish mumkin?

8.55. 33 ta harfli alifboda to‘rttadan har xil harf olinib, qancha «so‘z» tuzish mumkin?

8.56. Tenglamalarni yeching:

a) $\dfrac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \dfrac{2}{3},\ x \in N$;   b) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79,\ x \in N$.

8.57. Tenglamani yeching: $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = 1,5x,\ x \in N$.

8.58. Tengsizlikni yeching: $C_{13}^m < C_{13}^{m+2},\ m \in N$.

8.59. Tengsizlikni yeching: $5C_n^3 < C_{n+2}^4,\ n \in N$.

8.60. a) $x_n < C_{n+5}^4 - \dfrac{143}{96} \cdot \dfrac{P_{n+5}}{P_{n+3}},\ n \in N$ ketma-ketlikning manfiy hadlari nechta?

b) $x_n = \dfrac{195}{4P_n} - \dfrac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}},\ n \in N$ ketma-ketlikning musbat hadlari nechta?