O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

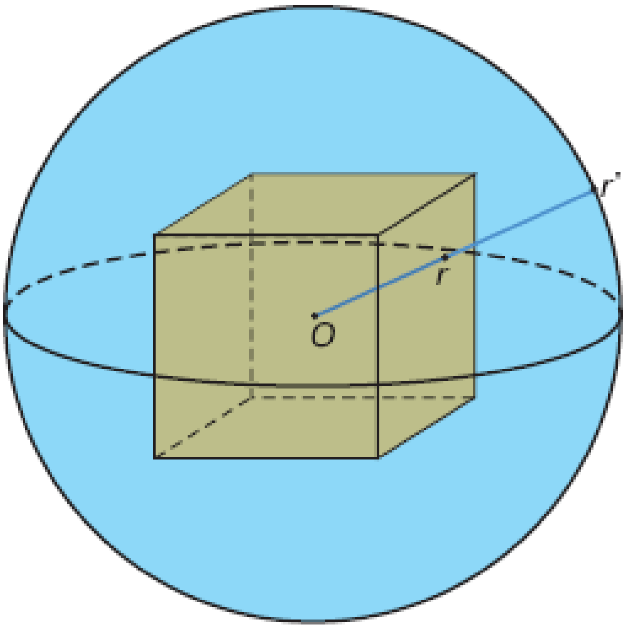
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI QOSHIDAGI OLIY PEDAGOGIKA INSTITUTI

“Tabiiy-ilmiy va aniq fanlar bo‘yicha qayta tayyorlash va malakasini oshirish pedagogika” kafedrasi

A.H.Hakimov, Q.S. Xoliqov, B.X.Ungarov, S.X. Abjalilov

GEOMETRIYADAN PRAKTIKUM

(uslubiy qo‘llanma)



Toshkent - 2008

Ushbu uslubiy qo‘llanma O‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi talabalari, oliy o‘quv yurtlariga o‘qishga kiruvchilar hamda matematika-informatika mutaxassisliklarining talabalariga mo‘ljallangan. Qo‘llanmada umumta’lim maktablarining «Geometriya» ko‘rsida uchramagan formulalar va «Axborotnoma»larda uchraydigan ayrim murakkab misol va masalalarni yechish usullari, shuningdek mustaqil yechish uchun masalalar keltirilgan.

Tuzuvchilar:

1. **Hakimov A.** –NDKI “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti
2. **Xoliqov Q.S.** – NPDI “Umumiy matematika” kafedrasi dotsenti
3. **Ungarov B.X.** – NDPI “Pedagogika” kafedrasi katta o‘qituvchisi
4. **Abjalilov S.X.** – NDPI “Umumiy matematika” kafedrasi o‘qituvchisi

Taqrizchilar:1. **Nazirov Sh.A.** – Toshkent axborot texnologiyalari universiteti f-m.f.d., professor
2. **Pirimov A.P.** – NDKI “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti

Ushbu uslubiy qo‘llanma O‘zMU qoshidagi OPI Ilmiy kengashida (29-oktabr 2008 yil № 3-bayonnomasi) muhokama qilindi va chop etishga tavsiya etildi.

So‘z boshi

«Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» dan ko‘zlangan asosiy maqsadlardan biri, ta’lim sohasini tubdan isloh qilishdan iboratdir.

Respublikamiz Prezidenti I.A.Karimov O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining 9 sessiyasida so‘zlagan nutqida:

«Olimlar orasida darslik yozishga pastroq bir ilmiy ish sifatida qarash millati bor. Nega bunday? Bu psihologiya qayerdan paydo bo‘lgan? Axir darsliklarda millat fikrining, millat tafakko‘ri va millat mafko‘rasining eng ilg‘or namunalari aks etishi kerak emasmi? Har bir soha bo‘yicha darslikning o‘sha fanning atoqli vakillari yozmaydilarmi? Biz darslik yaratishga eng ilg‘or va eng sharafli vazifa sifatida qarashimiz, yaxshi darslik yaratgan olimlarni boshimizga ko‘tarishimiz kerak. Darslikni agar kerak bo‘lsa katta tanlov asosida yaratish lozim!», - degan edi.

Darhaqiqat, ushbu uslubiy qo‘llanma “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonun va «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» ni amalga oshirishdagi muammolarning amaliy ishlaridan biridir. 1992-93 o‘quv yilidan boshlab oliy o‘quv yurtlariga test asosida talabalikka qabul qilish joriy etildi. Test sinovlari umumta’lim maktablari o‘quvchilaridan fan bloklari bo‘yicha chuqur bilim va ko‘nikma haqida mustaqil fikrga ega bo‘lishini talab qiladi.

Davlat test markazi tomonidan bir necha yillardan beri fanlar bo‘yicha test materiallari avvalo gazeta so‘ngra «Axborotnoma» tarzida maxsus kitobcha ko‘rinishida har bir o‘quv yili uchun e’lon qilingan edi. Test materiallari Xalq ta’limi vazirligi tomonidan tasdiqlangan o‘quv dasturlari asosida tuzilgan. Lekin ayrim masala va misollarda dastur doirasidan tashqariga chiqqanlik hollari uchrab turadi. Ana shu qiyinchiliklarni ma’lum ma’noda bartaraf etish maqsadida «Geometriya» fani bo‘yicha darsliklarda qayd etilmagan ba’zi bir formularlarni, shuningdek masalalarni o‘quvchilar hukmiga havola qilmoqdamiz. Qo‘llanmada mavzularga oid ta’rif va tushunchalar, formulalar, teoremalar hamda mustaqil yechish uchun tipik masalalar berilgan.

Mazkur qo‘llanma abituriyentlarni test sinovlariga tayyorlash jarayonida orttirilgan bir necha yillik tajriba asosida yozilishiga qaramasdan, ba’zi bir kamchiliklar bo‘lishi ehtimoldan holi emas. Shuning uchun bildirilajak tanqidiy fikr – mulohazalar uchun o‘quvchilar va hamkasblarimizga oldindan minnatdorchilik izxor etamiz.

PLANIMETRIYA

§1.1. Uchburchaklar

Ushbu mavzuga doir misol va masalalarni yechishda quyidagilarni yodda tutish zarur.

1.Uchburchaklarning tenglik alomatlari:

Ikki uchburchak teng bo‘lishi uchun quyidagi shartlardan biri bajarilishi kerak:

a) birinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa;

b) birinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan burchaklari boshqa uchburchakning mos tomoni va unga yopishgan burchaklariga teng bo‘lsa;

s) birinchi uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo‘lsa.

To‘g‘ri burchakli uchburchaklarning tenglik alomatlari: ikki to‘g‘ri burchakli uchburchak bir-biriga teng bo‘lishi uchun quyidagi shartlardan biri bajarilishi kerak:

a) gipotenuzasi va bir o‘tkir burchagi ikkinchisining gipotenuzasi va bir o‘tkir burchagiga teng bo‘lsa;

b) kateti va qarshisidagi burchagi ikkinchisining mos kateti va qarshisidagi burchagiga teng bo‘lsa;

s) gipotenuzasi va bir kateti mos ravishda ikkinchisining gipotenuzasi va bir katetiga teng bo‘lsa.

2.Uchburchak yuzasini hisoblash formulalari:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)} \text{ (Geron formulasi);}$$

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R},$$

$$S_\Delta = pr.$$

Bu yerda va bundan keyin a, b, c – uchburchakning tomonlari h_a, h_b, h_c uchburchakni mos tomoni balandliklari; α, β, γ - uchburchakni mos ravishda *a, в*, *c* tomonlari qarshisidagi ichki burchaklari; $r = \frac{1}{2}(a+b+c)$ - yarim perimetr; *R* – uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi; r-uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi, S_Δ – uchburchak yuzi.

3.Uchburchaklarni o‘xshashlik alomatlari:

Ikki uchburchak uchun quyidagi shartlardan biri o‘rinli bo‘lsa, ular o‘zaro o‘xshash deyiladi:

a) bir uchburchaknihg ikki burchagi mos ravishda ikkinchi uchburchakning ikki burchagiga teng bo‘lsa;

b) bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional bo‘lib, ular orasidagi burchaklari teng bo‘lsa;

s) bir uchburchakning uch tomoni ikkinchi uchburchakning uch tomoniga proporsional bo‘lsa.

To‘g‘ri burchakli uchburchaklarning o‘xshashlik alomatlari:

Ikki to‘g‘ri burchakli uchburchak uchun quyidagi shartlardan biri o‘rinli bo‘lsa, ular o‘zaro o‘xshash deyiladi:

a) uchburchaklar teng o‘tkir burchaklarga ega bo‘lsa;

b) birinchisining katetlari ikkinchisining katetlariga proporsional bo‘lsa;

s) birinchisining kateti va gipotenuzasi ikkinchisining kateti va gipotenuzasiga proporsional bo‘lsa.

Uchburchaklarni o‘xshashlik ($\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$) koeffitsiyenti *k* ularni mos tomonlari nisbatiga teng:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$$

O‘xshash uchburchaklar uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:

a) mos balandliklar nisbati o‘xshashlik koeffitsiyentiga teng:

$$\frac{h_a}{h_{a_1}}=\frac{h_b}{h_{b_1}}=\frac{h_c}{h_{c_1}}=k\ ;$$

b) perimetrlar nisbati o‘xshashlik koeffitsiyentiga teng:

$$\frac{P}{P_1}=k\ ;$$

s) tashqi chizilgan (ichki chizilgan) aylana radiuslari nisbati o‘xshashlik koeffitsiyentiga teng:

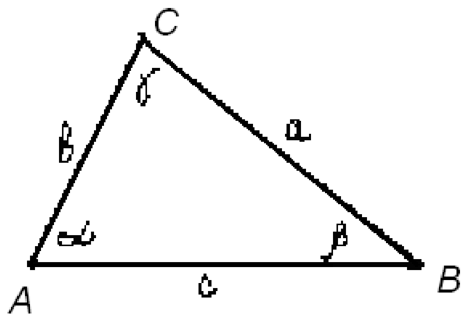
$$\frac{r}{r_1}=\frac{R}{R_1}=k\ ;$$

d) yuzlari nisbati o‘xshashlik koeffitsiyenti kvadratiga teng:

$$\frac{S}{S_1}=k^2;$$

4. Sinuslar teoremasi:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,.$$



5. Kosinuslar teoremasi:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

6. Uchburchak medianasi ta’rifi va xossalari:

Uchburchakni medianasi deb, uchburchakni uchi bilan qarshisidagi tomon o‘rtasini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Mediananing asosiy xossalari:

a) uchburchakni o‘rta chizig‘i deb ataluvchi tomonlari o‘rtasini tutashtiruvchi kesmalar, tomonlarga parallel va mos tomon yarmiga teng;

b) uchburchakning medianalari bir nuqtada kesishadi va uchidan boshlab hisoblaganda 2:1 nisbatda bo‘linadi;

s) mediana uchburchakni ikkita tengdosh uchburchakka ajratadi;

d) O nuqta ΔABC ni medianalari kesishgan nuqtasi bo‘lsin, $\Delta ABO\,,\Delta BCO\,,\Delta ACO$ uchburchaklarni yuzlari teng va ularning yig‘indisi ΔABC yuzasiga teng bo‘ladi.

Mediana va tomon uzunliklarini bog‘lovchi formulalarni esda tutish lozim:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\ ;$$

$$m_a=\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2-ac\cos\beta}\ ;$$

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}\ .$$

Bu yerda m_a, m_b, m_c - ΔABC uchburchakning mos ravishda a,b,c tomonlariga o‘tkazilgan medianalar uzunliklari (xuddi shu kabi formulalarni qolgan tomon va medianalar uchun ham hosil qilish mumkin).

7. Uchburchak balandligi ta’rifi va hisoblash formulalari:

Uchburchakning berilgan uchidan tushirilgan balandligi deb, shu uchidan uning qarshisidagi tomoni yotgan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.

Ixtiyoriy uchburchak balandliklari, tomonlari, burchaklari va ichki chizilgan aylana radiusini bog‘lovchi formulalar:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta, \qquad h_b = c\sin\alpha = a\sin\gamma, \qquad h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha,$$

$$h_a = \frac{2S_\Delta}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)},$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r};$$

8. Uchburchak bissektrisasi ta’rifi va xossalari:

Uchburchakni berilgan uchidan o‘tkazilgan bissektirsasi deb, uchburchak burchagi bissektirsasining shu uchni uning qarshi tomondagi nuqta bilan tutashtiruvchi kesmasiga aytiladi.

Uchburchak bissektrisasi asosiy xossalari:

a) uchburchak uchta bissektrisasi bir nuqtada kesishadi, bu nuqta uchburchakni ichki nuqtasi bo‘lish bilan birga ichki chizilgan aylana markazi bo‘ladi;

b) uchburchak bissektrisasi tomonlaridan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rnidir;

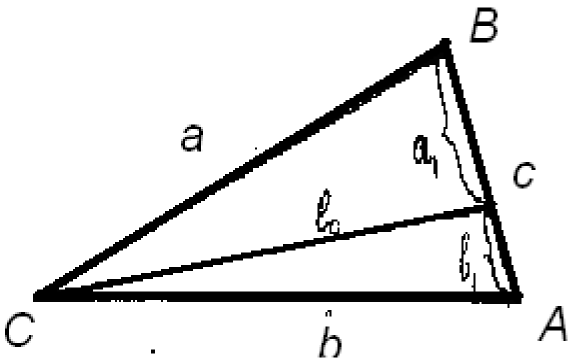
s) uchburchak bissektrisasi qarshisidagi tomonni shu burchakka yopishgan tomonlariga proporsional qismlarga ajratadi.

Uchburchakning tomonlari va bissektrisalarini bog‘lovchi formulalarni esda tutish foydali:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b};$$

$$l_c = \frac{\sin\beta}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{ac}{b+a} = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+c}$$

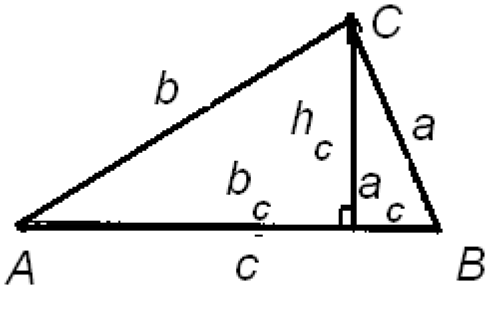


l_c - ΔABC uchburchakni C uchidan chiqqan bissektrisasi uzunligi;

9. Uchburchakning maxsus hollardagi medianasi, bissektrisasi, balandligi va tomonining ba’zi bir xossalari:

a) teng yonli uchburchakning balandligi, bissektrisasi medianasi ustma-ust tushadi;

b) teng tomonli uchburchakning har bir uchidan tushirilgan medianasi, bissektrisasi, balandligi ustma-ust tushadi;



s) to‘g‘ri tomonli uchburchakda $a, в$ - katetlari va c-gipotenuzasi quyidagi tenglik bilan bog‘langan (Pifagor teoremasi)

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

d) to‘g‘ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzasi va shu katetining gipotenuzadagi proyeksiyasiga o‘rta proporsional;

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \qquad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c};$$

d) to‘g‘ri burchakli uchburchakning to‘g‘ri burchagidan tushirilgan balandligi, katetlarning gipotenuzadagi proyeksiyalariga o‘rta proporsional:

$$\frac{b_c}{h_c} = \frac{h_c}{a_c};$$

e) to‘g‘ri burchakli uchburchakda tomonlar va burchaklarni bog‘lovchi tengliklar:

$$a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha.$$

1-masala. To‘g‘ri burchakli uchburchakning perimetrlari 132 ga teng, tomonlari kvadratlari yig‘indisi 6050. Katta va kichik katetlari orasidagi farqini toping.

Yechish:

a, b - katetlar; c - gipotenuza va $a > b$ bo‘lsin. Masala shartidan quyidagi tengliklar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a+b+c=132 \\ a^2+b^2+c^2=6050 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamaga uchinchi tenglamani qo‘ysak, $c^2=3025$ yoki $c=55$. U holda a va b larni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} a+b=77 \\ a^2+b^2=3025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=77-a \\ a^2+(77-a)^2=3025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=77-a \\ a^2-77a+1452=0 \end{cases}$$

bu yerdan a ni ikkita qiymatini hosil qilamiz: $a_1=44$, $a_2=33$, xuddi shuningdek b ni ham mos ikkita qiymatini hosil qilamiz: $b_1=33$, $b_2=44$ $в_1$=33, $в_2$=44.

$a > b$ shartga ko‘ra $a=44, b=33$. Bundan $a-b=11$.

Javob: 11.

2-masala. Agar teng yonli uchburchakning asosiga va yon tomoniga o‘tkazilgan balandliklari mos ravishda 5 va 6 sm bo‘lsa, uchburchakning tomonlarini toping.

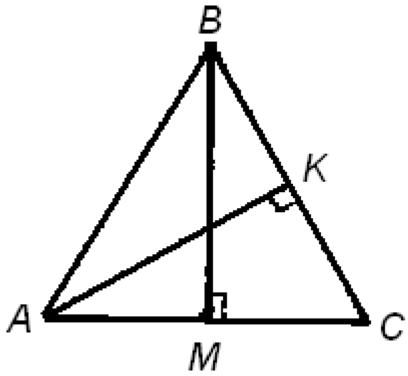
Yechish:

Shartga ko‘ra $AB = BC$, $BM = 5sm$, $AK = 6sm$.

Bizga ma’lumki,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} BC \cdot AK,$$

bu yerdan $AC = \frac{6}{5} BC$



ΔBCM to‘g‘ri burchakli uchburchakda Pifagor teoremasiga ko‘ra

$$BC^2 = BM^2 + \frac{1}{4} AC^2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikka AC va BC larni topilgan ifodasini keltirib qo‘ysak, $AB=BC=6{,}25sm$, $AC=7{,}5sm$ ni hosil qilamiz.

Javob: 7,5; 6,25

3-masala. To‘g‘ri burchakli uchburchakni gipotenuzaga tushirilgan balandligi 10sm va u gipotenuzani 2 qismga ajratadi. Qismlardan biri ikkinchisini 30% ni tashkil qiladi. Uchburchakni yuzini toping.

Yechish:

Ma'lumki, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=5AC,\ AC=AD+DC$. To'g'ri burchakli uchburchakni to'g'ri burchagidan o'tkazilgan balandligi haqidagi teoremaga ko'ra $BD^2=AD\cdot CD$ ga ega bo'lamiz. Masala shartiga ko'ra $\frac{AD}{CD}=\frac{3}{10}$. Oxirgi ikki tenglama noma'lum *AD* va *CD* larni topishga imkon beradi:

$AD=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$, $CD=\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$ bundan $AC=13\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Izlanayotgan yuza $S_{\Delta}=65\sqrt{\frac{10}{3}}$ sm^2.

Javob: $65\sqrt{\frac{10}{3}}$ sm^2.

4-masala. Uchburchakni asosi 60. Asosga o'tgakizgan balandligi va medianasi mos ravishda 12 va 13. Asosi va katta yon tomoni orasidagi farqni toping.

Yechish: ΔBDE uchburchakda *BD*=12, *BE* =13, $DE=\sqrt{BE^2-BD^2}=5$, xuddi shuningdek, $AD=\frac{1}{2}AC-DE=25$, $DC=EC+DE=35$.

Uchburchakni yon tomonlarini ΔADB va ΔDCB to'g'ri burchakli uchburchaklardan foydalanib topamiz: $AB=\sqrt{769}$, *BC*=37. U holda izlanayotgan farq: *AC* – *BC* =23.

Javob: 23.

5-masala. To'g'ri burchakli uchburchakni to'g'ri burchagidan o'tkazilgan bissektrisasi gipotenuzani m:n nisbatda bo'ladi. Bu uchburchakni burchaklarini aniqlang.

Yechish: Shartga ko'ra $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$. Ichki burchakni bissektrisasi xossasiga ko'ra

AD:AC=BD:BC =m:n.

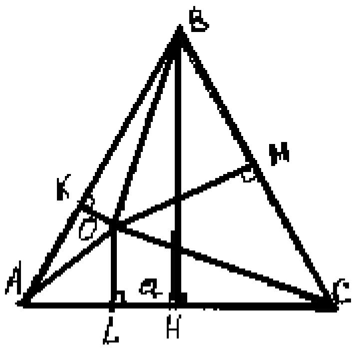
ABC uchburchak to'g'ri burchakli ekanligidan: $AC:BC=tg\beta$. U holda $\beta=arcctg\frac{m}{n}$, $\alpha=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{m}{n}$.

Javob: arctg $\frac{m}{n}$, $\frac{\pi}{2}-arctg\frac{m}{n}$;

6- masala. Uchburchakni balandligi asosini 36 sm va 14 sm bo'lgan qismlarga bo'ladi. Uchburchak yuzasini teng ikkiga bo'luvchi, asosiga perpendikulyar to'g'ri chiziq asosni qanday qismlarga ajratadi?

Yechish: Shartga ko'ra *AD*=36 sm, *DC*= 14 sm. *ADB* va ΔCBD uchburchaklarni yuzalarini S_1 va S_2 desak, ular umumiy balandlikka ega. U holda S_1+S_2 ΔABC uchburchakni yuzi shartga ko'ra ΔEKC yuzani teng ikkiga bo'ladi. Demak, bu to'g'ri chiziq *AC* asosni *A* va *D* nuqtalari orasidan o'tadi. Bundan ΔAKE uchburchakni S_3 yuzasi $\frac{1}{2}$S ga teng ekanligini aniqlaymiz. ΔAKE va ΔADB uchburchaklarni o'xshashligidan ularni yuzalari nisbati *AK* va *AD* tomonlari kvadratlari nisbatiga teng. U holda, $S_1:S_3=\frac{18}{25}S:\frac{1}{2}S=36^2:AK^2$, bu yerdan *AK*=30 sm ekanligi kelib chiqadi, demak, *KC=AC – AK* =36+14 – 30 = 20.

Javob: 30 sm; 20 sm;



7-masala. Teng tomonli uchburchakning ixtiyoriy ichki nuqtasidan tomonlarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi balandlikka tengligini isbotlang.

Yechish. O nuqta uchburchakni ixtiyoriy ichki nuqtasi bo‘lsin. O nuqtani uchburchak uchlari bilan tutashtiramiz. ΔAOB ,ΔBOC va ΔCOA uchburchak yuzalari yig‘indisi ABC uchburchak yuzasini beradi. Uchburchak tomonini *a*, balandligini h bilan belgilasak.

$(OK+OL+OM)\dfrac{a}{2}=\dfrac{ah}{2}$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan *h=OK+OL+OM* kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Uchburchakni asosi 12 sm, asosidagi burchaklaridan biri 120^0. Bu burchak qarshisidagi tomon 28 sm. Uchinchi tomonini toping.

Javob: 20 sm.

2. Uchburchak asosi 20 sm, yon tomonlariga o‘tkazilgan medianalari 18 sm. Uchburchak yuzini toping.

Javob: 288 sm^2

3. Teng yonli uchburchakni asosidagi burchagi α bo‘lib, 45^0 dan katta. Yuzasi S. Asosidagi burchagidan chiqqan balandlik va asos katnashgan uchburchak yuzini toping.

Javob: $-2S\cos^2\alpha\cdot\cos2\alpha$.

4. ΔABC uchburchakni A burchagi o‘zgarmasdan AB tomoni 25% ga, AC tomoni 80% ga uzaytirildi. Hosil bo‘lgan uchburchak yuzi berilgan uchburchak yuzidan necha marta ortiq?

Javob: 2,25 marta

5. To‘g‘ri burchakli ΔABC uchburchak katetlari 1dm va lg $10\sqrt{3}$ o‘tkir burchaklarining gradus o‘lchovini toping.

Javob: 30^0 ; 60^0

6. To‘g‘ri burchakli uchburchak katetlari a va b. to‘g‘ri burchagi bissektirisasi uzunligini toping.

Javob: $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$

7. To‘g‘ri burchakli teng yonli uchburchakni katetlariga o‘tkazilgan medianalari orasidagi burchakni toping.

Javob: $\arccos\dfrac{4}{5}$

8. ΔABC teng yonli uchburchakning *AD* medianasi *AC* asosi bilan hosil qilgan burchagi tangensi 0,5 ga teng. $\angle ABC$ ning kosinusini toping.

Javob: 0,28.

9. ΔABC uchburchakning *C* burchagi 60^0 , AB tomoni uzunligi $\sqrt{31}$. AC tomonida 3 ga teng *AD* kesma qo‘yilgan. Agar *BD* uzunligi $2\sqrt{7}$ bo‘lsa, *BC* tomon uzunligini toping.

Javob: 6.

§1.2. To‘rtburchaklar

To‘rtburchaklarning quyidagi asosiy ta’rif va xossalarini esda tutish lozim:

1. ixtiyoriy qavariq to‘rtburchakni yuzasi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi,$$

bu yerda d_1 , d_2 – to‘rtburchakni diagonallari; φ- ular orasidagi burchak;

2. to‘rtburchak ichki burchaklari yig‘indisi 360^0;

3. agar to‘rtburchakning qarama – qarshi tomonlari juft-jufti bilan parallel bo‘lsa, bunday to‘rtburchak ***parallelogram*** deyiladi;

Parallelogramning asosiy xossalari:

1. parallelogramning qarama-qarshi tomonlari teng;
2. parallelogramning qarama-qarshi burchaklari teng;
3. parallelogramning diagonallari kesishadi va kesishishi nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi;
4. parallelogramning diagonallari kvadratlarining yig‘indisi, tomonlari kvadratlari yig‘indisiga teng;
5. parallelogramning ikki qo‘shni burchagi yig‘indisi 180^0 ga teng.

Parallelogramning yuzasi quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$S = ah_a = bh_b; \qquad S = ab\sin\alpha; \qquad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi,$$

bu yerda a, b - parallelogram tomonlari; h_a, h_b mos ravishda tomonlariga o‘tkazilgan balandliklar; α- parallelogramm burchagi; d_1 , d_2 – parallelogram diagonallari φ - ular orasidagi burchak.

4. ***Romb*** hamma tomoni teng parallelogramdir. Romb uchun parallelogramning barcha xossalari o‘rinli.

Rombning qo‘shimcha xossalari:

1. rombni diagonallari perdendikulyar;
2. rombni diagonallari uning burchaklari bissektrisalaridir;
3. rombni yuzi xuddi parallelogram yuzi kabi hisoblanadi.
4. romb uchun $\varphi=90^0$ bo‘lganligidan uning yuzi:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2,$$

formula bilan hisoblanishi mumkin. Bu yerda d_1, d_2 rombni diagonallari uzunligi.

5. Hamma burchaklari to‘g‘ri burchak bo‘lgan parallelogram ***to‘g‘ri to‘rtburchak*** deyiladi**.** To‘g‘ri to‘rtburchak yuzasi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$S = ab;$$

$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi,$$

bu yerda a va b – to‘g‘ri to‘rtburchakni qo‘shni tomonlari; d – diagonali uzunligi; φ -diagonallari orasidagi burchak.

Kvadrat hamma tomoni teng to‘g‘ri to‘rtburchak**.** Kvadrat uchun parallelogram, romb va to‘g‘ri to‘rtburchakning barcha xossalari o‘rinli. Kvadrat yuzasi quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$S = \frac{1}{2}d^2$$

$$S = a^2$$

bu yerda a - kvadrat tomoni; d – dioganali.

6. Ikki tomoni parallel qolgan ikki tomoni palallel bo‘lmagan to‘rtburchak ***trapetsiya*** deyiladi**.** Trapetsiya yuzasi asoslari a va $в$, balandligi h yordamida hisoblanadi:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

Shuni esda tutish kerakki, agar teng yonli trapetsiyani diagonallari o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa, uning yuzi balandligi kvadratiga teng bo‘ladi:

$$S = h^2.$$

Trapetsiyaning ***o‘rta chizig‘i*** deb, yon tomonlari o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Trapetsiya o‘rta chizig‘ining xossalari:

1) Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i asoslariga parallel va ular yig‘indisining yarmiga teng:

$$l = \frac{a+b}{2}.$$

2) o‘rta chiziq trapetsiya balandligini teng ikkiga bo‘ladi.

<u>1- misol.</u> Diagonallari perpendikulyar, asoslari 12 va 20 bo‘lgan teng yonli trapetsiyaning yuzini toping.

Yechish. a = 20, b = 12 bo‘lsin. U holda trapetsiyaning yuzi $S = \frac{a+b}{2}$ h=16h. Ikkinchi tomondan trapetsiya teng yonli va diagonallari perpendikulyar bo‘lganligi uchun S = h^2. Tenglamalarni chap tomonlari tengligi uchun uning tomonlarini tenglashtirib, h = 16 bundan
S = 16^2 = 256 ekanligini aniqlash mumkin.

Javob: 256

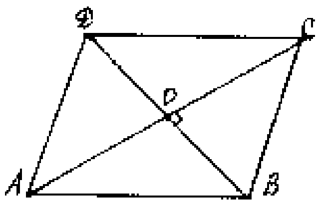
<u>2- misol.</u> Rombni perimetri 2, diagonallari yig‘indisi 1,3. Rombni yuzini toping.

Yechish. *a*- rombni tomoni; d_1, d_2 - romb diagonallari. Masala shartidan $a = 0{,}5$, $d_1 + d_2 = 1{,}3$. Rombni diagonallari perpendikulyarligidan Δ AOB da Pifagor teoremasiga ko‘ra

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$$

Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} d_1^2 + d_2^2 = 1 \\ d_1 + d_2 = 1{,}3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^2 + 2d_1d_2 = 1{,}69 \\ d_1^2 + d_2^2 = 1 \end{cases}$$



u holda

$$d_1d_2 = 0{,}345; \quad S = \frac{1}{2}d_1d_2 = 0{,}1725$$

Javob: 0,1725.

<u>3- misol.</u> To‘g‘ri to‘rtburchak va kvadrat teng yuzaga ega, lekin to‘g‘ri to‘rtburchak diagonali kvadrat diagonalidan $\sqrt{2}$ marta katta. To‘g‘ri to‘rtburchakni diogonallari kesishishida hosil qilingan o‘tkir burchakni aniqlang.

Yechish.

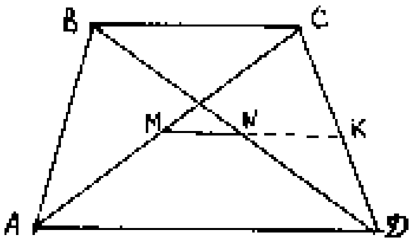
d va $d^{/}$, S va S′ - mos ravishda to‘g‘ri to‘rtburchak va kvadratni diagonallari va yuzalari bo‘lsin. Shartga ko‘ra $d = \sqrt{2}\, d'$; $S = S'$. Lekin $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$, : $S' = \frac{1}{2} d'^2$. Bundan $d^2 \sin\varphi = d'^2$,

$$\sin\varphi = \left(\frac{d'}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$ Demak $\alpha = 30^0$.

Javob: 30^0.

4-misol. Trapetsiyaning kichik asosi *a* va diagonallari o‘rtalari orasidagi masofa *v* ekanligini bilgan holda trapetsiyani katta asosini toping.

Yechish: M va N – trapetsiya diagonallari o‘rtalari bo‘lsin, u holda MN=*v*. MK kesmani o‘tkazamiz. Bilamizki *MK ACD* uchburchakni o‘rta chizig‘i. Ma’lumki *AD=2MK*. *NK* – – *BCD* uchburchakni o‘rta chizigi, $NK = \frac{a}{2}$. U holda



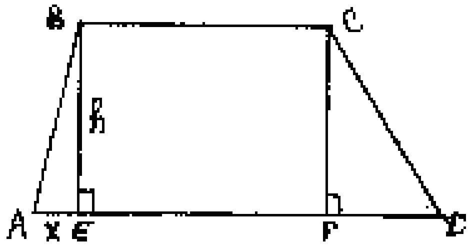
AD = 2MK=2(MN+NK)= a + 2v.

Javob: *a* + 2*v*.

5-misol. Asoslari 16 va 44 sm, parallel boʻlmagan tomonlari 17 va 25 sm boʻlgan trapetsiyani yuzini hisoblang.

Yechish:

Shartga koʻra *AD*=44 sm va *BC*=16 sm. Ma’lumki, *AE*+*FD*=28 sm. AE=x sm boʻlsin. U holda *FD*=28-x. Shart boʻyicha *AB*=17 sm va *CD*=25 sm Demak, $BE^2 = 17^2 - X^2$ va $CF^2 = 25^2 - (28 - X)^2$, $17^2 - X^2 = 25^2 - (28 - X)^2$ tenglamadan X = 8 sm. Bulardan balandlikni topamiz:



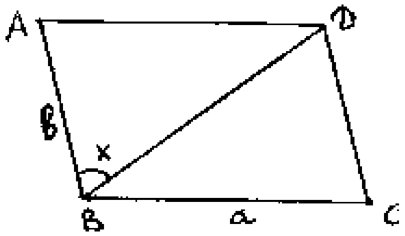
$$h = BE = \sqrt{17^2 - x^2} = 15cm.$$

$$S = \frac{a + в}{2} h = 450 \text{ cm}^2.$$

Javob: 450 sm^2

<u>6- misol.</u> Parallelogramning perimetri 90 sm, oʻtkir burchagi 60^0. Uning diagonali oʻtmas burchagini 1:3 nisbatda boʻladi. Parallelogram tomonlarini toping.

Yechish. Shartga koʻra $\alpha = 60^0$; *a*+*b* = 45 sm.
(∠ABD): (∠DBS) =1:3 . ∠*ABD* ni x desak,
$x+3x+\alpha = 180^0$, $x=30^0$ ekanligini koʻrish mumkin.
Bundan ∠*ABD* =90^0 ga teng. U holda Δ*AB D* dan



$$v = a \sin x = a \sin 30^0 = \frac{a}{2}\ .\ a + b = 45$$

ekanligini e’tiborga olsak, *a*=30 sm, *b* = 15 sm.

Javob: 30 sm, 15 sm

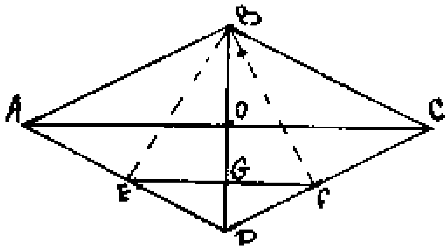
<u>7- misol.</u> Rombni oʻtmas burchagidan uning tomonlariga perpendikulyarlar oʻtkazilgan. Har bir perpendikulyar uzunligi *a* ga teng. Perpendikulyarlarning tomonlar bilan kesishgan nuqtalari orasidagi masofa *v* ga teng. Rombni yuzini toping.

Yechish.

Shartga koʻra *BE* = *BF* = *a*, *EF* = *B*. Demak

$$EG = b/2,\ BG = \sqrt{a^2 - (b/2)^2}.$$

Proporsional kesmalar haqidagi teoremaga koʻra BDE uchburchakdan



$$BD = \frac{BE}{BG} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - (b/2)^2}}.$$

ekanligini topamiz. Endi rombni AD tomonini topamiz. Teng yonli ΔABC va ΔBEF uchburchaklar oʻxshash, bundan ularning mos tomonlari nisbatlari teng boʻladi:

$$AB : BD = BE : EF, \quad AB : \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - (b/2)^2}} = a : b,$$

bu yerdan *AB* ni topamiz, soʻngra esa rombni yuzi *S* = *AB* · *a* ekanligi kelib chiqadi.

Javob: $\dfrac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. *ABCD* to‘rtburchakni tomonlari har xil, lekin *AC* va *BD* diagonallari o‘zaro perpendikulyar bo‘lib, mos ravishda 7 va 11 sm ga teng. To‘rtburchakni yuzini toping.

Javob: 38,5 sm^2.

2. Trapetsiya burchaklaridan biri 30^0, yon tomonlarini davom ettirganda to‘g‘ri burchak ostida kesishadi. Agar o‘rta chiziq 10 sm va kichik asosi 8 sm bo‘lsa, kichik yon tomonini toping.

Javob: 2 sm.

3. Rombni o‘tmas burchagi α va tomoni *a* ga teng. O‘tmas burchagi uchidan chiquvchi to‘g‘ri chiziqlar rombni teng uch qismga ajratadi. Bu to‘g‘ri chiziqlar kesmalari uzunliklarini aniqlang.

Javob: $\frac{a}{3}\sqrt{13+12\cos\alpha}$.

3. Trapetsiyaning parallel tomonlari 25 va 4 sm, parallel bo‘lmagan tomonlari uzunliklari 20 va 13 sm. Trapetsiyaning balandligini toping.

Javob: 12 sm.

5. Parallelogramning perimetri 44 sm. Diagonallari 4 ta uchburchakka ajratadi. Ikki uchburchak perimetrlari farqi 6 sm. Parallelogram tomonlari uzunliklarini toping.

Javob: 14 sm, 8 sm.

6. ABCD trapetsiyaning BD diagonali m , AD yon tomoni n. Agar asosi, diagonali va yon tomoni C uchidan o‘tishi ma’lum bo‘lib, ular bir-biriga teng bo‘lsa, CD asosi uzunligini toping.

Javob: $\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$

7. *ABCD* kvadratni uchlari bo‘lib, O nuqta kvadrat tashqarisidagi nuqta bo‘lsin. Agar *OA* = *OB* =5 va DO = 13 bo‘lsa, kvadrat yuzasini toping.

Javob: 2.

8. *ABCD* parallelogramda *BAD* burchagi $\frac{\pi}{3}$ bo‘lib, *AB* asosi 3 sm. A uchidan o‘tkazilgan bissektrisasi *BC* tomonini E nuqtada kesib o‘tadi. ABE uchburchak yuzini toping.

Javob: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

9. Trapetsiyani o‘rtachizig‘i 10 sm bo‘lib, trapetsiya yuzini 3:5 nisbatda bo‘ladi. Uning asoslarini toping.
Javob: 15 sm, 5 sm.

10. Kvadratga kvadrat ichki chizilgan, uni uchlari birinchisini tomonlarida yotadi. Ikkala kvadrat tomonlari orasidagi burchak 60^0 ga teng. Ichchki chizilgan kvadrat berilgan kvadratni qanday qismini tashkil etadi?

Javob: $\frac{4}{(\sqrt{3}+1)^2}$.

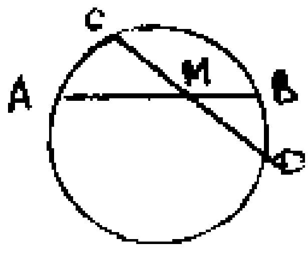
§ 1.3. Aylana va doira

Aylana va doira hamda ularni qismlarining asosiy ta’rifi va xossalarini esda tutish lozim.

1. Aylana va doirani ta’rifi:

Aylana deb, aylana markazi deb ataluvchi nuqtadan bir xil masofadagi nuqtalar to‘plamiga aytiladi**.**

Doira deb, doira markazi deb ataluvchi nuqtadan berilgan masofagacha bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Doira aylana va uning ichki nuqtalaridan tashkil topgan.



2. Vatarning ta’rifi va xossalari:

Vatar deb aylananing ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Vatarning asosiy xossalari:

a) diametr vatarni teng ikki bo‘lib, unga perpendikulyardir.

b) teng vatarlar aylana markazidan teng uzoqlikda joylashadi va aksincha aylana markazidan teng uzoqlikdagi vatarlar o‘zaro teng.

v) agar ikki vatar M nuqtada kesishsa

quyidagi munosabat o‘rinli:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$

3.Aylanaga o‘tkazilgan o‘rinmani ta’rifi va xossalari:

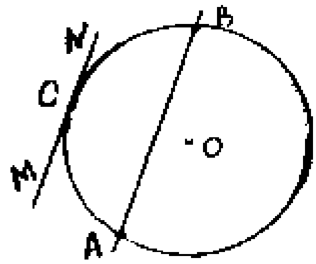
Aylanaga o‘tkazlgan ***o‘rinma*** deb, aylana bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.

Aylanaga o‘tkazilgan o‘rinmaning asosiy xossalari:

a) urinma aylanaga urinish nuqtasidan o‘tuvchi radius bilan o‘zaro perpendikulyar; agar to‘g‘ri chiziq radiusini oxiridan o‘tib unga perpendikulyar bo‘lsa, aylanaga o‘rinadi.

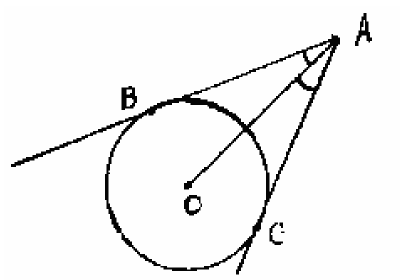
b) agar o‘rinma vatarga parallel bo‘lsa, u holda u vatarga tiralgan yoyni teng ikkiga bo‘ladi.

$$MN \parallel AB \Rightarrow \overset{\cup}{AC} = \overset{\cup}{BC}$$



s) Aylanaga o‘tkazilgan ikki o‘rinma aylana tashqarisida kesishadi. Bunda ular hosil qilgan kesmalar teng, kesishish nuqtasi va aylana markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘rinmalar bilan teng burchaklar hosil qiladi:

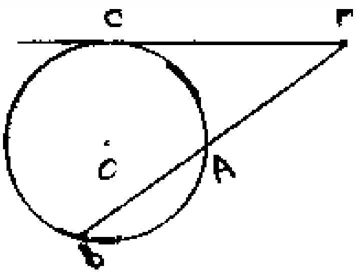
$AB = AC$, $\angle OAB = \angle OAC$.



4. Kesuvchi va urinma haqidagi teorema:

Teorema. Agar M nuqtadan MC o‘rinma va MA kesuvchi o‘tkazilgan bo‘lsa, u holda kesuvchini aylanani kesib o‘tuvchi nuqtalaridan M nuqtagacha masofalar ko‘paytmasi o‘rinmani kvadratiga teng bo‘ladi:

$$MB \cdot MA = MC^2$$



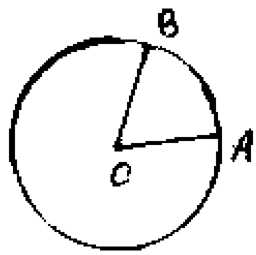
5. Uzunliklar va yuzalarni hisoblash formulalari.

R radiusli aylana uzunligi: $L = 2\pi R$;

R radiusli doira yuzi: $S = \pi R^2$;

R radiusli aylananing α markaziy burchagiga mos keluvchi yoy uzunligi: $\ell = R \cdot \alpha$ (α - markaziy burchakni radian o‘lchovi);

$\ell = \dfrac{\pi R n}{180^0}$ (n^0 – markaziy burchakni radius o‘lchovi);



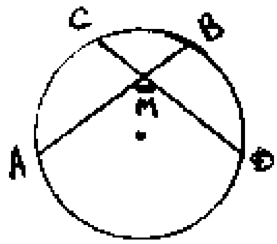
R radiusli doirani α markaziy burchagiga mos keluvchi doira sektori yuzi:

$$S_{sek} = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2 \cdot \alpha}{2}; \qquad S_{sek} = \frac{\pi R^2 n^0}{360^0}.$$

R radiusli doirani α yoyiga mos keluvchi segment yuzi:

$S_{cegm} = \dfrac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ (α - yoyning radian o‘lchovi)

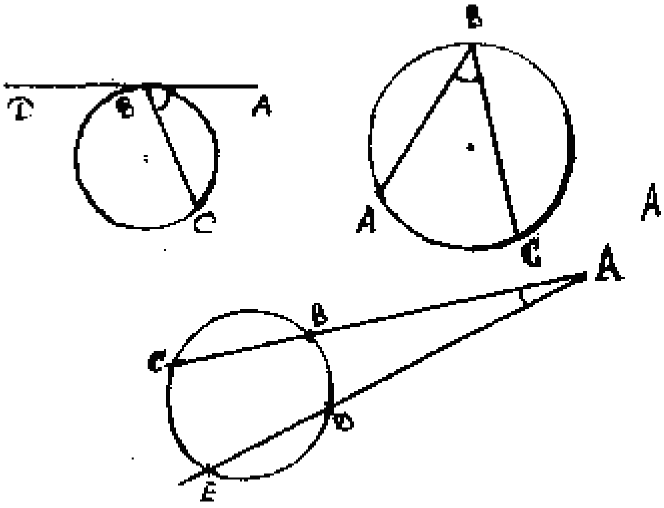
$S_{segm} = \dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\pi n^0}{180^0} - \sin n\right)$ (n^0 – yoyning gradus o‘lchovi)



6. Aylanaga o‘tkazilgan burchaklar:

a) Markaziy burchak o‘zi aniqlagan yoy bilan o‘lchanadi:

$< AOB = \overset{\smile}{AB}$



b) Kesishuvchi vatarlar orasidagi burchak, ularga tiralgan yoylar yig‘indisini yarmiga teng (1);

v) Uchi aylanada yotuvchi burchak o‘zi aniqlagan yoyni yarmiga teng (2),

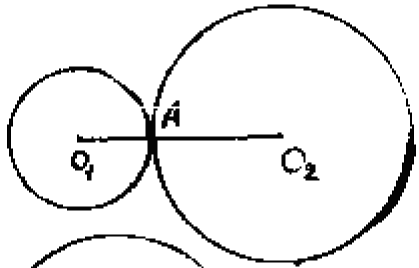
$< AMD = \frac{1}{2}\ (\overset{\smile}{AД} + \overset{\smile}{CB})$. (1) $< ABC = \frac{1}{2}\ \overset{\smile}{AC}$ (2)

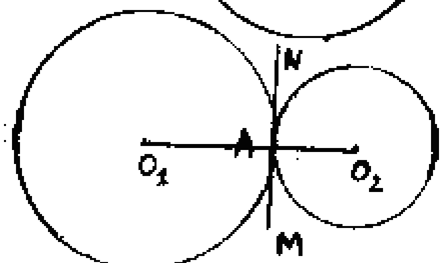
g) Urinma va vatar orasidagi burchak tomonlari hosil qilgan yoy yarmi bilan o‘lchanadi.

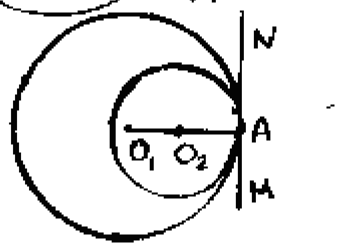
$<ABC = \frac{1}{2}\ \overset{\smile}{BMC}$.

d) Kesishish nuqtasi aylana tashqarisida bo‘lgan ikkita kesuvchi orasidagi burchak o‘zlari hosil qilgan yoylar ayirmasini yarmiga teng:

$$\angle BAD = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{CE} - \overset{\smile}{BD}\right)$$







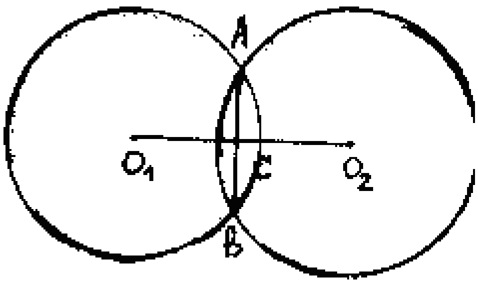
7. Aylanalarni o‘rinishi va kesishish xossalari:

a) Ikki o‘rinuvchi aylanalarni markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘rinish nuqtasidan o‘tadi.

b) Tashqi o‘rinuvchi ikki aylana umumiy nuqtasidan o‘tuvchi umumiy o‘rinma, markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar: $MN \perp O_1O_2$;

v) Ichki o‘rinuvchi ikki aylana o‘rinish nuqtasidan o‘tuvchi umumiy o‘rinma markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar:

$$MN \perp O_1O_2;$$

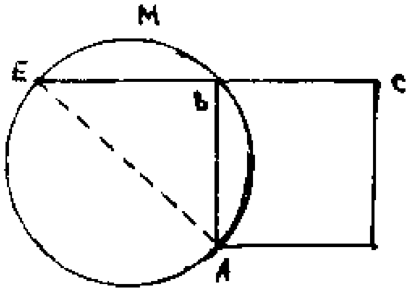


g) Kesishuvchi ikki aylana kesishish nuqtalaridan o‘tuvchi umumiy vatar markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikuyar bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi:

$$AB \perp O_1\, O_2\,,\ AC=CB\ ;$$

1-misol. ABCD kvadratni AB tomoni 1 va u qandaydir aylanani vatari

shuningdek kvadratni qolgan tomonlari bu aylanadan tashqarida yotadi.
C uchidan chiquvchi oʻrinma *CM*=2 boʻlsa, d: $\sqrt{10}$ ni hisoblang, bu yerda d – diametr.



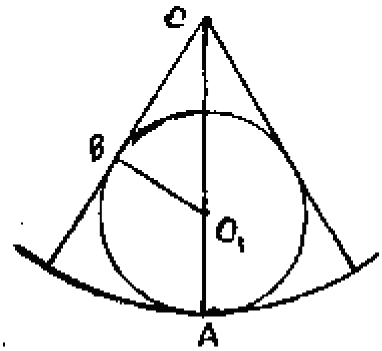
Yechish:

Oʻrinma va kesuvchi haqidagi teoremaga koʻra $CE \cdot CB=CM^2$, bundan $CE=4$. Ma'lumki $BE=CE-CB=3$. $ABE=90^0$ boʻlganligidan u diametriga tiralganligini aytish mumkin.

Demak, *ABE*- diametr u holda $ABE^2=d^2=BE^2+AB^2=10$. Bundan *d:* $\sqrt{10}$ =1

Javob: 1.

2-misol. Markaziy burchagi 120^0 ga teng doiraviy sektorga doira ichki chizilgan. Doira radiusi R boʻlsa ichki chizilgan doira radiusini toping.



Yechish:

Shartga koʻra OA=R, BOA=60^0
Ichki chizilgan doira radiusini r desak, $O_1A=r$, $O_1B=r$, $O_1O=R-r$. OO_1B toʻgʻri burchakli uchburchakdan

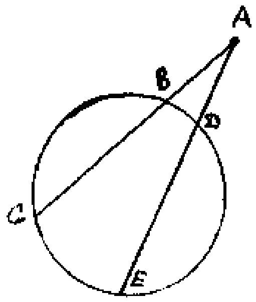
$O_1B=OO_1\cdot\sin 60^0$ yoki $r=\frac{\sqrt{3}}{2}(R-r)$

bu yerdan

$$r=\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} .$$

Javob: $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

3-misol. Doiradan tashqaridagi nuqtadan ikki kesishuvchi oʻtkazilgan. Birinchi kesuvchini ikki kesmasi. 47 m tashqi kesmasi 9 m, ikkinchi kesuvchisini ichki kesmasi tashqi kesmasidan 72 m ortiq. Ikkinchi kesuvchi uzunligini toping.



Yechish:

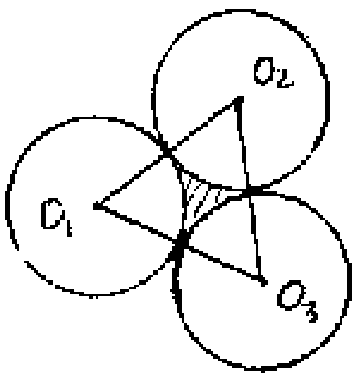
SHartga koʻra BS=47 m, AB=9 m; demak AC=56 m. Ma'lumki $AB\cdot AC=9\cdot 56=504$. Agar AD=x desak, u holda DE=x+72, ABE=2x+72. Oʻrinma va kesuvchi haqidagi teoremaga koʻra, $AC\cdot AB=AE\cdot AD$, unda x(2x+72)=504 tenglamani hosil qilamiz. Bu yerdan x=6, shuningdek ΔABE =84 m.

Javob: 84m.

4-misol. Radiuslari r ga teng boʻlgan uchta aylana juft-jufti bilan tashqi oʻringan. Bu aylanalar hosil qilgan egri chiziqli uchburchak yuzasini toping.

Yechish:

O_1 , O_2 , O_3 – uch kongurent aylanalar markazlari boʻlsin. O_1 , O_2 , O_3 uchburchakni yuzini S_Δ deb belgilaylik, S_{sek} – OAB sektor yuzini belgilaylik u holda izlanayotgan yuza $S = S_\Delta\ 3\ S_{sek}$ boʻladi. O_1 , O_2 , O_3 uchburchak tomoni 2r boʻlgan teng tomonli uchburchak, shuning uchun $S_\Delta = r^2\sqrt{3}$ O1AB sektorni markaziy burchagi 60^0 teng. Bundan,



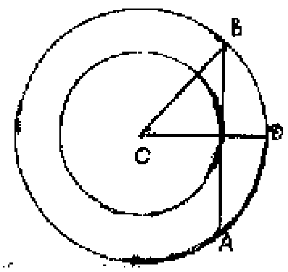
$S_{sek} = \dfrac{\pi r^2}{6}$, shuningdek, $S = r^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{r^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$

Javob: $\dfrac{r^2}{2}\ (2\sqrt{3} - \pi)$

<u>5 – misol.</u> O markazli har xil radiusli ikkita doira berilgan. Kichik doiraga o‘tkazilgan urinmani katta doira bilan hosil qilgan kesmasi 32 sm. Agar halqani eni 8 sm bo‘lsa katta doira radiusini toping.

Yechish:

Shartga ko‘ra AB = 32 sm, CD=8sm,
Shuningdek OC $\perp$ AB. Katta doira radiusini R desak, u holda OCB to‘g‘ri burchakli uchburchakdan:



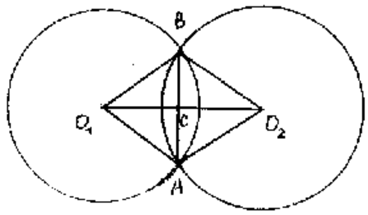
$OB^2 = OC^2 + CB^2$ yoki $R^2 = (R - 8)^2 + 16^2$, R = 20 sm.

Javob: 20 sm

<u>6 – misol.</u> Umumiy vatarga tiralgan ikki doirani mos yoylari 60^0 va 120^0. Doiralar yuzalari nisbatini toping.

Yechish:

$O_1B = r$, $O_2B = R$ deb belgilaymiz.
Shartga ko‘ra $< A\,O_1B = 120^0$, $<AO_2B = 60^0$.
Ikki aylana markazlari orasidagi O_1O_2 kesma AB ga perpendikulyar, u holda



$$O_1B = \frac{BC}{\sin\angle CO_1B},\quad r = \frac{2BC}{\sqrt{3}},\quad O_2B = \frac{BC}{\sin\angle CO_2B},$$

bundan R = 2BC, demak

$$\frac{S_{O_2}}{S_{O_1}} = R^2 : r^2 = 3 : 1$$

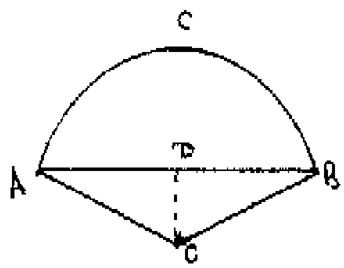
Javob: 3:1

<u>7- misol.</u> Yoyi 120^0 , perimetri R bo‘lgan segment yuzasini toping.

Yechish:

R doira radiusi. Bundan ACB yoyni aniqlaymiz:

$$\overset{\cup}{ACB} = \frac{\pi R}{180^O} \cdot 120^0 = \frac{2}{3}\pi R .$$



AOB uchburchakdan $AB = 2\,R \sin 60^0 = R\sqrt{3}$

Shartga ko‘ra $AB + \overset{\cup}{ACB} = R$, demak

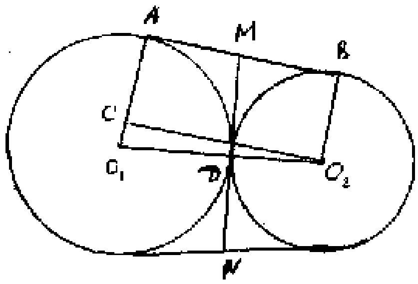
$R\sqrt{3} + \dfrac{2}{3}\pi R = R$, bundan $R = \dfrac{3P}{2\pi + 3\sqrt{3}}$.

S segmentni yuzi sektorni yuzidan
OAB uchburchak yuzini ayirishdan hosil bo‘lgan son bo‘ladi.
Shuning uchun

$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} .$$

Javob: $\dfrac{3P^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}$

<u>8 – misol.</u> Radiuslari R va r bo‘lgan ikki aylana tashqi o‘rinadi. Nuqtalari orasidagi kesmasini toping.



Yechish:

M nuqtadan ikki *MD* va *MA* o‘rinmalar o‘tadi.
O‘rinmaning xossalaridan MD=MA uz-uzidan *MD=MB*
demak, $MN = 2MD = AM + MB$ ni topish uchun *AB* ga parallel O_2C ni o‘tkazamiz.
O_1O_2C uchburchakdan $O_2C = AB$,
$O_1O_2 = R + r$, $O_1C = R - r$ ekanligidan

$$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$$ yoki $AB = 2\sqrt{Rr}$.

Javob: $2\sqrt{Rr}$

<u>Mustaqil yechish uchun misollar</u>

1. Radiusi 13 sm ga teng doirani ichidan M nuqta berilgan. M nuqta markazdan 5 sm uzoqlikda joylashgan. M nuqtadan AB = 25 sm li vatar o‘tkazilgan. M nuqta vatarni qanday bo‘lakka bo‘ladi.

Javob: 16 sm va 9 sm

2. Doiradan tashqaridagi nuqtadan unga ikkita kesuvchi o‘tkazilgan. Kesuvchilarni ichki kesmalari 2 sm. Kesuvchilarni doira bilan kesuvchi nuqtalaridan tashkil topgan to‘rtburchak yuzini toping. Uning qarama-qarshi tomonlari 6 m va 2,4 m ekani ma’lum.

Javob: 10,08 m^2

3. Bir nuqtadan aylanaga ikkita uzunligi 12 sm bo‘lgan o‘rinmalar o‘tkazilgan. O‘rinish nuqtalari orasidagi masofa 14,4 sm. Aylana radiusini aniqlang.

Javob: 9 sm.

4. R radiusli doira ikkita konsentrik aylana bilan bo‘lingan. Natijada uchta teng yuzli figuralar hosil bo‘ldi. Aylanalar radiuslarini toping.

Javob: $\frac{R}{\sqrt{3}}$; $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

5. Radiuslari r bo‘lgan uchta aylana juft-jufti bilan o‘ringan. Umumiy tashqi ko‘ringan o‘rinmalar tashkil qilgan uchburchakni yuzini toping.

Javob: $2r^2\ 2\sqrt{3}+3)$.

6. Aylanaga AB = a, AC = в ikki vatar o‘tkazilgan AC yoy uzunligi AB yoy uzunligidan ikki barobar uzun. Aylana radiusini toping.

Javob: $a^2/\sqrt{4a - в}$.

7. Radiusi r bo‘lgan aylanaga uzunligi $\frac{r}{2}$ bo‘lgan vatar o‘tkazilgan. Vatarni bir uchidan o‘rinma va ikkinchi uchidan o‘rinmaga parallel kesuvchi o‘tkazilgan. O‘rinma va kesuvchi orasidagi masofani toping.

Javob: $\frac{r}{8}$.

8. R radiusli doiraning 2a ga teng vatarli sektoriga doira ichki chizilgan. SHu doiraning yuzini toping.

Javob: $\pi(\frac{Ra}{R+a})^2$.

9. Radiuslari 5 sm va 2 sm bo‘lgan aylanalarga umumiy o‘rinmalar o‘tkazilgan. Tashqi o‘rinma ichki o‘rinmadan 1,5 marta ortiq. Bu aylanalar markazlari orasidagi masofani toping.

Javob: 9 sm

10. Aylananing 120^0 yoyi oxirlaridan unga o‘rinmalar o‘tkazilgan. O‘rinmalar va yoy tashkil qilgan figuraga aylana ichki chizilgan.
Agar berilgan aylana radiusi R bo‘lsa keyingi aylana uzunligini toping.

Javob: $\frac{2}{3}\pi R$

§ 1.4. Uchburchaklar va aylana

Quyidagilarni esda tutish kerak:

1. Aylanaga ichki va tashqi chizilgan uchburchaklar**.**

Hamma uchlari aylanada yotuvchi uchburchak ***aylanaga ichki chizilgan uchburchak*** deyilib, aylana esa ***uchburchakka tashqi chizilgan aylana*** deyiladi.

Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi uchburchak tomonlari o‘rta perpendikulyarlari kesishgan nuqtasidan iborat. Bundan ko‘rinadiki, to‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi gipotenuzada yotadi.

Tomonlari aylanaga o‘rinuvchi uchburchak ***aylanaga tashqi chizilgan uchburchak*** deb atalib, aylana esa uchburchakka ***ichki chizilgan aylana*** deyiladi.

Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi uchburchak bissektrisalari kesishish nuqtasidan iborat. Teng tomonli uchburchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalar markazi ustma-ust tushadi.

2. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi *R* quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$R = \frac{aвc}{4S}, \qquad R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{в}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma};$$

bu yerda *a, в, c* – uchburchakning tomonlari; α, β, γ – uchburchakning mos ravishda *a, в, c* tomonlari qarshisidagi burchaklari, S_Δ – uchburchak yuzi.

Eslatma. To‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi gipotenuzani yarmiga teng**:**

$$R = \frac{c}{2}.$$

3. Uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi *r* quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$r = \frac{S_\Delta}{P}, \qquad r = \frac{1}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_в} + \frac{1}{h_c}},$$

bu yerda $p = \frac{1}{2}(a + в + c)$ uchburchakni yarim perimetri h_a, $h_в$, h_c uchburchakni *a, в, c* tomonlariga tushirilgan balandliklari.

1–misol. Uchburchakni yuzi 10 sm^2, unga tashqi chizilgan aylana diametri 16 sm. Uchburchak tomonlari uzunliklari ko‘paytmasini toping.

Yechish: *a, в,* c – uchburchak tomonlari; R – tashqi chizilgan aylana radiusi. Shartga ko‘ra 2R = 16 sm, S_Δ = 10 sm^2.

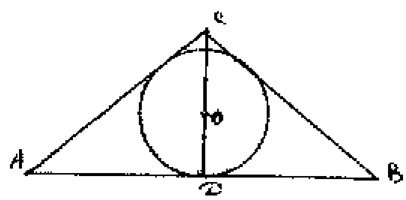
$$R = \frac{aвc}{4S_\Delta}$$ formuladan $aвc = 4S_\Delta R = 320\ cm^3$

Javob: 320 cm^3

2 – misol. 120^0 li teng yonli uchburchak yuzini toping. Bu yerda ichki chizilgan aylana radiusi $\sqrt{12}$

Yechish: Shartga ko‘ra $< ACB = 120^0$, $OD = r = \sqrt{12}$

AC=BC=x deb olsak, ma’lumki



$<ACD = <BCD = 60^0$, $AD = AC \sin 60^0 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

demak $AC = x\sqrt{3}$. Avval x ni topamiz.

ABC uchburchakni yuzini topishni quyidagi ikki yuza formulasidan:

$S_\Delta = \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin 120^0 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; $S_\Delta = p \cdot r = \frac{1}{2}(2AC + AB) \cdot r = \frac{1}{2}(2x + +x\sqrt{3})\sqrt[4]{12}$.

Ushbu tenglamadan $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x}{2}(2+\sqrt{3}) \cdot \sqrt[4]{12}$ noma’lum x ni topamiz:

$x = 2(2+\sqrt{3}) \cdot \sqrt[4]{4/3}$.

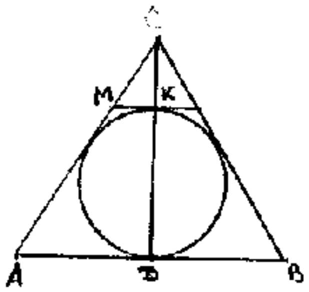
U holda $S_\Delta = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 2\,(7+4\sqrt{3})$ cm^2.

Javob: $2\,(7 + 4\sqrt{3})$ sm^2.

3 – misol. Asosi 12 sm va balandligi 8 sm bo‘lgan teng yonli uchburchakka aylana ichki chizilgan. Unga asosga parallel o‘rinma o‘tkazilgan. Tomonlar bilan chegaralangan o‘rinmaning kesmasini uzunligi necha sm.

Yechish: Shartga ko‘ra AB =12 sm, CD = 8sm. Ko‘rinib turibdiki,

$AC = BC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{36+64} = 10$ sm.



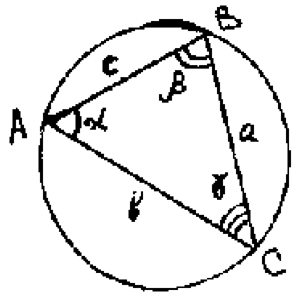
Ichki chizilgan aylana radiusi r ni aniqlaymiz. Ma’lumki,

$S_\Delta = \frac{1}{2}\,(2AC + AB) \cdot r = \frac{1}{2}\,AB \cdot CD$,

bu yerdan r = 3 sm ekanligi kelib chiqadi.

U holda CK =CD – 2r = 2sm. MNC va ABC uchburchaklarning o‘xshashligidan: MK:AB=CK:CD, bundanMK = $\frac{CK}{CD} \cdot AB = 3$ sm.

Javob: 3 sm.



4 – misol. Radiusi R bo‘lgan aylanaga, ikki burchagi α va β bo‘lgan uchburchak ichki chizilgan. Uchburchak yuzini toping.

Yechish: Sinuslar teoremasidan $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{в}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Bu yerdan a = 2Rsin α , v = 2Rsin β.ABC uchburchakning yuzini quyidagi formuladan topamiz:

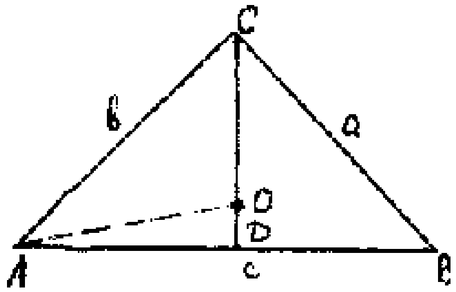
$S_\Delta = \frac{1}{2}\,aв\,\sin\gamma = \frac{1}{2}\,aв\,\sin(180^0 - \alpha - \beta) = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta)$.

Javob: $2R^2\sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta)$.

5 –misol. Teng yonli uchburchakning asosidagi burchagi α. Ichki va tashqi chizilgan aylana radiuslari nisbatini toping.

Yechish: *r, R* - ichki va tashqi chizilgan aylana markazi. U holda AOD uchburchakdan

$OD = r = AD\,tg\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{2}\,tg\,\frac{\alpha}{2}$.



Tashqi chizilgan aylana radiusi R quyidagi formula bilan topiladi:

$$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{c}{2\sin(180^0 - 2\alpha)} = \frac{c}{2\sin 2\alpha}.$$

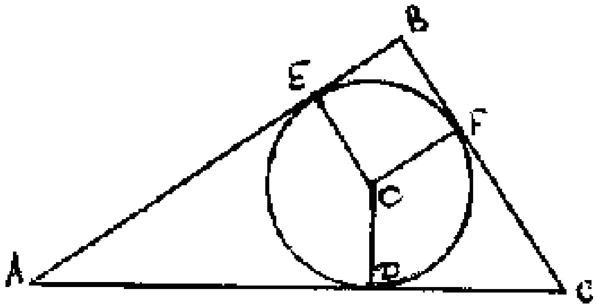
Izlanayotgan nisbat

$\frac{r}{R} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha$

Javob: $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha$

6 – misol. Uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi 4 sm. Tomonlaridan biri aylanaga o‘rinish nuqtasida 6 sm, 8 sm, bo‘laklarga bo‘lingan. Uchburchakni qolgan ikki tomonini toping.

Yechish. *AD*= 6 sm, *CD*= 8 sm bo‘lsin. *ABC* uchburchakni *AC* va *BC* tomonlarini aniqlash uchun EB=BF =x, shuningdek *ABE=AD*= 6sm, *CF=CD=8* sm ekanidan foydalanish mumkin. Buning uchun uchburchakni yuzini topishishining quyidagi ikki formulasidan foydalanamiz: $S_Δ = p \cdot r$ va S∆ = $\sqrt{P(P-a)(P-в)(P-c)}$,



R – uchburchakni yarim perimetri, shunga ko‘ra

$P = \frac{1}{2}$ *(AE + AD + DC + CF + FB + BE) =*

$= \frac{1}{2}$ *(28 + 2x) = 14 + x.*

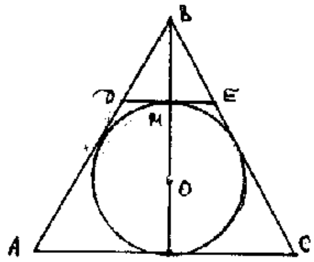
Navbatdagi tenglamani hosil qilamiz:

$$4\ (14 + x) = \sqrt{(14 + x) \cdot x \cdot 6 \cdot 8}$$

bu yerdan x = 7 sm, u holda *AB=ABE +x*=13sm, *BC=CF +x* = 15 sm.

Javob: 13sm, 15 sm.

<u>7 – misol.</u> Tomoni *a* ga teng, teng tomonli uchburchakka doira ichki chizilgan. Bu doiraga va berilgan uchburchak tomonlariga o‘rinuvchi yana uchta doira ichki chchizilgan va bu jarayon cheksiz davom ettirilgan. Barcha ichki chizilgan doiralar yuzasi yig‘indisini toping.



Yechish. Birinchi ichki chizilgan doira markazi BN = h balandlikni *BO : ON* = 2 : 1 nisbatda bo‘ladi. Aniqki, *MN* – diametr $\frac{2}{3}h$ va

demak $BM = \frac{1}{3}h$. Ikkinchi doira balandligidan uch barobar kichik, DBE uchburchakka ichki chizilgan r_1 $= O_1M$ desak, $r = ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Agar *S, O* markazli doiraning yuzi bo‘lsa $S = \frac{\pi a^2}{12}$, u holda O_1 markazli doira yuzasi $S_1 = \frac{1}{3^2}S$. Bunday doiralar uchta, shuning uchun umumiy yuza

$Q_1 = \frac{1}{3}S$. Xuddi shunday davom etuvchi keyingi uchta doira umumiy yuzasi $Q_2 = \frac{1}{3^2}Q_1 = \frac{1}{3^3}S$ va xokazo cheksiz sonlar yig‘indisini hosil qilamiz:

$$S + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots = S + \frac{1}{3}S + \frac{1}{3^3}S + \frac{1}{3^5}S + \ldots$$

Bu ketma-ketlik ikkinchi hadidan boshlab cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyani beradi (birinchi hadi $в_1 = \frac{1}{3}S$ va maxraji $q = \frac{1}{3^2}$). Bu progressiyani yig‘indisi

$$\frac{в_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}S}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8}S, \text{ u holda izlanayotgan yuza } S + \frac{3}{8}S = \frac{11}{8}S = \frac{11}{96}\pi a^2.$$

Javob: $\frac{11}{96}\pi a^2$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Teng tomonli uchburchakka yuzasi 27 π sm^2 bo‘lgan doira ichki chizilgan. Bu uchburchak tomoni uzunligini toping.

Javob: 18 sm.

2. To‘g‘ri burchakli uchburchak yarim aylanaga shunday tashqi chizilganki, diametr gipotenuzada yotib, markazi gipotenuzani 15 va 20 sm li kesmalarga bo‘ladi. Yarim aylana yoyi uzunligini toping.

Javob: 12 π.

3. To‘g‘ri uchburchakning katetlaridan biri 15 sm, unga ichki chizilgan aylana radiusi 3 sm. Bu uchburchak yuzini toping.

Javob: 60 sm^2.

4. Teng yonli uchburchakning asosi 16 sm, yon tomoni 10 sm. Ichki va tashqi chizilgan aylana markazlari orasidagi masofani toping.

Javob: 5 sm.

5. Doiraga teng yonli uchburchak ichki chizilgan. Doira yuzi Q. Asosidagi burchagi α bo‘lsa, bu uchburchak yuzini toping.

Javob: $2R^2\sin^2\alpha \sin 2\alpha$.

6. Teng tomonli uchburchak tomoni a ga teng. Unga uchta doira shunday ichki chizilganki, doiralar juft-jufti bilan va uchburchakni ikki tomoniga o‘ringan. Bu doiralar radiuslarini toping.

Javob: a ($\sqrt{3}-1$) /4.

7. To‘g‘ri burchakli ABC uchburchakda katetlari AB= 3 va BC =4. AB va AC tomonlari o‘rtalaridan o‘tuvchi va BC tomonga o‘rinuvchi aylana o‘tkazilgan. AC gipotenuzani aylana ichidagi kesmasi uzunligini toping.

Javob: 1,1

8. Aylana ABC uchburchakni BC tomoniga va qolgan ikki tomonni davomiga o‘rinadi. Agar AB = s, < BAC = α , <ABC = β bo‘lsa, aylana radiusini toping.

Javob: $\dfrac{c\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})}$.

9. To‘g‘ri burchakli uchburchakning to‘g‘ri burchagidan tushirilgan balandligi gipotenuzani 25,6 sm va 14,4 sm kesmalarga bo‘lsa, unga ichki chizilgan doira yuzini toping.

Javob: 64 π sm^2.

§ 1.5. Ko‘pburchaklar va aylana

Esda tutish lozim bo‘lgan asosiy ta’rif va xossalar:

1. Ichki va tashqi chizilgan ko‘pburchaklar ta’rifi:

Uchlari aylanada yotuvchi ko‘pburchak ***aylanaga ichki chizilgan ko‘pburchak***, aylana esa ***ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana*** deyiladi.

Tomonlari aylanaga o‘rinuvchi ko‘pburchak ***aylanaga tashqi chizilgan ko‘pburchak***, aylana esa ***ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana*** deyiladi.

2. Muntazam ko‘pburchaklar ta’rifi va xossalari:

Hamma tomonlari va hamma burchaklari teng qavariq ko‘pburchak ***muntazam ko‘pburchak*** deyiladi.

Teorema. Har qanday muntazam ko‘pburchakka bitta va faqat bitta tashqi va ichki aylana chizish mumkin.

Tomoni n ga teng muntazam ko‘pburchakni S_n yuzi, R_n perimetri, tashqi va ichki chizilgan aylanalar radiuslari R va r larni bog‘lovchi formulalar:

$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r;$ $S_n = n \cdot r^2 \cdot tg\frac{180^0}{n};$ $S_n = \frac{1}{2} nR^2 sin\frac{360^0}{n};$

$a_n = 2R \cdot sin\frac{180^0}{n};$ $a_n = 2r \cdot tg\frac{180^0}{n};$ $r = R\cos\frac{180^0}{n}.$

3. To‘rtburchaklar va aylanalar haqida teoremalar:

Teorema. Qavariq to‘rtburchakka ichki aylana chizish uchun uning qarama-qarshi tomonlari yig‘indisi teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Natijalar:

1) parallelogramlar ichida faqat rombga ichki aylana chizish mumkin: uning markazi diagonallari kesishgan nuqtasi bo‘ladi.
2) trapetsiyaga ichki aylana chizish mumkin bo‘ladi, qachonki uning yon tomonlari yig‘indisi asoslari yig‘indisiga teng bo‘lsa.

Teorema. Qavariq to‘rtburchakka tashqi aylana chizish uchun uning qarama-qarshi burchaklari yig‘indisi 180^0 ga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Natijalar:

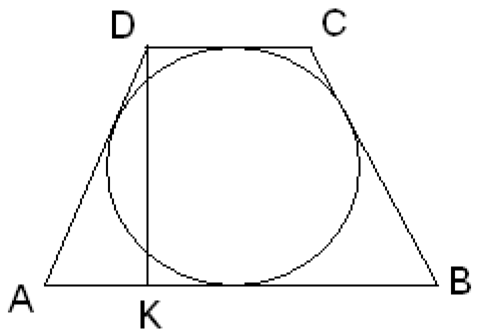
1) barcha parallelogramlar ichida faqat to‘g‘ri to‘rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.
2) trapetsiyalar ichida faqat teng yonli trapetsiyaga tashqi aylana chizish mumkin.

Esda tutish foydali:

1. Ptolomey teoremasi: Ichki chizilgan to‘rtburchakda diagonallar ko‘paytmasi uning qarama-qarshi tomonlari ko‘paytmalari yig‘indisiga teng.
2. Ichki aylana chizish mumkin bo‘lgan teng yonli trapetsiya balandligi, uning asoslarini o‘rta geometrigi bo‘ladi: $h^2 = a \cdot в$

1- misol. Agar teng yonli trapetsiyani katta asosi *a*, kichik asosi bilan yon tomoni 120^0 burchak hosil qilsa, unga ichki chizilgan doira yuzini toping.

Yechish: DK = h desak, h= 2 r bo‘ladi, bu yerda r – ichki chizilgan doira radiusi. ADK uchburchakdan $AK = h \cdot tg30^0 = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ni topamiz.



$$DC = AB - 2AK = a - \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$AD = BC = \frac{h}{\cos 30^0} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

Trapetsiyaga aylana ichki chizilganligidan

AB+DC = AD+BC, h ni aniqlash tenglamasini hosil qilamiz:

$$2a - \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{4h}{\sqrt{3}}$$

Demak, $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$, u holda $r = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. Izlanayotgan yuza $\frac{\pi a}{12}$.

Javob: $\frac{\pi a}{12}$.

2 – misol. Asoslari 2 va 14, yon tomoni 10 bo‘lgan teng yonli trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana radiusini toping.

Yechish: Shartga ko‘ra AB = 14, DC = 2, BD = AD = 10. Ko‘rinib turibdiki,

$$AM = NB = \frac{1}{2}(AB - DC) = 6,$$

$$AN = AB - NB = 8.$$

u holda Pifagor teoremasiga ko‘ra

$CN = \sqrt{BC^2 - NB^2} = 8$, $AC = \sqrt{AN^2 + NC^2} = 8\sqrt{2}$.

ABCD trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana o‘z navbatida ABC uchburchakka ham tashqi chizilganligini e’tiborga olamiz. R – aylana radiusi bo‘lsin.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN = 56$$

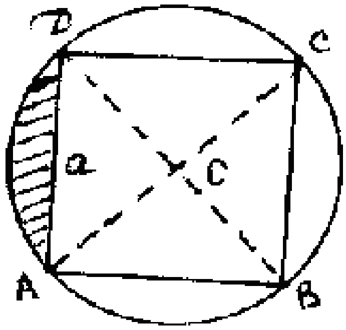
ekanligidan, R ni osongina topish mumkin.

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} = 5\sqrt{2}$$

Javob: $5\sqrt{2}$

<u>3 – misol.</u> Tomoni *a* ga teng kvadratga aylana tashqi chizilgan. Kvadrat tomoni va aylana hosil qilgan segment yuzini toping.

Yechish:



Rasmdan ko‘rinadiki, $<ACD = \frac{\pi}{2}$,

$AC = 2R = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$ bundan $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$

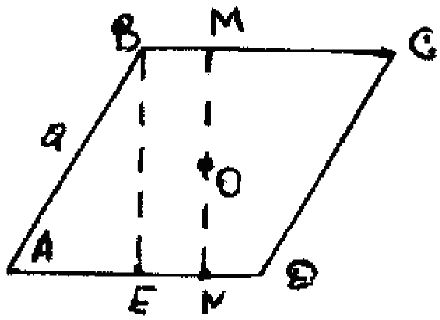
U holda segment yuzi quyidagi formula bilan topiladi:

$$S_{cegm} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a^2(\pi - 2)}{8}$$

Javob: $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$

<u>4 – misol.</u> Rombni yuzi Q Va ichki chizilgan doira yuzi S bo‘lsa, romb burchaklarini toping. Natijani Q =8, S = π da toping.

Yechish: Rasmdan quyidagiga ega bo‘lamiz



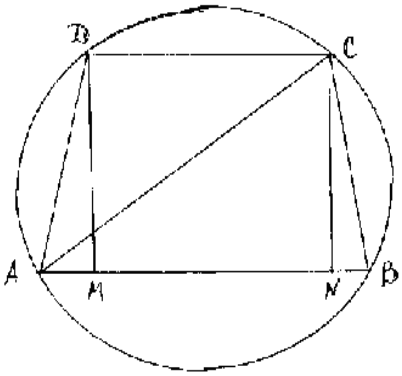
$$\text{Sin} < BAD = \frac{BE}{AB} = \frac{MN}{AB} = \frac{2r}{a}$$

Shartga ko‘ra MN · AD =Q, bundan $2ra = Q$ va $S = \pi r^2$. Bu tenglamalardan r va *a* ni topish mumkin. Biz $\frac{r}{a}$ nisbatni topishimiz kerak. $\frac{\pi r}{2a} = \frac{S}{Q}$ dan $\frac{r}{a} = \frac{2S}{\pi Q}$

demak, $< BAD = \arcsin\frac{4S}{\pi Q}$, Q = 8, S = π bo‘lganda $< BAD = \arcsin\frac{1}{2} = 30^0$

Javob: 30^0

<u>5 – misol.</u> Tomoni *a* ga teng muntazam oltiburchakka aylana ichki chizilgan va aylana tashqi chizilgan. Bu aylanalar hosil qilgan halqa yuzasini toping.



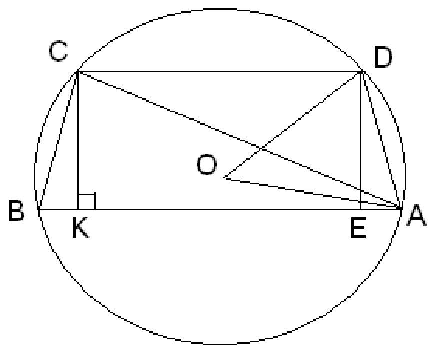
Yechish: Tashqi chizilgan aylana radiusi R ni $a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$ formuladan topamiz n = 6 da R = *a*. U holda ichki chizilgan aylana radiusi $r = R\cos\frac{180^0}{n} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bundan halqa yuzi π $(R^2 - r^2) = \frac{\pi a^2}{4}$ ekanligini ko‘rish mumkin.

Javob: $\frac{\pi a^2}{4}$

6 – misol. Teng yonli trapetsiyaning balandligi h, yon tomoni tashqi chizilgan aylana markazidan α burchak ostida ko‘rinadi. Trapetsiyani yuzini toping.

Yechish: Chizmadan ko‘rinadiki, $\angle BAC$ burchak ichki chizilgan burchak ekanligidan BC yoyni yarmi bilan o‘lchanadi, demak, $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$



AB = AK+KB, DC =AK – AE = AK – KB,

$AK = h \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$, Bularga ko‘ra izlanayotgan yuza:

$$S = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot h = AK \cdot h = h^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2}.$$

Javob: $h^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

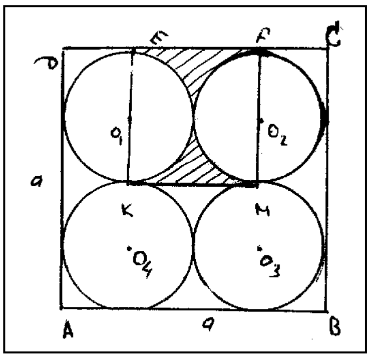
7 – misol. Doiraga muntazam 2n – burchak ichki, muntazam n – burchak tashqi chizilgan. Bu ko‘pburchaklar yuzalari farqi Q ga teng. Doira radiusini toping.

Yechish: Ichki chizilgan muntazam 2n – burchakni yuzi $n \cdot R^2 \sin\frac{180}{n}$. Tashqi chizilgan muntazam n – burchakni yuzi $n \cdot R^2 \cdot tg\frac{180}{n}$ ga teng. Shartga ko‘ra $n \cdot R^2 \cdot (tg\frac{180^0}{n} - \sin\frac{180^0}{n}) = Q$, bu yerdan izlanayotgan R ni qiymatini topamiz.

Javob: $R = \sqrt{\frac{Q}{n(tg\frac{180^0}{n} - \sin\frac{180^0}{n})}}$.

8 – misol. Tomoni *a* ga teng kvadratga to‘rtta doira shunday joylashtirilganki, ularni har biri qolgan ikkitasiga va kvadrat tomonlariga o‘rinadi. Uchlari o‘rinish nuqtalaridan iborat, doiralarni yoylari tashkil qilgan egri chiziqli to‘rtburchak yuzini toping.

Yechish: Izlanayotgan KLMN figura shtrixlangan figuraga tengdosh. Agar EFMK kvadrat yuzidan ikki-ta yarim doira yuzini olsak izlan-gan yuza hosil qilinadi. U holda



$$(\frac{a}{2})^2 - \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2(4-\pi)}{16}$$ **Javob:** $\frac{a^2(4-\pi)}{16}$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Doiraga tashqi chizilgan teng yonli trapetsiya yuzi S ga teng. Agar o‘tkir burchagi $\frac{\pi}{6}$ bo‘lsa, trapetsiya yon tomoninii toping.

Javob: $\sqrt{2S}$

2. Radiusi r bo‘lgan doiraga to‘g‘ri burchakli trapetsiya tashqi chizilgan. Agar kichik tomoni $\frac{3r}{2}$ bo‘lsa, trapetsiya yuzini toping.

Javob: 4,5 r^2.

3. Radiusi R bo‘lgan doiraga yuzasi doira yuzining yarmiga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak ichki chizilgan. To‘g‘ri to‘rtburchak tomonini toping.

Javob: $\frac{1}{2}$ R ($\sqrt{4+\pi}$ ± $\sqrt{4-\pi}$).

4. Aylanaga to‘g‘ri burchakli uchburchak tashqi, muntazam oltiburchak ichki chizilgan. Uchburchak yuzini oltiburchak yuziga nisbatini toping.

Javob: 2

5. O‘tkir burchagi 30^0 bo‘lgan rombga yuzi Q bo‘lgan doira ichki chizilgan. Rombni yuzini toping.

Javob: $\frac{8Q}{\pi}$

6. Doira tashqi chizilgan teng yonli trapetsiyaning yuzi $32\sqrt{3}$ sm. Agar asosidagi o‘tkir burchagi $\frac{\pi}{3}$ ekani ma’lum bo‘lsa, trapetsiya yon tomonini toping.

Javob: 8 sm

7. ABCD rombni tomoni $1+\sqrt{3}$, o‘tkir burchagi 60^0. ABD uchburchakka aylana ichki chizilgan. C nuqtadan aylanaga o‘rinma o‘tkazilgan. Bu o‘rinma AB tomon bilan E nuqtada kesishadi. AE kesma uzunligini toping.

Javob: 2

8. Teng yonli qarama-qarshi tomonlari yig‘indisi teng, trapetsiya o‘rtachizig‘i 10. Ma’lumki unga ichki aylana chizish mumkin. O‘rta chiziq uning yuzini $\frac{7}{13}$ nisbatda bo‘lishi ma’lum bo‘lsa, trapetsiya balandligini toping.

Javob: 8

9. Yarim doiraga ABCD to‘g‘ri to‘rtburchak shunday joylashtirilganki, AB tomoni diametr ustida; C va D uchlari doirani chegaralovchi yoyi ustida; yarim doira radiusi 5 sm. Agar ABCD to‘g‘ri to‘rtburchak yuzi 24 sm^2, diagonali 8 sm dan katta ekani ma’lum bo‘lsa, tomonlari uzunligini toping.

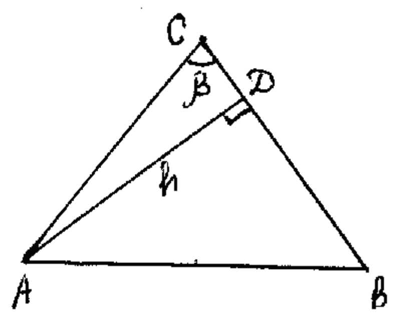
Javob: 3 sm, 8 sm.

10. To‘g‘ri burchakli trapetsiyaga ichki chizilgan aylana markazi yon tomonlardan 2 sm va 4 sm uzoqlikda joylashgan. Trapetsiya yuzini toping.

Javob: 14,4 sm

§ 1.6. «Axborotnoma» larda berilgan test masalalaridan namunalar

1 – masala. (1-son. 34-masala, 1997 yil). Teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi β ga, yon tomoniga tushirilgan balandligi h ga teng. Uchburchakning asosini toping.



A) $\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ B) $\frac{h}{2\sin\beta}$ S) $\frac{2h}{\cos\frac{\beta}{2}}$ D) $\frac{h}{tg\beta}$ E) $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$

Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra < ACB = β, AD = h uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 180^0 ekanligidan ABC uchburchakdan, $<ABC = 90^0 - \frac{\beta}{2}$. To‘g‘ri burchakli ABC uchburchakda < ABD o‘tkir burchak sinusi ta’rifidan,

$$AB = \frac{h}{\sin(90^0 - \frac{\beta}{2})} = \frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Javob: (E)

2 – masala. (3-son. 46-misol, 1997 yil). Perimetrlari 24 va 36 bo‘lgan ikki o‘xshash uchburchaklardan birining yuzi ikkinchisidan 10 ga ortiq. Kichik uchburchakning yuzini toping.

A) 20 B) 16 S) 8 D) 12 E) 18.

Yechilishi:

Uchburchaklarda o‘xshashlik koeffitsentini k desak, u holda ularni yuzalari ma’lumki k^2 marta farq qiladi. Uchburchaklar perimetrlari mos ravishda

$$a+в+c = 24, \quad k\,(a+в+c) = 36$$

bo‘ladi. Bu yerdan $k = 3/2$ ekanligini topish mumkin. Ularni yuzalarini S_1, S_2 desak, u holda $S_1 = S_2 - 10$. Yuqoridagi fikrdan $S_1 = S_2/k^2$ ekanligini e’tiborga olsak,

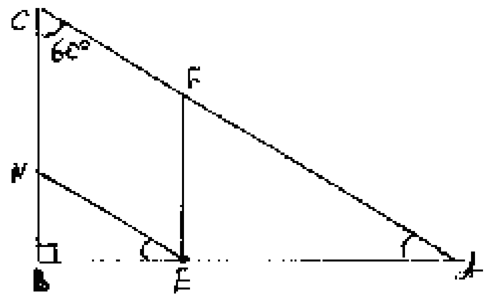
$$S_1 = k^2S_1 - 10,\ S_1 = \frac{9}{4}S_1 - 10 \Rightarrow S_1 = 8$$

Javob: (C)

3 – masala. (1-son. 45-masala, 1998 yil). To‘g‘ri burchakli uchburchakning burchaklaridan biri 60^0 ga teng. Bu uchburchakka romb shunday ichki chizilganki, 60^0 li burchak umumiy, rombning qolgan uchlari uchburchakning tomonlarida yotadi. Agar rombning tomoni $\sqrt{12}/5$ ga teng bo‘lsa, berilgan uchburchakning katta katetini toping.

A) 1,8 B) 2,4 S) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ E) 2,2

Yechilishi:



Shartga ko‘ra romb tomoni $CN = \sqrt{12}/5$,
$< BEN = 30^0$ ekanligidan o‘tkir burchak sinusi ta’rifiga ko‘ra, BNE uchburchakda
$NB = NE/2$. Bundan $BC = CN + NB = \frac{3\sqrt{12}}{10}$.
ABC – to‘g‘ri burchakli uchburchakda $< BCA = 60^0$, burchak qarshisidagi katet

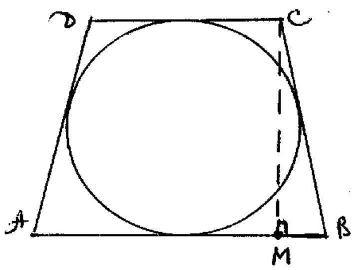
$$BA = BC\ tg <BCA = \frac{3\sqrt{12}}{10} \cdot \sqrt{3} = 1,8.$$

Javob: (A)

4 – masala. (3-son.40-masala.1998 yil). Aylanaga tashqi chizilgan teng yonli trapetsiyaning asoslari 54 va 24 sm. Trapetsiyaning balandligi necha sm?

A) 42 B) 40 S) 32 D) 36 E) 38

Yechilishi:



Masala shartiga ko‘ra DC =24, AB =54. Bizga ma’lumki, to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkin bo‘ladi, qachonki qarama-qarshi tomonlari yig‘indisi teng bo‘lsa. Demak, DC+AB= AD+CB yoki

$\frac{DC + AB}{2}$ = AD = BC.

Bundan BC = 39. Shuningdek, MB = $\frac{AB - DC}{2}$ = 15. To‘g‘ri burchakli BMC uchburchakdan MC ni topamiz:

MC = $\sqrt{39^2 - 15^2}$ = 36

Javob: (D)

5 – masala. (5-son. 40-masala, 1998 yil). Perimetri 2 r ga, diagonallarining yig‘indisi m ga teng bo‘lgan rombning yuzini toping.

A) $\frac{m^2 + p^2}{2}$ B) $\frac{m^2 - p^2}{2}$ S) $\frac{m^2 + p^2}{4}$ D) $\frac{m^2 - p^2}{4}$ E) $\frac{m^2 \cdot p^2}{4}$

Yechilishi:

Rombni tomonini *a*, diagonallarini mos ravishda $d_1^2 + d_2^2$ deb belgilaylik. Shartga ko‘ra

$$d_1 + d_2 = m \qquad (1)$$

a=r/2. Bizga ma’lumki rombning diagonallari kvadratlari yig‘indisi, tomonlar kvadratlari yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Ya’ni,

$$4\left(\frac{p}{2}\right)^2 = d_1^2 + d_2^2 \qquad (2)$$

(1) tenglikni ikkila tomonini kvadratga oshiramiz:

$$m^2 = d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2$$

(2) ni e’tiborga olsak,

$$m^2 = 4 \cdot \frac{p^2}{4} + 2d_1 \cdot d_2 \qquad (3)$$

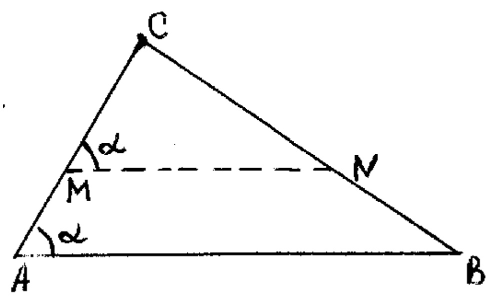
Rombni yuzi S = $\frac{d_1 d_2}{2}$ formuladan topilar edi. (3) tenglikdan S = $\frac{m^2 - p^2}{4}$ ekanligi kelib chiqadi.

Javob: (D)

6 – masala. (12-son. 10-masala, 1998 yil). Uchburchakning asosiga parallel to‘g‘ri chiziq uning yuzini teng ikkiga bo‘lsa, asosidan boshlab hisoblaganda uning yon tomonlarini qanday nisbatda bo‘ladi.

A) $(\sqrt{2} - 1)$:1 B) 1:1 S) $\frac{1}{2}$:1 D) $(\sqrt{3} - 1)$:1 E) $(2\sqrt{2} - 1)$: 1

Yechilishi:



ABC, MNC uchburchaklarni Yuzalarini mos ravishda S_1 va S_2 deb belgilaylik.

U holda,

$$S_1 = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin\alpha, \quad S_2 = \frac{1}{2} MC \cdot MN \sin\alpha.$$

Bo‘ladi. AM : MC nisbatni topish talab qilingan.

ABC va MNC uchburchaklar o‘xshash bo‘lib, o‘xshashlik koeffitsiyentini k desak,

$$k^2 = \frac{S}{S} = 2 \Rightarrow \qquad k = \frac{AC}{MC} = \sqrt{2},$$

AC – MC = AM ekanligidan $\frac{AM}{MC} = \frac{AC - MC}{MC} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1}$.

Javob: (A).

7 – masala. (12-son. 87-masala, 1998 yil). O‘tkir burchakli uchburchak tomonlarining uzunliklari natural sonlardan iborat va ular ayirmasi 4 ga teng bo‘lgan ariffmetik progressiyani tashkil qiladi. Shu uchburchak kichik tomonining eng kichik qiymati nechaga teng bo‘lishi mumkin.

A) 8 B) 15 S) 14 D) 12 E) 13.

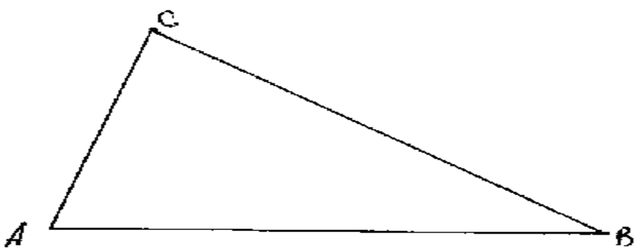
Yechilishi:

Aniqlik uchun kichik tomoni AC =x desak, u holda BC =x+4, AB =x+8 bo‘ladi. Uchburchak tengsizligidan x ni qiymatini 4 dan katta bo‘lishini ko‘rish mumkin. Bu ma’lumot yetarli emas, chunki shartga ko‘ra uchburchak o‘tkir burchakli. Quyida Al-Xorazmiy teoremasini keltiramiz:

Teorema: ***O‘tkir burchakli uchburchakda ikki kichik tomon kvadratlari yig‘indisi uchinchi tomoni kvadratidan katta;***

To‘g‘ri burchakli uchburchakda ikki kichik tomon kvadratlari yig‘indisi uchinchi tomoni kvadratiga teng;

O‘tmas burchakli uchburchakda ikki kichik tomon kvadratlari yig‘indisi uchinchi tomonidan kichik;



Demak, $AC^2 + BC^2 > AB^2$ shart urinli.

U holda,

$$x^2 + (x+4)^2 > (x+8)^2 \Rightarrow x^2 - 8x - 48 > 0.$$

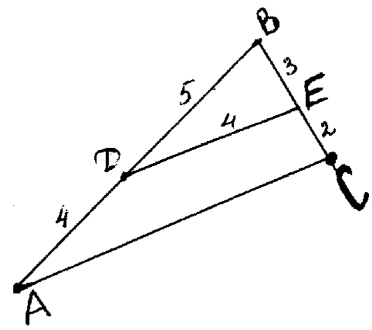
$$x \in (-\infty; -4) \cup (12; +\infty).$$

Yuqori dagi natijaga ko‘ra ABC uchburchakning kichik tomonining eng kichik qiymati 13 bo‘lar ekan.

Javob: (E)

8 – masala. (1-son. 49-masala, 1999 yil). Shaklda berilganlarga ko‘ra ADEC to‘rtburchakning yuzini toping.

A) 10 B) 6 S) 12 D) 8 E) 7



Yechilishi:

Talab qilingan to‘rtburchakning yuzi ABC uchburchak yuzidan BDE uchburchak yuzini ayirishdan topiladi. BDE uchburchak misr uchburchagi bo‘lib, uning yuzi

$$S_{BDE} = \frac{DE \cdot BE}{2} = 6.$$

ABC – uchburchak yuzini

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BS \cdot \sin < \beta$$

formulalardan foydalanib topamiz. $\angle B$ burchakning sinusi BDE uchburchakdan topiladi. sin < B = 4/5,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 18$$

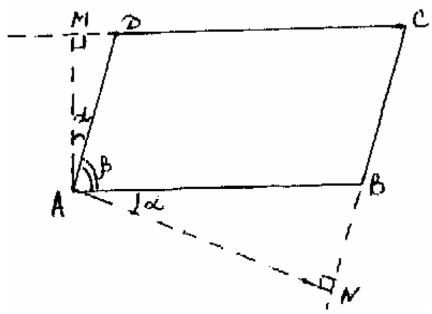
Izlangan yuza

$$S_{ADEC} = S_{AVC} - S_{BDE} = 18 - 6 = 12.$$

Javob: (S)

9 – masala. (2-son. 45- masala, 1999 yil). Parallelogramning o‘tkir burchagi uchidan uning shu uchidan o‘tmaydigan yon tomonlariga tushirilgan perpendikulyar orasidagi burchak 130^0 ga teng. Parallelogramning burchagini toping.

A) 40^0 B) 45^0 S) 50^0 D) 55^0 E) 35^0



Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra < MAN $=130^0$

ABN va ADM to‘g‘ri burchakli uchburchaklar o‘xshash,

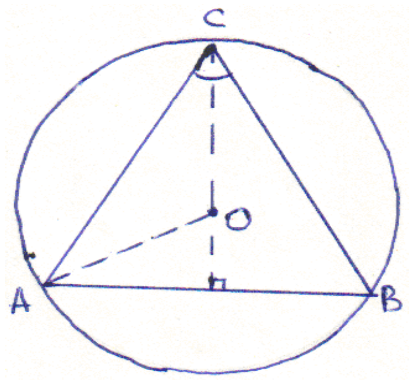
chunki<ABN=<ADM ekanligi kelib
chiqadi. Shu burchakni kattaligini α desak va <BAD $=\beta$ deb olsak, $\alpha + \beta = 90^0$, $2\alpha + \beta = 130^0$.
Bu tenglamalardan tuzilgan tenglamalar sistemasidan izlangan burchakni topish mumkin: $\beta = 50^0$.

Javob: (C)

10–masala. (2-son. 50-masala, 1999 yil). Teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi 2α ga, unga tashqi chizilgan aylananing raadiusi R ga teng. Uchburchakning yuzi nimaga teng?

A) $R^2\sin 2\alpha \cos \alpha$ B) $R^2\cos \alpha \sin^2 2\alpha$ C) $R^2 \sin^2 2\alpha$ D) $4R^2\cos^3\alpha \sin\alpha$
E) $2R^2\cos^2\alpha$

Yechilishi:



Masala shartiga ko‘ra $ACB = 2\alpha$,
$OA = OB = OC = R$. BDC to‘g‘ri burchakli uchburchakdan $<DBC = 90^0 - \alpha$ ekanligidan mos AOC markaziy burchak $180^0 - 2\alpha$ ga teng.
AOC uchburchakdan, AC tomonni kosinuslar teoremasi bo‘yicha topamiz:

$$AC = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos(180^0 - 2\alpha)} =$$

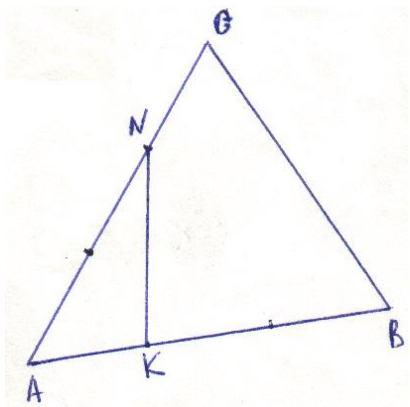
$$= R\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)} = R\sqrt{4\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = 2R\cos\alpha$$

ABC uchburchakning yuzini $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC^2 \sin <ACB$ formula bo‘yicha hisoblaymiz:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(2R\cos\alpha)^2 \sin 2\alpha = 4R^2\cos^3\alpha \sin\alpha.$$

Javob: (D)

11 – masala. (3-son. 46-masala, 1999 yil). ABC uchburchakning AB va AC tomonlarida shunday K va M nuqtalar olindiki, $AK = \frac{1}{3}$ AB ga va $AN = \frac{2}{3}$AC ga teng bo‘ladi. ABC uchburchakning yuzi 18ga teng. AKN uchburchakning yuzini toping.



A) 4 B) 6 S) 9 D) 2 E) 3.

Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin < A = 18.$$

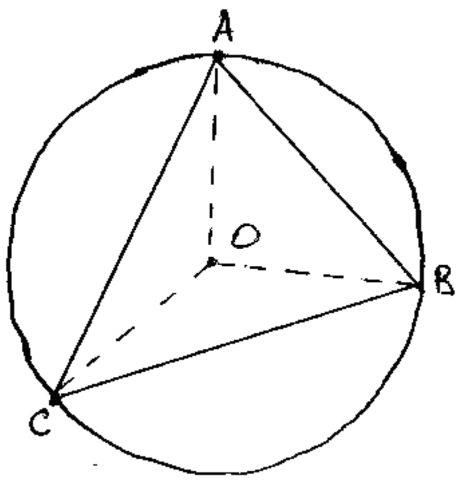
ANK uchburchakning yuzi

$$S_{ANK} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AC\cdot\frac{1}{3}AB\cdot\sin < A$$

yoki

$$S_{ANK} = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin < A = \frac{2}{9}S_{ABC} = \frac{2}{9}\cdot 18 = 4$$

Javob:(A)



12 – masala. (4-son. 43-masala, 1999 yil). Uchburchak burchaklari 45^0 va 60^0 ga, unga tashqi chizilgan aylananing radiusi R ga teng. Uchburchakning yuzini toping.

A) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+1)$ S) $\frac{R^2}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{R^2}{2}(3+\sqrt{3})$.

Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra ABC uchburchakda $<A = 60^0$, $<C = 45^0$, $< B = 75^0$, OA =OB=OC=R. Aniqlik uchun AC =*a*, BC =*в*, AB =c deb belgilab olaylik. Izlanayotgan uchburchak yuzini ikkita qulay usulda topish mumkin:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a\cdot в\cdot c}{4R} \quad \text{yoki} \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\, a r \sin <A.$$

Ma’lumki, aylanada markaziy burchakka mos ichki burchak uning yarmiga teng edi. Shunga ko‘ra quyidagilarga egamiz:

$<AOC = 90^0$, $< BOC =120^0$, $<AOC = 150^0$

ΔAOC, ΔBOC, ΔAOB uchburchaklarda kosinuslar teoremasini qo‘llab a, *в*, c larni topish mumkin.

$$a=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cos150^0} = R\sqrt{2+\sqrt{3}}\ ;$$

$$v=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cos120} = R\sqrt{3}\ ;$$

$$s=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cos90^0} = R\sqrt{2}\ ;$$

1-usul bo‘yicha hisoblaylik

$$S_{ABC}=\frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot R\sqrt{3}\cdot R\sqrt{2}}{4R} = \frac{R^2}{4}(3+\sqrt{3}),$$

2-usul bo‘yicha hisoblaylik

$$S_{ABC}= \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot R\sqrt{3}\ ;\ \sin60^0 = \frac{R^2}{4}(3+\sqrt{3})\ ;$$

Javob: (E)

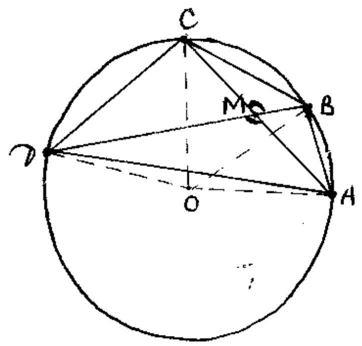
<u>13 – masala.</u> (5-son. 43 –masala, 1999 yil). To‘rtta nuqta aylanani yoylarga ajratadi. Yoylar uzunliklari maxraji 2 ga teng geometrik progressiyani tashkil etadi. Shu to‘rtta nuqtani ketma-ket tutashtirish natijasida hosil bo‘lgan to‘rtburchakning diagonallari orasidagi eng katta burchakni toping.

A) 100^0 B) 120^0 S) 150^0 D) 130^0 E) 140^0

Yechilishi:

<AOB, <BOC, < COD, <DOA burchaklarni mos ravishda x, 2x, 4x, 8x deb olsak, u holda $<AOB =24^0$, $<BOC = 48^0$, $<COD =96^0$, $<DOA=192^0$.

Markaziy burchak va unga mos ichki burchaklar xossasiga ko‘ra $<DCA =96^0$ chunki $<DOA=192^0$. $<CDB =24^0$ chunki $<COB = 48^0$, demak, $<DMC =60^0$ bo‘lib, izlangan $<SMB = <DMA =120^0$ ekanligini ko‘rish mumkin.



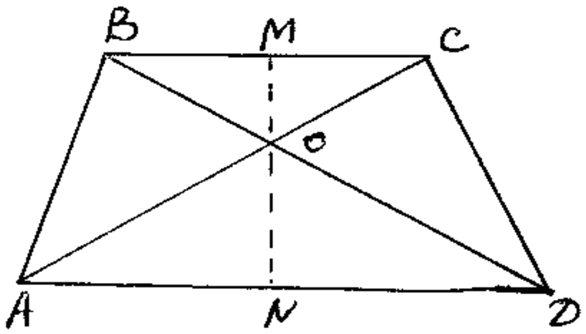
Javob: (B).

<u>14 – masala.</u> (5-son. 44 – masala, 1999 yil). BC va AD – trapetsiyaning asoslari, O – AC va BD diagonallarining kesishish nuqtasi BOC va AOD uchburchaklarning yuzlari mos ravishda 4 va 9 ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

A) 16 B)25 S) 26 D) 30 E) 36.

Yechilishi:

Shartga ko‘ra Δ BOC va ΔAOD uchburchaklar o‘xshash bo‘lib, o‘xshashlik koeffitsenti $k = \frac{3}{2}$ ekanligini aytish mumkin. Bu yerda MO = h_1 desak, NO $= \frac{3}{2} h_1$ bo‘ladi.



$MN = MO + NO \Rightarrow MN = \frac{5}{2}\ h_1$.

$BC = a_1$ desak, $AD = \frac{3}{2} a_1$ bo‘ladi.

Trapetsiyani yuzi

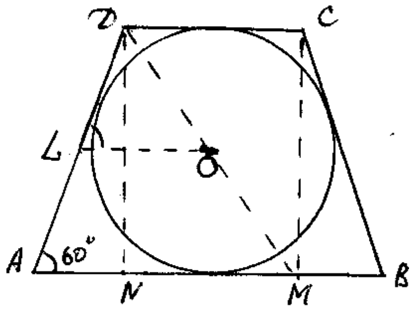
$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot MN = \frac{a + \frac{3}{2}a}{2} \cdot \frac{5}{2}\ h_1 = 25.$$

Javob: (B)

<u>15 – masala.</u> (5-son.45-masala,1999 yil). Burchagi 60^0 ga, katta asosi 10 ga teng bo‘lgan teng yonli trapetsiyaga aylana ichki chizilgan.

Trapetsiyaning kichik asosi uchi va aylana markazi orasidagi masofani toping.

A) $\frac{4\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ S) $3\frac{2}{5}$ D) $3\frac{1}{3}$ E) $4\frac{1}{5}$



Yechilishi:

Aniqlik uchun AD =BC =a deb belgilaylik. To‘g‘ri burchakli ΔAND uchburchakdan $AN = \frac{a}{2}$ ekanligi kelib chikadi. To‘rtburchakka ichki aylana chizilganligi uchun $\frac{DC + AB}{2}$ =a deyish mumkin. Bundan

$$\frac{10 - a + 10}{2} = a \Rightarrow a = \frac{20}{3}.$$

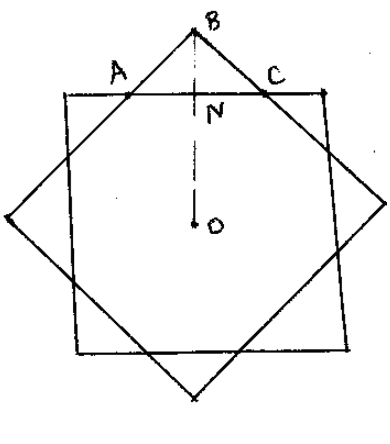
Bu yerda $\angle = \frac{a}{2}$ va $\angle DLO = 60^0$ ekanligidan ΔLOD teng tomonli bo‘lib, izlangan masofa OD $= \frac{a}{2}$ yoki $3\frac{1}{3}$ ekanligini aytish mumkin.

Javob: (D)

<u>16 – masala.</u> (5-son. 45-masala, 1999 yil). Tomoni 1 ga teng bo‘lgan kvadrat ustma-ust quyiladi. Shundan so‘ng kvadratlardan biri ularning umumiy simmetriya markaziga nisbati 45^0 ga burildi. Hosil bo‘lgan figuraning yuzini hisoblang.

A) $4 - 2\sqrt{2}$ B) 1,2 S) 1,25 D) $3 - \sqrt{2}$

E) $\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}$.



Yechilishi:

Chizmadan ko‘rish mumkinki hosil qilingan figurani yuzii $S = S_{kv} + 4S_{ABC}$ tenglikdan topiladi.

$< BAC = 45^0$ ekanligidan

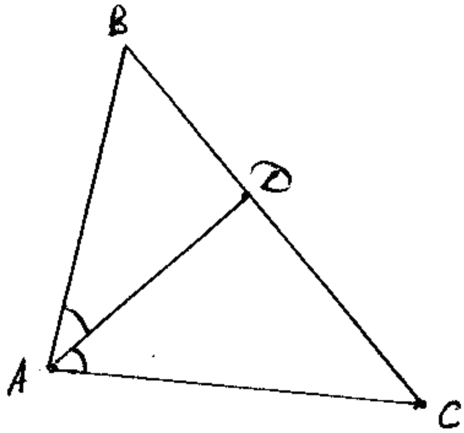
AN = NC = BN = $\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}5 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Bu ma'lumotlarga ko'ra, $S_{\Delta ABC} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4}$ bo'lib,

$S = 1+4\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = 4 - 2\sqrt{2}$ ekanligini topamiz.

Javob: (A).

<u>17 – masala.</u> (8-son. 43-masala, 1999 yil). Uchburchakning tomonlari 6; 9 va 12 ga teng. Eng katta burchak bissektrisasi uchburchakning tomonidan ajratgan kesmalarning kattasini toping.

A) 7,2 V) 4,8 S) 6,8 D) 8,4 E) 5,6



Yechilishi:

Bizga ma'lumki uchburchakning uchidan chiqqan bissektrisasi qarshisidagi tomonni yon tomonlari nisbati kabi nisbatda bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} .$$

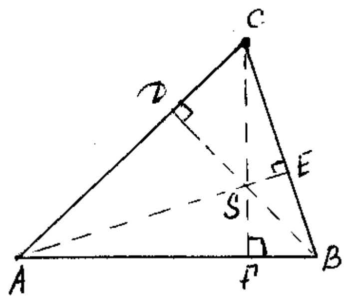
Bunga ko'ra,

$$\frac{9}{6} = \frac{BD}{12 - BD} \Rightarrow BD = 7{,}2$$

Javob: (A)

18 – masala. Uchburakning ikki tomoni uzunliklari 6 va 3 ga teng. Agar bu tomonlarga o'tkazilgan balandliklar uzunliklari yig'indisining yarmi uchinchi tomonga o'tkazilgan balandlikka teng bo'lsa, uchinchi tomon uzunligini toping.

A) 6 B) 5 S) 3 D) 4 E) 7



Yechilishi:

Aniqlik uchun BD=x, CF=u, BC =*a* deb belgilaylik. Shartga ko'ra AC =6, AB=3 $\frac{BD+CF}{2}$=AE. ABC uchburchakning yuzini 3 tomoni va mos balandliklaar bo'yicha ifodalarini tenglashtiraylik:

$$\frac{a(\frac{x+y}{2})}{2} = \frac{6x}{2} = \frac{3 \cdot y}{2} ,$$

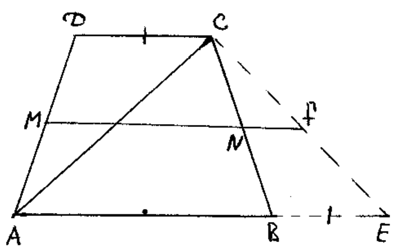
bu yerdan y=2x $\Rightarrow$ $\frac{y}{x}$ =2 ekanligini aytish mumkin.

$a \cdot \frac{x+y}{2} = 6x$ tenglikni ikkala tarafini x ga bo'lamiz: $a + a\frac{y}{x} = 12 \Rightarrow$ $3a = 12 \Rightarrow$ $a = 4$

Javob: (D)

<u>19 – masala.</u> (8-son. 47-masala, 1999 yil). Teng yonli tarpetsiyaning yon tomoni 7 ga diagonali 8 ga, o'rta chizig'i 4 ga teng. Trapetsiyaning kichik asosini toping.

A) 3 B) 4 S) 5 D) 2 E) 4,2



Yechilishi:

Shartga ko'ra AC= 8, AD =BC =7,

$$\frac{DC+AB}{2} = 4$$

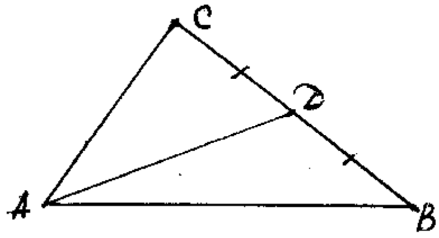
Aniqlik uchun DC =a, AB=$в$ deb olaylik. AB ni davomida a ga teng kesma qo‘yamiz. Bu yerda ADC va BCE uchburchaklar o‘xshash. Demak AC=CE=8 bo‘lib, ACE teng tomonli uchburchak. $\angle$AEC =60^0, BC =7, CE=8 ma’lumotlardan BCE uchburchakda

$BC^2 = CE^2 + BE^2 - 2\ CE \cdot BE \cos 60^0$, ya’ni $7^2=a^2+8^2 - 2a \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_1=5 \quad a_2=3$ Masala shartini a=3 qanoatlantiradi.

Javob: (A)

<u>20 – masala.</u> (10-son.47-masala, 1999 yil). ABC uchburchakning AD medianasi 6 ga AC tomoni 8 ga va ular orasidagi burchak 30^0 ga teng ABC uchburchakning yuzini toping.

A) 28 B) 26 S) 22 D) 30 E)



Yechilishi:

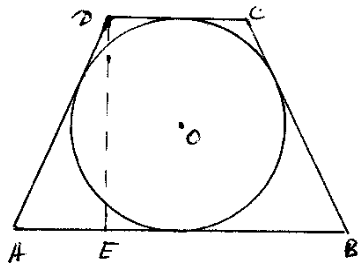
Bizga ma’lumki mediana uchburchak Yuzini teng ikkiga bo‘ladi. Demak,

$S_{\Delta ABC} = 2 \cdot S_{\Delta ACD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^0 = 24.$

Javob: (E)

<u>21 – masala.</u> (10-son. 48-masala,1999 yil). Radiusi 4 ga teng bo‘lgan doiraga tashqi chizilgan teng yonli trapetsiyaning perimetri 40 ga teng. Trapetsiyaning kichik asosini toping.

A) 3 B) 4 S) 5 D) 2 E) 6



Yechilishi:

Masala shartidan ko‘rinadiki, R =4 ekanligidan DE=8 bo‘ladi. Aylana trapesiyaga ichki chizilganligidan

AD+BC= DC+AB

tenglik o‘rinli. Trapetsiyaning perimetri 40 ekanligini e’tiborga olsak, u holda AD=BC=10 kelib chiqadi. ADE to‘g‘ri burchakli uchburchak topilgan ma’lumotlarga ko‘ra misr uchburchagi. Bundan AE=6 hamda DC+AB=20, (AB=DC+2AE) ekanligidan, izlangan kichik asos topiladi:

$$DC=20 - AB = 20 - DC - 12 \Rightarrow DC = 4$$

Javob: (B)

STEREOMETRIYA

§ 2. 1 . To‘g‘ri chiziq va tekisliklarining xossalari

Stereometriyaning ko‘pgina masalalarini yechishdan oldin quyidagi keltirilgan to‘g‘ri chiziq va tekisliklarni ta’rif va teoremalarini yodda tutish lozim.

1. To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallelligi

α tekislik va unga tegishli bo‘lmagan a to‘g‘ri chiziq birorta ham umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa, u holda ular parallel deyiladi.

To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallelik alomati. ***Agar to‘g‘ri chiziq α tekislikdagi biror a to‘gri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda u shu tekislikka ham paralleldir.***

To‘g‘ri chiziq va tekisliklarni parallelligi haqidagi teoremalar:

a) Agar α tekislikka tegishli bo‘lgan a to‘g‘ri chiziq β tekislikka parallel bo‘lib, shu bilan birga α va β tekisliklar v to‘g‘ri chiziq orqali kesishsa, u holda a va v to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi .

b) Agar a va в parallel to‘g‘ri chiziqlar orqali kesishuvchi turli tekisliklar o‘tkazilsa, u holda a, в va ularni kesishish chizig‘i s to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladi.

v) Agar kesishuvchi α va β tekisliklarning Har biri berilgan a to‘g‘ri chiziqka parallel bo‘lsa, u holda ulrani kesishish chizig‘i в p ham a to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi.

2. Tekisliklarni parallelligi

Agar α va β tekisliklar birorta ham umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa, u holda ular parallel deyiladi.

Ikki tekislikning parallellik alomati: α tekislikda yotgan o‘zaro kesishuvchi a va в to‘g‘ri chiziqlar β tekisligida yotgan c va d to‘g‘ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo‘lsa, u holda α va β tekisliklar o‘zaro paralleldir.

Parallel tekisliklar haqidagi teoremalar:

a) Agar ikiki parallel tekisliklarni uchinchi tekislik kesib o‘tsa, u holda kesishish chiziqlari parallel bo‘ladi.

b) Ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan parallel to‘g‘ri chiziqlarning kemalari teng.

3. To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarligi

Agar tekislikni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o‘tuvchi istalgan to‘g‘ri chiziqka perpendikulyar bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq shu tekislikka perpendikulyar deyiladi.

To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik alomati.

Agar tekislikni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq, tekislikning shu kesishish nuqtasidan o‘tuvchi ikki to‘g‘ri chizig‘iga perpendikulyar bo‘lsa, u holda tekislikning o‘ziga ham perpendikulyar bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarligi haqidagi teoremalar:

a) Bitta tekislikka perpendikulyar ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro paralleldir.

b) Agar tekislik ikkita parallel to‘g‘ri chiziqdan biriga perpendikulyar bo‘lsa, u holda ikkinchisiga ham perpendikulyardir.

v) Berilgan to‘g‘ri chiziqka perpendikulyar ikki tekislik o‘zaro paralleldir.

4. Tekisliklarning perpendikulyarligi

Kesishuvchi ikkita tekislikning kesishgan to‘g‘ri chizig‘iga perpendikulyar bo‘lgan uchinchi tekislik ularni perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesib o‘tsa, bu ikki tekislik perpendikulyar tekisliklar deyiladi.

Tekisliklarni perpendikulyarlik alomati. ***Agar tekislik ikkinchi tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq orqali o‘tsa, u holda ular o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi.***

Perpendikulyar tekisliklar haqidagi teoremalar:

a) Agar ikki tekislik perpendikulyar bo‘lib, ulardan biriga tegishli bo‘lgan to‘g‘ri chiziq ularning kesishish chizig‘iga perpendikulyar bo‘lsa, u holda bu to‘g‘ri chiziq ikkinchi tekislikka perpendikulyar bo‘ladi.

b) Agar ikki tekislik perpendikulyar bo‘lib, ulardan biriga kesishgan chiziqdan perpendikulyar o‘tkazilsa, u holda bu perpendikulyar butunlay ikkinchisiga tegishli bo‘ladi.

5. Tekislikka tushirilgan perpendikulyar va og‘ma

Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka tushirilgan perpendikulyar deb, berilgan nuqtani tekislikning nuqtasi bilan tutashtiruvchi va tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqda yotuvchi kesmaga aytiladi. Nuqtadan tekislikgacha masofa perpendikulyarning uzunligi deyiladi.

Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka o‘tkazilgan og‘ma deb berilgan nuqtani tekislikdagi nuqta bilan tutashtiruvchi va tekislikka perpendikulyar bo‘lmagan istalgan kesmaga aytiladi.

Uch perpendikulyar haqidagi teorema.

Tekislikda og‘mani asosidan uning proyeksiyasiga perpendikulyar qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq og‘maning o‘ziga ham perpendikulyardir. Aksincha, tekislikdagi to‘g‘ri chiziq og‘maga perpendikulyar bo‘lsa, u og‘maning proyeksiyasiga ham perpendikulyar bo‘ladi.

Og‘ma va tekislik orasidagi burchak deb, og‘ma va uning shu teksilikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi.

6. Ikki yoqli burchak va uni o‘lchash

Ikkita yarim tekislikdan va ularni chegaralab turgan umumiy to‘g‘ri chiziqdan tashkil topgan figura ikki yoqli burchak deyiladi. Yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning yoqlari, ularni chegaralovchi to‘g‘ri chiziq esa ikki yoqli burchakning qirrasi deyiladi.

Ikki yoqli burchakning qirrasiga perpendikulyar tekislik bilan hosil qilingan burchak ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi deyiladi. Ikki yoqli burchakning o‘lchovi uchun unga mos chiziqli burchakning o‘lchovi qabul qilinadi.

§ 2. 2 . Ko‘pyoqlar

Ko‘pyoqlarga doir masalalarni yechishda asosiy ko‘pyoqlar turlari va ularning xossalarini bilish talab etiladi.

1. Sirti chekli miqdordagi yassi ko‘pburchakdan iborat jism ko‘pyoq deyiladi. Ko‘pburchaklarning tomonlari ko‘pyoqni qirralari deyiladi. Ko‘pyoqni chegaralovchi ko‘pburchaklar ko‘pyoqni yoqlari deyiladi.

2. Prizma deb ikki yog‘i teng ko‘pburchaklardan iborat bo‘lib, parallel tekisliklarda yotuvchi va qolgan barcha qirralari parallel ko‘pyoqqa aytiladi. Teng ko‘pburchaklar prizmani asoslari deyiladi. Prizmani qolgan yoqlari yon yoqlari deyiladi. Prizmaning asoslarida yotmaydigan qirralari yon qirralari deyiladi. Prizmaning barcha yon qirralari parallel tekisliklar hosil qilgan parallel to‘g‘ri chiziqlarning kesmalari ekanligidan o‘zaro teng. Asoslari orasidagi masofani ifodalovchi kesma prizmaning balandligi deyiladi. Prizmani diagonali deb bitta yog‘iga tegishli bo‘lmagan uchlarini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Yon yoqlari asos tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan prizma to‘g‘ri prizma deyiladi.

Muntazam prizma deb shunday to‘g‘ri prizmaga aytiladiki, uning asoslari muntazam ko‘pburchaklardan iborat bo‘ladi.

Ixtiyoriy prizmaning yon sirti quyidagi formula bilan topiladi:

$$S_{yon} = P_n \cdot AA_1$$

bu yerda P_n – prizmaning ko‘ndalang kesim perimetri; AA_1 – yon qirrasi uzunligi.

Xususiy holda to‘g‘ri prizmaning yon sirti asosining perimetri bilan balandligi ko‘paytmasiga teng.

Prizmaning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V = S_n \cdot AA_1 \qquad V = S_{asos} \cdot H,$$

bu yerda S_n - prizmaning ko‘ndalang kesim yuzi; AA_1 - yon qirrasi uzunligi; S_{asos} – asosining yuzi; H – prizmaning balandligi.

3. ***Asosi parallelogramdan iborat prizmaga parallelepiped deyiladi. Uning barcha oltita yoqlari parallelogramdir.***

Parallepipedning xossalari:

A) Parallelepipedning diagonallari o‘rtalari uning simmetriya markazi deyiladi;

B) Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari teng va parallel;

S) Parallepipedning barcha to‘rtta diagonali ham bir nuqtada kessishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.

Yon qirralari asos tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri parallelepiped deyiladi.

To‘g‘ri burchakli parallelepiped to‘g‘ri parallelepiped bo‘lib, asoslari to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning qirralari teng bo‘lsa, bunday parallelepiped kub deyiladi. Kubning hamma yoqlari teng kvadratlardan iborat.

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi va diagonali mos ravishda quyidagi formulalar bo‘yicha hisoblanadi:

$$V = abc,$$
$$d^2 = a^2 + \boldsymbol{в}^2 + c^2$$

bu yerda a, ***в***, c - to‘g‘ri burchakli parallelepipedning bir uchidan chiqqan qirralari.

Kubning hajmi va diagonali mos ravishda quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$V = a^3,$$
$$d = a\sqrt{3},$$

4. **<u>Piramida</u>** deb, uning bitta yog‘i ixtiyoriy ko‘pburchakdan, qolgan yoqlari umumiy uchga ega bo‘lgan uchburchaklardan iborat ko‘pyoqqa aytiladi. Ko‘pburchak piramidaning asosi, qolganlari yon yoqlari deyiladi. Barcha yon yoqlarining umumiy uchi piramidani uchi deyiladi. Piramidani balandligi deb, piramidaning uchidan asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.

Muntazam piramida deb asosi muntazam ko‘pburchakdan iborat bo‘lib, balandligi bu muntazam ko‘pburchakni markaziga tushuvchi piramidaga aytiladi. Muntazam piramidaning barcha yon qirralari bir-biriga teng; barcha yon yoqlari teng yonli uchburchaklardir. Muntazam piramida yon yog‘ining balandligi bu piramidani **apofemasi** deyiladi.

Agar piramidaning asosi n – burchakdan iborat bo‘lsa, u holda bunday piramida n- burchakli piramida deyiladi. Uchburchakli piramida tetraedr deyiladi. Agar tetraedrning barcha qirralari teng bo‘lsa, bunday tetraedr muntazam tetraedr deyiladi.

Muntazam piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$S_{yon} = \frac{1}{2} P \cdot h,$$

bu yerda P – piramida asosining perimetri, h – apofema. Piramidaning hajmi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

bu yerda S – piramida assosining yuzi; H – piramida balandligi.

5. Piramidani uning asosiga parallel tekislik bilan kesganda ikkita ko‘pyoq hosil bo‘ladi. Ulardan biri kesik piramida deb ataladi, ikkinchisi piramida bo‘lib, u kesik piramidani to‘ldiruvchi deyiladi. Kesik piramidani asoslari o‘xshash ko‘pburchaklardan, yon yoqlari trapetsiyalardan iborat. Kesik piramidaning balandligi deb, oxirlari asoslarida bo‘lgan perpendikulyar kesmasiga aytiladi.

Agar kesik piramida muntazam piramidaning qismi bo‘lsa, muntazam kesik piramida deyiladi. Muntazam kesik piramidaning yon yoqlari teng yonli trapetsiyalardan iborat. Bu trapetsiyalarning balandligi muntazam kesik piramidaning apofemasi deyiladi.

Muntazam kesik piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida hisoblanadi.

$$S_{yon} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\,h,$$

bu yerda P_1P_2 - piramida asoslarining perimetrlari; h – apofema.

Muntazam kesik piramidani hajmi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)\,H$$

bu yerda H – kesik piramida balandligi; S_1S_2 – piramida asoslarining yuzlari .

6. a) Agar piramidaning barcha yon qirralari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qilsa, yoki qirralari teng bo‘lsa, u holda piramidaning balandligi asosiga tashqi chizilgan aylana markaziga tushadi.

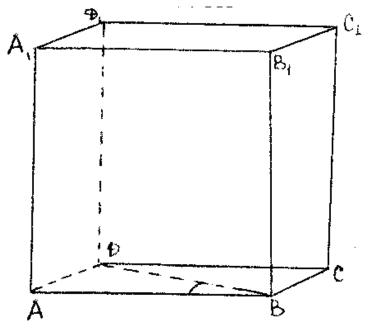
B) Agar piramidaning asosi barcha yon yoqlari bilan bir xil α burchak tashkil qilsa, yoki yon yoqlari apofemalari teng bo‘lsa, u holda piramidaning balandligi asosiga ichki chizilgan aylana markaziga tushadi, shu bilan birga $S_{asos} = S_{yon} \cdot \cos\alpha$.

S) Agar S_1 va S_2 - piramidaning parallel kesimlari yuzlari, a_1 va a_2 - kesimlarning chiziqli o‘lchovi elementi, h_1 va h_2 - piramidaning uchidan kesimlargacha bo‘lgan masofa bo‘lsa, u holda

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

1 – misol. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning balandligi 5 sm. Asosining diagonali $6\sqrt{2}$ sm bo‘lib, asosining tomonlari bilan 45^0 li burchak tashkil qiladi. Parallelepipedning hajmini toping.

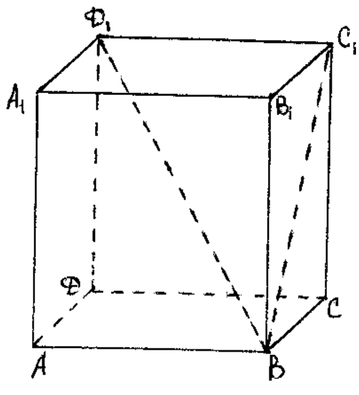


Yechilishi:

Shartga ko‘ra AA_1=5sm, DB =$6\sqrt{2}$ sm, <ABD = 45^0. ABD to‘g‘ri burchakli uchburchakdan AD=DB $\cdot$ $\sin45^0$ = 6(sm), AB= AD=DB $\cdot$ $\cos45^0$ = 6(sm), ekanligini topish mumkin. U holda hajm $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 180$ (sm^3).

Javob: 180 sm^3.

2 – misol. Muntazam to‘rtburchakli prizmaning diagonali 7 sm, yon yog‘ining diagonali 5 sm. Prizmaning diagonali va balandligi yig‘indisini toping.



Yechilishi:

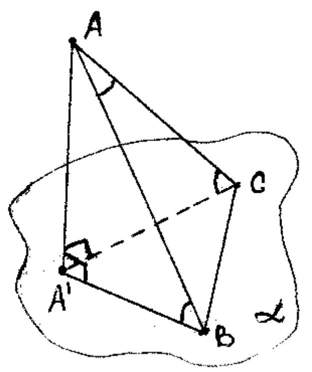
Shartga ko‘ra BD_1 =7, BC_1 =5, prizmani asoslari kvadratlaridan, yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchaklardir. $D_1C_1B_1$ to‘g‘ri burchakli uchburchak-dan $D_1C_1^2=a^2=BD_1^2 - BC_1^2 = 24$ ekanligini topamiz. BB_1S_1 to‘g‘ri bur-chakli uchburchakdan

$BB_1 = \sqrt{BC_1^2 - B_1C_1^2} = \sqrt{B_1C_1^2 - a^2} = 1$.

U holda izlangan yig‘indi $BD_1+BB_1 = 8$

Javob: 8

3 – misol. Tekislikdan a masofada joylashgan nuqtadan tekislikka ikkita og‘ma tushirildi. Og‘malarning harbiri bilan tekislik orasidagi burchak 45^0 ga teng. Agar og‘malar orasidagi burchak 60^0 ga teng bo‘lsa, og‘malarning uchlari orasidagi masofa qancha?



Yechilishi:

Shartga ko‘ra AA' =a, $\angle$ ACA' = 45^0, $\angle$ABA = 45^0, <BAC =60^0. Shartdan ko‘ri-nib turibdiki, AB va AC og‘malar bir-

biriga teng. ABA' to‘g‘ri burchakli teng yonli uchburchakdan $AB=a\sqrt{2}$. ABC teng yonli uchburchakdan kosinuslar teoremasiga ko‘ra,

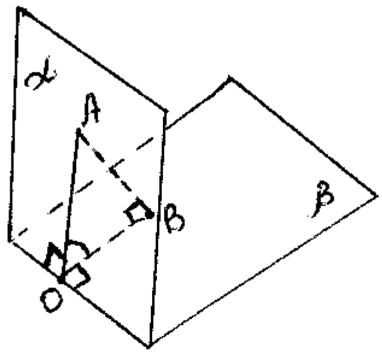
$BC^2= AB^2+AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot sos\ 60^0 = 2a^2 +2a^2 - 2 \cdot 2a^2 \cdot \frac{1}{2} =2a^2.$

$BC = a\sqrt{2}$. **Javob:** $a\sqrt{2}$

4 – misol. α va β tekisliklar orasidagi burchak 60^0 ga teng. α tekislikdagi A nuqtadan tekisliklarning kesilishi chizig‘igacha bo‘lgan masofa 3 ga teng. A nuqtadan β tekislikkacha masofani toping.

Yechilishi:

Shartga ko‘ra AO =3, $<AOB =60^0$. AB masofa A nuqtadan β tekislikkacha masofa ekanligidan, hosil qilingan AOB uchburchak to‘g‘ri burchakli. To‘g‘ri burchakli uchburchakda o‘tkir burchak qarshisidagi katet gipotenuza bilan shu burchak sinusi ko‘paytmasiga tengekanligidan:



$AB = AO \cdot \sin 60^0 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5\sqrt{3}$

Javob: $1,5\sqrt{3}$

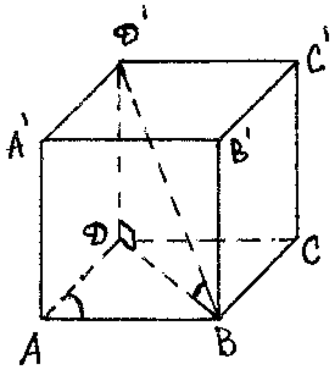
5 – misol. To‘g‘ri parallelepipedning asosini tomonlari 6 va $\sqrt{3}$ ga teng bo‘lib, 30^0 li burchak tashkil qiladi. Parallelepipedning kichik diagonali $\sqrt{42}$ ga teng. Shu diagonalning asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagini toping.

Yechilishi:

Shartga ko‘ra AD=6, $AB=\sqrt{3}$, $\angle BAD =30^0$ bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki parallelepipedning kichik diagonali $BD' =\sqrt{42}$. ABD uchburchakda kosinuslar teoremasiga ko‘ra,

$BD^2= AD^2 +AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot sos30^0$

ekanligidan BD ni topamiz:



$BD=\sqrt{3+36-2\cdot\sqrt{3}\cdot 6\cdot \cos 30^0} = \sqrt{21}$.

To‘g‘ri burchakli BDD' uchburchakdan $<DBD'$ burchakning kosinusi:

$sos\ \alpha = \frac{ВД}{ВД} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow <DBD' = 45^0.$

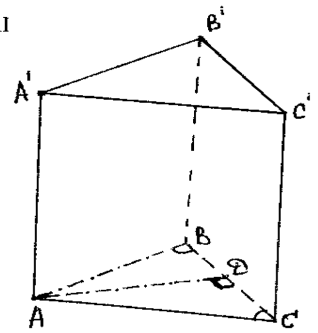
Javob: 45^0.

6 – misol. To‘g‘ri prizmaning asosi teng yonli uchburchak bo‘lib, uning asosi a ga va asosidagi burchagi α ga teng. Agar prizma yon sirtining yuzi prizma asoslari yuzlarining yig‘indisiga teng bo‘lsa, uning hajmini toping.

Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra AB=AC, BC=a . $\angle ABC = \angle ACB =\alpha$

2. $S_{\Delta ABC} = S_{yon\ sirt}$ (1)



ABC to‘g‘ri burchakli uchburchakdan $DC=\frac{a}{2}$ ekanligidan α o‘tkir burchak kosinusi ta’rifidan, $AB=AC=\frac{a}{2\cos\alpha}$.

Bundan

$S_{\Delta ABC} =\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right)^2 \cdot \sin(\pi - 2\alpha)= \frac{a^2\sin 2\alpha}{8cos^2\alpha}$; $P_{\Delta ABC} = \frac{a(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$.

(1) tenglikdan, $2 \cdot S_{\Delta ABC} = R \cdot N$ (N- prizma balandligi) demak,

$$\frac{a^2 \sin 2\alpha}{4\cos^2\alpha} = \frac{a(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} \cdot N$$

bu yerdan N ni topamiz:

$$N = \frac{a \sin 2\alpha}{4\cos\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

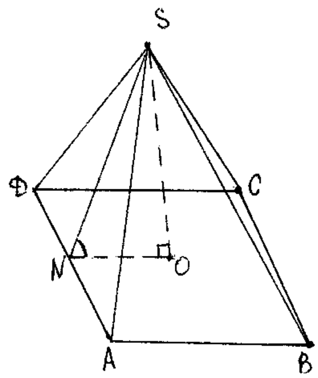
Prizmaning hajmi

$$V = S_{\Delta} \cdot N = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{8\cos^2\alpha} \cdot \frac{a\sin 2\alpha}{4\cos\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{a^3 \sin^2 2\alpha}{32\cos^3\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

Javob: $\frac{a^3 \sin^2 2\alpha}{32\cos^3\alpha(1+\cos\alpha)}$.

7 – misol. Yon sirti Q bo‘lgan to‘rtburchakli muntazam piramidaning yon yog‘i asos tekisligi bilan α burchak hosil qilsa, uning hajmini toping.

Yechilishi:



Shartga ko‘ra $S_{yon\ sirt}$= Q, $\angle$SNO = α shu bilan birga asosi kvadratdan iborat. Quyidagi belgilashlarni olaylik AD =a, SO=H. Ma’lumki, yon yoqlari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qiluvchi yoki asosiga ichki aylana chizish mumkin bo‘lgan piramidalar uchun,

S_{asos}= $S_{yon\ sirt}$ · sosα ekanligidan

S_{asos}= a^2 = Q · sosα ⇒ a = $\sqrt{Q\cos\alpha}$.

SNO to‘g‘ri burchakli uchburchakda

NO= $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{Q\cos\alpha}}{2}$ bo‘lib, o‘tkir burchak tangensi ta’rifiga ko‘ra H=NO ·tgα= $\frac{\sqrt{Q\cos\alpha}}{2}$ ·tgα.

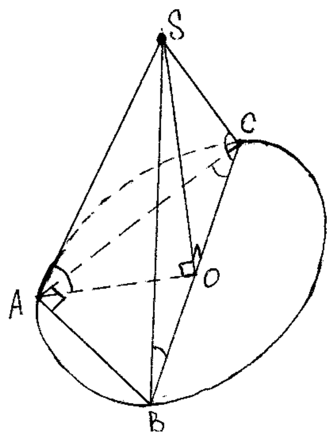
Piramidani hajmi

$$V = \frac{1}{3} S_{asos} \cdot H = \frac{1}{3} Q\cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{Q\cos\alpha}}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6} Q\sin\alpha \sqrt{Q\cos\alpha}.$$

Javob: $\frac{1}{6}$ Qsinα $\sqrt{Q\cos\alpha}$.

8 – misol. Piramidaning asosi o‘tkir burchagi α bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib, uning ***в*** ga teng uzunlikdagi hamma yon qirralari β burchak ostida shu asos tekisligiga og‘gan. Piramidaning hajmini toping.

Yechilishi:



Masala shartiga ko‘ra,

SA=SB=SC = ***в***, <ACB =α, <SAO = <SVO =SCO <β. Ma’lumotlardan ko‘rinib turibdiki barcha qirralari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qiluvchi piramida asosiga tashqi aylana chizish mumkin, shu bilan birga piramida balandligi shu aylana markaziga tushadi. ABS uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lganligi uchun O nuqta BS gipotenuzaning o‘rtasida joylashgan.

SCO to‘g‘ri burchakli uchburchakdan,

SO = SC ·sinβ = ***в*** sinβ,

OC = SC · cosβ = ***в*** cosβ ⇒ BC =2 ***в*** sosβ.

ABS to‘g‘ri burchakli uchburchakdan,

AS =BS · cosα = 2 *в* cosαcosβ
A***B*** = BS · sinα = 2 *в* cosβsinα

Bundan

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{4b^2 \cos^2 \beta \cos\alpha \sin\alpha}{2} = в^2 \cos^2 \beta \sin 2\alpha$

Piramidaning hajmi, $V = \frac{1}{3} S_{acoc} \cdot H = \frac{1}{3} v^2 \cos^2 \beta \sin 2\alpha \cdot v \sin\beta = \frac{b^3}{3} \cos^2 \beta \sin\beta \sin 2\alpha$.

Javob: $\frac{b^3}{3} \cos^2 \beta \sin\beta \sin 2\alpha$.

<u>9 – misol.</u> To‘rtburchakli muntazam piramida asosining yuzi 16 sm^2, yon yoqlari balandliklari asos tekisligi bilan $\varphi = 30^0$ burchak tashkil qiladi. Piramida hajmini toping.

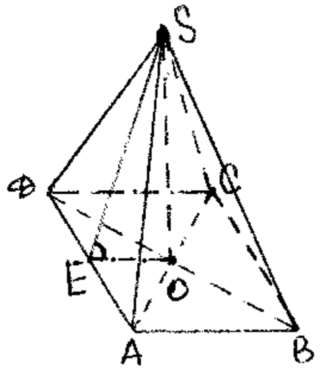
Yechilishi:

Shartga ko‘ra $S_{acoc} = 16\ sm^2$.
Bundan A***B***= $\sqrt{16}$ =4 sm. to‘g‘ri burchakli SOE uchburchakda <OES =30^0 ekanligidan.

$N = OS = OE \cdot ctg\varphi = \frac{AB}{2}\ ctg\varphi = 2\ ctg30^0 = 2\sqrt{3}$.

U holda piramida hajmi

$V = \frac{1}{3} S_{acoc} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$.



Javob: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

<u>10 – misol.</u> Oltiburchakli piramidaning balandligi 8 m. Uning uchidan 3m masofada asosiga parallel tekislik bilan kesilgan. Hosil bo‘lgan kesim yuzi 4 m^2. Piramidaning hajmini toping.

Yechilishi:

Shartga ko‘ra N =8m, h=3m, S_{kec} = 4m^2, piramidaning parallel kesimlari yuzlari haqidagi teoremadan:

$\frac{S_{acoc}}{S_{acoc}} = \frac{H^2}{h^2}$. Bu yerdan $S_{acoc} = \frac{256}{9}$ (m^2). U holda piramida hajmi $V = \frac{1}{3} S_{acoc} \cdot H = \frac{2048}{27}$ (m^3).

Javob: $\frac{2048}{27}$ (m^3).

<u>11 – misol.</u> To‘rtburchakli muntazam piramidaning uchidagi tekis burchagi φ ga teng. Yon yog‘ining asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagini toping.

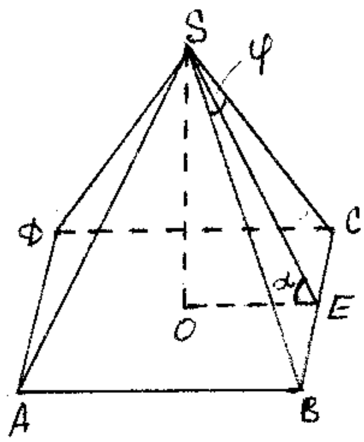
Yechilishi:

Shartga ko‘ra <BSC =φ, piramida asosi kvadrat. α = <OES burchakni topish talab etilgan. BSE to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

$SE = BE \cdot ctg\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} ctg\ \frac{\varphi}{2}$

U holda OSE to‘g‘ri burchakli uchburchakdan $\cos\alpha = \frac{OE}{SE} = \frac{a}{2} / \frac{a}{2} ctg\ \frac{\varphi}{2} = tg\frac{\varphi}{2}$ yoki

$\alpha = \arccos\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)$.



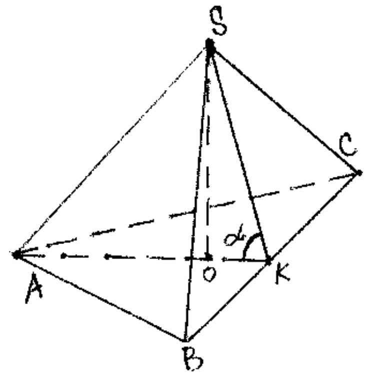
Javob: α = arc cos (tg $\frac{\varphi}{2}$).

<u>12 – misol.</u> Uchburchakli muntazam piramidaning to‘la sirtini toping. Bu yerda asosining tomoni a, yon yog‘ining asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagi α.

Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra, AS =SB=AB=a,<AKS =α ,

$S_{to‘la\ sirt} = S_{yon\ sirt} = S_{asos} = 3\ S_{\Delta VSS} + S_{acoc}$.



Ma’lumki $S_{asos} = \frac{1}{2}$ AS · BS · $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{\Delta VSS} = \frac{1}{2}$ CB · SK = $\frac{1}{2}$ CB · $\frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{a}{2}\cdot\frac{OK}{\cos\alpha}$ =

$= \frac{a}{2\cos\alpha}\cdot\frac{1}{3}$ AK = $\frac{a}{6\cos\alpha}$ · AC · $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$.

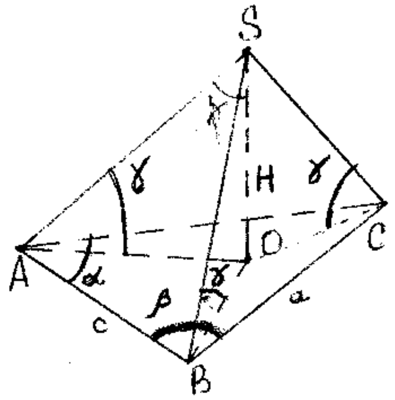
U holda $S_{to‘la\ sitr} = \frac{a^2\sqrt{3}(\cos\alpha+1)}{4\cos\alpha}$.

Javob: $\frac{a^2\sqrt{3}(\cos\alpha+1)}{4\cos\alpha}$

<u>13 – misol.</u> Asosidagi ikki burchagi α va β, balandligi N, qirralarining harbiri asos tekisligi bilan γ burchak tashkil qiluvchi uchburchakli piramidaning hajmini toping.

Yechilishi:

Shartga ko‘ra <CAB = α, <ABC = β, <SAO = <SCO = <SBO =γ, u holda OA=OB= =OC = H tgγ = R, bu yerda R – ABS uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi. Bundan sinuslar teoremasiga ko‘ra



a= 2Rsinα =2Hctgγsinα, ***в*** = 2Hctgγsinβ,
c = 2Hctgγsin (α + β).
Piramida asosining yuzi

$S_{\Delta ABC} = \frac{a в c}{4R}$ =2H^2 ctg^{2}γ sinα sinβsin (α + β).

Piramidaning hajmini topish formulasidan osongina hisoblasak

$V = \frac{1}{3}\ S_{\Delta ABC}\cdot H$

Javob: $\frac{2}{3}$ H^3 ctg^{2}γ sinα sinβsin (α + β).

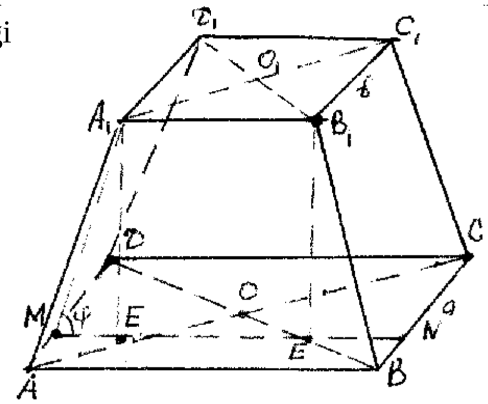
<u>14 – misol.</u> Muntazam kesik piramidaning asoslari kvadratlardan iborat bo‘lib, tomonlari mos ravishda a va ***в*** ga teng (a > ***в***). Yon qirrasi asos tekisligi bilan α burchak tashkil etadi. Kesik piramidani hajmi va yon yog‘ining asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagi

Yechilishi:

A_1E va MN to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi MA_1B_1N tekislik AD qirraga perpendikulyar. AD qirradagi ikki yoqli burchak o‘z navbatida $<EMA_1$ bo‘ladi.

MA_1B_1N trapetsiyadan ME = $\frac{a-в}{2}$

ekanligi kelib chiqadi. Kesik piramidaning balandligini AEA_1 uchburchakdan topamiz.



ya'ni,

ABE= $\frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{(a-в)\sqrt{2}}{2}$. bundan N=$A_1$E $= \frac{(a-в)\sqrt{2}}{2}$ tgα. Hajmini quyidagi formula bilan hisoblaymiz:

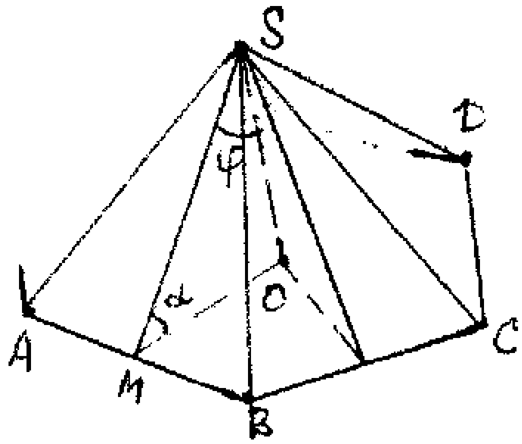
$$V = \frac{H}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right) = \frac{H}{3}\left(a^2+в^2+aв\right)$$

Izlanayotgan φ= $\angle EMA_1$, burchakni A_1ME uchburchakdan, bu yerda ME = $\frac{a-в}{2}$. Demak,

$$\text{tg}\varphi = \frac{A_1E}{ME} = \frac{(a-в)\sqrt{2}}{2}\,\text{tg}\alpha : \frac{a-в}{2} = \sqrt{2}\,\text{tg}\alpha .$$

Javob: V= $\frac{(a^3-b^3)tg\alpha}{3\sqrt{2}}$; φ = arctg ($\sqrt{2}$ tgα).

<u>15 – masala.</u> n – burchakli muntazam piramidaning asos yuzi Q harbir yon yog'i piramida balandligi bilan φ burchak tashkil qiladi. Piramidani yon sirti va to'la sirtini toping.



Yechilishi:

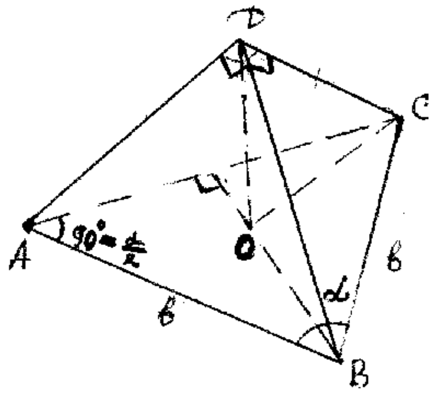
Shartga ko'ra <OSM=φ. Demak $\alpha = 90^0 - \varphi$ xuddi shunikdek barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qiladi. Shuning uchun

$$S_{yon\ sirt} = \frac{S}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\cos(90-\varphi)} = \frac{Q}{\sin\varphi}.$$

Javob: $S_{yon\ sirt} = \frac{Q}{\sin\varphi}$ $S_{to'la\ sirt} = Q\left(1+\frac{1}{\sin\varphi}\right)$.

<u>16 – masala.</u> Uchburchakli piramidaning ikki yon yog'i to'g'ri burchakli teng yonli uchburchaklar bo'lib, gipotenuzalari ***в*** ga teng hamda ular α burchak tashkil qiladi. Piramidaning hajmini toping.

Yechilishi:



Barcha qirralari teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakni katetlari ekanligidan teng, shuning uchun balandlik DO piramidaning asosiga tashqi chizilgan aylana markaziga tushadi. Piramida asosining yuzi

$S_{asos} = \frac{1}{2}в^2\sin\alpha$. DOC uchburchakdan

H = $\sqrt{DC^2 - OC^2}$, bu yerda DC = $\frac{в}{\sqrt{2}}$; OC = R

Aylana radiusi. Ma'lumki ABC uchburchak teng yonli, shuning uchun <BAC = $90^0 - \frac{\alpha}{2}$ va xuddi shuningdek sinuslar teoremasiga ko'ra

$$BC = 2R\sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

Bu yerda OC = R = $\frac{в}{2cos\frac{\alpha}{2}}$ ekanligidan N = $\frac{в}{2cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}$. Hajmi V = $\frac{1}{3}S_{acoc}\cdot H$ formula bilan hisoblanadi.

Javob: $\frac{1}{6}\ в^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

17 – misol. Muntazam to‘rtburchakli prizma asosining tomoni $\sqrt{2}$ ga diagonali bilan yon yog‘i orasidagi burchak esa 30^0 ga teng. Prizmaning hajmini toping.

Yechilishi:

Shartga ko‘ra AB $\sqrt{2}$, $<D_1AC_1 = 30^0$

$S_{acoc} = (AB)^2 = 2$

To‘g‘ri burchakli AD_1C_1 uchburchakdan

$AD_1 = D_1C_1 \cdot ctg30^0 = \sqrt{6}$

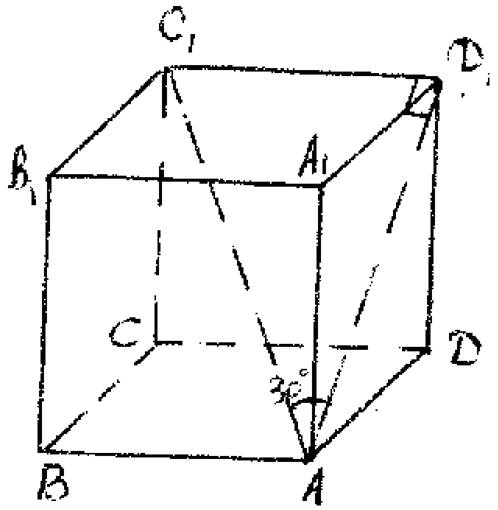
ADD_1 to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

$N=DD_1 = \sqrt{АД_1^2 - АД^2} = 2.$

Piramidaning hajmi

$V = S_{acoc} \cdot H = 4.$

Javob: V = 4



18 – misol. To‘g‘ri prizmaning asosi gipotenuzasi $12\sqrt{2}$ ga teng bo‘lgan teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchakdan iborat. Kateti orqali o‘tgan yon yog‘ining diagonali esa 13 ga teng. Prizmaning hajmini toping.

Yechilishi:

Shartga ko‘ra $AB_1=13$; $AC=AB=12\sqrt{2}$

ABS to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

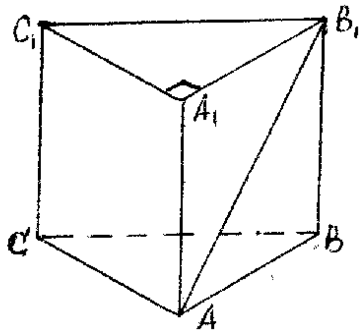
$2AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = 12$

Prizmaning balandligi $N= BB_1$, to‘g‘ri burchakli ABB_1 uchburchakdan

$N = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = 5.$

Prizmaning hajmi V =SH = 360 kub birlik.

Javob: 360 kub birlik.



19 – misol. Muntazam tetraedr qirrasini 1:5 nisbatda bo‘luvchi nuqta orqali bu qiraga perpendikulyar tekislik o‘tkazilgan. Tetraedrning hosil qilingan bo‘laklarining hajmlari nisbatini toping.

Yechilishi:

Ushbu tasdiq o‘rinli: agar K, L va M nuqtalar mos ravishda uchburchakli SABC piramidaning SA, SB, SC qiralarida yotsa va $|SK| = \alpha|SA|$, $|SL|=\beta|SB|$, $|SM| =\gamma|SC|$

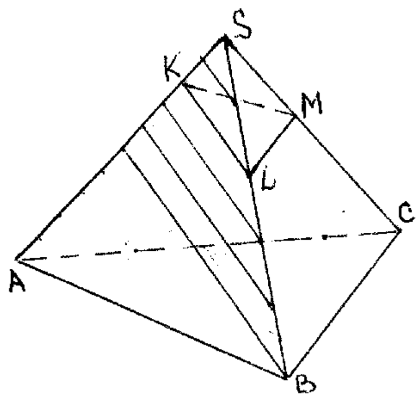
O‘rinli bo‘lsa, u holda

$V_{SKLM}= \alpha\beta\gamma\ V_{ABC}$ bo‘ladi.

$(KLM) \perp [SA] \Rightarrow [KL] \perp [SA]$ (1)

$|SK| = \frac{1}{5}|SA|$ (2)

(1) va (2) lardan $\begin{cases} |SL| = \frac{2}{5}|SB| \\ |SM| = \frac{2}{5}|SC| \end{cases}$ (3)



(2) va (3) lardan $V_{SKLM}= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\ V_{SABC} = \frac{4}{125} V_{SABC}$.

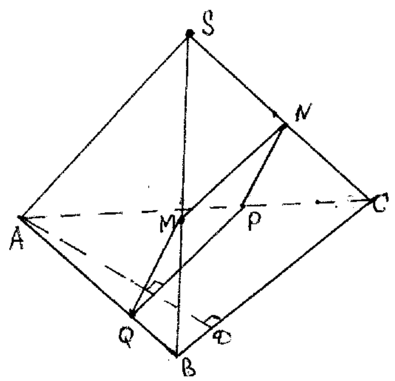
$V_{KLMABC} = V_{ABCS} - V_{KLMS} = V_{SABC} \cdot (1 - \frac{4}{125}) = \frac{121}{125} V_{SABC}$. $\frac{V_{SKLM}}{V_{KLMABC}} = \frac{4}{121}$.

Javob: $\frac{4}{125}$.

<u>20 – misol.</u> Uch burchakli muntazam piramida asosining tomoni a ga, kvadrat shaklidagi kesimning yuzi m^2 ga teng. Piramida yon sirtining asos yuziga nisbatini toping.

Yechilishi:

|**B**D| = |DC| bo‘lsin. Tetraedrning ACD tekislikka nisbatan simmetriyasida tetraedr va MNPQ kvadrat o‘ziga o‘tadi, bundan P⇒Q. Demak, PQ ⊥ AD⇒ ⇒ΔAQP ~ ΔABC ⇒ |AQ| = |QP| = m.



ΔSMN ~ ΔSBC ⇒Δ $\frac{|AC|}{|QM|} = \frac{|AB|}{|QB|}$ ⇒|AC| = $= \frac{am}{a-m|}$.

|SD| = $\sqrt{|SC|^2 - |DC|^2} = \frac{a\sqrt{3m^2 - a^2 + 2am}}{2(a-m)}$.

$S_{yon} = 3 \cdot S_{SBC} = 3 \cdot |DS| \cdot |SD| = \frac{3a^2\sqrt{3m^2 - a^2 + 2am}}{4(a-m)}$. $S_{acoc} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AB| \cdot \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

Javob: $\frac{S_{ён}}{S_{acoc}} = \frac{\sqrt{9m^2 - 3a^2 + 6am}}{a-m}$.

<u>Mustaqil yechish uchun misollar</u>

1. Agar to‘rtburchakli to‘g‘ri piramidaning asosidagi ikki yoqli burchagi 45^0, asosining yuzi 81 ga teng bo‘lsa, uning hajmini toping.

   Javob: 121,5
2. Uchburchakli og‘ma prizmada yon qirra uzunligi 8 sm; perpendikulyar kesimi tomonlari nisbati 9:10:17 va yuzi 144 sm^2 bo‘lgan uchburchak. Bu prizmaning yon sirtini toping.

   Javob: 576 sm^2.
3. To‘g‘ri parallelepipedning asosi tomonlari 1 va 4 hamda o‘tkir burchagi 60^0 bo‘lgan parallelogramdan iborat. Parallelepipedning katta diagonali 5 sm. Uning hajmini toping.

   Javob: 43 sm^3
4. Piramida asosi tomonlari 6,5 va 5 sm bo‘lgan uchburchakdan iborat. Yon yoqlari asos tekisligi bilan 45^0 ga teng ikki yoqli burchak tashkil etadi. Piramidani hajmini toping.

   Javob: 6 sm^3
5. To‘g‘ri parallelepipedning asosi rombdan iborat. Diagonal kesimlari yuzlari S_1 va S_2. Parallelepipedning yon sirtini toping.

   Javob: $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$
6. Uchburchakli prizmaning barcha qirralari 2 ga teng bo‘lib, yon qirralaridan biri asosining shu uchidagi tomonlari bilan 60^0 tashkil etadi. Prizmaning to‘la sirtini toping.

   Javob: $4+6\sqrt{3}$
7. Piramidaning asosi yon tomoni ***в*** **,** asosi ***a*** bo‘lgan teng yonli uchburchakdan iborat. Yon yoqlari asos tekisligi bilan α burchak tashkil etadi. Piramidani balandligini toping.

Javob: $\dfrac{a\sqrt{4в^2-a^2}}{2(a+2в)}$ · tgα

8. Agar to‘rtburchakli to‘g‘ri piramidaning uchidagi tekis burchagi α, yon yog‘igaichki chizilgan aylana radiusi R bo‘lsa uning hajmini toping.

Javob: $\dfrac{4R^3ctg^3(45^0-\alpha/2)\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

9. Muntazam uchburchakli prizmada yon yog‘i diagonali ikkinchi yon yog‘i bilan α burchak tashkil etadi. Asosining tomoni a ekanligini bilgan holda prizmaning yon sirtini toping.

Javob: $\dfrac{3a^2\sqrt{\sin(60^0+\alpha)\sin(60^0-\alpha)}}{\sin\alpha}$.

10. Piramidaning asosi gipotenuzasi c va o‘tkir burchagi α bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdan iborat. Piramidaning har qaysi yog‘i asos tekisligi bilan β burchak tashkil etadi. Piramidaning yon sirtini toping.

Javob: $\dfrac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\beta}$.

11. To‘rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 8 va 2 ga, balandligi 4 ga teng. Uning to‘la sirtini toping.

Javob: 168.

12. Muntazam to‘rtburchakli prizmaning balandligi 3 ga hajmi 48 ga teng. Pastki va ustki asoslarining qarama-qarshi yon yoqlarida yotuvchi tomonlari orqali tekislik o‘tkazildi. Shu kesimning yuzini toping.

Javob: 20

13. Parallelepiped ostki asosining diagonali va ustki asosining unga qarama-qarshi uchi orqali tekislik o‘tkazilgan. Bu tekislik parallelepipedni 2ta jismga ajratadi. Shu jismlardan biri piramidadan iborat. Parallepiped hajmining piramida hajmiga nisbatini toping.

Javob: 6:1

14. O‘lchovlari 11 X 20 X 16 bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepipedga eng ko‘pi bilan tomoni 3 ga teng bo‘lgan kublardan nechtasini joylashtirish mumkin (barcha kublarning qirralari parallelepipedning qirralariga parallel).

Javob: 90 ta

15. Katetlari 12 va 16 sm bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning uchlaridan bir xil 26 sm uzoqlikda joylashgan nuqta uchburchak tekisligidan qanday masofada yotadi.

Javob: 24.

16. Muntazam piramidaning asosi ichki burchaklarining yig‘indisi 720^0 ga tomoni 6 ga teng bo‘lgan ko‘pburchakdan iborat. Agar piramidaning yon qirrasi 10 ga teng bo‘lsa, piramidaning balandligini aniqlang.

Javob: 8

17. Hajmi 36 ga teng bo‘lgan muntazam to‘rtburchakli piramidaning asosidagi ikki yoqli burchaklari 45^0. Piramida asosining tomonini toping.

Javob: 6

18. Muntazam ABC uchburchakning AC tomoni orqali tekislik o‘tkazilgan. Uchburchakning BD medianasi tekislik bilan 60^0 li burchak tashkil etadi. AB to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakning sinusini toping.

Javob:3/4

19. Uchburchakli piramida yon qirralarining uzunliklari bir xil bo‘lib, ***a*** ga teng. Piramida uchida bu qirralar hosil qilgan uchta yassi burchaklardan ikkitasi 45^0 dan, uchinchisi 60^0. Piramidaning hajmini aniqlang.

Javob: $\dfrac{a^3}{12}$

20. Kubning umumiy uchga ega bo‘lgan har uchta qirrasining oxirlarida joylashgan uchta uchi orqali tekisliklar o‘tkazilgan. Agar kubning qirrasi ***a*** ga teng bo‘lsa, bu tekisliklar bilan chegaralangan jismning hajmini toping.

Javob: $a^3/6$.

§ 2. 3 . Aylanish figuralari

Aylanish figuralariga oid misol va masalalarni yechish uchun asosiy aylanish figuralari va ularning xossalarini yodda tutish lozim:

1. **Silindr** (to‘g‘ri doiraviy silindr) deb to‘g‘ri to‘rtburchakning ixtiyoriy tomonini o‘q sifatida olib, uning atrofida aylanishdan hosil qilingan figuraga aytiladi. Aylanish o‘qiga qo‘shni tomonlar hosil qilgan doiralar silindrning asoslari deyiladi. Aylanish o‘qiga qo‘shni bo‘lmagan tomon hosil qilgan sirt silindrning yon sirti deyiladi. silindrning balandligi deb asoslarining umumiy perpendikulyariga aytiladi, qachonki uning oxirlari silindr asoslarining markazlarida yotadi.

Silindrning hajmi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$V = \pi R^2 H,$$

Silindrning yon sirti va to‘la sirti ushbu formulalar yordamida hisoblanadi:

$$S_{yon} = 2\,\pi RH,$$

$$S_{t.\ sirt} = 2\,\pi RH + 2\pi R^2,$$

bu yerda R - asosining radiusi; N – silindrning balandligi.

2. **Konus** (to‘g‘ri doiraviy konus) deb, to‘g‘ri burchakli uchburchakni biror katetini o‘q sifatida olib uning atrofida aylantirishdan hosil qilingan figuraga aytiladi. Bunda to‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasi hosil qilgan sirt konusning yon sirti, ikkinchi katet hosil qilgan doira konusning asosi, katet konusning o‘qi, gipotenuza konusning yasovchisi deyiladi.

Konusining hajmi ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

Konusning yon sirti ushbu formula buyicha hisoblanadi:

$$S_{yon} = \pi RL$$

bu yerda R - asosining radiusi; H – balandligii; L - konusning yasovchisi.

3. **Kesik konus** deb konusning asosi va unga parallel tekislik bilan hosil qilingan kesimi orasidagi qismiga aytiladi. Kesik konusni teng yonli trapetsiyani simmetriya o‘qi atrofida aylantirishdan hosil qilingan figura sifatida qarash mumkin. Trapetsiyani yon tomoni kesik konusning yasovchisi; trapetsiyani asoslari hosil qilgan doiralar kesik konusning asoslari deyiladi.

Kesik konusning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V = \frac{1}{3}\pi H\,(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2),$$

bu yerda H – balandligi; R_1 va R_2 – katta va kichik asoslari radiuslari.

Kesik konusning yon sirti quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$S_{yon} = \pi(\,R_1 + R_2)\,L,$$

bu yerda L – kesik konusning yasovchisi.

4. **Shar** deb belgilangan O nuqtadan berilgan masofadan uzoqda bo‘lmagan fazoning nuqtalari to‘plamiga aytiladi. Sharni yarim doiraning diametri atrofida aylantirishdan hosil qilingan figura deb qarash mumkin.

Sfera deb berilgan O nuqtadan R masofadagi fazoning barcha nuqtalari to‘plamiga aytiladi. Berilgan O nuqta sferani markazi deyiladi. Sferani yarim aylanani diametri atrofida aylantirishdan hosil qilingan figura deb qarash mumkin.

Radiusi R ga teng bo‘lgan shar hajmi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

R radiusli sferaning yuzi (shar sirti) ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S = 4\pi R^2$$

Shar segmenti deb sharning tekislik bilan kesimida hosil qilingan qismiga aytiladi. Shar segmenti hajmi ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

bu yerda R- shar radiusi; h – segmentni balandligi. SHar segmenti sirtining yuzi ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S = 2\pi Rh$$

Shar kamari deb uni kesib o‘tuvchi ikkita parallel tekisliklari orasidagi qismiga aytiladi.
Shar kamarining hajmi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3R_1^2 + 3R_2^2),$$

bu yerda R_1, R_2 - shar sirtining yuzi ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$S = 2\pi Rh,$$

bu yerda R- shar radiusi; h- shar kamari balandligi.

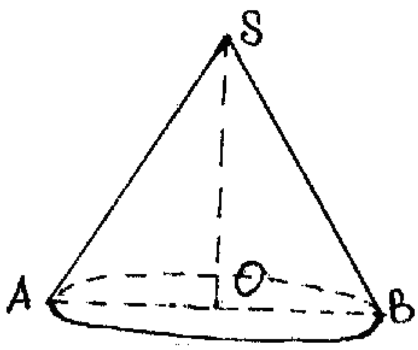
Shar sektori deb shar segmenti va uni hosil qiluvchi konusdan iborat figuraga aytiladi. Agar shar segmenti yarimidan kichik bo‘lsa, u uchi shar markazida asosi segment bo‘lgan konus bilan to‘ldiriladi. Agar segment yarimidan katta bo‘lsa, u holda aytib o‘tilgan konus undan olib tashalanadi.

Shar sektori hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

bu yerda R - shar radiusi; h- segment balandligi; r- segment asosi radiusi.

1- masala. Konusning yasovchisi asos tekisligi bilan 60^0 li burchak tashkil qiladi. Konus yon sirtini uning asosi yuziga nisbatini toping.



Yechilishi:

Ma’lumki,

$$\frac{S_{yon}}{S_{asos}} = \frac{\pi RL}{\pi R^2} = \frac{L}{R} = \frac{SB}{OB} = \cos 60^0 = 0{,}5.$$

Javob: 0,5.

2 – masala. Shar radiusi $\sqrt[3]{2}$ sm bo‘lib, yon sirti asosidan 3 marta katta bo‘lgan konusga tengdosh. Konus balandligini toping.

Yechilishi:

Shar radiusini R bilan, ya’ni R=$\sqrt[3]{2}$ sm; r, H, L larni mos ravishda konusning asosini radiusi, balandligi va konusning yasovchisi deb belgilaylik. U holda masala shartiga ko‘ra, ya’ni

$$\frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \pi rL = 3\pi r^2.$$

Quyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

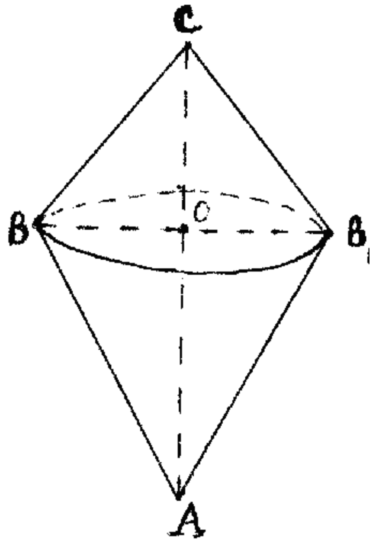
$$\begin{cases} r^2h = 8 \\ L = 3r \\ L^2 = r^2 + H^2 \end{cases}$$

bu yerdan H = 4 sm ekanligini topamiz.

Javob: 4 sm.

3 – masala. Tomonlari 10, 17, 21 sm bo‘lgan uchburchakni katta tomoni atrofida aylantirildi. Hosil qilingan aylanish figurasini hajmi va sirtini hisoblang.

Yechilishi:



ΔABC uchburchakni AC tomoni atrofida aylantirishdan hosil qilingan figurani hajmi va sirti, BAB_1 va BCB_1 ikki konus hajmlari va sirtlari yig‘indisiga mos ravishda teng, ya’ni V_{ABCB}, = V_{BAB}, + V_{BCB}, S_{ABCB}, = S_{yonBAB} + S_{yonBCB}, yoki

$$V_{ABCB} = \frac{1}{3}\pi BO^2\ AO + \frac{1}{3}\pi * BO^2 * OC = \frac{1}{3}\pi BO^2\ AC,$$

$$S_{ABCB}, = \pi * BO * AB + \pi * BO * BC = \pi * BO * (AB + BC).$$

Ko‘rinib turibdiki, hosil qilingan aylanish figuraning hajmi va sirtini aniqlash uchun ABC uchburchakni BO balandligini topish kerak bo‘ladi. Geron formulasidan $S_{\Delta ABC} = = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$ = 84 cm². Ikkinchi tomondan, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$ AC *BO. Bundan BO = 8 sm ekanligi kelib chiqadi. U holda

$$V_{\Delta ABCB_{\text{э}}} = 448\ \pi\ sm^3,\ \ S_{ABCB_{\text{э}}} = 216\ \pi\ sm^2,$$

Javob: 448 π sm³, 216 π sm².

4 – masala. Konus asosining radiusi r, yon sirti, asosining yuzi va o‘q kesimi yuzlari yig‘indisiga teng. Konus hajmini toping.

Yechilishi:

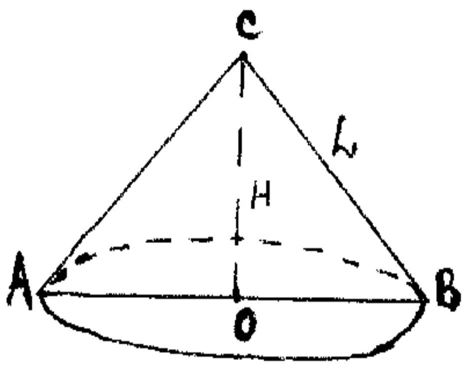
Masala shartiga ko‘ra $S_{yon\ sirt} = S_{asos} + S_{\Delta ABS}$.
Ikkinchi tomondan, $S_{yon} = \pi rL$,

$S_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}$ AB*CO = rH, $S_{asos} = \pi r^2$.

bu yerda L= AC, H=CO, ΔAOC uchburchakdan L =AC = $\sqrt{r^2 + H^2}$ ekanligini topamiz. H=CO balandlikni

$$\pi r\sqrt{r^2 + H^2} = \pi r^2 + rH.$$

tenglamadan aniqlaymiz. YA’ni H= $\frac{2\pi r}{\pi^2 - 1}$.



Bundan, $$V = \frac{2\pi^2 r^3}{3(\pi^2 - 1)}.$$

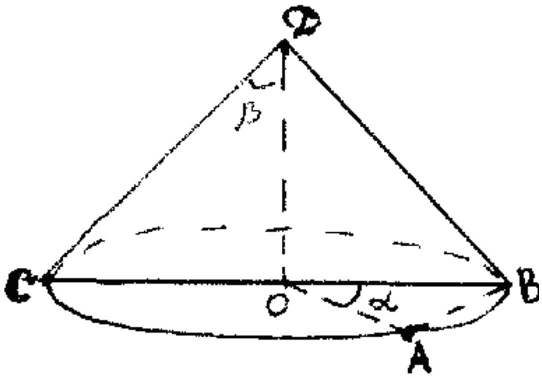
Javob: $\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2 r^3}{(\pi^2 - 1)}$.

5 – masala. Konus asosining vatari α yoyga tiralgan. Uning balandligi yasovchisi bilan β burchak tashkil etadi. Konus hajmini toping.

Yechilishi:

$\Delta AOBE$ uchburchakdan

$OA = R = \dfrac{AB}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$

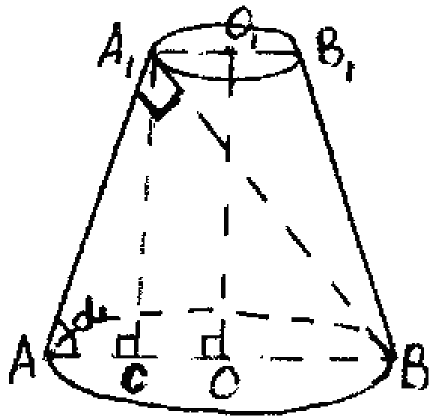


ΔOBD uchburchakdan H= R ctg β ga egamiz. U holda

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi a^3 ctg\beta}{24\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Javob: $\dfrac{\pi a^3 ctg\beta}{24\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}.$

<u>6 – masala.</u> Kesik konusning yasovchisi L ga teng bo‘lib, asosi bilan α burchak tashkil qiladi. Shu bilan birga yuqori uchidan o‘tib qarama-qarshi tomondagi yasovchining pastki uchini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar. Kesik konusning yon sirtini toping.



Yechilishi:

ΔAA_1C uchburchakdan AC = Lcosα ga egamiz. Shartga ko‘ra $<AA_1B = 90^0$. ΔAA_1B uchburchakdan $AB = 2R = \dfrac{L}{\cos\alpha}$. Bundan

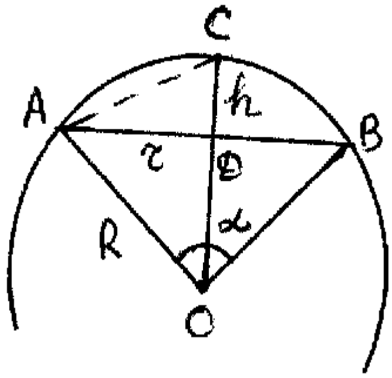
$AO = R = \dfrac{L}{2\cos\alpha}.$

Demak, $A_1O_1 = r = AO – AC = L\left(\dfrac{1}{2\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$

U holda $S_{yon\ sirt} = \pi L(R + r) = \pi L^2\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$

Javob: $\pi L^2\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$

<u>7 – masala.</u> Radiusi R ga teng bo‘lgan shardan o‘q kesimida α burchak tashkil qiluvchi shar sektorining hajmi va to‘la sirtini toping.



Yechilishi:

Shar radiusini ***R*** bilan, segment balandligini DC =h va AD kesmani r bilan belgilaylik. Sektor hajmi $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$ ga teng. ΔACD uchburchakda $\angle ACD = \dfrac{\alpha}{4}$, bundan $h = r tg\dfrac{\alpha}{4}$.

ΔADO uchburchakdan $r = R\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Ma’lumki,

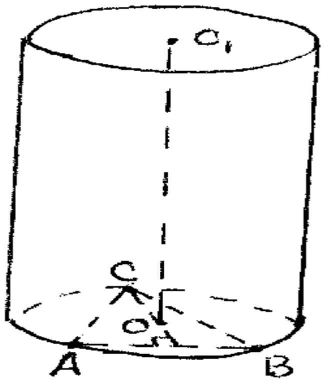
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{4\pi}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Sektorning to‘la sirti ABC segment yuzi 2πRh va AOB konus yon sirti πRr lardan tashkil topadi.

Demak, $S = 2\pi Rh + \pi Rr = \pi R^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(2tg\dfrac{\alpha}{4} + 1\right).$

Javob: $V = \dfrac{4\pi}{3}R^3\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$; $S = \pi R^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(2tg\dfrac{\alpha}{4} + 1\right).$

8 – masala. Silindrning balandligi 5 ga, uning asosiga ichki chizilgan muntazam uchburchakning tomoni $3\sqrt{3}$ ga teng. Silindrning hajmini toping.



Yechilishi:

Ma'lumki silindr hajmi V =S_{asos*}H = $\pi R^2 H$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda H =5 shartda berilgan. R radiusni ABC muntazam uchburchakdan foydalanib topamiz. Ya'ni

$$R = OC = \frac{2CД}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{AC\sqrt{3}}{3}.$$

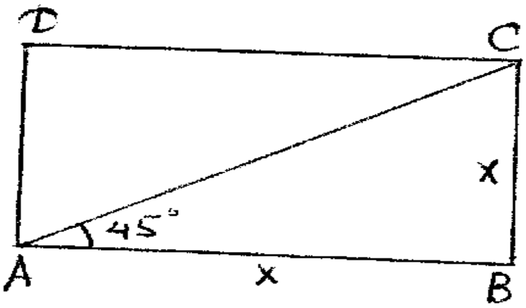
ekanligidan R =3 . Demak, V = 45π .

Javob: 45 π.

9 – masala. silindrning yon sirti yoyilganda uning diagonali asos tekisligi bilan 45^0 burchak tashkil qiladi. silindrning yon sirti $144\pi^2$ ga teng. silindr asosining radiusini toping.

Yechilishi:

Masala shartidan $S_{yon} = 144\pi^2$ ekanligiga ko'ra,



AB · BS = $144\pi^2 \Rightarrow$ AB =BC =12 π.
Silindr asosi aylanasi uzunligi AB ga teng ekanligidan,

2πR =AB, 2πR = 12π

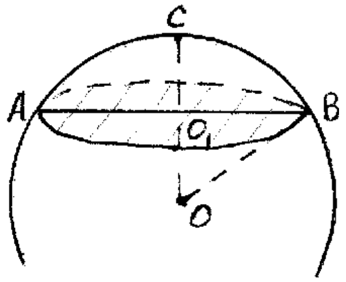
demak R =6.

Javob: 6

10 – masala. Radiusi 5 ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning balandligi 4 ga teng. Konusning hajmini toping.

Yechilishi:

Masala shartiga ko'ra CO_1=4 $\Rightarrow O_1O$ =1 chunki R =5. To'g'ri burchakli ΔO_1OB uchburchakdan $O_1B = \sqrt{OB^2 - O_1O^2} = \sqrt{24}$.



Konus asosining yuzi:

S_{acoc}= π *O_1B^2 = 24π.

Demak konusni hajmi:

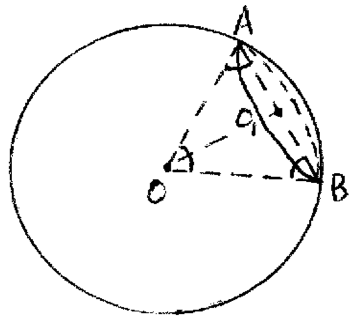
$$V = \frac{1}{3}\ \pi * O_1B^2\ \pi * CO_1 = 32\pi.$$

Javob: 32π.

11 – masala. Sharning radiusi $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ ga teng. Radiusning oxiridan u bilan 60^0 li burchak tashkil etadigan kesuvchi tekislik o'tkazilgan. Kesimning yuzini toping.

Yechilishi:

Masala shartiga ko'ra OB =OA = $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$,



<OBA =60^0. Bundan ΔABO ni teng tomonli uchburchak ekanligini aytish mumkin.

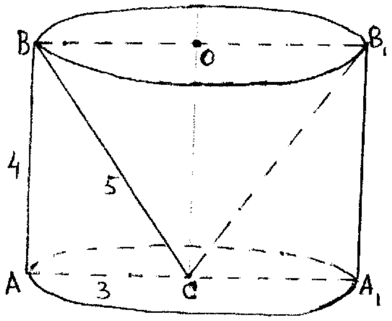
$$O_1A = \frac{AB}{2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

Demak, S_{kesim}= $\pi * O_1A^2$ =16. **Javob:** 16

12 - masala. Ko'rsatilgan uchburchakning to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

Yechilishi:

Masala shartida keltirilgan aylanish figurasining hajmi ABB_1A_1 silindr hajmidan BSB_1 konus hajmini ayirmasiga teng. YA'ni $V_f = V_s - V_k$.



$V_s = \pi * AC^2 * OC = 36\pi$,

$V_k = \frac{1}{3}\pi OB^2 * OC = 12\pi$

Demak, $V_f = 24\pi$

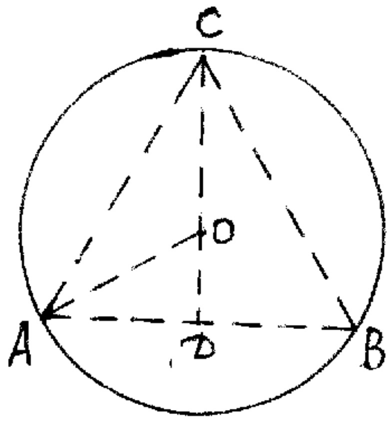
Javob: 24π.

13 – masala. Konusning balandligi 3, unga tashqi chizilgan sharning radisi 2 bo'lsa, konus sirtining shar sirtiga nisbatini toping.

Yechilishi:

Masala shartiga e'tibor bersak, BO=2, BD =3 ekanligi ΔABC ni teng tomonli ekanligini bildiradi. Ma'lumki shar sirti $S_{sh} = 4\pi R^2 = 16\pi$, konus sirti $S = \pi \cdot AD \cdot AB + \pi \cdot AD^2$

AD masofa to'g'ri burchakli ΔADO dan topiladi: $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{3}$,



$AB = 2AD = 2\sqrt{3}$

demak, konus sirti $S_k = 9\pi$.

Bundan, $\frac{S_k}{S_{\text{ш}}} = \frac{9}{16}$.

Javob: $\frac{9}{16}$.

14 – masala. Silindrning yasovchisiga tik bo'lgan kesimning yuzi Q ga, o'q kesimining yuzi esa S ga teng. Bu silindrning to'la sirtini va hajmini toping.

Yechilishi:

Masala shartiga ko'ra, $S_{ABCD} = S$, $S_{asos} = Q$

Bundan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

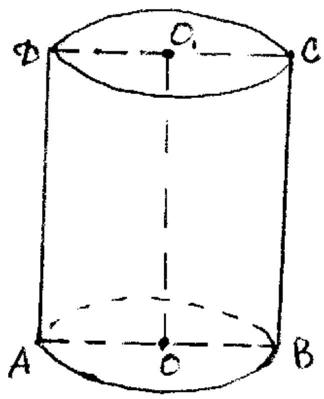
$S = AB \cdot AD = 2AO \cdot AD$,

$Q = \pi \cdot AO^2$.

Bizga ma'lumki, silindr to'la sirti

$S_{t.c.} = S_{yon} + 2S_{asos}$. Yuqori dagi tengliklardan

$AO = \sqrt{Q/\pi}$, $AD = S/2\sqrt{Q/\pi}$.



Bulardan,

$S_{t.c} = 2\pi \cdot AO \cdot AD + 2\pi \cdot AO^2 = \pi S + 2Q$.

Ma'lumki silindr hajmi $V = \pi \cdot AO^2 \cdot AD$ ekanligidan,

$V = \frac{S}{2}\sqrt{Q\pi}$ $\qquad$ $S_{t.c} = \pi S + 2Q$.

Javob: $V == \frac{S}{2}\sqrt{Q\pi}$.

<u>15 – masala.</u> Konus yon sirtining yuzi asosining yuzidan ikki marta katta. Uning o‘q kesimining yuzi Q ga teng. Konusning hajmini toping.

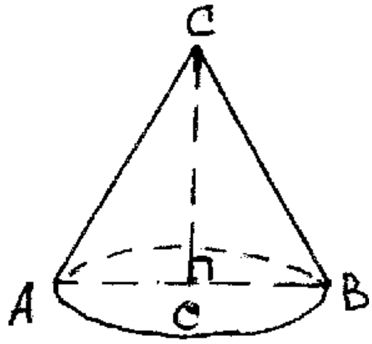
Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra $S_{yon} = 2 \cdot S_{asoc}$, S_{ABC} = Q. Ma’lumki $S_{yon} = \pi r\ell = \pi \cdot AO \cdot AC$, $S_{asoc} = \pi r^2 = \pi \cdot AO^2$, $S_{ABC} = AO \cdot OC$. formulalar yordamida hisoblanadi. Yuqoridagilarni e’tiborga olsak, $\ell = 2r$ ya’ni

AC = 2AO, shu bilan birga

$Q = AO \cdot \sqrt{4AO^2 - AO^2} = AO^2 \cdot \sqrt{3}$.

ekanligini topish mumkin. Bundan $AO = \sqrt{\dfrac{Q}{\sqrt{3}}}$



Konus hajmi $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{Q}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{Q}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$.

Javob: $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$.

<u>Mustaqil yechish uchun misollar</u>

1. Kesik konus asoslarining radiuslari $5\sqrt{2}$ va $2\sqrt{2}$. Yasovchisi asos tekisligi bilan 45^0 li burchak tashkil etsa, uning uzunligini toping.

   Javob: 6

2. Asoslari uzunliklari 2 va 3, o‘tkir burchagi 60^0 bo‘lgan teng yonli trapetsiyani kichik asosi atrofida aylantirildi. Hosil qilingan aylanish figurasining sirti va hajmini hisoblang.

   Javob: $S = \sqrt{3}(3+\pi)$, $V = 2\pi$.

3. Silindrni to‘g‘ri to‘rtburchakni biror tomoni atrofida aylanishidan hosil qilingan deb qarash mumkin. Agar bu to‘rtburchak yuzi S, unga tashqi chizilgan aylanasi uzunligi C bo‘lsa silindr hajmini toping.

   Javob: $\boldsymbol{C \cdot S}$

4. Konusning hajmi uning yon sirti yuzi bilan asosining markazidan yasovchisigacha bo‘lgan masofa ko‘paytmasining uchdan biriga teng ekanligini isbotlang.

5. ***R*** radiusli sharda diametri shar radiusiga teng, o‘qi shar markazidan o‘tuvchi silindrik teshik hosil qilingan. Sharning qolgan bo‘lagining hajmini toping.

   Javob: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$.

6. Silindr va shar berilgan. silindr asosining va sharning radiuslari teng. silindr to‘la sirtining shar sirtiga bo‘lgan nisbati m : n kabi. Ularning hajmlari nisbatini toping.

   Javob: $\dfrac{6m-3n}{4n}$.

7. Radiusi r bo‘lgan yarim doiradan konus sirti o‘ralgan. Hosil bo‘lgan konusning hajmini toping.

   Javob: $\dfrac{\sqrt{3}\pi r^3}{24}$.

8. Tomonlari 4 va 6 sm, o‘tkir burchagi 30^0 bo‘lgan parallelogram o‘zining katta tomoni atrofida aylanishidan hosil bo‘ladigan jismning sirtini va hajmini toping.

   Javob: 40π sm^2.

9. Tomonlari ***a, в*** va c bo‘lgan uchburchak navbat bilan harbir tomoni atrofida aylantiriladi. Bunda hosil bo‘ladigan jismlarning hajmlari nisbatini toping.

Javob: $\frac{1}{a}:\frac{1}{в}:\frac{1}{c}$.

10. R radiusli shar segmenti to‘la sirti S. Uning balandligini toping.

Javob: $2R - \sqrt{4R^2 - \frac{S}{\pi}}$.

11. Shar markazidan bir tomondagi parallel kesimlar yuzlari S_1 va S_2. Ular orasidagi masofa d . Sharni bu kesimlarining teng o‘rtasidan parallel o‘tuvchi kesim yuzini toping.

Javob: $\frac{1}{4}(2S_1+2S_2+\pi d^2)$.

12. Yasovchisi asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiluvchi va hajmi V bo‘lgan konus berilgan. O‘qiga perpendikulyar tekislikni qanday balandlikda o‘tkazganda uning yon sirti teng ikkiga bo‘linadi?

Javob: $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{3V\,tg^2\alpha}{\pi}}$

13. Asoslar umumiy ichma-ich, kichik konusni yasovchisi balandligi bilan α, katta konusni yasovchisi balandligi bilan β burchak tashkil etadi. Balandliklarning farqi ***h*** . Bu konuslarni sirtlari orasidagi hajmni toping.

Javob: $\frac{\pi h^3}{3(ctg\beta - ctg\alpha)^2}$.

14. Konus sirtida o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta yasovchi o‘tkazish mumkin bo‘lsin. konus sirtining o‘q kesimida hosil bo‘lgan burchak kosinusini toping.

Javob: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

15. Kvadrat o‘zining bir uchi va bu uchdan chiqmagan tomonining o‘rtasidan o‘tuvchi o‘q atrofida aylanmoqda. Hosil bo‘lgan aylanma jismning hajmini va to‘la sirtini toping.

Javob: Aylanma jism asoslari umumiy bo‘lgan konus va kesik konusdan iborat bo‘lib, bunda kesik konusdan boshqa konus sirt o‘yib olingan.

§ 2. 4 . Ko‘p yoqlar va aylanish figuralari kombinatsiyalari

Ko‘pyoqlar va aylanish figuralari kombinatsiyalariga doir misollarni yechishda quyidagilarni bilish zarur:

1. **Prizma va aylanish figuralari kombinatsiyalari.**

Silindrga prizma ichki chizilgan deyiladi (silindr- prizmaga tashqi chizilgan), agarda prizma asosi silindr asosiga ichki chizilgan bo‘lsa.

Teorema: ***Prizmaga tashqi silindr chizish uchun prizmaning to‘g‘ri va uning asosiga tashqi aylana chizish mumkin bo‘lishi zarur va yetarlidir.***

Xususiy holda har qanday uchburchakli prizmaga va har qanday muntazam prizmaga tashqi silindr chizish mumkin. silindrga ichki chizilgan prizmaning har qaysi yon qirrasi silindrni yon yasovchisi deyiladi.

Prizma silindrga tashqi chizilgan deyiladi (silindr –prizmaga ichki chizilgan), agarda prizma asosi silindr asosiga tashqi chizilgan bo‘lsa.

Teorem: ***Prizmaga ichki silindr chizish uchun prizmaning to‘g‘ri va uning asosiga ichki aylana chizish mumkin bo‘lishi zarur va yetarlidir.***

Xususiy holda, har qanday uchburchakli prizmaga va har qanday muntazam prizmaga ichki silindr chizish mumkin. silindrga tashqi chizilgan prizmaning yoqlari, silindrning yon sirtiga uning yasovchisi bo‘yicha o‘rinadi. Bu yasovchisi mos ravishda silindr asoslari va prizma asoslari o‘rinish nuqtalaridan o‘tadi.

Prizma sharga ichki chizilgan deyiladi (shar esa prizmaga tashqi chizilgan), agarda prizmaning uchlari shar sirtiga tegishli bo‘lsa.

Teorema: ***Prizmaga tashqi shar chizish uchun prizmani to‘g‘ri va uning asoslariga tashqi aylana chizish mumkin bo‘lishi zarur va yetarlidir.***

Xususiy holda, har qanday muntazam prizmaga tashqi shar chizish mumkin.

Prizmaga tashqi chizilgan sharning markazi, prizma asoslariga tashqi chizilgan aylanalar markazlarini tutashtiruvchi kesmaning o‘rtasida bo‘ladi.

Prizmaning barcha yoqlari sharga o‘rinsa, u holda shar prizmaga ichki chizilgan (prizma esa sharga tashqi chizilgan) deyiladi.

Teorema: ***Prizmaga ichki shar chizish uchun prizmaning perpendikulyar kesimiga ichki aylana chizish mumkin bo‘lishi va prizmaning balandligi bu aylana diametriga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.***

Xususiy holda , muntazam prizmaga ichki shar chizish mumkin, qachonki, uning balandligi asosiga ichki chizilgan aylana diametriga teng bo‘lsa.

2. Piramida va aylanish figuralari kombinatsiyalari

Piramida konusga tashqi chizilgan deyiladi (konus esa piramidaga ichki chizilgan), agar piramida uchi konus uchi bilan ustma-ust tushib hamda piramida asosi konus asosiga tashqi chizilgan bo‘lsa.

Teorema: ***Piramidaga ichki konus chizish uchun, piramida asosiga ichki aylana chizishning mumkin bo‘lishi va piramidaning balandligi bu aylana markaziga tushishi zarur va yetarlidir.***

Xususiy holda , har qanday muntazam piramidaga ichki konus chizish mumkin.

Piramida konusga ichki chizilgan deyiladi (konus esa piramidaga tashqi chizilgan), agar piramidaning uchi konus uchi bilan ustma-ust tushib hamda piramida asosi konus asosiga ichki chizilgan bo‘lsa.

Teorema: ***Piramida tashqi konus chizish uchun piramidaning yon qirralari teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.***

Piramida sharga ichki chizilgan deyiladi (shar esa piramidaga tashqi chizilgan), agar piramidaning uchlari shar sirtida yotsa.

Teorema: ***Piramidaga tashqi shar chizish uchun piramida asosiga tashqi aylana chizish mumkin bulishi zarur va yetarlidir.***

Xususiy holda , har qanday tetraedrga va muntazam piramidaga tashqi chizish mumkin.

Piramidaga tashqi chizilgan shar markazi, asosiga tashqi chizilgan aylana markazidan o‘tuvchi va asosiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Shar piramidaga ichki chizilgan deyiladi (piramida esa sharga tashqi chizilgan), agar shar piramidaning barcha yoqlariga o‘rinsa.

Teorema: ***Harqanday tetraedrga ichki shar chizish mumkin.***

Teorema: ***Agar piramida asosiga ichki aylana chizish mumkin bo‘lib va piramidaning balandligi shu aylana markaziga tushsa, u holda bu piramidaga ichki shar chizish mumkin.***

Xususiy holda , har qanday muntazam piramidaga ichki shar chizish mumkin.

3. Aylanish figuralari kombinatsiyalari

Shar konusga ichki chizilgan deyiladi (konus esa sharga tashqi chizilgan), agar shar konusning asosiga va har qaysi yasochisiga o‘rinsa.

Har qanday konusga ichki shar chizish mumkin. Uning markazi o‘q kesimiga ichki chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushib, shu bilan birga shar radiusi shu aylana radiusiga teng. Konus yasovchilari bilan sharning urinish nuqtalari to‘plami aylanadan iborat bo‘lib, u konus asosiga parallel tekislik bilan konus yon sirtining kesimidan iborat.

Shar konusga tashqi chizilgan deyiladi (konus esa sharga ichki chizilgan), agar konusning uchi va asos aylanasi shar sirtida yotsa.

Istalgan konusga tashqi shar chizish mumkin. Tashqi chizilgan shar markazi konus o‘q kesimiga tashqi chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushib, radiusi shu aylana radiusiga teng bo‘ladi.

Shar silindrga ichki chizilgan deyiladi (silindr esa sharga tashqi chizilgan), agar shar silindrning harichki asosiga va barcha yasovchilariga o‘rinsa.

Teorema. ***silindrga ichki shar chizish mumkin faqat va faqat silindr balandligi asos diametriga teng bo‘lsa.***

Ichki chizilgan shar markazi, silindr asoslari markazlarini tutashtiruvchi kesma o‘rtasida bo‘ladi.

Shar silindrga tashqi chizilgan deyiladi (silindr sharga ichki chizilgan), agar silindr asoslari aylanalari shar sirtida yotsa.

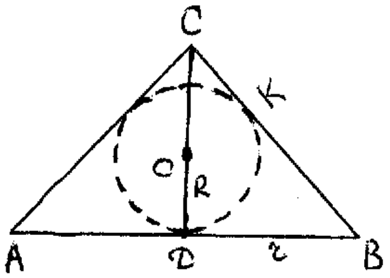
Istalgan silindrga tashqi shar chizish mumkin. Tashqi chizilgan shar markazi silindr o‘q kesimiga tashqi chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushib, radiusi shu aylana radiusiga teng bo‘ladi.

Silindr konusga ichki chizilgan deyiladi, agar silindrning bitta asosi konus asosida yotib, ikkinchi asosi aylanasi konus yon sirtida yotsa.

1 - masala. Balandligi asosining radiusiga teng konusga shar ichki chizilgan. SHar hajmining konus hajmiga nisbatini toping.

Yechilishi:

Chizmada konusning o‘q kesimi tasvirlangan. Bu yerda konus ΔABC uchburchak, shar unga ichki chizilgan aylana shaklida tasvirlangan. OD=OK=R shar radiusi. AD =r, CD =H deb belgilaymiz. U holda



$V_{sh} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi r^3$.

ΔCOK uchburchakdan R =(H – R) sih $45^0 = \frac{H-R}{\sqrt{2}}$. Bu yerdan R = $\frac{r}{1+\sqrt{2}}$

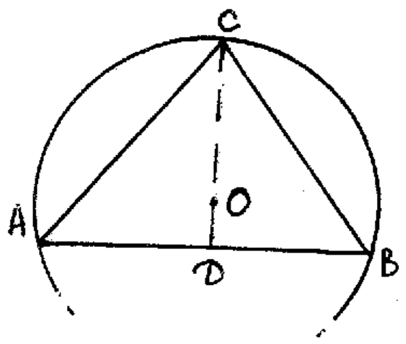
$$\frac{V_ш}{V_k} = \frac{4R^3}{r^3} = \frac{4}{(\sqrt{2}+1)^3} = 4(\sqrt{2}+1)^3$$

Javob: $4(\sqrt{2}+1)^3$.

2 – masala. Asosining radiusi 6 sm, balandligi 9 sm bo‘lgan konusga tashqi chizilgan shar hajmi va sirtini toping.

Yechilishi:

Chizmada konusni o‘q kesimi tasvirlangan. Bu yerda ΔABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi, mos ravishda konusga tashqi chizilgan shar radiusiga teng. Ya’ni OC=R .Shartga ko‘ra CD=H=9 sm, AD = r = 6 cm. Bundan



AC=BC=$\sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{117}$.

ΔABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$R = \frac{a \cdot в \cdot c}{4S} = \frac{AC - BC \cdot AB}{4 \cdot S} = \frac{AC \cdot BC \cdot AB}{2AB \cdot СД} = \frac{AC^2}{2 \cdot СД} = \frac{13}{2} \text{ (cm).}$$

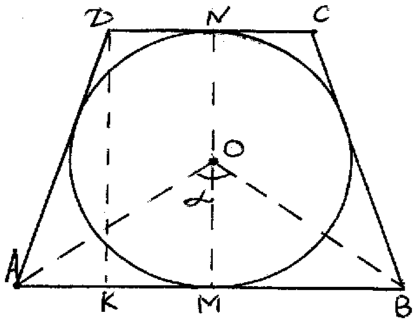
u holda $V_{sh} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2197}{6}$ cm^3, $S_{sh} = 4\pi r^2 = 169\,\pi$ sm^2.

Javob: $\frac{2197}{6}$ sm^3, $169\,\pi$ sm^2.

3 – masala. Kesik konusga radiusi R bo‘lgan shar ichki chizilgan. Shar markazidan katta diametr α burchak ostida ko‘rinadi. Kesik konus hajmini toping.

Yechilishi:

Chizmada kesik konusni o‘q kesimi tasvirlangan. Bu yerda kesik konusga ichki chizilgan shar, ABCD teng yonli trapetsiyaga ichki chizilgan aylana shaklida ko‘rsatilgan. Bu aylana radiusi ON =OM ichki chizilgan shar radiusi R ga teng. Ma’lumki kesik konus balandligi MN =H =2R. r_1 pastki asosining radiusi desak,



ΔAMO uchburchakdan: $r_1 = OM\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = R\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Yuqoridagi asosining radiusi r_2 = DN ni quyidagi faktdan, ya’ni teng yonli trapetsiyaga aylana ichki chizilganligidan foydalanimiz. Ma’lumki, AD+BC=AB+DC $\Rightarrow$ AD = $r_1 + r_2$. Ikkinchi tomondan ΔADK uchburchakda $AD^2 = AK^2 + DK^2 = (r_1 - r_2)^2 + N^2$. Ma’lumki, $(r_1 + r_2)^2 = =(r_1 - r_2)^2 + N^2$, bu yerdan $r_2 = \frac{R^2}{r} = R\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. U holda kesik konusning hajmi:

$$V = \frac{1}{3}\pi H\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{2\pi}{3}R^3(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1).$$

Javob: $\frac{2\pi}{3}R^3(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1)$.

4 – masala. Muntazam piramidaga konus ichki chizilgan. Agar piramidaning qirrasi ℓ va ikki yon qo‘shni qirralari orasidagi burchak α bo‘lsa, konus hajmini toping.

Yechilishi:

ΔADM uchburchakdan $AM = \ell \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

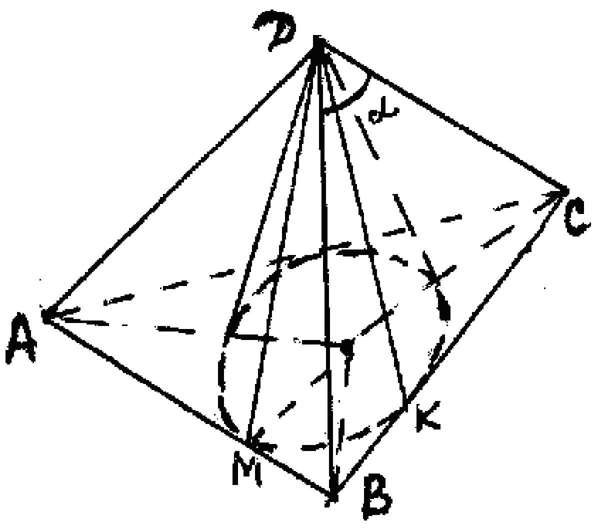
ΔMOA uchburchakdan $DM = r = AM \cdot \mathrm{tg}\,30^0 =$

$= \ell \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ va $AO = R = \frac{AM}{\cos 30} = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

ΔAOD uchburchakdan

$$OA = H = \sqrt{i^2 - R^2} = \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

ekanligini topamiz. Konus hajmini $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$ formula bilan topamiz.

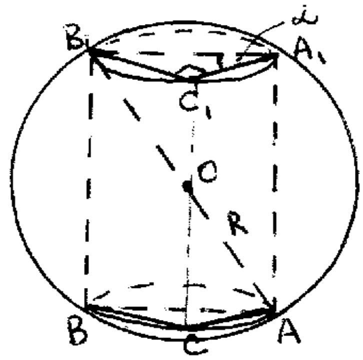


Javob: $= \frac{\pi l^3}{3\sqrt{3}} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

5 – masala. uchburchakli to‘g‘ri prizma R radiusli sharga ichki chizilgan. Prizmaning asoslari to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib, o‘tkir burchagi α va eng katta yon yog‘i kvadratdan iborat. Prizma hajmini toping.

Yechilishi:

Ma’lumki prizmaning asoslari shar sirti bilan aylana bo‘yicha kesishadi. To‘g‘ri burchakli ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar bu aylanalarga ichki chizilgan. Demak, to‘g‘ri burchakli uchburchakning to‘g‘ri burchagi aylana diametriga tiralgan. Ko‘rinadiki, AB va A_1B_1 gipotenuzalar aylanalarni diametrlarini ifodalaydi. ABB_1A_1 tekislik shar markazi orqali o‘tadi. Shartda ABB_1A_1 kvadrat edi. Bundan $H=AA_1= R\sqrt{2}$ va $AB =R\sqrt{2}$ u holda prizma hajmi



$$V = S_{acoc}\cdot H = \frac{R^3\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}\ .$$

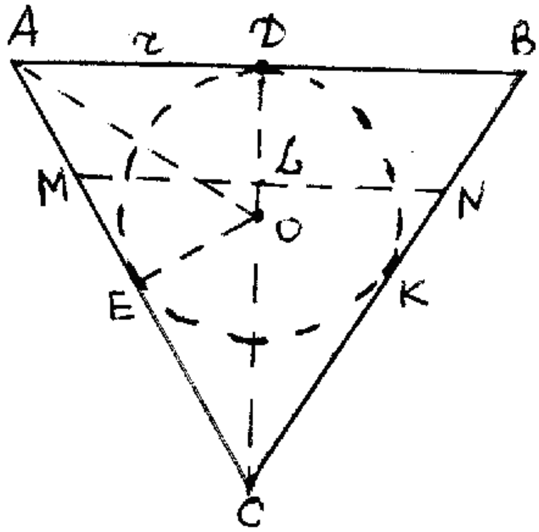
Javob: $\frac{R^3\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

6 –masala. o‘q kesimi teng tomonli uchburchakdan iborat konus teskari qo‘yilib suv tuldirilgan va R radiusli shar qo‘yildi. Suv sathi sharga o‘rindi. Shar olingandan keyingi suv sathi balandligini toping.

Yechilishi:

Chizmada konus shaklidagi idishning o‘q kesimi tasvirlangan ADB – suv sathini ifodalaydi. ΔABC uchburchak teng tomonli, DKE doira unga ichki chizilgan. AD= r bo‘lsin, u holda $r = OD \cdot tg60^0=R\sqrt{3}$ va H=CD =3R. Suvning idishdagi hajmi ABC konus hajmidan shar hajmini ayirmasiga teng, ya’ni

$$V = \frac{1}{3}\pi\,(r^2H – 4R^3) = \frac{5}{3}\pi r^3.$$



Shar olingandan keyin suv sathi MN ga tushib MNC konusni to‘ldiradi. CL =ℓ bo‘lsin. U holda , $ML = CL \cdot tg\ 30^0 = \frac{h}{\sqrt{3}}$, bundan $V= \frac{\pi}{3}ML^2 \cdot CL = \frac{1}{9}\pi h^3$. $\frac{\pi h^3}{9} = \frac{5}{3}\pi R^3$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan $h = R\sqrt[3]{15}$.

Javob: $R\sqrt[3]{15}$.

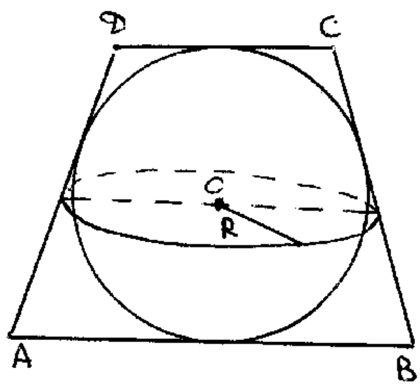
7 – masala. Sharga tashqi chizilgan teshik konusning yasovchilari o‘rtalaridan o‘tuvchi tekislik bilan shu kesik konus hosil qilgan kesimning yuzi 4π ga teng. Kesik konusning yasovchisini toping.

Yechilishi:

Chizmada kesik konusning o‘q kesimi tasvirlangan. Yasovchilari o‘rtasidan o‘tuvchi kesim shar markazidan o‘tadi. Kesimdagi doira radiusi R desak, shartdan

$$\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow R =2,$$

ekanligi kelib chiqadi. Ma’lumki AD konus yasovchisi, ikkinchi tomondan



trapetsiyaga ichki chizilgan aylana shartiga ko‘ra

$$AD = \frac{AB + DC}{2} = 2R = 4$$

Javob: 4.

8 – masala. Konusning o‘q kesimi teng tomonli uchburchakdan, silindrniki esa kvadratdan iborat. Agar ularning to‘la sirtlari tengdosh bo‘lsa, hajmlarning nisbatini toping.

Yechilishi:

Masala shartiga ko‘ra $S_{t.sirt.k} = S_{t.sirt.s}$. konus asosining radiusini r, silindr asosi radiusini R desak, u holda konus balandligi $N_k = R\sqrt{3}$, silindr balandligi H = 2 R.

$S_{t.sirt.k} = \pi r^2 + \pi r \cdot 2r = 3\pi r^2$,
$S_{t.sirt.s} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2$.

Shartga ko‘ra

$$3\pi r^2 = 6\pi R^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}\,R \qquad (1)$$

Ularning hajmlari mos ravishda

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot N_k = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\pi r^3,$$

$$V_s = \pi R^2 \cdot N_s = 2\pi R^3.$$

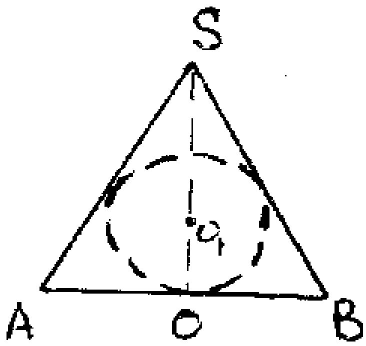
Bu yerda (1)ni e’tiborga olsak, $\frac{V_k}{V_ц} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi 2\sqrt{2}R^3}{2\pi R^3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

Javob: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

9 – masala. muntazam oltiburchakli piramidaning apofemasi 5 ga, uning asosiga tashqi chizilgan doiraning yuzi 12π ga teng. SHu piramidaga ichki chizilgan sharning radiusini toping.

Yechilishi:

Chizmada piramidaning qarama-qarshi apofemalari orqali o‘tuvchi kesim tasvirlangan. Masala shartidan piramida asosi muntazam oltiburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi $R = 2\sqrt{3}$ kelib chiqadi. Bunga ko‘ra ichki chizilgan aylana radiusi r = 3 ekanligini topish mumkin. AOS Misr uchburchagidan OS = 4 ga teng. Demak



$$OO_1 = \frac{2S_{ABC}}{AS + BS + AB} = \frac{2\cdot 12}{16} = 1{,}5.$$

Javob: 1,5.

10 – masala. Radiusi R bo‘lgan sharga to‘rt burchakli muntazam piramida ichki chizilgan bo‘lib, bunda piramidaning asosi unga perpendikulyar bo‘lgan radiusni teng ikkiga bo‘ladi. Piramidaga ichki chizilgan shar sirtini aniqlang.

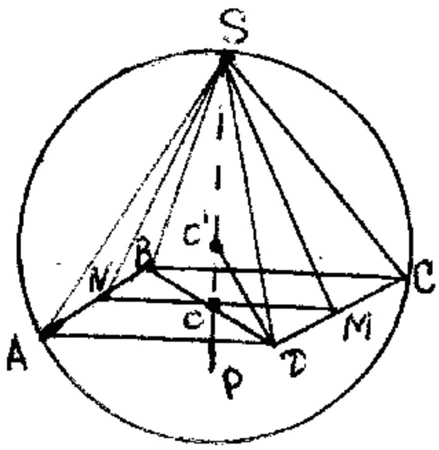
Yechilishi:

Piramidaning asosi o‘ziga perpendikulyar bo‘lgan shar radiusi O´R ni teng ikikga bo‘ladi

$|OD| = \sqrt{\left|O^1O\right|^2 - \left|OO^1\right|^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

$|OM| = |OD| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} R$

$|OS| = \frac{3}{2} R.\ \ |SM| = \sqrt{\left|OS\right|^2 + \left|OM\right|^2} = \sqrt{\frac{21}{8}} R.$



r= ΔSMN ga ichki chizilgan aylana radiusi bo‘lsin, u ichki chizilgan sharning xam radiusi buladi:

r =

$$\frac{S_{SMN}}{P} = \frac{|OM| \cdot |OS|}{|OM| + |SM|} = \frac{\sqrt{6}R \cdot 3R}{4 \cdot 2 \cdot (\frac{\sqrt{6}}{4} R + \sqrt{\frac{21}{8}} R)} = \frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6} + 2\sqrt{42}} R = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{7}} R =$$

$$= \frac{\sqrt{7}-1}{4} \cdot R$$

$$S_{shar} = 4\pi r^2 = 4\pi R \cdot \left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^2 = \pi R \frac{4-\sqrt{7}}{2}.$$

Javob: $\pi R \frac{4-\sqrt{7}}{2}$.

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Konusga ichki chizilgan shar sirti konus asosining yuziga teng. Konus yasovchisining asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagini toping.

Javob: 2 arc tg $\frac{1}{2}$.

2. Yasovchisi katta asosi bilan α burchak tashkil qiluvchi R radiusli shar ichki chizilgan kesik konus yon sirti va hajmini toping.

Javob: $\frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}; \frac{2}{3}\pi R^3$;

3. Konusga balandligi asosining diametriga teng silindr ichki chizilgan. silindrning to‘la sirti konus asosi yuziga teng. Konus yasovchining asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagini toping.

Javob: arc tg $\frac{2(4+\sqrt{6})}{5}$.

4. Sharga asosining o‘tkir burchagi α bo‘lgan rombdan iborat to‘g‘ri prizma tashqi chizilgan. Prizmaning katta diagonali va asos tekisligi orasidagi burchagini toping.

Javob: arc tg (sin $\frac{\alpha}{2}$).

5. Yon yoqlari asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiluvchi muntazam to‘rtburchakli piramida berilgan. Piramidaning apofemasi m ga teng. Bu piramidaga ichki chizilgan konusning to‘la sirtini toping.

Javob: $2\pi m^2 \cos\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

6. Konus asosining radiusi R, o‘q kesimida uchidagi burchagi α. Bu konusga tashqi chizilgan muntazam uchburchakli piramidaning hajmini toping.

Javob: $\sqrt{3}\,R^3 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

7. Konusning o‘q kesimi muntazam uchburchakdan silindrniki esa kvadratdan iborat. Agar ularning hajmlari teng bo‘lsa, to‘la sirtlarining nisbati nimaga teng.

Javob: $\sqrt[3]{3}/\sqrt[3]{2}$.

8. Konusga shar ichki chizilgan. Konus to‘la sirtining shar sirtiga nisbati ularning hajmlarining nisbati kabi ekanligini isbotlang.

9. Konusga shar ichki chizilgan. Shar sirtining konus asosining yuziga nisbati 4:3. o‘q kesim konus uchida hosil qiladigan burchakning kattaligini toping.

Javob: 60^0.

10. Konusning balandligi ***h*** ga, shu balandlik bilan yasovchisi tashkil etgan burchak α ga teng. Markazi konus ichida joylashgan hamda konusni ikkita tengdosh figuraga ajratuvchi sferaning radiusini toping.

Javob: $R = \frac{1}{2}h\sqrt{\dfrac{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}}$.

11. Sharga tashqi chizilgan konusning to‘la sirti shar sirtidan n marta katta. Konus yasovchisining asos tekisligi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

Javob: $\alpha = \arccos\dfrac{2n-1\pm 2\sqrt{n(n-2)}}{1+4n}$ $n \geq 2$

12. Tetraedrning yon qirralari o‘zaro tik bo‘lib, uzunliklari *a*, ***в***, ***в*** ga teng. Tetraedrning hajmi va unga tashqi chizilgan sferaning radiusini toping.

Javob: $V = \dfrac{1}{6}\, a\,в\,c$, $R = \dfrac{1}{6}\sqrt{a^2+в^2+c^2}$.

13. Kubning qirrasi a ga teng. O‘qi kubning diagonali bilan ustma-ust tushuvchi hamda kubning qirralariga o‘rinuvchi silindrik sirt asosining radiusini toping.

Javob: $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,a$.

14. Kesik konusning balandligi uning asoslarining diametrlari orasida o‘rta proporsionaldir. Bunday kesik konusga sharni ichki chizish mumkin ekanligini isbotlang.

15. Bir uchiga joylashgan tekis burchaklari to‘g‘ri bo‘lgan tetraedrga ichki va tashqi sharlar chizilgan. $2R : r \geq 3\,(1+\sqrt{3})$ ekanligini isbotlang.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **O‘zbekiston Respublikasining «Ta’lim to‘g‘risida»gi Qonuni, Toshkent, 1997 y.**
2. **O‘zbekiston Respublikasining «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi», Toshkent, 1997 y.**
3. **O‘zbekiston Respublikasining «Davlat ta’lim standartlari», Toshkent, 1998 y.**
4. **А.У.Умирбеков, Ш.Ш.Шоабзалов Математикани такрорланг, Тошкент, «Ўқитувчи» 1989 й.**
5. **Т.Тўлаганов, А.Норматов Математикадан практикум, Тошкент, «Ўқитувчи» 1989 й.**
6. **В.Больтянский, Ю.Сидоров, М.Шабунин Лекции и задачи по элементарной математики, М. Наука, 1974.**
7. **Н.Антонов и др. Сборник задач по элементарной математики, М. Наука, 1979.**
8. **Е.Н.Куценко, Н.Н. Мелников Математикадан масалалар ечиш, 2-қисм Геометрия. Тошкент, «Ўқитувчи», 1987.**
9. **«Axborotnoma» o‘quv yurtlariga kirish uchun test savollari. Toshkent – 1996 – 2003 y. Uzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi “Davlat test markazi”.**

Mundarija

NDKI kichik bosmaxonasida terildi.
4 bosma taboq. Adadi 120 nusha.